Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Šakić

Direktan i semidirektan produkt grupa

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Šakić

Direktan i semidirektan produkt grupa

Završni rad

Voditelj: izv.prof.dr.sc. Ivan Matić

Osijek, 2018.

Sažetak: U uvodom dijelu rada proučavati ćemo komplement i esencijalno disjunktne produkte te produkt dekompozicije. Glavni dio rada bavi se pojmom direktnog i semidirektnog produkta, karakterizacijom direktne sume grupa te ponekim primjerom. Navest ćemo univerzala svojstva direktnog produkta i direktne sume te na kraju proučiti klasifikaciju konačnih Abelovih grupa.

Ključne riječi: semidirektan produkt, direktan produkt, komplement, produkt dekompozicije, esencijalno disjunktni produkt, normalan komplement, direktan komplement, transverzale, invarijantan faktor dekompozicije, konačna abelova grupa

Abstract: In the introductory part of the paper we will study complement and essentially disjoint products and decomposition products. The main part of the paper deals with the concept of direct and semidirect products, characterization of direct sums of groups and some examples. We will mention the universal property of direct product and direct sum and in the end the classification of the finite Abelian groups.

Key words: semidirect product, direct product, complement, product decompositions, essentially disjoint product, normal complement, direct complement, transversals, invariant factor decomposition, finite abelian group

Sadržaj

1 Uvod

Poznavajući pojam algebarskih struktura znamo da grupe pripadaju njihovim glavnim predstavnicima. Zanima nas kako iz postojeće algebarske strukture dobiti novu strukturu iste vrste. U ovom radu proučavamo direktan i semidirektan produkt grupa. Najprije ćemo uvesti pojam komplementa i esencijalno disjunktnih produkta, zatim produkta dekompozicije. Glavni dio rada vezan je uz definiranje direktnog produkta. Pojam direktnog produkta svesti ćemo na poseban slučaj kada imamo samo dvije grupe uz pomoć kojih će se razjasniti pojam semidirektnog produkta grupa. Direktni produkti i direktne sume mogu se karakterizirati univerzalnim svojstima. Kako se svaka Abelova grupa može prikazati kao direktna suma cikličkih podgrupa čiji redovi su prosti brojevi, rad završavamo klasifikacijom konačnih Abelovih grupa.

2 Direktan i semidirektan produkt grupa

U ovom poglavlju razmatrana je problematika komplementa i esencijalno disjunktnih produkata u okviru čega su proučavana dva teorema. Nadalje, razmatrana je i problematika produkta dekompozicije kao i direktne sume i direktnog produkta. Ujedno su i iznesena sva univerzalna svojstva

2.1 Komplement i esencijalno disjunktni produkt

Jednostavno je karakterizirati jedinstvenost u produktnoj dekompoziciji skupa. Najprije definirajmo $HK = \{ab : a \in H, b \in K\}$.

Teorem 2.1. *Neka su H,K $\leq$ G.*

1) Svaki element $a \in$ HK ima jedinstven prikaz kao a=hk za $h \in H$ i $k \in K$ ako i samo ako su H i K esencijalno disjunktni.

2) Svaki element $a \in G$ može se na jedinstven način prikazati kao element iz HK ako i samo ako G=H $\bullet$ K, tako da, ako i samo ako je

$$G = HK \quad i \quad H \cap K = \{1\}\,.$$

U ovom slučaju, kaže se da je K komplement od H u G. Podgrupa H od G je komplementirana ako ima komplement u G.

Trebamo imati na umu da $G = HK$ podrazumijeva $G = KH$,to jest koncept određivanja komplementa je simetričan u H i K. Također, ako je $G = H \bullet K$, onda je

$$\mid G \mid = \mid H \bullet K \mid = \mid H \mid\mid K \mid$$

kao kardinalni brojevi.

Teorem 2.2. *Neka je G grupa. Ako je normalna podgrupa N od G je komplement, onda su svi komplementi od N izomorfni s G/N i stoga jedni drugima.*

Drugi način karakterizacije komplementa je uz pomoć pojma transverzale.
Prisjetimo se sljedeće definicije.

Definicija 2.3. *Neka je $H \leq G$.*

1) Skup koji se sastoji od točno jednog elementa iz svakog lijevog koskupa u G/H se zove lijeva transverzala za H u G.
2) Skup koji se sastoji od točno jednog elementa iz svakog desnog koskupa u $H \backslash G$ se zove desna transverzala za H u G.

Zanima nas koje podgrupe od G su lijeve transverzale za H. Odgovor je da su to upravo komplementi od H.

Teorem 2.4. *Neka je H$\leq$G. Slijedeće tvrdnje su ekvivalentne za podgrupe K$\leq$G.*

1) K je komplement od H u G.
2) K je lijeva transverzala za H u G.
3) K je desna transverzala za H u G.

Dokaz. Pretpostavimo da je K komplement od H u G. Ako je $k_1H = k_2H$, onda je $k_2^{-1}k_1 \in K \cap H = \{1\}$ i $k_1 = k_2$. Također, za $G = KH$, svaki $a \in G$ je oblika $a = kh \in kH$ za neki $k \in K$. Stoga, svi kH za $k \in K$ tvore lijevu transverzalu za H u G. Obrnuto, pretpostavimo da je $K \leq G$ je lijeva transverzala za G/H. Jer H sadrži jednog člana od K, slijedi $H \cap K = \{1\}$. Budući da se G može prikazati kao disjunktna unija koskupova iz G/H, svaki $a \in G$ je oblika $a = kh$, za neki $k \in K$ i $h \in H$ i $G = KH$. K je komplement od H u G.

$\square$

2.2 Produktne dekompozicije

Ako je $G = H \bullet K$, onda svaki element iz G ima jedinstvenog predstavnika u obliku hk, $h \in H$ i $k \in K$. Problem je što nemamo informacije u kakvom odnosu su elementi od H i K. Bez pravila komutativnosti koje prikazuje produkt kh u obliku $h'k'$, pri čemu su $h, h' \in H$ i $k, k' \in K$, nemamo načina pojednostavit produkt oblika

$$(h_1k_1)(h_2k_2).$$

Najjednostavnije pravilo komutativnosti je osnovna komutativnost $kh = hk$ koja vrijedi ako i samo ako su obje varijable H i K normalne u G i ovo pokazuje činjenicu da ne postoji povezanost između H i K. Slabiji oblik dekompozicije dobijamo smanjivanjem uvjeta da su oba faktora normalna. To su jednake definicije za usporednu svrhu.

Definicija 2.5. *Neka je G grupa i H,K$\leq$ G.*

1) Ako je

$$G = H \bullet K$$

tada G zovemo ***esencijalno disjunktni produkt*** *od H i K. U ovom slučaju, H se zove* ***komplement*** *od K u G.*

2) Ako je

$$G = H \bullet K, \quad H \trianglelefteq G$$

tada se G zove ***semidirektan produkt*** *od H sa K. U ovom slučaju, H se zove* ***normalan komplement*** *od K u G. Semidirektan produkt označava se s*

$$G = H \rtimes K$$

3) Ako je

$$G = H \bullet K,\ H \trianglelefteq G,\ K \trianglelefteq G$$

tada G zovemo ***direktan produkt*** *od H i K. U ovom slučaju, H se zove* ***direktan komplement*** *od K u G. Direktan produkt označava se s*

$$G = H \bowtie K$$

Bilo koji od ovih produkta su ***netrivijalni****, ako su oba faktora odgovarajuća.*

Dekompozicija grupe u obliku direktnog produkta je specijalan produkt dekompozicije. S druge strane, semidirektan produkt je najkorištenija konstrukcija u teoriji grupe. Kao naprimjer, za $n \not\equiv 2 \pmod 4$, diedralne grupe D_{2n} nemaju direktan produkt dekompozicije, ali imaju semidirektan produkt dekompozicije

$$D_{2n} = \langle \rho \rangle \rtimes \langle \sigma \rangle$$

2.3 Direktne sume i direktni produkt

Kod algebarskih struktura se postavlja pitanje kako iz postojećih algebarskih struktura dobiti nove strukture iste vrste. U ovom će potpoglavlju biti prikazano dobivanje produkta od familije grupa. No, prvenstveno je potrebno definirati određene pojmove.

Definicija 2.6. *Kartezijev produkt*

$$\prod_{i\in I} G_i := \left\{ f : I \to \bigcup_{i\in I} G_i | f(i) \in G_i \right\},$$

uz operaciju množenja po komponentama

$$(f \cdot g)(i) := f(i) \cdot g(i)$$

zove se ***direktan produkt grupa*** $\{G_i\}_I$.

Podgrupa

$$\bigoplus_{i\in I} G_i := \left\{ f \in \prod_{i\in I} G_i | f(i) \neq e_i \text{ za konačno mnogo } i \in I \right\},$$

od direktnog produkta $\prod_I G_i$, *zove se* ***direktna suma grupa*** $\{G_i\}_I$.

U prethodnoj definiciji dobivena je struktura grupe. Kako bi dokazali da je $\bigoplus_I G_i$ također grupa, dovoljno je vidjeti da je taj skup zatvoren za množenje po komponentama. No, ako su $f, g \in \bigoplus_I G_i$, onda postoje konačni podskupovi $J_f, J_g \subseteq I$ takvi da je $f(i) = e_i$ za $\forall i \in I \backslash J_f$ i $g(i) = e_i$ za $\forall i \in I \backslash J_g$. Tada je očito i $(f \cdot g) = (e_i)$ za $\forall i \in I \backslash (J_f \cup J_g)$

Sljedeći teorem važan je jer govori o karakterizaciji direktne sume grupa.

Teorem 2.7. *Neka je G grupa i neka su $G_i \leq G$, $i \in I$, neke njezine podgrupe za koje vrijede sljedeća tri uvjeta:*

*(**1**)* $G_i \trianglelefteq G$, $\forall i \in I$
*(**2**)* $G_j \cap \left\langle \bigcup_{i\in I} G_i \right\rangle = \{e_i\}$, $\forall i \in I$
*(**3**)* $G = \langle \bigcup_I G_i \rangle$

Tada je

$$G \cong \bigoplus_I G_i.$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je skup indeksa I konačan, tj. da je $I = \{1, 2, ..., n\}$ i onda $\bigoplus_I G_i = G_1 \oplus ... \oplus G_n$. Nadalje, s e_i označimo neutralni element od G_i. Neka vrijede uvijeti *(1)-(3)*. Preostaje dokazati da je $G \cong \bigoplus_I G_i$.

Tvrdnja. Preslikavanje θ: $G_1 \oplus ... \oplus G_n \to G$, $\quad \theta(g_1, ..., g_n) := g_1 \cdots g_n$, je izomorfizam grupa, tj. ako vrijedi θ onda je $G \cong \bigoplus_I G_i$.

Primjetimo da vrijedi $g_i g_j = g_j g_i \quad \forall i \neq j$. $(*)$
Definiramo komutator $\omega := g_i g_j g_i^{-1} g_j^{-1}$. Zapišemo $\omega = \left(g_i g_j g_i^{-1}\right) g_j^{-1}$, zbog (**1**) je $g_i g_j g_i^{-1} \in G_j$.

S druge strane, napišemo li da je $\omega{=}g_i\left(g_jg_i^{-1}g_j^{-1}\right)$, tada je $\omega \in G_i$. Prema uvjetu (**2**), $\omega \in G_j \cap G_i \subseteq G_j \cap \left\langle \bigcup_{k\neq j} G_k \right\rangle{=}\{e\} \Longrightarrow \omega{=}e$; Dokazali smo da vrijedi $(*)$.

Podsjetimo se, homomorfizam koji je injekcija zove se monomorfizam, a homomorfizam koji je surjekcija zove se epimorfizam. Dakle, homomorfizam koji je monomorfizam i epimorfizam je izomorfizam. Stoga je dovoljno pokazati da je θ homomorfizam, monomorfizam i epimorfizam.

θ homomorfizam:

Za dvije n-torke $(x_1, ..., x_n)$ i $(y_1, ..., y_n)$, imamo

$$\theta((x_1, ..., x_n)(y_1, ..., y_n)) = \theta(x_1y_1, ..., x_ny_n) = x_1y_1 \cdots x_ny_n.$$

Koristeći višestruko $(*)$ imamo

$$\begin{aligned} x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n &= x_1(y_1x_2)y_3\cdots x_ny_n = x_1x_2y_1y_2x_3y_3\cdots x_ny_n = \\ &= \cdots \quad \cdots = (x_1x_2\cdots x_n)(y_1y_2\cdots y_n) \\ &= \omega(x_1x_2\cdots x_n)\omega(y_1y_2\cdots y_n). \end{aligned}$$

θ je homomorfizam grupa.

θ monomorfizam:

Injektivnost homomorfizma θ je ekvivalentna tomu da je jezgra Kerθ trivijalna. Pretpostavimo onda

$$\theta(g_1, ..., g_n) = e \;\Leftrightarrow\; g_1...g_n = e \;\Leftrightarrow\; g_n^{-1} = g_1....g_{n-1} := \omega$$

Zbog (**2**) je $\omega \in G_n \cap \left\langle \bigcup_{j\neq n} G_j \right\rangle = \{e\}$ pa slijedi ω = e.
Posebno je $g_n = e$ i $g_1 \cdots g_{n-1} = e$. Zatim analogno posljednjoj jednakosti je $g_{n-1}^{-1} = g_1 \cdots g_{n-2}$. Tada dobijemo $g_{n-1} = e$ i $g_1 \cdots g_{n-2} = e$.

Nastavljajući postupak dolazimo do potrebnog zaključka da je

$$g_1 = g_2 = ... = g_n = e$$

θ epimorfizam:

Po $(*)$ i (**3**) slijedi da se svaki $x \in G$ može zapisati u obliku

$$x = g_1 \cdots g_n, \quad g_i \in G_i.$$

Dakle, tada je $\theta(g_1, ..., g_n) = x$; to je surjektivnost od θ.

Zaključak, θ je izomorfizam grupa.

$\square$

Primjer 2.8. *Podsjetimo se da je za proizvoljno polje* $\mathbb{K}$ *i proizvoljan* $n \in \mathbb{N}$, $SL_n(\mathbb{K}) \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$. *Nadalje, ako je* $\boldsymbol{I}$ *jedinična* $n{\times}n$ *matrica, onda je s* $x \longmapsto x\boldsymbol{I}$ *definiran izomorfizam grupa*

$$\mathbb{K}^\times \cong \mathbb{K}^\times \boldsymbol{I} = \left\{x\boldsymbol{I} \mid x \in \mathbb{K}^\times\right\} \leq GL_n\left(\mathbb{K}\right);$$

posredstvom tog izomorfizma, pretpostavljamo da je $\mathbb{K}^\times$ *podgrupa od* $GL_n(\mathbb{K})$. *Štoviše, očito je* $\mathbb{K}^\times \trianglelefteq GL_n(\mathbb{K})$.

Neka je sada $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *i* n *neparan broj. Primjetimo da se onda svaka matrica* $A \in GL_n(\mathbb{R})$ *može napisati u obliku*

$$A = \left(\sqrt[n]{\det A}\boldsymbol{I}\right)\left(\left(1/\sqrt[n]{\det A}\right)A\right);$$

ovdje je $\sqrt[n]{\det A}$ *realni n-ti korijen iz* $\det A$. *Prvi faktor u gornjem rastavu je iz* $\mathbb{R}^\times$, *dok je drugi iz* $SL_n(\mathbb{R})$. *Drugim riječima, imamo da je*

$$GL_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times \quad SL_n(\mathbb{R}) = \left\langle \mathbb{R}^\times \cup SL_n(\mathbb{R})\right\rangle.$$

Nadalje, uz istu pretpostavku da je n *neparan, imamo ispunjen i uvjet*

$$\mathbb{R}^\times \cap SL_n(\mathbb{R}) = \{\boldsymbol{I}\};$$

naime, $x = 1$ *je jedino rješenje u* $\mathbb{R}$ *od jednadžbe* $\det(x\boldsymbol{I}) = x^n = 1$. *Sada po prethodnom teoremu, slijedi da je*

$$GL_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^\times \times SL_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^\times \oplus SL_n(\mathbb{R}).$$

Nakon što smo se upoznali sa pojmovima direktnog produkta i direktne sume grupa, te proučili karakterizaciju direktne sume grupa, želimo generalizirati pojam produkta za samo dvije grupe.

Neka su N i H neke grupe i pretpostavimo da je zadan neki homomorfizam $\varphi : H \to AutN$, H $\ni$ h $\longmapsto \varphi$(h) $= \varphi_h \in AutN$.
Definirajmo na Kartezijevom produktu

$$N \times H = \{(n,h) \mid n \in N, h \in H\}$$

mnoenje :

$$(n_1,h_1) * (n_2,h_2) := \left(n_1\varphi_{h_1}\left(n_2\right), h_1h_2\right). \quad (\bullet)$$

Lako se pokaže da je $(N \times H, *)$ je grupa.

Sada smo spremni definirati pojam semidirektnog produkta grupa.

Definicija 2.9. *Grupu* $(N \times H, *)$ *označavamo s*

$$N \rtimes_\varphi H,$$

ili samo $N{\rtimes}H$ *ako znamo o kojem se homomorfizmu* φ *radi, i zovemo* ***semidirektan produkt grupe (normalan produkt grupe)*** *N s H određen s* φ;

Stoga, ako za bilo koje dvije grupe N i H promatramo trivijalan homomorfizam φ: $H \to AutN$, odnosno $H \ni \mathrm{h} \longmapsto \varphi(\mathrm{h}) = 1_h \in AutN$, onda je $N \rtimes H \cong N \times H$; Tada definicija množenja ($\bullet$) postaje "obično" množenje po komponentama, kao što je definirano u direktnom produktu.

Dakle, semidirektan produkt je generalizacija "običnog", direktnog, produkta dvije grupe.

Definicija 2.10. *Grupa G je Abelova grupa (ili komutativna) ako je operacija $* : G \times G \to G$ komutativna; to jest, za svaki a, b iz G vrijedi $a * b = b * a$.*

Primjer 2.11. *Definirajmo slijedeće skupove kompleksnih matrica dimenzije 2×2:*

$$P := \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, c \in \mathbb{C}^x, b \in C \right\} \quad \textit{(gornje trokutaste regularne matrice)}$$

$$N := \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{C} \right\} \textit{ (unipotentne matrice)}$$

$$H := \left\{ \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix} \mid u, v \in \mathbb{C}^x \right\} \quad \textit{(dijagonalne regularne matrice)}$$

Lako se provjeri da su P, N i H podgrupe od $GL_2(\mathbb{C})$; N i H su Abelove, ali P nije.

Nadalje, $H \leq P$ i $N \trianglelefteq P$. Kako je $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

slijedi, $P = HN$. Tada zaključujemo da je $N \rtimes H \cong P$.

Ovaj primjer daje rastav grupe kao semidirektan produkt dviju svojih pravih podgrupa. Preciznije rečeno, gore navedeni primjer je primjer semidirektnog produkta za beskonačne (matrične) grupe.

2.4 Univerzalna svojstva direktnog produkta i direktne sume

Direktni produkti i direktne sume mogu se karakterizirati univerzalnim svojstvima.

Definicija 2.12. *Neka je $\mathcal{F}$=$\{G_i \mid i \in I\}$ familija grupa.*

1) ***Vanjski direktni produkt*** *familije $\mathcal{F}$ je grupa*

$$\boxtimes\mathcal{F} = \boxtimes G_i = \left\{ f : I \to \bigcup G_i \mid f(i) \in G_i \right\}$$

svih funkcija f definiranih sa skupa indeksa I u uniju od $\mathcal{F}$ tako da $f(i)$ pripada G_i za sve i. Grupovna operacija je produkt po komponentama

$$(fg)(i) = f(i)g(i).$$

Nosač od $f \in \boxtimes G_i$ je skup

$$supp(f) = \{i \in I \mid f(i) \neq 1\}.$$

2) ***Vanjska direktna suma*** *familije $\mathcal{F}$ je grupa oznaka koja se sastoji od svih funkcija iz vanjskog direknog produkta koje imaju konačan nosač, uz množenje po komponentama.*

pri čemu vrijedi produkt po komponentama.

Funkcija projekcije i injekcije

Ako

$$G = \boxtimes\{H_i | i \in I\}\, ili \;\; G = \boxplus\{H_i \mid i \in I\}$$

je vanjski direktan produkt ili vanjska direktna suma, definiramo i-ti projekciju ρ_i: $G \to H_i$ sa

$$\rho_i(f) = f(i)$$

Uočimo da je ρ_i epimorfizam i da je element $f \in G$ jedinstveno određen vrijednostima $\rho_i(f)$, što se može proizvoljno odrediti, sve dok je $\rho_i(f) \in H$ *za sve* i.

i-ta **injekcija** $\kappa_i : H_i \to G$ definirana je s

$$\kappa_i(h)(j) = \begin{cases} h & \text{za } h = j \\ 1 & \text{inače} \end{cases}$$

za sve $h \in H_i$. Ove funkcije su injektivne. Također,

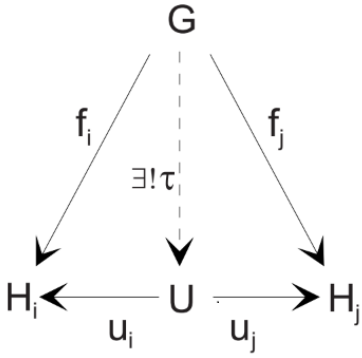
$$\rho_j \circ \kappa_i = \begin{cases} i & \text{za } i = j \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Za unutarnje direktne sume

$$G = \bowtie \{H_i \mid i \in I\}$$

Već smo definirali projekciju $\rho_i : G \to H_i$ s $\rho(a)$ kao i-tu kompononetu od a. Za unutarnje direktne sume, injekcije $\kappa_i : H_i \to G$ definiraju se s $\kappa_i(h) = h$ za sve $h \in H$.

Univerzalno svojstvo direktnog produkta



Slika 1

Definicija 2.13. *(s obzirom na Sliku 1) Neka je $\mathcal{F}$ familija svih uređenih parova*

$$\mathcal{G} = \big(G, \{f_i : G \to H_i\}_{i \in I}\big)$$

pri čemu je G grupa, a $\{f_i : G \to H_i\}$ je familija homomorfizama. G je vrh u paru $\mathcal{G}$. Par

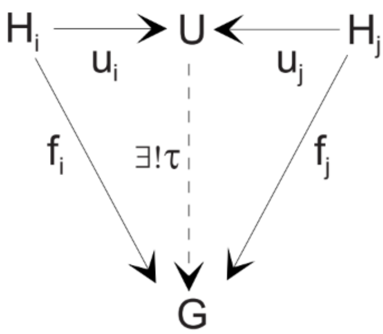
$$\mathcal{U} = \big(U, \{u_i : U \to H_i\}_{i \in I}\big)$$

u $\mathcal{F}$ je univerzalan za $\mathcal{F}$ ako za bilo koji par $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$ postoji jedinstveni homomorfizam $\tau : G \to U$ između vrhova. Taj homomorfizam zove se ***posredujući morfizam*** *za $\mathcal{G}$, za koji je*

$$u_i \circ \tau = f_i$$

za sve $i \in I$.

Univerzalno svojstvo direktne sume



Slika 2

Definicija 2.14. *(s obzirom na Sliku 2) Neka je $\mathcal{F}$ familija svih uređenih parova*

$$\mathcal{G} = \big(G, \{f_i : G \to H_i\}_{i \in I}\big)$$

pri čemu je G grupa, a $\{f_i : G \to H_i\}$ je familija homomorfizama. G je vrh u paru $\mathcal{G}$. Par

$$\mathcal{U} = \big(U, \{u_i : U \to H_i\}_{i \in I}\big) \in \mathcal{F}$$

je univerzalan za $\mathcal{F}$ ako za bilo koji par $\mathcal{G} \in \mathcal{F}$ postoji jedinstveni homomorfizam $\tau : U \to$ između vrhova. Taj homomorfizam zove se ***posredujući morfizam*** *za $\mathcal{G}$, za koji je*

$$\tau \circ u_i = f_i$$

za sve $i \in I$.

2.5 Klasifikacija konačnih Abelovih grupa

Svaka konačna Abelova grupa može biti prikazana kao direktna suma cikličkih podgrupa čiji su redovi prosti brojevi. Kako bi iskazali teorem potrebno je poznavati slijedeće definicije:

Definicija 2.15. ***Red grupe*** *G, koji se označava sa $|G|$, je broj elemenata u skupu G.*

Definicija 2.16. *Konačna ciklička grupa prostog reda zove se* ***primarna ciklička grupa.***

Definicija 2.17. *Neka je G grupa.*

1) Ako je $a \in G$, onda bilo koji broj n za koji je $a^n = 1$ ***eksponent*** *od a.*

2) Najmanji pozitivan eksponent od $a \in G$, ako postoji, zove se ***red elementa*** *a i označava se s $o(a)$. Ako ne postoji takav n, kažemo da je red elementa a beskonačan.*

Teorem 2.18. *Neka je A konačna Abelova grupa. Ako $u \in A$ ima najveći red među svim elementima od A, tada $M = \langle u \rangle$ ima direktan komplement, tj. postoji podgrupa V za koju je*

$$A = M \bowtie V.$$

Teorem 2.19. ***(Ciklička dekompozicija konačnih Abelovih grupa)***
Neka je A konačna Abelova grupa.

1) ***(Dekompozicija na invarijantne faktore)*** *A je direktna suma konačnog broja netrivijalnih cikličkih podgrupa*

$$A = \langle u_1 \rangle \bowtie \cdots \bowtie \langle u_n \rangle$$

ako je $\alpha_k = o(u_k)$, tada vrijedi

$$\alpha_n \mid \alpha_{n-1} \mid \cdots \mid \alpha_1.$$

α_i zovu se invarijantni faktori od A.

2) ***(Primarna ciklička dekompozicija)*** *Ako su*

$$\alpha_k = p_1^{e_{k,1}} \cdots p_m^{e_{k,m}}$$

gdje su $e_{k,i} \leq e_{k+1,i}$ za sve i=1,...,m, tada je A direktna suma primarnih cikličkih podgrupa:

$$A = [\langle u_{1,1} \rangle \bowtie \cdots \bowtie \langle u_{1,k_1} \rangle] \bowtie \cdots \bowtie [\langle u_{m,1} \rangle \bowtie \cdots \bowtie \langle u_{m,k_m} \rangle],$$

gdje je $o(u_{i,j}) = p_i^{e_{i,j}}$. Brojevi $p_i^{e_{i,j}}$ zovu se elementarni djelitelji od A.

3 Literatura

[1] Thomas W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag New York, 1974.

[2] S. Roman, Fundamentals of group theory, Springer science business media, New york, 2012.

[3] B. Širola, Algebarske strukture, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2010.