Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marija Kristina Bradvica

Ovisnost matrice operatora o bazi

Završni rad

Osijek, 2018.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marija Kristina Bradvica

Ovisnost matrice operatora o bazi

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Suzana Miodragović

Osijek, 2018.

Dependency of matrix of operator on the base

Sažetak

Ovaj rad bavit će se ponajprije linearnim operatorima. Pri tome, naglasak će biti na njihovim matričnim prikazima u raznim bazama vektorskog prostora, odnosno parovima baza. U uvodnom dijelu uvest će se osnovni pojmovi potrebni za razumijevanje daljnjeg teksta . Zatim će biti objašnjen postupak ponalaska matričnog zapisa linearnog operatora(vektora) u danom paru baza(bazi) vektorskog prostora kako bi se na kraju mogla opisati ovisnost matričnog zapisa o bazi prostora. Rad će biti zaključen poglavljem o sličnim i ekvivalentnim operatorima te matricima upravo zato što su oni usko vezani uz matrične prikaze operatora u raznim parovima baza.

Ključne riječi: linearan operator, matrica operatora, vektor, baza vektorskog prostora, izomorfizam, regularan operator

Abstract

This paper will essentially be about linear operators. The emphasis will be on their matrix in various vector space bases, or base pairs. In the introductory part, it will be introduced basic terms needed for understanding further text. Then will be explained the procedure of finding the matrix of operator(vector) in given base pairs(base). of the vector space in order to describe dependency of matrix on base of vector space at the end. This work will be concluded with chapter about similar and equivalent operators and matrix precisely because they are closely related to matrix of the operator in various base pairs.

Key words: linear operator, matrix of operator, vector, base of vector space, isomorphism, regular operator

Sadržaj

1 Uvod

Baza vektorskog prostora nije jedinstvena. Zbog toga se postavlja pitanje što bi se dogodilo kada bi se dana baza pokušala zamijeniti nekom drugom. U ovome radu, promatrat će se taj problem u kontekstu linearnih operatora.

Za početak definirajmo nekoliko osnovnih pojmova.

Definicija 1.1. Neka su V i W vektorski prostori. Svako preslikavanje $A : V \to W$ zove se **operator**.

Odnosno, operator je svaka funkcija koja ide sa vektorskog prostora u vektorski prostor.

Definicija 1.2. Neka su V i W vektorski postori definirani nad istim poljem K te $A : V \to W$ operator.
Operator A je **aditivan** ako $\forall v, w \in V$ vrijedi: $A(v + w) = A(v) + A(w)$.
Operator A je **homogen** ako $\forall v \in V, \forall \lambda \in K$ vrijedi: $A(\lambda v) = \lambda A(v)$.
Operator A je **linearan** ako je aditivan i homogen.

Primjer 1.1. *Pokažimo da je operator* $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definiran s* $P(x, y, z) = (x, y, 0)$ *linearan. Neka su* $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$.

- *Aditivnost:* $P((x_1, y_1, z_1)+(x_2, y_2, z_2)) = P(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) = (x_1+x_2, y_1+y_2, 0)$ $= (x_1, y_1, 0) + (x_2, y_2, 0) = P(x_1, y_1, z_1) + P(x_2, y_2, z_2)$.
- *Homogenost:* $P(\lambda(x_1, y_1, z_1)) = P(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1, 0)$ $= \lambda(x_1, y_1, 0) = \lambda P(x_1, y_1, z_1)$.

P je aditivan i homogen operator, dakle, linearan.
Ovaj operator inače se naziva i projektor na xy-ravninu.

Definicija 1.3. Neka je $A : V \to W$ linearan operator. Potprostori
$ImA = A(V) = \{Av : v \in V\} \leq W$ i $KerA = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Ax = 0\} \leq V$
zovu se **slika**, odnosno **jezgra** operatora A.
Nadalje, ako su V i W konačnodimenzionalni, tada se brojevi:
$r(A) = dim(ImA)$ i $d(A) = dim(KerA)$
nazivaju **rang** i **defekt** operatora A.

Skup svih linearnih operatora koji djeluju sa vektorskog prostora V u vektorski prostor W označavamo s $L(V, W)$.
Ako je $W = V$, onda umjesto $L(V, V)$ pišemo samo $L(V)$. U skup $L(V, W)$ uvodimo operaciju zbrajanja operatora i množenja operatora sa skalarom. Neka su $A, B \in L(V, W)$ i $\lambda \in K$.

- $A + B : (A + B)(x) = Ax + Bx, A + B : V \to W$
- $\lambda A : (\lambda A)x = \lambda Ax, \lambda A : V \to W$

Napomena 1.1. Pokažimo da je $L(V,W)$ vektorski prostor. Treba pokazati da su operatori $A+B$ i λA linearni.
Neka su $A,B \in L(V,W)$, $x,y \in V$ i $\alpha,\beta,\lambda \in K$.

$$(A+B)(\alpha x+\beta y) = A(\alpha x+\beta y)+B(\alpha x+\beta y) = \alpha Ax+\beta Ay+\alpha Bx+\beta By = \\ \alpha(Ax+Bx)+\beta(Ay+By) = \alpha(A+B)x+\beta(A+B)y \Rightarrow A+B \in L(V,W).$$

$$(\lambda A)(\alpha x+\beta y) = \lambda A(\alpha x+\beta y) = \lambda(\alpha Ax+\beta Ay) = \alpha\lambda Ax+\beta\lambda Ay = \\ \alpha(\lambda A)x+\beta(\lambda A)y \Rightarrow \lambda A \in L(V,W).$$

Kako je $L(V,W)$ vektorski prostor, možemo reći nešto i o njegovoj dimenziji.

Propozicija 1.1. *Ako su vektorski prostori V i W konačnodimenzionalni, tada je i prostor $L(V,W)$ konačnodimenzionalan i $dimL(V,W) = dim(V)\cdot dim(W)$.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [3, str. 49].

U sljedećem poglavlju, pokazat ćemo postupak dobivanja matrice operatora, odnosno prikaz operatora u paru baza.

2 Prikaz linearnog operatora u paru baza i matrica operatora

Za početak iskažimo jednu vrlo važnu propoziciju koja nam jamči da prostor $L(V)$ nije neprazan, štoviše da je i raznolik. Njezina važnost je i u tome što ćemo se na nju pozivati i u nekim dokazima kasnije.

Propozicija 2.1 (Egzistencija mnoštva linearnih operatora u slučaju konačodimenzionalnog vektorskog prostora)**.** *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem K. Neka je V konačnodimenzionalan i $\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ baza od V. Za proizvoljnu uređenu n-torku $(w_1,w_2,\ldots,w_n)$ vektora iz W $\exists! A \in L(V,W)$ takav da vrijedi $Ae_i = w_i, \forall i = 1,2,\ldots,n$.*

Dokaz. • Egzistencija:
Uzmimo vektor $x \in V$. On se na jedinstven način može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze za V :

$$x = \lambda_1 e_1+\ldots+\lambda_n e_n, \lambda_i \in K, i = 1,\ldots,n.$$

Zatim definirajmo operator $A(x) := \lambda_1 w_1+\ldots+\lambda_n w_n$. Očito je $A(e_i) = w_i$, jer je

$$A(e_i) = A(0\cdot e_1+\ldots+0\cdot e_{i-1}+1\cdot e_i+0\cdot e_{i+1}+\ldots+0\cdot e_n) = \\ 0\cdot w_1+\ldots+0\cdot w_{i-1}+1\cdot w_i+0\cdot w_{i+1}+\ldots+0\cdot w_n = w_i.$$

Pokažimo linearnost:
Neka je $\alpha \in K$ te neka je uz x zadan još i vektor $y = \mu_1 e_1+\ldots+\mu_n e_n, \mu_i \in K, i = 1,\ldots,n$.

Aditivnost:

$$A(x+y)=A((\lambda_1+\mu_1)e_1+\ldots+(\lambda_n+\mu_n)e_n)=(\lambda_1+\mu_1)w_1+\ldots+(\lambda_n+\mu_n)w_n=$$
$$\lambda_1+w_1+\ldots+\lambda_n+w_n+\mu_1w_1+\ldots+\mu_nw_n=A(x)+A(y)$$

Homogenost:

$$A(\alpha x)=A(\alpha\lambda_1e_1+\ldots+\alpha\lambda_ne_n)=\alpha\lambda_1w_1+\ldots+\alpha\lambda_nw_n=\alpha(\lambda_1w_1+\ldots+\lambda_nw_n)=\alpha A(x)$$

Time je dokazana egzistencija.

• Jedinstvenost:

Pretpostavimo da su $A, B \in L(V, W)$ takvi da je $Ae_i = w_i$ i $Be_i = w_i, i = 1, \ldots, n$.

$$A(x)=A(\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n)=\lambda_1Ae_1+\ldots+\lambda_nAe_n=\lambda_1w_1+\ldots+\lambda_nw_n=$$
$$\lambda_1Be_1+\ldots+\lambda_nBe_n=B(\lambda_1e_1+\ldots+\lambda_ne_n)=B(x)$$

Dakle, $Ax = Bx$ za svaki vektor $x \in V$, odnosno $A = B$ te je time i jedinstvenost dokazana.

□

Napomena 2.1. Primjetimo da je $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ uređena n-torka, a ne skup što ukazuje na to da se neki od vetora w_i smiju ponavljati. Ta nam propozicija jamči da za zadanu bazu domene postoji jedinstven linearan operator koji će vektore te baze preslikati u unaprijed zadane, ne nužno različite, vektore iz kodomene.

Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem K i $A : V \to W$ linearan operator. Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza za W. Operator A potpuno je određen svojim djelovanjem na bazi, tj. ako znamo $Ae_1, \ldots, Ae_n$, onda možemo odrediti definiciju operatora.

Vektori $Ae_1, \ldots, Ae_n$ elementi su skupa W pa se na jedinstven način mogu prikazati kao linearna kombinacija vektora baze od W, to jest postoje jedinstveni skalari $\alpha_{ij} \in K, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$ takvi da:

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= \alpha_{11}f_1+\ldots+\alpha_{m1}f_m\\
Ae_2 &= \alpha_{12}f_1+\ldots+\alpha_{m2}f_m\\
&\vdots\\
Ae_n &= \alpha_{1n}f_1+\ldots+\alpha_{mn}f_m.
\end{aligned}$$

Kraće: $Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i$.

Na taj način dobivene koeficijente posložimo u matricu:

$$A(f,e)=\begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn}\end{bmatrix} \in M_{mn}(K)$$

Dakle, u i-tom stupcu matrice nalaze se koeficijenti iz raspisa vektora Ae_i pomoću vektora baze f.
Matricu $A(f, e)$ označavamo još s $[A]_e^f$ i zovemo **matrični zapis operatora $\boldsymbol{A}$ u paru baza $(\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f})$**.

Primjer 2.1. *Neka je operator* $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *zadan s* $A(x_1, x_2, x_3) = (6x_1 + 3x_3, -x_1 - x_2 + 9x_3)$. *Odredimo mu matricu u paru baza:* $e = \{e_1, e_2, e_3\}, e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$ *i* $f = \{f_1, f_2\}, f_1 = (2, 1), f_2 = (0, 1)$.
$A(e_1) = A(1, 0, 0) = (6, -1) = 3f_1 - 4f_2$
$A(e_2) = A(0, 1, 0) = (0, -1) = -f_2$
$A(e_3) = A(0, 0, 1) = (3, 9) = \frac{3}{2}f_1 + \frac{15}{2}f_2$.
Dakle, matrica operatora u zadanom paru baza je:

$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{3}{2} \\ -4 & -1 & \frac{15}{2} \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.1. Linearan operator $A : V \to W$ naziva se:

a) **monomorfizam** ako je A injekcija,

b) **epimorfizam** ako je A surjekcija,

c) **izomorfizam** ako je A bijekcija.

Kažemo da su dva vektorska prostora V i W **izomorfna** i pišemo $V \simeq W$ ako postoji operator $A \in L(V, W)$ između njih koji je izomorfizam.

Napomena 2.2. "Biti izomorfan" je relacija ekvivalencije.
• Refleksivnost: $V \simeq V$ jer je identiteta $I_V : V \to V$ izomorfizam.
• Simetričnost: Ako je $V \simeq W$, onda je i $W \simeq V$ jer ako je $A : V \to W$ izomorfizam, onda je i $A^{-1} : W \to V$ također izomorfizam.
• Tranzitivnost: Iz $V \simeq W$ i $W \simeq U$ slijedi $V \simeq U$ jer ako su $A : V \to W$ i $B : W \to U$ izomorfizmi, onda je i $BA : V \to U$ također izomorfizam.

Korolar 2.1. *Vektorski prostori* V *i* W *nad istim poljem* K *su izomorfni ako i samo ako je* $dimV = dimW$.

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [3, str. 41]

Propozicija 2.2. *Neka su* V *i* W *konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem* K *te* $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *i* $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ *redom baze od* V *i* W. *Tada je preslikavanje* $A \to [A]_e^f$ ***izomorfizam vektorskih prostora $\boldsymbol{L(V, W)}$ i $\boldsymbol{M_{mn}(K)}$***.

Dokaz. Pokažimo prvo linearnost preslikavanja. Neka su $A, B \in L(V, W)$ i $\lambda, \mu \in K$. Promotrimo prvi stupac matrice $[\lambda A + \mu B]_e^f$. To je vektor $[(\lambda A + \mu B)e_1]^f$. Kako je $L(V, W)$ vektorski prostor, što smo rekli već ranije, tada je $(\lambda A + \mu B)e_1 = \lambda Ae_1 + \mu Be_1$. To znači da je $[(\lambda A + \mu B)e_1]^f = [\lambda Ae_1 + \mu Be_1]^f$. Analogno se pokaže jednakost za preostale vektore baze te iz toga slijedi:

$$[\lambda A + \mu B]_e^f = \lambda [A]_e^f + \mu [B]_e^f.$$

Dakle, preslikavanje je linearno.
Pokažimo još injektivnost i surjektivnost.
Neka su $A, B \in L(V, W)$ takvi da je $[A]_e^f = [B]_e^f$. Iz toga slijedi da je

$$Ae_1 = Be_1$$
$$\vdots$$
$$Ae_n = Be_n,$$

te iz jedinstvnosti operatora u Propoziciji 2.1 slijedi da je $A = B$. Dokazana je injektivnost.

Uzmimo sada neku matricu $C \in M_{mn}(K)$, $C = [\alpha_{ij}], i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$. Koeficijente iz C iskoristimo na sljedeći način:

$$w_1 = \alpha_{11} f_1 + \ldots + \alpha_{m1} f_m$$
$$\vdots$$
$$w_n = \alpha_{n1} f_1 + \ldots + \alpha_{mn} f_m.$$

Po Propoziciji 2.1 postoji jedinstveni operator A takav da je $Ae_1 = w_1, \ldots, Ae_n = w_n$. Tada je $[A]_e^f = C$ te je preslikavanje surjekcija. Dakle preslikavanje sa $L(V, W)$ u $M_{mn}(K)$ je izomorfizam i dani prostori su izomorfni. □

Sada kada smo utvrdili da su $L(V, W)$ i $M_{mn}(K)$ izomorfni, po Korolaru 2.1 slijedi da su im dimenzije jednake, dakle mn, što je u suglasnosti s Propozicijom 1.1 koja kaže da je $dimL(V, W) = dimV \cdot dimW = n \cdot m$.

3 Matrični prikaz vektora i operator prijelaza

3.1 Matrični prikaz vektora

Neka je V vektorski prostor nad poljem K i neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka baza tog prostora. Svaki vektor $x \in V$ može se na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija baznih vektora, odnosno:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \alpha_i \in K, \forall i = 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Tako dobivene koeficijente $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ možemo zapisati u matricu:

$$[x]^e = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in K^n$$

koju nazivamo **matrični prikaz vektora x u bazi e**.
Sada možemo povezati vektorski prostor V iz kojeg je vektor x i vektorski prostor K^n odakle je njegov matrični zapis.

Propozicija 3.1. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem K te $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ baza za V. Tada je preslikavanje $x \to [x]^e$* ***izomorfizam vektorskih prostora V i K^n***.

Dokaz. Postupamo analogno kao u dokazu Propozicije 2.2.
Pokažimo prvo linearnost preslikavanja. Neka su $x, y \in V$ i $\lambda, \mu \in K$. Prikažimo x i y kao linearnu kombinaciju vektora baze

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i \text{ i } y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i.$$

Tada je $\lambda x + \mu y = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\alpha_i + \mu\beta_i) e_i$.

$$[\lambda x + \mu y]^e = \begin{bmatrix} \lambda\alpha_1 + \mu\beta_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n + \mu\beta_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} = \lambda[x]^e + \mu[y]^e.$$

Zatim injektivnost. Uzmimo da su $x, y \in V$ dva vektora takvi da je $[x]^e = [y]^e$. To znači da je $\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$ i slijedi da je:

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n \Rightarrow x = y.$$

I na kraju surjektivnost. Neka je $C \in K^n$. $C = [\alpha_i], i = 1, \dots, n$. Uzmimo neki vektor $v \in V$ takav da je $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$. Tada je $C = [v]^e$. $\square$

Ako se vratimo na matricu operatora A iz Poglavlja 2 , vidimo da je upravo i-ti stupac te matrice jednak matričnom prikazu vektora Ae_i u bazi f.

Primjer 3.1. *Uzmimo vektor Ae_1 iz Primjera 2.1.*
$Ae_1 = (6, -1) = 3f_1 - 4f_2 \Rightarrow [Ae_1]^f = \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix}$.
Dakle, vektor Ae_1 odgovara prvom stupcu matrice operatora A.

Nadalje, uzmemo li neku drugu bazu $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ našeg prostora V, tada vektor x ima drugačiji raspis, to jest:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e'_i, \beta_i \in K, \forall i = 1, \dots, n. \tag{2}$$

Vektoru x možemo pridružiti i novu matricu:

$$[x]^{e'} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \in K^n$$

koju nazivamo **matrični prikaz vektora x u bazi e'**.
Oba matrična prikaza prikazuju isti vektor x pa se postavlja pitanje postoji li veza između matrica $[x]^e$ i $[x]^{e'}$, odnosno između (1) i (2).

3.2 Operator prijelaza iz jedne baze u drugu bazu prostora

Odgovor na posljednje pitanje krije se u ovom potpoglavlju i temelji se na činjenici da za bilo koje dvije baze nekog prostora postoji regularan operator, odnosno izomorfizam, koji staru bazu prevodi u novu bazu vektorskog prostora.

Teorem 3.1. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem K i $A \in L(V, W)$. Sljedeća svojstva međusobno su ekvivalentna:*

a) A je izomorfizam.

b) Za neku bazu $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od V, skup $Ae = \{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ je baza za W.

c) Za svaku bazu $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ od V, $Ae = \{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ je baza za W.

d) Postoje baze e od V i f od W takve da je $[A]_e^f$ jedinična matrica.

Dokaz. Dokazat ćemo smjer $b) \Rightarrow a)$, a ostalo se može pronaći u [3, str. 23.].
Pretpostavimo da je Ae baza od W za neku bazu e od V. Treba pokazati da je operator A izomorfizam, a po pretpostavci teorema, A je linearan operator pa treba pokazati je A bijekcija (injekcija i surjekcija).

- Injektivnost:

Uzmimo $x, y \in V$ takve da je $Ax = Ay$. Treba pokazati da je $x = y$. Kako je A linearan operator slijedi da je $A(x - y) = 0$. Pošto je vektor $x - y \in V$, možemo ga prikazati kao linearnu kombinaciju baze e:

$$x - y = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n.$$

$$A(x - y) = A(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n) = \lambda_1 A(e_1) + \ldots + \lambda_n A(e_n) = 0.$$

Kako je Ae baza za W, slijedi da su $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$,odnosno $x - y = 0$ pa je $x = y$.

- Surjektivnost:

Neka je $w \in W$. Pitamo se postoji li $x \in V$ takav da je $Ax = w$.
Zapišimo w pomoću baze Ae:

$$w = \lambda_1 Ae_1 + \ldots + \lambda_n Ae_n = A(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n).$$

Sada definiramo vektor $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n \in V$ pa je $Ax = w$. □

Definicija 3.1. Za izomorfizam $A : V \to V$ koristimo naziv **regularan operator**.
Skup svih regularnih operatora na V označava se s $GL(V)$.

Skup svih regularnih matrica n-tog reda s koeficijentima iz polja K označava se s $GL(n, K)$.

Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze vektorskog prostora V. Definirajmo operator $T \in L(V, V)$ takav da je:

$$Te_j = e'_j, \forall j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Takav operator postoji zbog Propozicije 2.1.
Također, operator T je izomorfizam po Teoremu 3.1 jer preslikava bazu u bazu, odnosno $T \in GL(V)$. Kako su svi e'_j elementi vektorskog prostora V, možemo ih prikazati kao linearnu kombinaciju vektora baze e:

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i.$$

Te dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} Te_1 &= \lambda_{11}e_1 + \ldots + \lambda_{n1}e_n \\ &\vdots \\ Te_n &= \lambda_{1n}e_1 + \ldots + \lambda_{nn}e_n. \end{aligned}$$

Pomoću kojega formiramo matricu:

$$[T]_e^e = \left[\lambda_{ij}\right], i, j = 1, \ldots, n.$$

Operator T naziva se **operator prijelaza iz baze e u bazu e'**.
Primijetimo da za jedinični operator $I_V \in L(V)$ vrijedi:

$$I_V e'_j = e'_j = Te_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i \Rightarrow I_V e'_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{ij} e_i.$$

Dobivamo matricu:

$$[I_V]_{e'}^e = \left[\lambda_{ij}\right], i, j = 1, \ldots, n\ .$$

Iz toga zaključujemo da su matrični zapisi operatora T u paru baza (e, e) i operatora I_V u paru baza (e', e) jednaki, tj. $[I_V]_{e'}^e = [T]_e^e$.
Matrica $[I_V]_{e'}^e = [T]_e^e$ naziva se **matrica prijelaza iz baze e u bazu e'**.

4 Svojstva matričnih zapisa

Važno je svojstvo da je pridruživanje matričnih zapisa vektorima i operatorima usklađeno s matričnim množenjem s jedne i djelovanjem operatora s druge strane.

Propozicija 4.1. *Neka je $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ baza za V i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baza za W te $x \in V$ i $A \in L(V, W)$. Tada je*

$$[Ax]^f = [A]_e^f [x]^e.$$

Dokaz. Neka je $[A]_e^f = [\alpha_{ij}] \in M_{mn}$ i $[x]^e = [\mu_i] \in M_{m1}$.
Matrice $[A]_e^f$ i $[x]^e$ su ulančane i njihov je produkt tipa $m \cdot 1$, baš kao i matrica $[Ax]^f$. Dakle, matrice su istog tipa, treba još pokazati da su im odgovarajući koeficijenti jednaki.

$$Ax = A(\sum_{j=1}^{n} \mu_j e_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j A e_j = \sum_{j=1}^{n} \mu_j \sum_{i=1}^{m} \lambda_{ij} f_i =$$
$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} (\mu_j \lambda_{ij}) f_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (\lambda_{ij} \mu_j) f_i = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \mu_j) f_i.$$

Vidimo da je unutarnja suma ustvari i-ta komponenta u vektoru $[Ax]^f$, a s druge strane to je upravo umnožak i-tog retka matrice $[A]_e^f$ i i-tog stupca vektora $[x]^e$. □

Pridruživanje matričnih zapisa vektorima i operatorima je također usklađeno i s komponiranjem operatora.

Propozicija 4.2. *Neka su redom $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ i $g = \{g_1, \ldots, g_l\}$ baze vektorskih prostora V, W i X te $A \in L(V, W)$ i $B \in L(W, X)$. Tada za operator $BA \in L(V, X)$ vrijedi:*

$$[BA]_e^g = [B]_f^g [A]_e^f.$$

Dokaz. Neka je $[A]_e^f = [\alpha_{ij}] \in M_{mn}$ i $[B]_f^g = [\beta_{ij}] \in M_{lm}$. Primijetimo odmah da su matrice ulančane te im je produkt tipa $l \cdot n$, baš kao i matrica $[BA]_e^g$. Pogledajmo sada koeficijente. Za $1 \leq k \leq n$ vrijedi:

$$BA(e_k) = B(Ae_k) = B(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} f_i) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} B f_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ik} \sum_{j=1}^{l} \beta_{ji} g_j = \sum_{i=1}^{m} (\sum_{j=1}^{l} \alpha_{ik} \beta_{ji}) g_j.$$

Primijetimo da je suma u zagradi skalar koji u matrici $[BA]_e^g$ stoji u j-tom retku i k-tom stupcu, s druge strane to je umnožak j-tog retka matrice $[B]_f^g$ i k-tog stupca matrice $[A]_e^f$. □

Iz toga sijedi da je $[I_V]_{e'}^e [I_V]_e^{e'} = [I]_e^e = I$, tj. da su $[I_V]_{e'}^e$ i $[I_V]_e^{e'}$ jedna drugoj inverzne.

Korolar 4.1. *Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze vektorskog prostora V te neka je $[T]_e^e = [I_V]_{e'}^e$ matrica prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada za svaki vektor $x \in V$ vrijedi:*

$$[x]^{e'} = ([T]_e^e)^{-1} [x]^e.$$

Dokaz. Danu tvrdnju zapišimo na sljedeći način: $[x]^{e'} = ([I_V]_{e'}^e)^{-1} [x]^e = [I_V]_e^{e'} [x]^e$. Sada primijenimo Propoziciju 4.1. □

5 Ovisnost matrice operatora o bazi

U Poglavlju 2 opisan je način pronalaska matrice operatora u danom paru baza. No, kako znamo da baza vektorskog prostora nije jedinstvena, možemo tražiti i matricu operatora u nekom drugom paru baza. Na primjer, ako su e i e' dvije baze za vektorski prostor V, a f i f' dvije baze za vektorski prostor W, tada za operator $A \in L(V, W)$ postoje i matrice u raznim parovima baza, $[A]_e^f, [A]_{e'}^f, [A]_e^{f'}$ i $[A]_{e'}^{f'}$. Opišimo sada vezu između tih matrica.

Teorem 5.1. *Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori i $A \in L(V, W)$. Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ baze od V te $f = \{f_1, \dots, f_m\}$ i $f' = \{f'_1, \dots, f'_m\}$ baze za W i $T \in GL(V)$ i $S \in GL(W)$ pripadni operatori prijelaza definirani na bazama e, odnosno f:*

$$Te_i = e'_i, i = 1, \dots, n,$$
$$Sf_j = f'_j, j = 1, \dots, m.$$

Tada je

$$[A]_{e'}^{f'} = ([S]_f^f)^{-1}[A]_e^f[T]_e^e.$$

Dokaz. Napomenimo prvo da vrijedi:

$$[T]_e^e = [I_V]_{e'}^e \text{ i } [S]_f^f = [I_W]_{f'}^f.$$

Sada je

$$[A]_e^f[T]_e^e = [A]_e^f[I_V]_{e'}^e.$$

Sada primijenimo Propoziciju 4.2:

$$[A]_e^f[I_V]_{e'}^e = [AI_V]_{e'}^f = [A]_{e'}^f = [I_WA]_{e'}^f = [I_W]_{f'}^f[A]_{e'}^{f'} = [S]_f^f[A]_{e'}^{f'}.$$

Dobivenu jednakost $[A]_e^f[T]_e^e = [S]_f^f[A]_{e'}^{f'}$ s lijeve strane pomnožimo matricom $([S]_f^f)^{-1}$ koja postoji jer smo u pretpostavkama terorema naveli da su operatori S i T regularni(prevode bazu u bazu pa su po Teoremu 3.1 izomorfizmi i za svaki operator se podudaraju domena i kodomena), što znači da su i njihove matrice regularne pa inverz postoji.
Dobivamo:

$$[A]_{e'}^{f'} = ([S]_f^f)^{-1}[A]_e^f[T]_e^e.$$

□

Korolar 5.1. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Neka su $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $e' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ dvije baze za V te neka je $S \in GL(V)$ pripadni operator prijelaza iz baze e u bazu e'. Tada je*

$$[A]_{e'}^{e'} = ([S]_e^e)^{-1}[A]_e^e[S]_e^e.$$

Dokaz. Ako u Teoremu 5.1 ulogu prostora W preuzme prostor V i ulogu baze f, baza e, dobivamo traženu jednakost. □

Napomena 5.1. Ako primijenimo prethodni korolar na operator S, dobivamo da je:

$$[S]_{e'}^{e'} = ([S]_e^{e})^{-1}[S]_e^e[S]_e^e \Rightarrow [S]_{e'}^{e'} = [S]_e^e.$$

Odnosno da je matrica operatora S koji veže baze e i e' jednaka u obje baze.

Napomena 5.2. Primijetimo da je $[A]_e^e = [A]_{e'}^{e'}$ ako i samo ako operatori A i S komutiraju, tj. ako je $AS = SA$.
Neka je $[A]_{e'}^{e'} = [A]_e^e$. Tada je $[A]_{e'}^{e'} = ([S]_e^e)^{-1}[A]_e^e[S]_e^e$ pa je $[A]_{e'}^{e'} = ([I_V]_{e'}^e)^{-1}[A]_e^e[I_V]_{e'}^e$, odnosno $[I_V]_{e'}^e[A]_{e'}^{e'} = [A]_e^e[I_V]_{e'}^e$, dakle, $[I_VA]_{e'}^e = [AI_V]_{e'}^e$. Iz toga slijedi da operatori A i I_V komutiraju, a kako je $S = I_V$ slijedi da A i S komutiraju. Obratna tvrdnja ide analogno.

Napomena 5.3. Primijetimo još da su nulmatrica i jedinična matrica jednake u svim bazama prostora.

Primjer 5.1. *Neka je operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zadan s $A(x, y, z) = (x+3y+4z, 6x+8y+10z)$. Neka je e kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i f kanonska baza za $\mathbb{R}^2$, a $e' = \{e'_1, e'_2, e'_3\}, e'_1 = (1, 3, 0), e'_2 = (2, 0, 2), e'_3 = (1, 1, 1)$ i $f' = \{f'_1, f'_2\}, f'_1 = (2, 1), f'_2 = (-1, 3)$ nove baze za $\mathbb{R}^3$, odnosno $\mathbb{R}^2$. Odredimo $[A]_{e'}^{f'}$.*

Prvo odredimo $[A]_e^f$.
$A(e_1) = A(1, 0, 0) = (1, 6) = f_1 + 6f_2$,
$A(e_2) = A(0, 1, 0) = (3, 8) = 3f_1 + 8f_2$,
$A(e_3) = A(0, 0, 1) = (4, 10) = 4f_1 + 10f_2$.
$[A]_e^f = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$.

Sada uzmimo operator prijelaza $T \in L(\mathbb{R}^3)$ iz baze e u novu bazu e'. $T(e_i) = e'_i, i = 1, 2, 3$.
$T(e_1) = T(1, 0, 0) = (1, 3, 0) = e_1 + 3e_2$,
$T(e_2) = T(0, 1, 0) = (2, 0, 2) = 2e_1 + 2e_3$,
$T(e_3) = T(0, 0, 1) = (1, 1, 1) = e_1 + e_2 + e_3$.
Dakle, $[T]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Na analogan način uzmimo i operator prijelaza $S \in L(\mathbb{R}^2)$ iz baze f u f'. $S(f_i) = f'_i, i = 1, 2$. Dobivamo da je $[S]_f^f = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. Iz toga možemo odrediti djelovanje operatora $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Dakle, $S(x, y) = (2x - y, x + 3y)$. Pogledajmo sada kako izgleda matrica $[S]_{f'}^{f'}$.
$S(2, 1) = (2 \cdot 2 - 1, 2 + 3 \cdot 1) = (3, 5) = 2e'_1 + e'_2$,
$S(-1, 3) = (2 \cdot (-1) - 3, -1 + 3 \cdot 3) = (-5, 8) = -e'_1 + 3e'_2$.
Dakle, $[S]_{f'}^{f'} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$. *Pa po Napomeni 5.1 slijedi da je $[S]_f^f = [S]_{f'}^{f'}$, što smo ovdje i pokazali primjerom. Odmah ćemo izračunati i inverz od $[S]_f^f$ koji će nam biti potreban u daljnjem računu.*
$([S]_f^f)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Matrica $([S]_f^f)^{-1}$ prevodi bazu f' u bazu f. Sada imamo sve što nam je potrebno za računanje matrice $[A]_e^f$.*

$$[A]_{e'}^{f'} = ([S]_f^f)^{-1}[A]_e^f[T]_e^e = \begin{bmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-1}{7} & \frac{2}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60}{7} & \frac{62}{7} & \frac{48}{7} \\ \frac{50}{7} & \frac{54}{7} & \frac{40}{7} \end{bmatrix}.$$

Postoji i drugi način pronalaska matrice $[A]_{e'}^{f'}$, *takozvani direktni način kod kojega "napadamo na bazu* e' *i sve zapišemo preko baze* f'*".*

$$A(e_1') = A(1,3,0) = (10,30) = \frac{60}{7}f_1' + \frac{50}{7}f_2',$$

$$A(e_2') = A(2,0,2) = (10,32) = \frac{62}{7}f_1' + \frac{54}{7}f_2',$$

$$A(e_3') = A(1,1,1) = (8,24) = \frac{48}{7}f_1' + \frac{40}{7}f_2'.$$

Sada je

$$[A]_{e'}^{f'} = \begin{bmatrix} \frac{60}{7} & \frac{62}{7} & \frac{48}{7} \\ \frac{50}{7} & \frac{54}{7} & \frac{40}{7} \end{bmatrix}.$$

6 Slični i ekvivalentni operatori

Definicija 6.1. Neka su $A, B \in M_{mn}(K)$. Kažemo da su matrice A i B **ekvivalentne** ako postoje regularne matrice $S \in GL(m,K)$ i $T \in GL(n,K)$ takve da je

$$B = SAT.$$

Definicija 6.2. Kažemo da su operatori A i $B \in L(V,W)$ **ekvivalentni** i pišemo $A \sim B$ ako postoje izomorfizmi $S \in GL(W)$ i $T \in GL(V)$ takvi da vrijedi:

$$B = SAT.$$

Napomena 6.1. Pojam ekvivalentnih operatora ujedno je i relacija ekvivalencije.
• Refleksivnost: $A \sim A$ jer je identiteta izomorfizam pa vrijedi $A = IAI$.
• Simetričnost: $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ jer ako je $A \sim B$, onda je $B = SAT$ pa je $A = S^{-1}BT^{-1}$.
• Tranzitivnost: $A \sim B$ i $B \sim C \Rightarrow A \sim C$. Ako vrijedi $B = SAT$ i $C = UBV$, onda je $C = USATV$ te je $A \sim C$.

Dakle, prostor matrica M_{mn}(operatora $L(V,W)$) može se prikazati kao unija međusobno disjunktnih klasa ekvivalencije međusobno ekvivalentnih matrica(operatora). To opisuje i sljedeći teorem.

Teorem 6.1. *Neka su V i W vektorski prostor nad poljem K i $A \in L(V, W)$. Vrijedi:*

1. *Skup svih matrica koje pripadaju operatoru A u svim mogućim parovima bazama prostora V i W definira jednu klasu ekvivalencije $K(A)$ međusobno ekvivalentnih matrica.*

2. *Vrijedi i obrat. Za klasu K međusobno ekvivalentnih matrica postoji barem jedan operator $A \in L(V, W)$ takav da je K skup svih matrica operatora A u svim mogućim parovima baza prostora V i W.*

3. *Ekvivalentnim operatorima pripada ista klasa ekvivalencije, tj. ako je $A \sim B \Rightarrow K(A) = K(B)$ i obrnuto.*

Dokaz. Dokaz analognog teorema može se pronaći u [1, str. 103, tm.16].

Primjer 6.1. *Jedan primjer ekvivalentnih matrica su matrice $[A]_e^f$ i $[A]_{e'}^{f'}$ iz Teorema 5.1.*

Spomenimo sada jedan poseban slučaj ekvivalentnih matrica, odnosno operatora.

Definicija 6.3. Neka su $A, B \in M_n(K)$. Kažemo da su matrice A i B **slične** ako postoji regularna matrica $S \in GL(n, K)$ takva da je

$$B = S^{-1}AS.$$

Definicija 6.4. Kažemo da su operatori A i $B \in L(V)$ **slični** ako postoji izomorfizam $S \in GL(V)$ takav da vrijedi

$$B = S^{-1}AS.$$

Primjer 6.2. *Jedan primjer sličnih matrica su matrice $[A]_e^e$ i $[A]_{e'}^{e'}$ iz Korolara 5.1.*

Navedimo sada neka svojstva operatora koja se mogu povezati sa svojstvima pripadnog matričnog zapisa, a koja pri tome ne ovise o bazi matričnog zapisa operatora. Ta su svojstva za slične operatore jednaka pa ih nazivamo **invarijante sličnosti operatora**.

6.1 Rang i defekt

Već u Uvodu objasnili smo pojam ranga i defekta operatora, a sada ćemo navesti jedan važan teorem koji povezuje ta dva pojma.

Teorem 6.2 (Teorem o rangu i defektu)**.** *Neka je $A : V \to W$ linearan operator i neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor. Vrijedi:*

$$r(A) + d(A) = dimV.$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [1, str. 126.].

Pomoću ranga i defekta možemo saznati je li operator monomorfizam, epimorfizam ili izomorfizam ili nije.

Propozicija 6.1. *Za linearan operator $A : V \to W$ kažemo da je monomorfizam ako i samo ako je $d(A) = 0$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $d(A) = 0$. To znači da je $KerA = \{0\}$, odnosno da je jezgra trivijalna. Uzmimo da je $Ax = Ay$ za neke $x, y \in V$. Tada je $Ax - Ay = 0$, što zbog linearnosti povlači da je $A(x - y) = 0$. Po definiciji jezgre je $x - y \in KerA$, tj. $x - y = 0$ pa je $x = y$. Dakle, A je injekcija, odnosno izomorfizam.
Pretpostavimo sada da je A izomorfizam. Kako je A linearan slijedi da je $A(0) = 0$ pa zbog injektivnosti, u jezgri ne može biti ništa osim nule te je $KerA = \{0\}$, odnosno $d(A) = 0$. □

Propozicija 6.2. *Za linearan operator $A : V \to W$ kažemo da je epimorfizam ako i samo ako je $r(A) = dimW$.*

Dokaz. Ako je $r(A) = dimW$, po definiciji ranga je $dimIm(A) = dimW$, dakle, A je surjekcija. Dokaz obratne tvrdnje ide u obrnutom smjeru. □

Propozicija 6.3. *Neka su $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ baze vektorskih prostora V i W te neka je $A \in L(V, W)$. Tada je*

$$\boldsymbol{r(A) = r([A]_e^f)}.$$

Dokaz. Znamo da je skup $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ sustav izvodnica za ImA, što znači da je $ImA = [\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}]$ te je po definiciji ranga

$$r(A) = dimImA = dim[\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}].$$

S druge strane, stupci matrice $[A]_e^f$ baš su matrični zapisi vektora iz skupa $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$, odnosno $[Ae_1]^f, \ldots, [Ae_n]^f$. Po definiciji ranga matrice je

$$r([A]_e^f) = dim[\{[Ae_1]^f, \ldots, [Ae_n]^f\}].$$

Gornje dvije linearne ljuske su izomorfni vektorski prostori po Propoziciji 2.2, a kako izomorfizmi čuvaju linearnu nezavisnost, slijedi da su navedeni rangovi jednaki. □

Napomena 6.2. Gornja propozicija vrijedi i za defekt zbog teorema o rangu i defektu.

Navedimo teorem koji nam jamči da je prethodna propozicija neovisna o izboru baze vektorskog prostora.

Teorem 6.3. *Dvije matrice su ekvivalentne ako i samo ako su istog ranga(i defekta).*

Dokaz. Dokaz potražiti u [1, str.129.]

Napomena 6.3. Kako je sličnost matrica poseban slučaj ekvivalentnosti matrica, gornji teorem vrijedi i za slične matrice. Dakle, rang i defekt matrice su invarijante sličnosti matrica, pa i operatora. Time smo opravdali da Propozicija 6.3 ne ovisi o izboru baza.

6.2 Determinanta i trag

Definicija 6.5. Neka je $A : V \to V$ linearan operator.
Determinantu linearnog operatora definiramo s:

$$\boldsymbol{detA = det[A]_e^e}.$$

Trag linearnog operatora definiramo s:

$$\boldsymbol{trA = tr[A]_e^e}.$$

Pri čemu je e bilo koja baza vektorskog prostora V.

Napomena 6.4. Prethodna definicija ne ovisi o izboru baze, a to je posljedica tvrdnje da slične matrice imaju jednake determinante i tragove.

Propozicija 6.4. *Slični operatori imaju jednake determinante.*

Dokaz. U dokazu ćemo se najviše koristiti Binet-Cauchyjevim teoremom za matrice.
Neka su A i B slični operatori, odnosno postoji regularan operator S takav da je $B = S^{-1}AS$. Tada je $[B]_e^e = ([S]_e^e)^{-1}[A]_e^e[S]_e^e$ za bilo koju bazu e.

$$detB = det[B]_e^e = det(([S]_e^e)^{-1}[A]_e^e[S]_e^e) = det([S]_e^e)^{-1}det[A]_e^e det[S]_e^e =$$
$$det([S]_e^e)^{-1}det[S]_e^e det[A]_e^e = det(([S]_e^e)^{-1}[S]_e^e)det[A]_e^e = det[A]_e^e = detA.$$

□

Još nešto možemo saznati iz determinante operatora, a to je njegova regularnost, odnosno izomorfnost. Naime, matrica je singularna ako i samo ako je njezina determinanta jednaka nuli. Dakle, isto vrijedi i za operatore.

Propozicija 6.5. *Slični operatori imaju jednake tragove.*

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti definiciju traga operatora i činjenicu da, unutar traga, matrice komutiraju. Dakle, ako su A i B slični operatori onda, za njihove matrične zapise, vrijedi $[B]_e^e = ([S]_e^e)^{-1}[A]_e^e[S]_e^e$ pa je:

$$trB = tr[B]_e^e = tr(([S]_e^e)^{-1}[A]_e^e[S]_e^e) = tr(([S]_e^e)^{-1}[S]_e^e[A]_e^e) = tr[A]_e^e = trA.$$

□

Time je pokazano da su i determinanta i trag invarijante sličnosti operatora.

6.3 Svojstveni i minimalni polinom

Prisjetimo se nekih temeljnih pojmova.

Definicija 6.6. Neka je $A \in L(V)$. Kažemo da je skalar λ_0 svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V, x \neq 0$, takav da je

$$Ax = \lambda_0 x.$$

Vektor x naziva se svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_0. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se spektar operatora A i označava sa $\sigma(A)$.

Napomena 6.5. Primijetimo da je nulvektor jedini vektor koji nije svojstveni ni za jednu svojstvenu vrijednost, a za jedinični operator su svi vektori prostora, osim nulvektora, svojstveni za svojstvenu vrijednost 1.

Definicija 6.7. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ te neka je $[A]_e^e$ matrica operatora A u nekoj bazi e prostora V. Svojstveni polinom operatora A, u oznaci $k_A(\lambda)$, definira se kao svojstveni polinom matrice $[A]_e^e$, odnosno

$$\boldsymbol{k_A(\lambda) = k_{[A]_e^e}(\lambda)}.$$

Napomena 6.6. Gornja definicija ne ovisi o izboru baze, a to je posljedica toga da slične matrice imaju jednake svojstvene polinome.

Prisjetimo se još i definicije svojstvenog polinoma matrice.

Definicija 6.8. Polinom $k_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ naziva se svojstveni polinom matrice A.

Propozicija 6.6. *Svojstvene vrijednosti operatora nultočke su svojstvenog polinoma.*

Dokaz. Za dokaz pogledati [2, str. 175.]

Napomena 6.7. Operator je regularan ako i samo ako je $k_A(0) \neq 0$.

Napomena 6.8. Primijetimo da je 0 svojstvena vrijednost operatora ako i samo ako je operator singularan jer je tada $det(A - 0I) = 0$, tj. $detA = 0$. To je još jedan način utvrđivanja regularnosti, odnosno izomorfnosti, operatora.

Teorem 6.4 (Hamilton-Cayley)**.** *Neka je $A \in L(V)$. Tada je*

$$k_A(A) = 0.$$

Dokaz. Dokaz pronaći u [2, str. 185.]

Propozicija 6.7. *Slični operatori imaju jednake svojstvene polinome.*

Dokaz. Dokaz se temelji na činjenici da konstatni operatori komutiraju sa ostalima. Neka su $A, B \in L(V)$ slični operatori i $S \in L(V)$ operator prijelaza iz jedne u drugu bazu, tj. $B = S^{-1}AS$. Tada je

$$B - \lambda I = S^{-1}AS - \lambda I = S^{-1}(A - \lambda I)S.$$

Primijetimo da su operatori $B-\lambda I$ i $A-\lambda I$ slični. Pokazali smo već da slični operatori imaju jednake determinante pa uzmemo li determinantu gornjeg izraza, dobivamo da operatori $B-\lambda I$ i $A-\lambda I$ imaju jednake determinante što nas dovodi do zaključka da je $k_B(\lambda) = k_A(\lambda)$. □

Napomena 6.9. Iz toga slijedi da slični operatori imaju jednake i svojstvene vrijednosti jer imaju jednake svojstvene polinome.

Definirajmo i minimalni polinom operatora.

Definicija 6.9. Minimalni polinom operatora $A \in L(V)$ definira se kao:

$$\boldsymbol{\mu_A(\lambda) = \mu_{[A]_e^e}(\lambda)}.$$

Napomena 6.10. Gornja definicija također ne ovisi o izboru baze jer slične matrice imaju jednake minimalne polinome.

Teorem 6.5. *Neka je $A \in L(V)$ i $st\mu_A(\lambda) = m$. Vrijedi:*

- *$\mu_A(\lambda)$ je normirani polinom najmanjeg stupnja među svim netrivijalnim polinomima kojima je operator A nultočka.*
- *skup $\{I, A, A^2, \ldots, A^{m-1}\}$ je linearno nezavisan.*
- *za neki polinom $P(\lambda)$ vrijedi $P(A) = 0$ ako i samo ako $\mu_A(\lambda)$ dijeli $P(\lambda)$.*
- *minimalni polinom dijeli karakteristični polinom.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [3, str. 36.].

Propozicija 6.8. *Minimalni polinom operatora jedinstven je do na množenje skalarom različitim od nule. Dakle, ako je $\mu_1(\lambda)$ minimalni polinom operatora A, onda je i $\mu_2(\lambda) = \pi\mu_1(\lambda)$ također minimalni polinom operatora A.*

Dokaz. Kako je π skalar, možemo ga shvatiti kao konstantni polinom iz čega slijedi da su polinomi $\mu_2(\lambda)$ i $\mu_2(\lambda)$ jednakog stupnja. Pogledajmo $\mu_2(A)$.

$$\mu_2(A) = \pi\mu_1(A) = \pi \cdot 0 = 0.$$

Što znači da je i $\mu_2(\lambda)$ minimalni polinom operatora A. □

Propozicija 6.9. *Slični operatori imaju jednake minimalne polinome.*

Dokaz. Neka su A i B slični operatori, dakle, $B = S^{-1}AS$. Neka su $\mu_A(\lambda)$ i $\mu_B(\lambda)$ minimalni polinomi operatora A i B i neka je

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m + \alpha_{m-1}\lambda^{m-1} + \ldots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Uvrstimo B u $\mu_A(\lambda)$:

$$\mu_A(B) = B^m + \alpha_{m-1}B^{m-1} + \ldots + \alpha_1 B + \alpha_0 I = (S^{-1}AS)^m + \alpha_{m-1}(S^{-1}AS)^{m-1} + \ldots + \alpha_1(S^{-1}AS) + \alpha_0 I = S^{-m}A^m S^m + S^{-(m-1)}\alpha_{m-1}A^{m-1}S^{m-1} + \ldots + S^{-1}\alpha_1 AS + \alpha_0 I = S^{-1}(A^m + \alpha_{m-1}A^{m-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I)S = S^{-1}\mu_A(A)S.$$

Znamo da operator poništava svoj minimalni polinom pa je $\mu_A(A) = 0$ te je gornji izraz jednak nuli, što znači da je $\mu_A(B) = 0$. Kako je $\mu_B(\lambda)$ minimalni polinom operatora B, znači da je $st\mu_A \leq st\mu_B$. Analogno, uzevši da je $A = SBS^{-1}$, dolazimo do zaključka da je $st\mu_B \leq st\mu_A$. Dakle, $st\mu_A = st\mu_B$. S druge strane po Teoremu 6.5 zaključujemo da polinom $\mu_B(\lambda)$ dijeli polinom $\mu_A(\lambda)$ pa je

$$\mu_A(\lambda) = \mu_B(\lambda) \cdot q(\lambda).$$

Slijedi da je polinom $q(\lambda)$ stupnja 1, odnosno konstanta, dakle, $q(\lambda) = \pi$ pa je $\mu_A(\lambda) = \pi\mu_B(\lambda)$, što po Propoziciji 6.8 znači da je i $\mu_B(\lambda)$ minimalni polinom operatora A. □

Time smo pokazali da su svojstveni i minimalni polinom operatora također invarijante sličnosti operatora.

6.4 Zaključak

Ovo poglavlje zaključit ćemo jednim primjerom u kojemu ćemo pokazati da su rang, defekt, trag, determinanta, svojstvene vrijednosti, svojstveni polinom te minimalni polinom danog operatora jednaki neovisno o tome u kojoj bazi prostora gledamo matricu operatora.

Primjer 6.3. *Neka je zadan operator* $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (9x + 3y, 6x + 2y)$ *i neka je* $e = \{e_1, e_2\}$ *kanonska baza prostora* $\mathbb{R}^2$ *te* $e' = \{e'_1, e'_2\}, e'_1 = (2, 1), e'_2 = (0, 3)$ *nova baza prostora* $\mathbb{R}^2$. *Za matrice* $[A]^e_e$ *i* $[A]^{e'}_{e'}$ *izračunajmo trag, determinantu, rang, defekt, svojstvene vrijednosti, svojstveni polinom i minimalni polinom.*

Tada je $[A]^e_e = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}$.

$r([A]^e_e) = 1$, *jer su stupci(retci) linearno zavisni* $\Rightarrow d([A]^e_e) = 2 - 1 = 1$

$tr[A]^e_e = 9 + 2 = 11$

$det[A]^e_e = 9 \cdot 2 - 3 \cdot 6 = 0$

$k_{[A]^e_e}(\lambda) = det([A]^e_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 3 \\ 6 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)(2-\lambda) - 3 \cdot 6 = (9-\lambda)(2-\lambda) - 18 = \lambda^2 - 11\lambda = \lambda(\lambda - 11) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 11.$ $\mu_{[A]^e_e}(\lambda) = \lambda(\lambda - 11)$.

Prijeđimo sada u bazu e'. $[S]^e_e = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $([S]^e_e)^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

$$[A]^{e'}_{e'} = ([S]^e_e)^{-1}[A]^e_e[S]^e_e = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 27 & 9 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 63 & 27 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

Primijetimo da su matrice $[A]^e_e$ *i* $[A]^{e'}_{e'}$ ***slične!***

$r([A]^{e'}_{e'}) = 1$, *jer su stupci(retci) linearno zavisni* $\Rightarrow d([A]^{e'}_{e'}) = 1$

$tr([A]^{e'}_{e'}) = \frac{1}{6} \cdot (63 + 3) = 11$

$det([A]^{e'}_{e'}) = \frac{1}{6} \cdot (189 - 189) = 0$

$k_{[A]^{e'}_{e'}}(\lambda) = det([A]^{e'}_{e'} - \lambda I) = \begin{vmatrix} \frac{63}{6} - \lambda & \frac{27}{6} \\ \frac{7}{6} & \frac{3}{6} - \lambda \end{vmatrix} = (\frac{63}{6} - \lambda)(\frac{3}{6} - \lambda) - \frac{27}{6}\frac{7}{6} = \lambda^2 - 11 = \lambda \cdot (\lambda - 11) \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 11.$ $\mu_{[A]^{e'}_{e'}}(\lambda) = \lambda(\lambda - 11)$.

Vidimo da zbilja izračunavanje danih vrijednosti ne ovisi o izboru baze za matricu operatora.

Dakle, što sve možemo saznati o lineranom operatoru iz njegove matrice?

- Rang,
- defekt,
- trag,
- determinantu,
- svojstvene vrijednosti i svojstveni polinom,
- minimalni polinom,
- dimenziju polaznog i dolaznog prostora,
- izomorfnost preko determinantne ili pomoću svojstvenih vrijednosti ili pomoću ranga i defekta monomorfnost, epimorfnost i izomorfnost.

Bibliografija

[1] S. Kurepa, Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[2] D.Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] H.Kraljević, Vektorski prostori, Predavanja na Odjelu za matematiku, Osijek, 2008.

[4] https://web.math.pmf.unizg.hr/ gmuic/predavanja/vp.pdf