Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Karolina Novaković

Derivacija funkcije i primjene

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Karolina Novaković

Derivacija funkcije i primjene

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2018.

Sažetak

U ovom radu proučavat ćemo dva pristupa definiranja derivacije, dat ćemo definiciju same derivacije te definiciju derivacije funkcije u točki. Upoznat ćemo se s derivacijama elementarnih funkcija, prikazati pravila deriviranja te pokazati kako se računaju derivacije složene i inverzne funkcije. Napravit ćemo interpretaciju derivacije u fizici, biologiji te ekonomiji. Također ćemo prikazati kako predznakom derivacije ispitujemo monotonost derivabilnih funkcija, pokazat ćemo povezanost derivacije i lokalnih ekstrema te primjenu derivacije u ispitivanju konveksnosti funkcije.

Ključne riječi

Problem tangente, problem brzine, derivacija funkcije, interpretacija derivacije, monotonost, lokalni ekstremi, konveksnost, konkavnost, točka infleksije

Derivation of the function and its application

Summary

In this paper, we will consider two approaches to deriving derivation, give the definition of the derivation itself, and definition of derivation of the function at the point. We will get acquainted with the derivations of elementary functions, show the derivation rules and show how the derivation of complex and inverse functions is calculated. We will make the interpretation of derivation in physics, biology and economics. We will also show how with sign of derivation we can examine the monotony of derivative functions, show what is the relation of derivation and local extremes, and the applications of derivation to convex functions.

Key words

Tangent problem, problem of speed, derivation of function, interpretation of derivation, monotony, local extremes, convexity, concavity, point of inflexia

Sadržaj

Uvod

Derivacija funkcije jedan je od najvažnijih pojmova matematičke analize te bi bilo nezamislivo rješavati mnoge probleme koji dolaze iz različitih primjena matematike bez poznavanja derivacije. Početak proučavanja derivacije vezan je uz njemačkog matematičara Isaac Newtona[1] te uz engleskog fizičara Gottfrieda Wilhelma Leibniza[2] kojima se ujedno i pripisuje otkriće diferencijalnog računa.
Problem pronalaska tangente na krivulju i problem pronalaska brzine objekta dva su različita problema koja su odigrala veliku ulogu u razvoju diferencijalnog računa. I. Newton je istraživao brzinu gibanja tijela u nekom vremenskom trenutku dok je G.W. Leibniz dao rješenje na pitanje postojanja jedinstvene tangente u nekoj točki grafa funkcije. Pojedine izvode i primjere ilustrirali smo slikama koje smo preuzeli iz [3].

[1] Isaac Newton (Lincolnshite, 4. siječnja 1643. - London, 31. ožujka 1728.) engleski fizičar, matematičar i astronom.

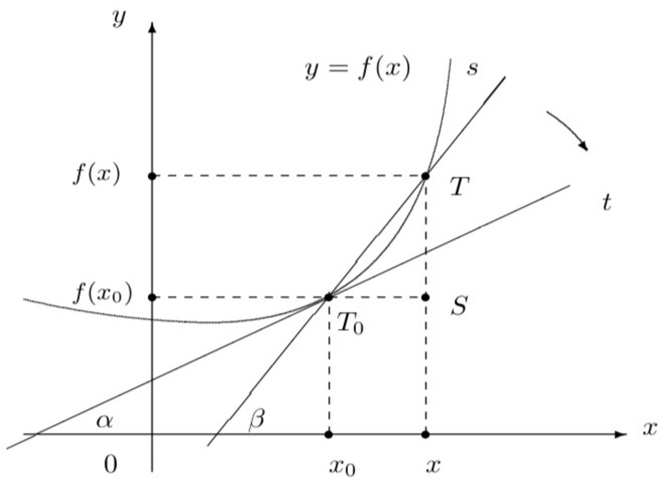
[2] Gottfried Wilhelm Leibniz (Leipzig, 1. srpnja 1646. - Hannover, 14. studenoga 1716.) njemački matematičar, filozof i pisac.

1 Derivacija funkcije

U ovom ćemo poglavlju objasniti problem tangente i problem brzine, navest ćemo definiciju derivacije funkcije u točki te njen geometrijski smisao. Iskazat ćemo teorem koji nam daje pravila za deriviranje funkcija, navest ćemo tablicu derivacija elementarnih funkcija te pokazati kako se računaju derivacije složene i inverzne funkcije.

1.1 Problem tangente, problem brzine i pojam derivacije funkcije

Neka je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, neprekidna na nekoj ε-okolini $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ točke x_0. Uzmimo bilo koju točku $T = (x, f(x))$ grafa funkcije f tako da je x iz ε-okoline točke x_0 (vidi Slika 1). Zbog neprekidnosti funkcije f, točka T primiče se točki $T_0 = (x_0, f(x_0))$ ako i samo ako $x \to x_0$.
Označimo s β kut što ga sekanta T_0T zatvara s pozitivnim dijelom osi x.



Slika 1

Na Slici 1 vidimo da je $\beta = \angle TT_0S$. Iz pravokutnog trokuta ΔTT_0S dobivamo za koeficijent smjera sekante T_0T

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ukoliko postoji:

$$\lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \beta = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

onda pravac $y = kx + l$, koji prolazi točkom T_0 i za koeficijent smjera ima $k = \lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} \beta$, zovemo tangentom funkcije f u točki T_0. Ako $\lim\limits_{x \to x_0} \operatorname{tg} \beta$ ne postoji, tada kažemo da ne postoji ni tangenta funkcije f u točki T_0.

Napomena 1. *Kut α što ga tangenta t zatvara s pozitivnim dijelom osi x dobivamo rješavanjem jednadžbe:*

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{x \to x_0} \operatorname{tg} \beta.$$

Primjer 1. *Odredimo tangentu (ako postoji) funkcije* $f(x) = x^2$ *u točki* $T_0 = (2, 4)$ *i kut* α *između tangente i pozitivnog dijela osi* x.
U ovom primjeru je $x_0 = 2$, $f(x_0) = 4$. *Budući da postoji*

$$k = \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x\to 2}(x + 2) = 4,$$

onda postoji i tangenta. Njena jednadžba glasi:

$$y = 4x + l.$$

Uvrštavanjem koordinata točke $T_0 = (2, 4)$ *u jednadžbu pravca dobivamo* $l = -4$ *pa je pravac* $y = 4x - 4$ *tražena tangenta. Kut* α *odredit ćemo rješavajući jednadžbu* $\operatorname{tg}\alpha = 4$. *It toga slijedi da* α *približno iznosi* 1.326 *radijana, odnosno* $\alpha = 75°57'50''$.

Promotrimo sada gibanje nekog objekta po pravcu i pokušajmo izračunati njegovu brzinu gibanja. Pretpostavimo da se objekt kreće pravocrtno jednadžbom gibanja $s = f(t)$, gdje je s udaljenost objekta od ishodišta u vremenu t. U intervalu od $t = x$ do $t = x+\Delta x$ promjena pozicije objekta je $f(x + \Delta x) - f(x)$. Prosječna brzina u ovom vremenskom intervalu iznosi

$$\overline{v} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

što odgovara nagibu sekante T_0T.
Promatrajmo prosječne brzine na sve manjim i manjim intervalima, tj. neka Δx teži u nulu. Definiramo brzinu v u vremenu t kao limes prosječne brzine:

$$v = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Odnosno, brzina u vremenu $t = x$ jednaka je nagibu tangente u točki T.

Navedimo sada preciznu definiciju derivacije funkcije u točki.

Definicija 1. *Neka je* $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren skup i* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *funkcija. Kažemo da je funkcija* f *derivabilna ili diferencijabilna u točki* $x_0 \in \Omega$, *ako postoji limes:*

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Ukoliko taj limes ne postoji, kažemo da funkcija f *nije derivabilna u točki* x_0. *Ako je funkcija* f *derivabilna u točki* x_0 *onda realan broj* (1) *nazivamo derivacijom funkcije* f *u točki* x_0 *i označavamo s* $f'(x_0)$ *ili* $\frac{d}{dx}f(x_0)$ *tj.*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Primjer 2. *Koristeći prethodnu definiciju odredimo derivaciju funkcije*

$$f(x) = \sqrt{x}.$$

Domena funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ *je skup* $\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.
Pokazat ćemo da je ova funkcija derivabilna u svakoj točki $x > 0$.
Neka je $x > 0$. *Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je* $x+\Delta x > 0$. *Dobivamo*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

Objasnimo sada geometrijski smisao derivacije.
Prema definiciji, tangenta funkcije f u točki $T_0 = (x_0, f(x_0))$ postoji ako i samo ako je funkcija f derivabilna u točki x_0. Ako u točki $T_0 = (x_0, f(x_0))$ postoji tangenta, onda njena jednadžba glasi:

$$y = f'(x_0) \cdot x + l,$$

gdje su $f'(x_0)$ koeficijent smjera tangente, a l odsječak na y-osi. Uvrštavanjem točke $(x_0, f(x_0))$ dobivamo

$$l = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0.$$

Dakle, jednadžba tangente funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$ glasi

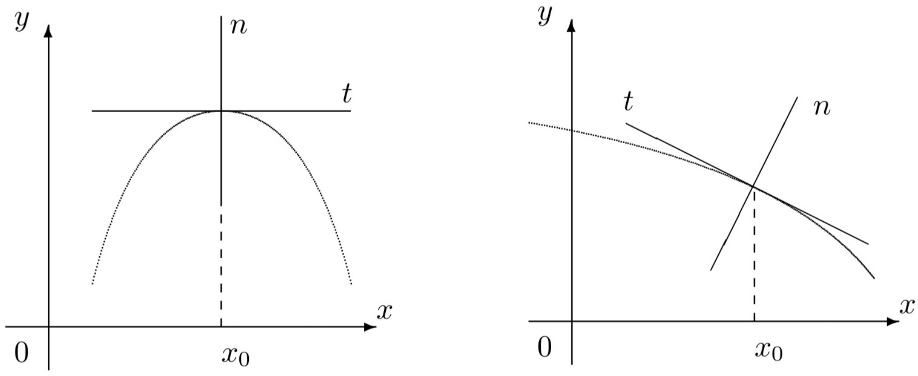
$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Pravac koji prolazi točkom $T_0 = (x_0, f(x_0))$ i okomit je na tangentu nazivamo normalom funkcije f u točki $T_0 = (x_0, f(x_0))$. Ukoliko je $f'(x_0) = 0$, tada je tangeta u točki $T_0 = (x_0, f(x_0))$ paralelna s osi x, a jednadžba normale je $x = x_0$ (vidi Sliku 2 (a)).

Pretpostavimo da je $f'(x_0) \neq 0$ i $y = k' \cdot x + l'$ jednadžba normale (vidi Sliku 2 (b)). Koeficijent smjera k' normale odredit ćemo pomoću poznatog rezultata iz analitičke geometrije. Dva su

pravca, $y = kx + l$, $k \neq 0$ i $y = k'x + l'$, $k' \neq 0$ okomita ako i samo ako je

$$k' = -\frac{1}{k}.$$



(a) $f'(x_0) = 0$ (b) $f'(x_0) \neq 0$

Slika 2: *Tangenta i normala funkcije f*

Dakle, koeficijent smjera normale iznosi $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$. Odsječak l' na osi y odredimo iz uvjeta da normala prolazi točkom $T = (x_0, y_0)$. Tako dobivamo jednadžbu normale u slučaju kada je $f'(x_0) \neq 0$:

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Sada ćemo pomoću limesa funkcije slijeva i limesa zdesna, definirati derivabilnost funkcije slijeva i derivabilnost zdesna.

Definicija 2. *Funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je derivabilna s lijeva u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ ako postoji:*

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_-(x_0).$$

Definicija 3. *Funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je derivabilna s desna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ ako postoji:*

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0).$$

Iskazat ćemo teorem koji povezuje dane definicije i derivabilnost.

Teorem 1 (Vidi [3])**.** *Funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je derivabilna u $x_0 \in \langle a, b\rangle$ ako i samo ako postoje $f'_-(x_0)$ i $f'_+(x_0)$ i vrijedi*

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Dokaz teorema može se i vidjeti u [3].

Primjer 3. *Pokažimo da je funkcija*

$$f(x) = |x|$$

derivabilna u svakoj točki osim u nuli te da je $f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$.

Neka je $x > 0$. *Izračunajmo* $f'(x)$. *Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je* Δx *dovoljno malen, tako da je* $x + \Delta x > 0$. *Dobivamo:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Za $x < 0$ *i* Δx *dovoljno malen, tako da je* $x + \Delta x < 0$ *imamo:*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x + \Delta x| - |x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-(x + \Delta x) - (-x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (-1) = -1.$$

Pokažimo sada da funkcija f *nije derivabilna u nuli:*

$$f'_{-}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Budući da je $f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$, *funkcija* f *nije derivabilna u nuli. To znači da funkcija* $f(x) = |x|$ *nema tangentu u točki* $(0, 0)$.

Pogledajmo što se može zaključiti o neprekidnosti derivabilne funkcije. U tu svrhu navodimo definiciju.

Definicija 4. *Neka je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren interval i točka* $c \in I$. *Za funkciju* $f : I \to \mathbb{R}$ *kažemo da je neprekidna u točki* c *ako postoji limes funkcije* f *u točki* c *i* $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. *Funkcija je neprekidna na skupu* I *ako je neprekidna u svakoj točki* $c \in I$.

Teorem 2 (Vidi [5]). *Ako je funkcija* $f : \langle a, b \rangle \to \mathbb{R}$ *derivabilna u točki* $x_0 \in \langle a, b \rangle$ *onda je ona i neprekidna u toj točki.*

Dokaz. Iz definicije neprekidnosti funkcije f znamo da je f neprekidna u točki $x_0 \in \langle a, b \rangle$ ako ona ima limes u točki x_0 koji je jednak $f(x_0)$ (tj. $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$).

Kako je

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \right) \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

to je

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

$\square$

Napomena 2. *Obrat ovog teorema ne vrijedi. Primjerice, funkcija $f(x) = |x|$ je neprekidna u točki $x_0 = 0$ zbog*

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0),$$

ali u toj točki funkcija f nije derivabilna kao što smo pokazali u Primjeru 3.

1.2 Derivacije elementarnih funkcija i pravila deriviranja

Prije nego navedemo tablicu derivacija elementarnih funkcija iskazat ćemo rezultat koji sadži pravila za derivaciju zbroja, razlike, umnoška i kvocijenta funkcija.

Teorem 3 (Vidi [5])**.** *Neka su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ derivabilne u točki $x \in I$. Tada vrijedi:*

1. *$f + g$ je derivabilna u x i vrijedi:*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

2. *$f - g$ je derivabilna u x i vrijedi:*

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

3. *$f \cdot g$ je derivabilna u x i vrijedi:*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

4. *ako je $g(x_0) \neq 0$, onda je $\frac{f}{g}$ derivabilna u x i vrijedi:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Dokaz ovog teorema možete vidjeti u [4]. Teorem 2 povlači definiranje derivacije kao limes neodređenog oblika u Definiciji 1.
Naime, brojnik i nazivnik u formuli

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

istovremeno teže k nuli i daju nam limes neodređenog oblika $\dfrac{0}{0}$ koji ne možemo izračunati pa tako dolazimo do formula za derivacije elementarnih funkcija.

Vrijede sljedeće formule za derivacije osnovnih elementarnih funkcija:

$(x^\alpha)'$	$\alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$
$(\log_\alpha x)'$	$\frac{1}{x} \log_\alpha e, x > 0$
$(\ln x)'$	$\frac{1}{x}, x > 0$
$(a^x)'$	$a^x \ln a, x \in \mathbb{R}$
$(e^x)'$	$e^x, x \in \mathbb{R}$
$(\sin x)'$	$\cos x, x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)'$	$-\sin x, x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tg} x)'$	$\frac{1}{\cos^2 x}, x \neq (2k-1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
$(\operatorname{ctg} x)'$	$\frac{-1}{\sin^2 x}, x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
$(\arcsin x)'$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x \rvert < 1$
$(\arccos x)'$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \lvert x \rvert < 1$
$(\operatorname{arctg} x)'$	$\frac{1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arcctg} x)'$	$\frac{-1}{1+x^2}, x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{sh} x)'$	$\operatorname{ch} x, x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{ch} x)'$	$\operatorname{sh} x, x > 0$
$(\operatorname{th} x)'$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2} x, x \neq 0$
$(\operatorname{cth} x)'$	$\frac{-1}{\operatorname{sh}^2} x, x \neq 0$
$(\operatorname{arsh} x)'$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arch} x)'$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \lvert x \rvert > 1$
$(\operatorname{arth} x)'$	$\frac{1}{1-x^2}, \lvert x \rvert < 1$
$(\operatorname{arcth} x)'$	$\frac{1}{1-x^2}, \lvert x \rvert > 1$

Tablica 1: *Tablica derivacija osnovnih elementarnih funkcija*

Dokaze ovih formula možete vidjeti u [5].

Primjer 4. *Odredimo derivacije funkcija:*

(a) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

Primjetimo da je $f(x) = x^{-\frac{2}{3}}$.

Stoga je $f'(x) = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\dfrac{2}{3}x^{-\frac{5}{3}} = -\dfrac{2}{3x \cdot \sqrt[3]{x^2}}$.

(b) $f(x) = \sin x \operatorname{arctg} x$
Prema pravilu za deriviranje produkta i formulama za deriviranje trigonometrijskih i arkus funkcija slijedi:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x \operatorname{arctg} x)' = (\sin x)' \operatorname{arctg} x + \sin x (\operatorname{arctg} x)' \\ &= \cos x \operatorname{arctg} x + \sin x \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^3} + e^x \cos x - (x^3+2)\log x$

Primjenom pravila deriviranja dobivamo:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(\frac{\sin x}{x^3} + e^x \cos x - (x^3+2)\log x\Big) \\ &= \Big(\frac{\sin x}{x^3}\Big)' + (e^x \cos x)' + \Big[(x^3+2)\log x\Big]' \\ &= \frac{(\sin x)' x^3 - \sin x (x^3)'}{x^6} + (e^x)' \cos x + e^x (\cos x)' - \Big[(x^3+2)' \log x + (x^3+2)(\log x)'\Big] \\ &= \frac{\cos x \cdot x^3 - \sin x \cdot 3x^2}{x^6} + e^x \cos x - e^x \sin x - 3x^2 \log x - (x^3+2)\frac{1}{x}\log e. \end{aligned}$$

Puno različitih primjera i riješenih zadataka vezanih uz derivacije elementarnih funkcija može se vidjeti u [8].

1.3 Derivacija složene i inverzne funkcije

Navedimo sada rezultat koji opisuje deriviranje kompozicije funkcija. U tu svrhu prisjetit ćemo se definicije kompozicije funkcija.

Definicija 5. *Neka su funkcije $f : A \to B$ i $g : C \to D$. Ako je $\mathcal{R}(f) \subseteq \mathcal{D}(g)$, onda je formulom $h(x) = g[f(x)]$, za svaki $x \in A$, definirana funkcija $h : A \to D$. Tu funkciju nazivamo kompozicijom funkcija f i g te koristimo oznaku $h = g \circ f$.*

Teorem 4 (Vidi [5])**.** *Neka su f i g realne funkcije, takve da je kompozicija $f \circ g$ definirana. Neka je također g derivabilna u x_0, a f u točki $g(x_0)$. Tada vrijedi:*

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Primjer 5. *Promotrimo derivaciju funkcije* $f(x) = (x^2 + 4)^2$.
Označimo s $h(x) = x^2$ *i* $g(x) = x^2 + 4$. *Tada je* $f(x) = h(g(x))$ *pa primjenom Teorema 4 dobivamo*

$$f'(x) = [h(g(x))]' = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Budući je $h'(x) = 2x$ *i* $g'(x) = 2x$ *imamo*

$$f'(x) = h'(x^2 + 4) \cdot 2x = 2(x^2 + 4) \cdot 2x.$$

Dakle,

$$f'(x) = [(x^2 + 4)^2] = 2(x^2 + 4) \cdot 2x = 4x(x^2 + 4).$$

Prije nego iskažemo teorem koji nam govori o derivaciji inverzne funkcije, prisjetit ćemo se definicije inverzne funkcije.

Definicija 6. *Neka je zadana funkcija* $f : A \to B$. *Kažemo da je funkcija* $g : B \to A$ *inverzna funkcija funkcije* f *ako vrijedi* $g \circ f = i_A$ *i* $f \circ g = i_B$, *odnosno, za svaki* $x \in A$, $g[f(x)] = x$ *i za svaki* $y \in B$, $f[g(y)] = y$. *Tada koristimo oznaku* $g = f^{-1}$.

Iskažimo sada teorem.

Teorem 5 (Vidi [5])**.** *Neka je* $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ *neprekidna i strogo monotona funkcija. Neka je* f *nadalje derivabilna u* $x_0 \in \langle a, b\rangle$, *tako da je* $f'(x_0) \neq 0$. *Tada postoji* $f^{-1} : f(\langle a, b\rangle) \to \mathbb{R}$, *derivabilna je u* $y_0 := f(x_0)$ *i vrijedi:*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Primjer 6. *Koristeći teorem o deriviranju inverzne funkcije, nađimo derivaciju funkcije*

$$f(x) = \arcsin x.$$

Neka je $g : \langle -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\rangle \to \langle -1, 1\rangle$, $g(x) = \sin x$.
Tada je $g^{-1} : \langle -1, 1\rangle \to \langle -\frac{\Pi}{2}, \frac{\Pi}{2}\rangle$, $g^{-1}(y) = \arcsin y$, *pa je prema teoremu o derivaciji inverzne funkcije:*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\cos(\arcsin y)} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin y)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

1.4 Derivacije višeg reda

Ako je funkcija f derivabilna na intervalu $\langle a, b\rangle$ onda je i njena derivacija derivabilna na tom istom intervalu, $f' : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$.
Ta funkcija također može biti derivabilna u nekoj točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$. U tom slučaju njenu derivaciju zovemo derivacijom drugog reda funkcije f u točki x_0 i označavamo s $f''(x_0)$. U tom smislu derivaciju f' možemo nazvati derivacijom prvog reda. Analogno definiramo i ostale derivacije višeg reda.
Derivacija reda n funkcije f u točki x_0 (ukoliko postoji) je derivacija derivacije reda $n-1$ funkcije f u točki x_0

$$f^n(x_0) = (f^{n-1}(x_0))'.$$

za derivacije reda 2,3,4 i 5 obično se koriste rimski brojevi, dok se za derivacije reda većeg od 5 koriste arapski brojevi u zagradama (da ih razlikujemo od oznake za potenciju).
Dakle, možemo pisati

$$f^V(x_0) = (f^{IV}(x_0))',$$

dok za derivaciju reda 100 pišemo $f^{100}(x_0)$. Pod nultom derivacijom f^0 podrazumijeva se sama funkcija f; tj. $f^0 = f$.

Primjer 7. *Odredimo n-tu, $n \in \mathbb{N}$, derivaciju funkcije f ako je:*

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$
Iz $f(x) = x^{-1}$ *slijedi*

$$f'(x) = (-1)x^{-2},$$
$$f''(x) = (-1)(-2)x^{-3},$$
$$f'''(x) = (-1)(-2)(-3)x^{-4},$$

pa zaključujemo da je

$$f^n(x) = (-1)(-2)(-3)\cdot \ldots \cdot(-n)x^{-(n+1)} = (-1)^n n! \cdot x^{-(n+1)}.$$

Točnost dobivene formule može se pokazati metodom matematičke indukcije.

(b) $f(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$
Iz

$$f'(x) = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$
$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + \frac{2\pi}{2}),$$
$$f'''(x) = -\cos x = \sin(x + \frac{3\pi}{2}),$$

slijedi da je

$$f^n(x) = \sin(x + \frac{n\pi}{2}).$$

Točnost dobivene formule također se može pokazati metodom matematičke indukcije.

(c) $f(x) = e^x$
Ako je $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$, *onda je*

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \\ f''(x) &= e^x \\ f'''(x) &= e^x, \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je

$$f^n(x) = e^x.$$

2 Interpretacija i primjene derivacije

Interpretaciju derivacije u fizici već smo spomenuli na samom početku kada smo govorili o problemu brzine koju je proučavao I. Newton. U Newtonovom pristupu brzina je zapravo prva derivacija funkcije puta po vremenu t. Srednju (prosječnu) brzinu definiramo kao omjer prijeđenog puta i pripadnog vremena, a ubrzanje (akceleraciju) kao derivaciju brzine po vremenu ili kao druga derivacija funkcije puta po vremenu. U ovom ćemo poglavlju pokazati interpretaciju derivacije u ekonomiji i biologiji. Pokazat ćemo kako derivaciju povezujemo s monotonosti, lokalnim ekstremima te s konveksnosti i konkavnosti.

2.1 Interpretacija derivacije u biologiji

Označimo s $B(t)$ model rasta neke populacije, gdje varijabla t označava vrijeme, a $n = B(t)$ označava broj jedinki u promatranoj populaciji u nekom trenutku t. Prirast populacije, odnosno brzina rasta unutar vremenskog intervala $\langle t_1, t_2 \rangle$ dana je s:

$$\Delta B = B(t_2) - B(t_1),$$

dok prosječna brzina rasta unutar tog istog vremenskog intervala iznosi:

$$\frac{\Delta B}{\Delta t} = \frac{B(t_2) - B(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Brzinu rasta u određenom trenutku definirat ćemo kao:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta B}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{B(t_0 + \Delta t - B(t_0)}{\Delta t}.$$

Primjer 8. *Pretpostavimo da promatramo populaciju jedinki vinske mušice koja se u početku sastoji od 100 jedinki i raste brzinom proporcionalnoj broju jedinki. Nakon sat vremena postoji 420 jedinki. Označimo s*

$$N(t) = N(0)e^{kt}$$

model rasta populacije jedinki vinske mušice. Odredimo broj jedinki nakon 2 dana.
Budući da na početku promatranja, tj. u trenutku $t = 0$ *imamo* $N(0) = 100$ *jedinki, tada broj jedinki iznosi*

$$N(t) = 100e^{kt}.$$

Kako nakon jednog sata ima 420 jedinki slijedi

$$N(1) = 420 = 100e^{k}.$$

Rješavanjem jednadžbe

$$100e^{k} = 420$$

dobivamo $k = \ln 4.2$. *Stoga je*

$$N(t) = 100e^{\ln 4.2 \cdot t} = 100(4.2)^{t}.$$

Nakon 2 dana, odnosno 48 sati, broj jedinki iznosi:

$$N(48) = 100 \cdot (4.2)^4 8 = 8.24 \cdot 10^{31}.$$

2.2 Interpretacija derivacije u ekonomiji

Označimo s $C(x)$ ukupne troškove proizvodnje x komada nekog proizvoda. Funkciju C nazivamo funkcijom troška. Da bismo proizveli dodatnih Δx komada nekog proizvoda potrebni su i dodatni troškovi

$$\Delta C = C(x + \Delta x) - C(x).$$

Kvocijent diferencija

$$\frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{C(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

naziva se srednji marginalni trošak.
Analogno se definiraju i srednji marginalni prihod te srednji marginalni profit.
Ako s $R(x)$ označimo ukupni prihod koji je ostvaren prilikom proizvodnje x komada nekog proizvoda tada se kvocijent diferencija

$$\frac{\Delta R}{\Delta x} = \frac{R(x + \Delta x)}{\Delta x}$$

naziva srednji marginalni prihod.
Profit koji je ostvaren proizvodnjom x komada nekog proizvoda označit ćemo s $P(x)$. On je jednak razlici ukupnog prihoda i ukupnih troškova, tj. $P(x) = R(x) - C(x)$. Kvocijent diferencija

$$\frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x}$$

naziva se srednji marginalni profit.

Primjer 9. *Pretpostavimo da neka tvrtka procjenjuje da su ukupni troškovi izraženi u novčanim jedinicama proizvodnje x komada nekog proizvoda dani formulom*

$$C(x) = 10000 + 7x + 0.02x^2.$$

Koristeći pravila za deriviranje funkcija dobivamo derivaciju od C na proizvodnom nivou od x proizvoda koja iznosi

$$C'(x) = 7 + 0.04x.$$

Marginalni trošak na proizvodnom nivou od 600 jedinica proizvoda iznosi

$$C'(600) = 7 + 0.04 \cdot 600 = 31$$

novčanih jedinica. To nam daje trenutnu brzinu promjene po kojoj su troškovi veći s obzirom na proizvodnju od $x = 600$ jedinica proizvoda i predviđa trošak za proizvodni nivo od $x = 601$ jedinicu proizvoda. Stvarni trošak za proizvodni nivo od $x = 601$ jedinice robe je:

$$\begin{aligned} C(601) - C(600) &= (10000 + 7 \cdot 601 + 0.02 \cdot 601^2) - (10000 + 7 \cdot 600 + 0.02 \cdot 600^2) \\ &= 21431.02 - 21400 = 31.02 \end{aligned}$$

novčanih jedinica.

Primjer 10. *Pretpostavimo da monopolist može proizvesti najviše 180 jedinica robe tjedno i da je procjena odgovarajuće službe marketinga da se x jedinica robe može prodati po prodajnoj cijeni od*

$$p(x) = 260 - 0.6x$$

novčanih jedinica. Uzmimo na primjer da ukupni tjedni troškovi proizvodnje x jedinica robe iznose

$$C(x) = 60 + 3x + 0.6x^2.$$

Odredimo tjedni prihod i tjedni profit koji se ostvaruje prodajom x jedinica robe. Ako imamo proizvodni nivo od x jedinica robe po cijeni od $p(x)$ po jedinici onda ukupni tjedni prihod iznosi

$$R(x) = xp(x) = 260x - 0.6x^2$$

novčanih jedinica dok je tjedni profit:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 257x - 1.2x^2 - 60.$$

Srednji marginalni profit tada iznosi:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta P}{\Delta x} &= \frac{P(x+\Delta x) - P(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{257(x+\Delta x) - 1.2(x+\Delta x)^2 - 60 - (257x - 1.2x^2 - 60)}{\Delta x} \\
&= \frac{-2.4x\Delta x + 257\Delta x - 1.2(\Delta x)^2}{\Delta x} \\
&= -2.4x + 257 - 1.2\Delta x.
\end{aligned}$$

Prelaskom na limes dobivamo:

$$P'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}(-2.4x + 257 - 1.2\Delta x) = -2.4x + 257.$$

Drugi različiti rezultati koji se odnose na interpretaciju derivacije u biologiji te ekonomiji mogu se pogledati u [2, 9].

2.3 Monotonost i derivacija

Prije nego pokažemo kako predznakom derivacije možemo ispitati je li neka derivabilna funkcija monotona prisjetit ćemo se pojma monotono rastuće i monotono padajuće funkcije.

Definicija 7. *Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ monotono rastuća [monotono padajuća] na intervalu $I = \langle a, b\rangle$ ako vrijedi*

$$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)\ [f(x_1) \geq f(x_2)].$$

Ako u ovoj definiciji znak "$\leq$" ["$\geq$"] zamjenimo znakom "$<$" ["$>$"] kažemo da je funkcija f strogo monotono rastuća [strogo monotono padajuća] na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Primjer 11. *Funkcija* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$ *je strogo monotono padajuća na* $\mathbb{R}$. *Funkcija* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^3$ *je strogo monotono rastuća na* $\mathbb{R}$.

Sada ćemo iskazati i dokazati teorem koji nam pokazuje kako predznak derivacije određuje rast, odnosno pad funkcije.

Teorem 6 (Vidi [7])**.** *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna na segmentu* $[a, b]$ *i derivabilna na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Tada*

(a) funkcija f *monotono raste [strogo monotono raste] na* $\langle a, b\rangle$ *onda i samo onda ako je* $f'(x) \geq 0$ *za sve* $x \in \langle a, b\rangle$ *[ako je* $f'(x) > 0$ *za sve* $x \in \langle a, b\rangle$*],*

(b) funkcija f *monotono pada [strogo monotono pada] na* $\langle a, b\rangle$ *onda i samo onda ako je* $f'(x) \leq 0$ *za sve* $x \in \langle a, b\rangle$ *[ako je* $f'(x) < 0$ *za sve* $x \in \langle a, b\rangle$*].*

U svrhu dokaza Teorema 6 iskazat ćemo Lagrangeov[3] teorem srednje vrijednosti čiji dokaz možete pogledati u [9].

Teorem 7 (Vidi [3])**.** *Neka je funkcija* f *neprekidna na segmentu* $[a, b]$ *i derivabilna na intervalu* $\langle a, b\rangle$. *Tada postoji barem jedna točka* $x_0 \in \langle a, b\rangle$ *takva da je*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Dokažimo sada Teorem 6:

Dokaz. Dokažimo tvrdnju a).

1. Nužnost:
   Neka funkcija f monotono raste na $\langle a, b\rangle$ i neka je $x_0 \in \langle a, b\rangle$ proizvoljna točka. Treba pokazati da je
   $$f'(x) \geq 0.$$

   Vrijedi:
   $$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0), \text{ za } \Delta x > 0$$
   i
   $$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0), \text{ za } \Delta x < 0.$$

   Tada je kvocijent $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ negativan neovisno o predznaku od Δx, pa je
   $$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0.$$

[3]Joseph-Louis Lagrange (1736.-1813.), talijansko-francuski matematičar

2. Dovoljnost:
   Neka je $f'(x_0) \geq 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ i neka su $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$ takvi da je $x_1 < x_2$. Prema Lagrangeovom teoremu postoji točka $x_0 \in \langle x_1, x_2\rangle \subseteq \langle a, b\rangle$ takva da je

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

   Iz pretpostavke $f'(x_0) \geq 0$ i $x_2 - x_1 > 0$ slijedi da je

$$f(x_2) - f(x_1) \geq 0,$$

   tj. $f(x_2) \geq f(x_1)$ što prema definiciji znači da f monotono raste na intervalu $\langle a, b\rangle$.
   Sličan postupak provodimo i u slučaju strogog monotonog rasta funkcije f.
   Dokaz tvrdnje b) svodi se na tvrdnju a) ako promatramo funkciju $-f$.

$\square$

Napomena 3. *Za domenu funkcije f u Teoremu 6 smijemo uzeti bilo koji od skupova $\langle a, b\rangle$, $[a, b\rangle$, $\langle a, b]$.*

Primjer 12. *Odredimo intervale monotonosti funkcije*

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

koristeći Teorem 6.
Domena funkcije f je $\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$. Odredimo $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{(e^x)'x - e^x \cdot x'}{x^2} = \frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}.$$

Funkcija f monotono raste za $f'(x) \geq 0$. Rješavanjem nejednadžbe

$$\frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \geq 0$$

dobivamo da je funkcija f rastuća na $[1, +\infty\rangle$.
Funkcija f monotono pada za $f'(x) \leq 0$. Rješavanjem nejednadžbe $\frac{e^x \cdot x - e^x}{x^2} \leq 0$ dobivamo da je funkcija f padajuća na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 1]$.

2.4 Lokalni ekstremi

Derivacije nam također pomažu i pri analizi lokalnih ekstrema funkcije. Prilikom ispitivanja lokalnih ekstrema koristit ćemo Teorem 6 iz prethodne točke te sljedeći Fermatov[4] teorem.

Teorem 8 (Vidi [5])**.** *Neka funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ ima lokalni ekstrem. Ako je f derivabilna u točki x_0, onda je $f'(x_0) = 0$.*

Dokaz Teorema 8 može se vidjeti u [9]. Kako bismo se uvjerili da ne vrijedi obrat Fermatovog teorema, pogledajmo sljedeći primjer.

[4]Pierre de Fermat (1601. - 1665.), francuski pravnik, bravio se teorijom brojeva.

Primjer 13. *Pogledajmo funkciju* $f(x) = x^3$. *Za nju vrijedi* $f'(x) = 3x^2$ *pa je* $f'(0) = 0$. *Međutim* $f(0)$ *nije lokalni ekstrem pa vidimo da obrat Fermatovog teorema ne vrijedi.*

Tvrdnja Fermatovog teorema je nužan uvjet lokalnog ekstrema, tj. uvjet kojeg mora ispunjavati svaka točka u kojoj funkcija ima lokalni ekstrem. Ekstreme promatramo samo unutar područja definicije funkcije. U definiciji lokalnih ekstrema te u iskazima teorema o ekstremima koristit ćemo pojam ε-okoline. Otvorenom okolinom realnog broja a nazivamo svaki otvoreni interval realnih brojeva koji sadrži broj a. Simetrična otvorena okolina realnog broja a je otvoreni interval kome je a sredina. Sve simetrične okoline broja a su oblika $\langle a-\varepsilon, a+\varepsilon\rangle$, $\varepsilon > 0$, i nazivamo ih ε-okolinom broja a.

Definicija 8. *Neka je funkcija* f *definirana na svojoj prirodnoj domeni* D. *Kažemo da funkcija* f *u točki* x_0 *ima:*

(i) lokalni maksimum, ako postoji interval $\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle \subseteq D$, $(\varepsilon > 0)$, *oko točke* x_0 *takav da je* $f(x_0) \geq f(x)$, *za svaki* $x \in \langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle$,

(ii) lokalni minimum, ako postoji interval $\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle \subseteq D$, $(\varepsilon > 0)$, *oko točke* x_0 *takav da je* $f(x_0) \leq f(x)$, *za svaki* $x \in \langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle$,

(iii) globalni maksimum na skupu $I \subseteq D$, *ako je* $x_0 \in I$ *i* $f(x_0) \geq f(x)$, *za svaki* $x \in I$,

(iv) globalni minimum na skupu $I \subseteq D$, *ako je* $x_0 \in I$ *i* $f(x_0) \leq f(x)$, *za svaki* $x \in I$.

U tom slučaju kažemo da je x_0 *točka lokalnog maksimuma ili lokalnog minimuma (postoji okolina te točke na kojoj je ona ekstrem), odnosno globalnog maksimuma ili globalnog minimuma (na zadanom intervalu - području ili cijeloj domeni). Takve točke zovemo ekstremima funkcije* f, *te ovisno o njihovoj prirodi govorimo o lokalnim ili globalnim ekstremima.*

Primjer 14. *Odredimo ekstreme funkcije*

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5.$$

Područje definicije funkcije f *je skup realnih brojeva. Funkcija* f *u točki* $T_1 = (-2, 25)$ *ima lokalni maksimum, a u točki* $T_2 = (1, -2)$ *ima lokalni minimum.*

Točke x_0 sa svojstvom $f'(x_0) = 0$ su samo kandidati za lokalne ekstreme. Te točke nazivamo stacionarne točke funkcije f koje zajedno s točkama iz domene u kojima funkcija f nije derivabilna čine kritične točke funkcije f.
Sada ćemo iskazati i dokazati teorem koji nam daje dovoljan uvjet za postojanje lokalnih ekstrema derivabilne funkcije f.

Teorem 9 (Vidi [1])**.** *Neka je* f *derivabilna na intervalu* $\langle x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon\rangle$, $\varepsilon > 0$.

1. *Ako je* $f'(x_0) > 0$ *za sve* $x \in \langle x_0-\varepsilon, x_0\rangle$, $f'(x_0) = 0$ *i* $f'(x) < 0$ *za sve* $x \in \langle x_0, x_0+\varepsilon\rangle$, *onda je* x_0 *točka lokalnog maksimuma za* f.

2. *Ako je* $f'(x) < 0$ *za sve* $x \in \langle x_0-\varepsilon, x_0\rangle$, $f'(x_0) = 0$ *i* $f'(x) > 0$ *za sve* $x \in \langle x_0, x_0+\varepsilon\rangle$, *onda je* x_0 *točka lokalnog minimuma za* f.

Dokaz. U prvom slučaju f je prema Teoremu 6 rastuća lijevo od x_0 i padajuća desno od x_0 što povlači da je x_0 točka lokalnog maksimuma. Štoviše, točka x_0 je točka strogog lokalnog maksimuma funkcije f.
Argumentacija za drugu tvrdnju je analogna. □

Primjer 15. *Odredimo ekstreme funkcije*

$$f(x) = \frac{3x+1}{(x-1)^2}$$

koristeći Teorem 9.
Područje definicije funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Prva derivacija funkcije f iznosi:

$$f'(x) = \frac{-3x-5}{(x-1)^3}.$$

Funkcija f monotono raste za $f'(x) > 0$, tj. funkcija f je monotono rastuća za $x \in \langle -\frac{5}{3}, 1\rangle$. Funkcija f monotono pada za $f'(x) < 0$, tj. funkcija f je monotono padajuća za $x \in \langle -\infty, -\frac{5}{3}\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$. Primijetimo, funkcija f je rastuća desno od $-\frac{5}{3}$ i padajuća lijevo od $-\frac{5}{3}$ što povlači da je $x = -\frac{5}{3}$ lokalni minimum. Također, primijetimo da funkcija f nema lokalni maksimum.

Lokalni ekstremi mogu se okarakterizirati i pomoću druge derivacije.

Teorem 10 (Vidi [6])**.** *Neka je f dva puta derivabilna funkcija na okolina svoje stacionarne točke c.*

(a) Ako je $f''(c) < 0$, onda f ima strogi lokalni maksimum u točki c.

(b) Ako je $f''(c) > 0$, onda f ima strogi lokalni minimum u točki c.

Dokaz. Dokažimo tvrdnju a).

Ako je

$$f''(c) = \lim_{x\to c} \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{x-c} < 0,$$

onda postoji interval $\langle c-\delta, c+\delta\rangle$ takav da je $\frac{f'(x)}{x-c} < 0$ za svaki $x \in \langle c-\delta, c+\delta\rangle \setminus \{c\}$, odakle slijedi:

$$f'(x) > 0, \text{ za svaki } x \in \langle c-\delta, c\rangle$$
$$f'(x) < 0, \text{ za svaki } x \in \langle c, c+\delta\rangle.$$

Prema Teoremu 9 slijedi da funkcija f ima strogi lokalni maksimum u točki c.
Dokaz tvrdnje b) sličan je dokazu tvrdnje a). □

Primjer 16. *Odredimo ekstreme funkcije*

$$f(x) = x^2 \cdot e^x$$

koristeći Teorem 10.
Područje definicije funkcije f je cijeli skup $\mathbb{R}$.
Odredimo $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = xe^x(x+2)$$

Rješavanjem jednadžbe $f'(x) = 0$ dobivamo stacionarne točke $x = 0$ i $x = -2$.
Odredimo sada $f''(x)$:

$$f''(x) = e^x(2x + x^2) + e^x(2 + 2x) = e^x(4x + x^2 + 2)$$

Budući je $f''(0) > 0$, prema Teoremu 10 funkcija f ima strogi lokalni minimum u točki 0, a u točki -2 strogi lokalni maksimum jer je $f''(-2) < 0$.

2.5 Konveksne funkcije i derivacija

U ovoj točki pokazat ćemo kako pomoću derivacije, točnije druge derivacije, možemo ustanoviti područje konveksnosti, konkavnosti te točke infleksije neke funkcije f. Prisjetimo se najprije kada za neku funkciju f kažemo da je konveksna, a kada je konkavna te koje točke nazivamo točkama infleksije funkcije f.

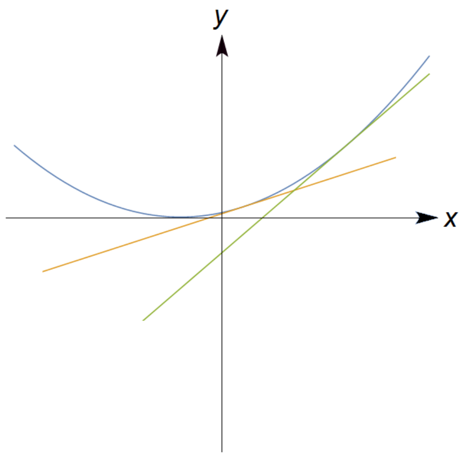
Definicija 9. *Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle \subseteq D$ ako je*

$$f\Big(\frac{x_1 + x_2}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}\Big[f(x_1) + f(x_2)\Big], \tag{2}$$

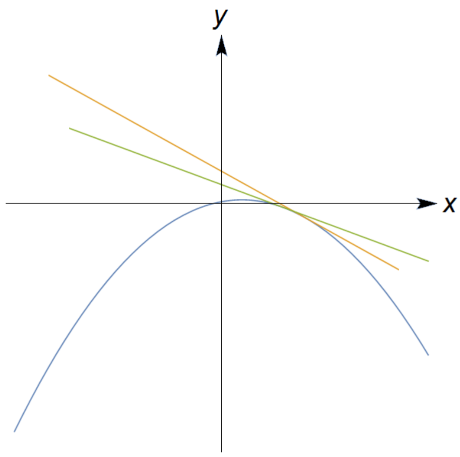
za sve $x_1, x_2 \in \langle a, b\rangle$.

Ako u (2) stoji znak "$\geq$", kažemo da je funkcija f konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako u (2) umjesto znaka "$\leq$" stoji znak "$<$" onda kažemo da je funkcija f strogo konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$. Ako u (2) umjesto "$\geq$" stoji "$>$" kažemo da je funkcija f strogo konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Primjer 17. *Funkcija $f(x) = (x + 2)^2 + 1$ je konveksna. (Vidi Sliku 3 (a)).*
Funkcija $g(x) = -(x - 1)^2 + 2$ je konkavna. (Vidi Sliku 3 (b)).



(a) *Konveksna funkcija*

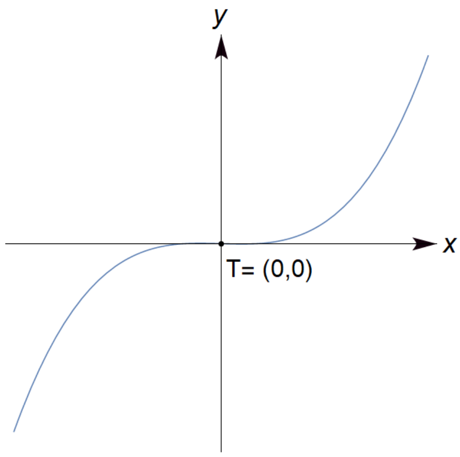


(b) *Konkavna funkcija*

Slika 3

Definicija 10. *Točka $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je točka infleksije ili prijevojna točka funkcije f ako postoji $\delta > 0$ takav da je na intervalu $\langle x_0 - \delta, x_0\rangle$ funkcija f strogo konveksna, a na intervalu $\langle x_0, x_0 + \delta\rangle$ je f strogo konkavna ili obratno.*

Primjer 18. *Funkcija $f(x) = x^3 - 3x$ je konveksna za $x > 0$, a konkavna za $x < 0$. Točka infleksije je $x_0 = 0$. Vidi Sliku 4.*



Slika 4

Napomena 4. *Ukoliko je funkcija f konveksna, iz Slike 3 (a) vidimo da su tangente uvijek ispod grafa, tj. graf leži iznad tangenti. Dakle, možemo reći da je funkcija na nekom intervalu konveksna ako se tangenta u bilo kojoj točki iz tog intervala nalazi ispod grafa funkcije. Idemo li s lijeva na desno koeficijent smjera raste, tj. derivacija f' u području konveksnosti funkcije f je rastuća funkcija. Prema Teoremu* 6 *to znači da je u tom području druga derivacija f'' nenegativna. Analogno, u području konkavnosti funkcije f vrijedi da je f'' negativna.*

Ako je druga derivacija neprekidna funkcija onda između područja konveksnosti i konkavnosti postoji neka točka x_0 za koju vrijedi $f''(x_0) = 0$.
Ta točka dijeli područje konveksnosti i konkavnosti i nazivamo ju točka infleksije.
Iskažimo sad teorem koji nam pomaže da pomoću druge derivacije pronađemo područje konveksnosti, konkavnosti i točke infleksije.

Teorem 11 (Vidi [5])**.** *Neka je $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ dva puta neprekidno derivabilna na $\langle a, b\rangle$.*

(a) Funkcija f je konveksna na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f''(x) \geq 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

(b) Funkcija f je konkavna na $\langle a, b\rangle$ onda i samo onda ako je $f''(x) \leq 0$, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$.

(c) Točka $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je točka infleksije funkcije f onda i samo onda ako funkcija f' ima strogi lokalni ekstrem u x_0.

Dokaz teorema može se vidjeti u [5]. Ilustrirajmo sada prethodni teorem na sljedećem primjeru.

Primjer 19. *Ispitajmo konveksnost, konkavnost i točke infleksije funkcije $f(x) = e^{-x^2}$. Izračunajmo $f'(x)$ i $f''(x)$.*

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$

$$f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}.$$

Iz $f''(x) = 0$ slijedi $2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 0$. Budući da je $2e^{-x^2} \neq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, mora vrijediti

$$2x^2 - 1 = 0$$

pa su rješenja

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Rješavanjem nejednadžbi $f''(x) \leq 0$ *i* $f''(x) \geq 0$ *dobivamo da je funkcija* f *strogo konveksna na skupu* $\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\Big\rangle \cup \Big\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, \infty\rangle$, *a strogo konkavna na* $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\rangle$.
Budući da je

$$f\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \frac{\sqrt{e}}{e} \ i \ f\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = \frac{\sqrt{e}}{e},$$

točke infleksije funkcije $f(x) = e^{-x^2}$ *su*

$$T_1 = \Big(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\Big) \ i \ T_2 = \Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{e}}{e}\Big).$$

Literatura

[1] D. Bakić, *Matematika*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet - Matematički odjel, Zagreb, 2009.

[2] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcije jedne varijable*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[3] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 1994.

[4] B. Guljaš, *Matematička analiza I i II*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet - Matematički odjel, Zagreb, 2012.

[5] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Prirodoslovno tehnološki fakultet, Osijek, 1998.

[6] S. Kurepa, *Matematička analiza 1 (diferenciranje i integriranje)*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[7] I. Slapničar, *Matematika 1*, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 2002.

[8] I. Slapničar, J. Barić, M. Ninčević, *Matematika 1*, Sveučilište u Splitu, Fakultet elektrotehnike, strojarstva i brodogradnje, Split, 2008.

[9] J. Stewart, *Calculus 7th Edition*, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.