Matematika antičke Grčke

Siladić, Ines

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matematika antičke Grčke

Ines Siladić

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matematika antičke Grčke

Ines Siladić

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Tijekom povijesti matematika se stalno razvijala u smislu produbljivanja i proširivanja. U egipatskim papirusima otkrivena su različita matematička dostignuća, no bez ikakva objašnjenja. U tzv. Rhindovu papirusu naveden je velik broj matematičkih postupaka starih Egipćana. U Mezopotamiji su Sumerani razvili (seksagezimalni) brojevni sustav. Sačuvane su glinene pločice iz kojih je zamjetljiva matematička nastava. Kao pomoćna sredstva sastavljene su tablice množenja cijelih brojeva i recipročnih vrijednosti, tablice kvadrata i kvadratnih korjena. Drugi korijen od 2 odredili su s točnošću koja od prave vrijednosti odstupa tek za jednu milijuntinu. Sumerani su poznavali i aritmetički i geometrijski red. Rješavali su linearne i kvadratne jednadžbe, a među riješenim jednadžbama nalazi se i nekoliko jednadžbi trećega stupnja. Sve to bilo je postignuto već u Hamurabijevo doba.
Početci grčke matematike javljaju se u Joniji. Budući da je gotovo svaka država imala pristup moru, razvila se trgovina, a Grci su na svojim putovanjima preuzeli matematička znanja Egipćana koja su interpretirali na svoj način. Izraz "grčka matematika" koristimo kad govorimo o matematici koja se tako počela razvijati u 7. st.pr.Kr. i temelji se na starogrčkim tekstovima. Antička grčka obuhvaćala je područje današnje Grčke, zapadne Turske (Jonija), dio južne Italije, Sicilije i ostala područja u kojima se govorilo grčkim jezikom.

Slika 1: Antička Grčka

U početku su se Grci bavili matematikom uz osnovni cilj shvaćanja čovjekovog mjesta u svemiru. Prije Grka matematika je bila pretežno empirijska znanost, a oni su nastojali sva znanja povezati u jedan cjelovit i skladan sustav učinivši tako matematiku istaknutom disciplinom.
Matematika napušta pragmatiku i praksu, a matematičko istraživanje postaje samo sebi svrhom. Logika dobiva na značaju, a geometrija postaje "prava", čista i apstraktna znanost.

Starogrčku matematiku možemo podijeliti na tri najznačajnija razoblja:

- razdoblje Pitagore,
- razdoblje Euklida,
- razdoblje Arhimeda.

1 Grčki brojevi

Drevni grčki brojevni sustav je u upotrebi već u 7. st.pr.Kr., a u potpunosti je razvijen oko 450. g.pr.Kr. Grci su imali različite brojevne sustave za glavne i redne brojeve, mnogi grčki matematičari davali su vlastite prijedloge za brojeve, ali ipak nisu šire prihvaćeni. Koristili su akrofonski sustav brojeva (atički brojevi). To je sustav s bazom 10, sličan ranijem egipatskom sustavu i kasnijem rimskom sustavu. Simboli za brojeve bila su slova kojima su počinjali nazivi tih brojeva. Simbol za broj 1 je jednostavno "I", a sistem označavanja ostalih brojeva bazirao se na principu dodavanja.

Π	Δ	Η	Χ	Μ
Pente	Deka	Hekaton	Khilioi	Myrioi
Πεντε	Δεκα	Ηεκατον	Χιλιοι	Μυριοι
5	10	100	1000	10000

Ι	ΙΙ	ΙΙΙ	ΙΙΙΙ	Π	ΠΙ	ΠΙΙ	ΠΙΙΙ	ΠΙΙΙΙ	Δ	𐅄	Η	𐅅	Χ	𐅆	Μ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	1000	5000	10000

Slika 2: Akrofonski sustav

Samo su pojedini brojevi imali posebne oznake, a ostali su se dobivali slično kao rimski.

Slika 3: broj 4567

Dakle, nedostatak je bilo to što se za prikaz velikih brojeva koristio velik broj znakova. Akrofonskom sustavu slijedio je, nama poznatiji, alfabetski sustav. Vrijednost brojeva označavala se velikim i malim slovima grčkog alfabeta.

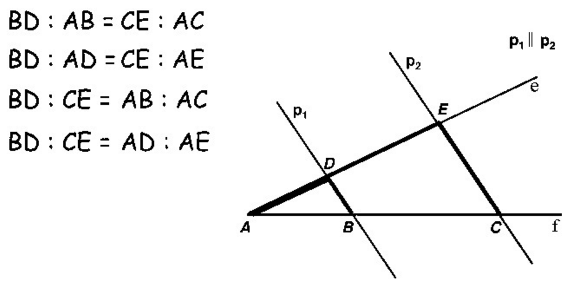
α 1	β 2	γ 3	δ 4	ε 5	ς 6	ζ 7	η 8	θ 9
ι 10	κ 20	λ 30	μ 40	ν 50	ξ 60	ο 70	π 80	ϟ 90
ρ 100	σ 200	τ 300	υ 400	φ 500	χ 600	ψ 700	ω 800	ϡ 900

Slika 4: Alfabetski sustav

2 Tales

Najraniji grčki matematičar, znanstvenik i filozof kojeg grčka tradicija ističe kao osnivača matematike je Tales iz Mileta (Tales Milečanin, 624.-547. g.pr.Kr.). Tales je bio feničkog podrijetla, nije sigurno je li se rodio u Miletu ili je došao u Milet nakon što je prognan iz Fenicije.
Najznačajniji matematički rezultat koji vežemo uz Talesa je Talesov pučak o proporcionalnosti:

Teorem 1 *Ako pravce e i f presječemo paralelnim pravcima p_1 i p_2, tada je točka A presjek pravaca e i f, B je presjek pravaca f i p_1, C je presjek pravaca f i p_2, D je presjek pravaca e i p_1, E je presjek pravaca e i p_2 te vrijedi sljedeće:*



Slika 5: Talesov poučak

Grčki filozof i matematičar Proklos pripisuje Talesu točno predviđanje pomrčine Sunca 585. g.pr.Kr. kao i sljedeće geometrijske teoreme:

Teorem 2 *Promjer dijeli krug na dva jednaka dijela.*

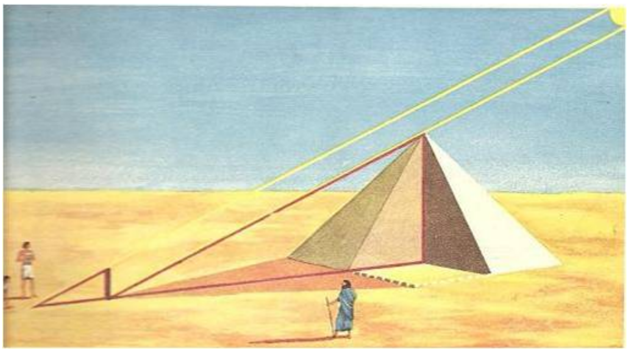
Teorem 3 *Kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki.*

Teorem 4 *Nasuprotni kutovi nastali presjekom dvaju pravaca su jednaki (vršni kutovi su jednaki).*

Teorem 5 (KSK teorem o sukladnosti trokuta) *Dva trokuta su sukladna ako imaju jednaku stranicu i jednake njoj priležeće kutove.*

Teorem 6 (Talesov teorem o obodnom kutu) *Svaki obodni kut nad promjerom kužnice je pravi.*

Iako su navedeni teoremi bili ranije poznati Egipćanima i Babiloncima, pretpostavlja se da je Tales prvi koji ih je dokazao. Svojim matematičkim opažanjima dao je doprinos i nautici. Našao je metodu kako izračunati udaljenost brodova od obale. Postoji nekoliko zapisa o tome kako je izračunao visinu piramide pomoću sjene. Tijekom sunčanog dana čekao je trenutak kada će sjena predmeta (npr. štapa koji je zabio u pijesak) biti jednaka visini tog predmeta. To je onda primjenio i na piramidu te pomoću sjene izračunao njenu visinu.



Slika 6: Računanje visine piramide pomoću sjene

Talesove mudre izreke:

- 'Najstarija od svih stvari je Bog jer on se nije rodio.'
- 'Najljepša stvar je svijet jer je djelo Božje.'
- 'Najveći je prostor jer on obuhvaća sve stvari.'
- 'Najbrži je um jer on trči svuda.'
- 'Najmudrije je vrijeme jer ono pronalazi sve.'

3 Pitagora

Slika 7: Pitagora

3.1 Pitagorina matematika

Pitagora (582.-496. g.pr.Kr.) je rođen na grčkom otoku Samosu (danas dio Turske) kao sin bogatog trgovca s kojim je puno putovao. Tijekom putovanja se susretao s mnogim učiteljima i misliocima, a kad mu je bilo između 18 i 20 godina, posjetio je i Talesa u Miletu. On ga je još više zainteresirao za matematiku i astronomiju te mu savjetovao da ode u Egipat kako bi stekao više znanja. Tamo je sudjelovao u mnogim raspravama sa svećenicima i misliocima. I sam se prijavio te bio primljen u svečenstvo gdje je učio o geometriji. Tajnovitost egipatskog svečenstva, njihovo odbijanje nošenja odjeće od životinjske kože, njihov zavjet čistoće, kao i ostala pravila, zasigurno su utjecala na kasnije rituale i strogost Pitagorejske škole. Živio je godinama u Egiptu, a oko 530. g.pr.Kr. naselio se u grčkom gradu južne Italije, Crotoni. Tamo je okupio grupu učenika i osnovao, već ranije spomenutu, Pitagorejsku školu. Pitagorejci su bili usredotočeni na aritmetiku, geometriju, glazbu i astrologiju. Vjerovali su u tezu "*sve je broj*", tj. da je svemu fizičkom i duhovnom dodijeljen broj i oblik.
Ne zna se točan datum i okolnosti Pitagorine smrti, ali Pitagorejska škola je još dugo nakon toga nastavila s radom.

3.2 Glazba i brojevi

Po Pitagorejskom vjerovanju je glazba melem za uši, očišćenje od svega što je grešno i nečisto. Pitagora i njegovi sljedbenici su istraživali intervale u glazbi. Na žičanim instrumentima otkrili su ovisnost visine tona i duljine žice što je dovelo do pojma intervala u glazbi. Tada se pomoću njih mogla stvoriti cjelovita glazbena ljestvica.
Odnosi među intervalima imaju svoju osnovu u odnosima među brojevima. Tako je odnos 2 : 1 nazvan *oktava*, 3 : 2 *kvinta*, 4 : 3 *kvarta*.

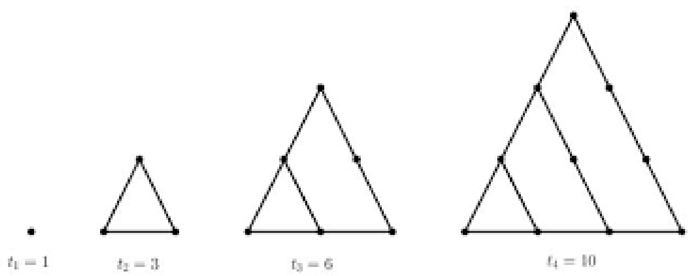
Slika 8: glazba i brojevi

3.3 Teorija brojeva i geometrija

Teško je utvrditi što od matematičkih otkrića pripada samom Pitagori, a što njegovim sljedbenicima, ali smatra se da je njegova škola zaslužena za uvođenje pojma dokaza. Nije vjerojatno da su Pitagorejci imali brojčane simbole, nego su brojeve zamišljali kao kamenčiće u pijesku ili točke u određenim geometrijskim uzorcima. Brojevi su bili klasificirani kao trokutnii, kvadratni, peterokutni i tako dalje s obzirom na geometrijski uzorak.
Tako su 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45... primjeri trokutnih brojeva.

Trokutni brojevi su brojevi oblika

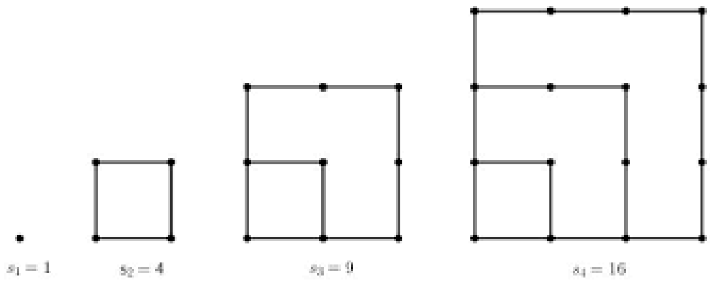
$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$



Slika 9: Trokutni brojevi

Kvadratni brojevi su brojevi oblika

$$1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2.$$



Slika 10: Kvadratni brojevi

3.4 Pitagorine trojke

Poznavali su ih još stari Babilonci, ali način njihova pronalaženja nije im bio poznat. Egipćani su znali za trokut sa stranicama 3, 4, 5, a kako je Pitagora bio u Egiptu, možemo zaključiti da je preuzeo egipatsko znanje o trokutima. Pitagorine trojke su trojke prirodnih brojeva (x, y, z) koje zadovoljavaju jednadžbu $x^2+y^2 = z^2$ gdje su x, y katete, a z hipotenuza Pitagorinog trokuta.

Teorem 7 *Ako su x, y, z relativno prosti prirodni brojevi takvi da je*

$$x^2 + y^2 = z^2$$

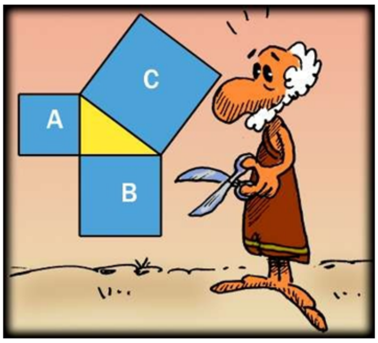
$$x = 2mn$$
$$y = m^2 - n^2$$
$$z = m^2 + n^2$$

za neke $m, n \in \mathbb{N}$, onda je točno jedan od m i n paran, a drugi neparan. Sve Pitagorine trojke (x, y, z) s relativno prostim x, y, z su gornjeg oblika.

3.5 Pitagorin poučak

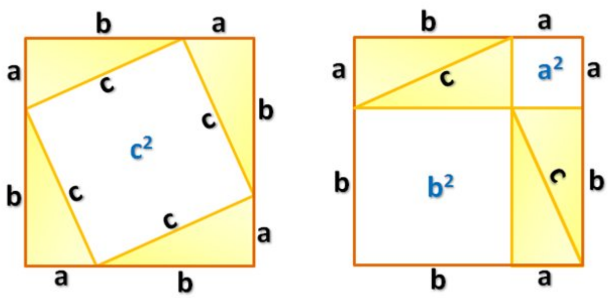
Pitagorin poučak je jedan od osnovnih teorema geometrije:

Teorem 8 (Pitagorin poučak) *Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta.*



Slika 11: Pitagorin poučak

Pitagorejci pojam *kvadrat* nisu shvaćali kao mi danas, već jednostavno kao geometrijski lik konstruiran nad stranicama trokuta. Činjenica da je zbroj dvaju kvadrata jednak trećem, značila je da se dva kvadrata mogu izrezati na likove od kojih se može sastaviti jedan kvadrat koji je sukladan kvadratu nad hipotenuzom.
Ne zna se sa sigurnošću koji su dokaz Grci izvorno prikazali za Pitagorin poučak, ali vjerojatno se radi o dokazu disekcije koji je sličan sljedećem: Veliki kvadrat sa stranicama $a+b$ podijeljen je na dva manja kvadrata sa stranicama a i b, i dva jednaka pravokutnika sa stranicama a i b. Svaki od tih pravokutnika može biti podijeljen na dva jednaka pravokutna trokuta povlačenjem dijagonale c. Unutar kvadrata stranice $a+b$ mogu biti smještena četiri trokuta. Površina kvadrata može biti prikazana na dva načina:



Slika 12: Dokaz Pitagorinog poučka

1. Kao zbroj površina kvadrata i trokuta

$$(a+b)^2 = c^2 + 4(\frac{ab}{2}),$$

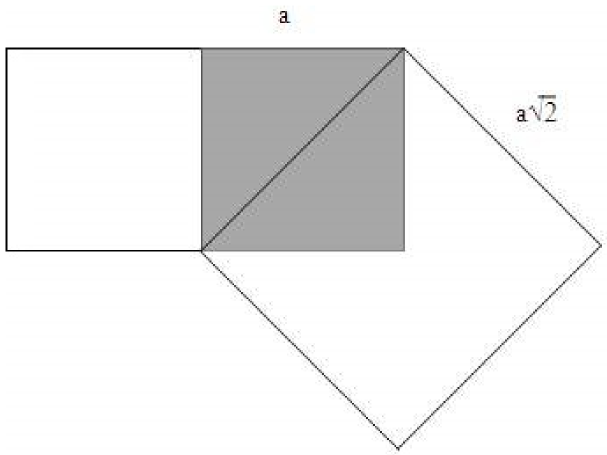
2. Kao zbroj površina dvaju kvadrata i dvaju pravokutnika

$$(a+b)^2 = c^2 + b^2 + 2ab.$$

Kad se površine četiriju trokuta oduzmu od površine većeg kvadrata u svakom liku, rezultat su jednake površine. Dakle, $c^2 = a^2 + b^2$ kvadrat na c jednak je zbroju kvadrata na a i b. Iako je taj poučak nazvan po Pitagori, bio je poznat još starim Babiloncima oko 1800. g.pr.Kr. Pitagora je bio prvi koji ga je dokazao.

3.6 Iracionalan broj

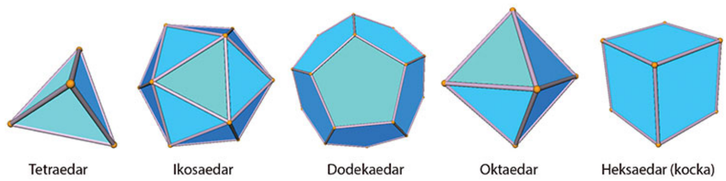
Za Pitagorejce broj je bio racionalan broj i postojanje iracionalnih brojeva srušilo bi njihov idiličan pogled na svijet. Nije ih obradovalo saznanje da je kvadrat nad dijagonalom dvostruko veći od kvadrata nad stranicama kvadrata.



Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni jednakokračni trokut, dobiva se jednakost $d^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$,tj. $d = a\sqrt{2}$. Ako je $a = 1$, onda je $d = \sqrt{2}$, a to bi značilo da postoji broj koji pomnožen sam sa sobom daje 2. Pitagorejcima se pripisuje otkriće iracionalnog broja koji tek kasnije dobiva naziv *iracionalan broj.*

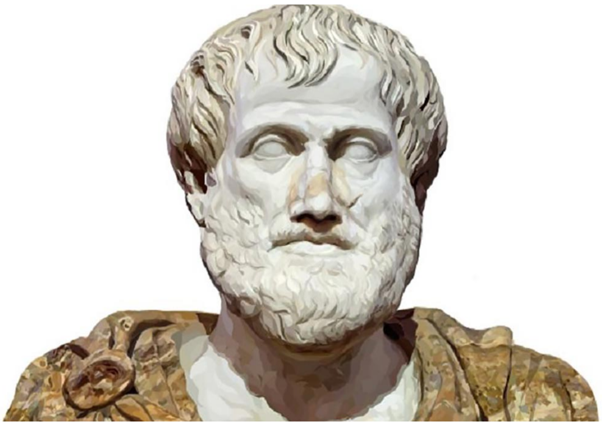
4 Platon

Platon je rođen 427. g.pr.Kr. u Ateni. Kako je bio rodom iz aristokratske obitelji, od rođenja mu je omogućeno najbolje obrazovanje i odgoj. Bio je Sokratov učenik, a na njega je uz Sokrata utjecao i Pitagora. Smatrao je da bez matematike nema prave mudrosti. Oko 387. g.pr.Kr. u Ateni je osnovao Akademiju koja je okupila filozofe i matematičare iz cijelog grčkog svijeta. Bavili su se aritmetikom, geometrijom, astronomijom i glazbom. Velika važnost pridavala se matematici, što nam govori i natpis na ulazu u Akademiju *"Neka ne ulazi tko ne zna geometriju"*. Akademija je nastala po uzoru na pitagorejsku školu; imala je svoj program, pravila ponašanja, biblioteku, spavaonice za učenike i sve ostalo.
Platon je posebna svojstva pripisivao pravilnim poliedrima koji su dobili naziv *'Platonova tijela'*. U svom djelu 'Timej', Platon tvrdi da su četiri osnovna elementa Zemlja, Zrak, Vatra i Voda te da je svaki od njih povezan s jednim trodimenzionalnim oblikom. Tako povezuje kocku (heksaedar) sa Zemljom, tetraedar s Vatrom, oktaedar sa Zrakom, a ikosaedar s Vodom. Platon spominje *peti element* dodekaedar koji je povezan s petim elementom za koji vjeruje da je Svemir (Eter).



Slika 13: Platonova tijela

5 Aristotel



Najznačajnija osoba povezana s Akademijom bio je Aristotel (384.-322. g.pr.Kr.). Studirao je na Platonovoj akademiji u Ateni od svoje 18. godine sve do Platonove smrti 347. g.pr.Kr. Aristotel je pisao o mnogim temama uključujući politiku, etiku, fiziku, biologiju i matematiku u kojoj je najveći utjecaj ostavio na području logike. Uvodi i razrađuje pojmove poput indukcije, dedukcije, silogizma, dokaza. Pokazuje da je metoda indukcije put do spoznaje, da se od pojedinačne stvari dođe do određenog pojma. Prvi se bavio oblicima zaključivanja, od kojih je najpoznatiji silogizam. Silogizam je oblik logičkog zaključivanja kojim se iz dvaju ili više već gotovih sudova (pretpostavki) izvodi novi sud (zaključak).

Primjer 1 *Ako su svi majmuni primati, a svi primati sisavci, slijedi da su svi majmuni sisavci.*

Primjer 2 *Ako su svi katolici kršćani, a kršćani nisu muslimani, slijedi da niti jedan katolik nije musliman.*

Arostotel se bavio i pojmom *beskonačnosti.* Možda je jedan od razloga proučavanja beskonačnosti bio taj što je želio opovrgnuti poznate Zenonove paradokse; poznati 'Argumenti protiv kretanja' opisani u Aristotelovoj Fizici.

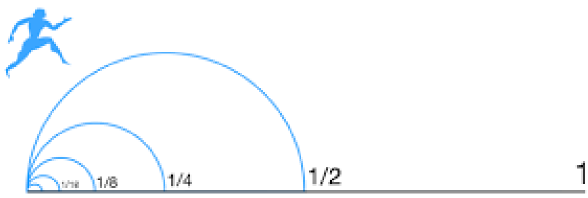
6 Zenonovi paradoksi

Paradoksi Zenona iz Eleje zbunjivali su i inspirirali filozofe, matematičare i fizičare preko dvije tisuće godina.

Paradoks dihotomije

'Ono što je u pokretu mora prvo prijeći pola puta prije nego što stigne do cilja.(Aristotel,'Fizika')'

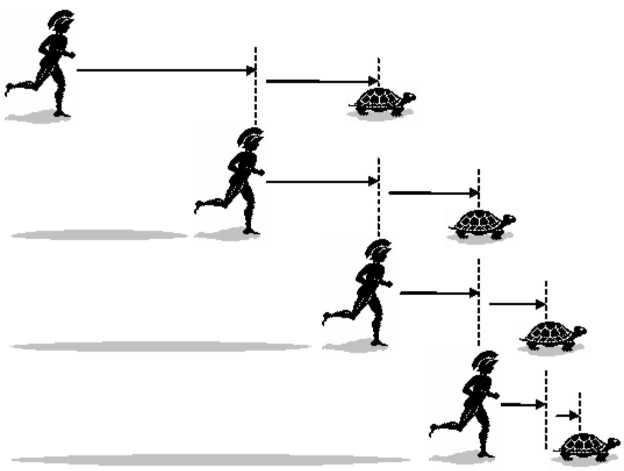
Zamislite tijelo koje ide od točke A do točke B. Da bi došlo do točke B, prvo mora doći do srednje točke B_1, a da bi došlo do B_1, prvo mora doći do srednje točke B_2 (između A i B_1) i tako dalje. Dakle, zaključak je da uopće nema kretanja.



Slika 14: Paradoks dihotomije

Ahilej i kornjača

Zamislimo utrku Ahileja i kornjače. Kako je kornjača puno sporija, ona ima prednost od 100 metara, a pretpostavimo da je Ahilej 10 puta brži od kornjače. Da bi dostigao kornjaču, prvo mora proći onih 100 metara što je u zaostatku. Za to vrijeme je kornjača prošla 10 metara (10 puta manje od Ahileja). Sad Ahilej opet mora doći do mjesta ma kojem je kornjača, a ona će za to vrijeme proći još 1 metar. Tako se problem ponavlja u svakom sljedećem koraku i dolazimo do zaključka da Ahilej nikad neće pretići kornjaču.
Broj koraka koji Ahilej mora proći: $100 + 10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \ldots$

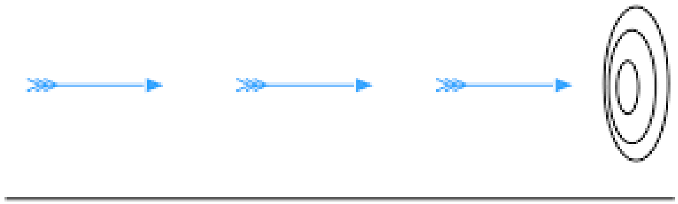


Slika 15: Paradoks Ahileja i kornjače

Paradoks strijele

'Ako je sve nepomično što zauzima prostor, i ako sve što je u pokretu zauzima takav prostor u nekom vremenu, onda je leteća strijela nepokretna.(Aristotel,'Fizika')'

Zamislimo da strijela leti tijekom jednog vremenskog intervala. Uzmite svaki moment u tom intervalu. Nemoguće je da se strijela miče u takvom momentu jer mu je trajanje 0 i strijela ne može biti na dva mjesta u isto vrijeme. Prema tome, strijela je nepomična tijekom čitavog intervala.



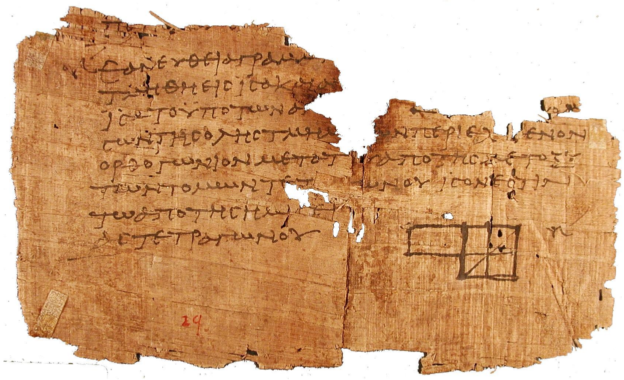
Slika 16: Paradoks strijele

Paradoks stadiona

Čovjeku koji je na kočiji koja se mimoilazi s drugom kočijom, njezino kretanje izgleda brže nego što izgleda gledatelju na tribinama.

7 Euklid

Euklid (330.-275. g.pr.Kr.) je bio jedan od najpoznatijih grčkih matematičara, često zvan ocem geometrije. Malo se zna o njegovom životu, ali pretpostavlja se da je obrazovanje stekao kao Platonov student u Ateni i doživio procvat oko 300. g.pr.Kr. Živio je i radio u Aleksandriji gdje je stvorio matematičku školu *Museion* u kojoj je razvio nastavnu i znanstvenu djelatnost. Napisao je brojna djela, od kojih neka nisu sačuvana. Njegovo čuveno djelo su *"Elementi"*, koji su izvršili ogroman utjecaj na zapadno akademsko mišljenje. Kaže se da su Elementi, poslije Biblije, najviše proučavano, prevađano i tiskano djelo u ljudskoj povijesti (1700 izdanja). Iako Euklidova slava počiva gotovo isključivo na Elementima, bio je autor najmanje deset drugih radova koji pokrivaju velik broj tema. Grčki tekst njegovih *Podataka*, zbirka od 95 zadataka je, osim Elemenata, jedini njegov tekst o čistoj geometriji koji je preživio. Mjesto njegove smrti nije zabilježeno, iako je pretpostavka da je to bila Aleksandrija, a datum njegove smrt se može samo nagađati.



Slika 17: Najstariji sačuvani primjerak Euklidovih Elemenata datira iz 9. st.

7.1 Elementi

Elementi su temeljeni na aksiomima, postulatima i definicijama koji nisu i nikad ne mogu biti dokazani. Djelo je objavljeno oko 300. g.pr.Kr. i sve do 19. stoljeća bilo je osnovni udžbenik geometrije. Sastoji se od 13 knjiga:

- $I. - VI.$ planimetrija,
- $VII. - X.$ aritmetika i teorija brojeva u geometrijskom obliku,
- $XI. - XIII$ stereometrija.

U prvoj knjizi Euklid definira osnovne termine u geometriji ravnine, uključujući: točku, pravac, površinu, kut, itd. Prva knjiga je, može se reći, osnova cijelog dijela 'Elementi'. Ukupno u svim knjigama ima 118 defnicija, a u prvoj knjizi ima ih 23. Ovdje su navedene neke od njih:

Definicija 1 *Točka je ono što nema djelova.*

Definicija 2 *Dužina je duljina bez širine.*

Definicija 3 *Krajevi dužine su točke.*

Definicija 4 *Ploha je ono što ima samo duljinu i širinu.*

Definicija 5 *Krajevi plohe su crte.*

U prvoj knjizi je i 5 postulata. Prva tri pripisuju se Euklidovim prethodnicima, a ostala dva Euklidu.

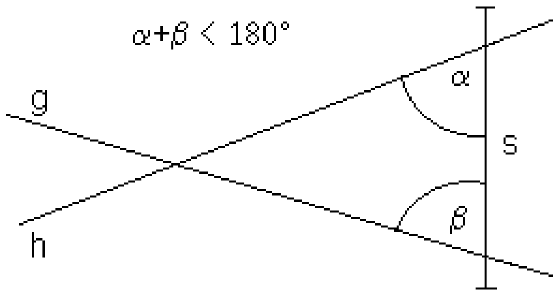
Postulat 1 *Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.*

Postulat 2 *I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.*

Postulat 3 *I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug.*

Postulat 4 *I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.*

Postulat 5 (Postulat o paralelama) *I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.*



Slika 18: Postulat o paralelama

Najznačajniji je peti postulat. Mnogi antički matematičari su pokušali dokazati da je ovaj postulat, u stvari teorem. Neki su čak pisali dokaze. Danas znamo da je Proklo, u svojim komentarima Elemenata, kritizirao Ptolemeja zbog pogrešnog dokaza petog postulata i dao svoj dokaz, također pogrešan.

Danas se pomoću ovih postulata dokazuju mnogi teoremi elementarne geometrije.

Zapisano je i 5 aksioma:

Aksiom 1 *Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake.*
(Jednakost je tranzitivna relacija.)

Aksiom 2 *Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake.*
(Ako je $a = b$ i $c = d$, onda je $a + c = b + d$)

Aksiom 3 *Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostatci su jednaki.*
(Ako je $a = b$ i $c = d$, onda je $a - c = b - d$)

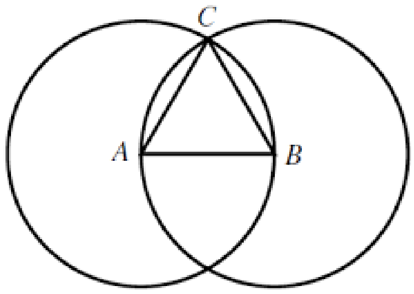
Aksiom 4 *Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake.*

Aksiom 5 *Cjelina je veća od dijela.*

U prvoj knjizi nalazi se i 48 propozicija elementarne geometrije. Neke od njih su:

Propozicija 1 *Na danoj dužini konstruiraj jednakostraničan trokut.*

Dokaz: Koristeći 3. postulat, opišemo kružnicu sa središtem u točki A, polumjera AB, koja prolazi kroz točku B, onda opišemo kružnicu sa središtem u točki B, polumjera AB, koja prolazi kroz točku A. Ove dvije kružnice se sijeku u točki C. Iz te točke povučemo dužine $\overline{CA}$ i $\overline{CB}$ tvoreći trokut ABC. Vidimo da je $|CA|=|AB|$ i $|CB|=|AB|$ jer su to radijusi istog kruga. Slijedi iz aksioma 1 da je $|AB|=|CB|=|CA|$, pa je trokut ABC jednakostraničan.



Slika 19: Propozicija 1

Propozicija 2 *Iz dane točke nanijeti dužinu jednaku danoj dužini.*

Propozicija 3 *Ako su dane dvije nejednake dužine, na veću prenijeti manju.*

Propozicija 4 *Ako su kod dva trokuta dvije stranice jednog, jednake dvjema odgovarajućim stranicama drugog, a kutovi između tih stranica jednaki, tada su i trokuti jednaki (tj. jednake su i preostale stranice i preostali kutovi).*

Druga knjiga se bavi odnosima između različitih pravokutnika i kvadrata te nema jasan cilj. Zapravo, propozicije iz druge knjige su rijetko korištene u ostalim dijelovima Elemenata. Svrha druge knjige bila je tema mnogih rasprava među učenicima grčke matematike. Jedna interpretacija, koja datira iz 19. stoljeća, a koja je učestala i danas, je da ta knjiga, zajedno s nekoliko propozicija iz prve i šeste knjige, najbolje može biti protumačena kao "geometrijska algebra", odnosno prikaz algebarskih pojmova kroz geometrijske oblike.

Treća knjiga obrađuje 37 propozicija o planimetriji kružnice i kruga. Grci su bili impresionirani simetrijom kruga, činjenicom da bez obzira kako ga okrenemo, on uvijek ostaje isti. Smatrali su ga najsavršenijim geometrijskim likom, a kuglu najsavršenijim geometrijskim tijelom. Mnogi teoremi iz treće i četvrte knjige datiraju iz najranijeg razdoblja grčke matematike i postali su dio alata grčkih matematičara za rješavanje drugih problema.

U četvrtoj knjizi je 16 propozicija konstrukcije pravilnih poligona. U petoj knjizi Euklid predstavlja teoriju proporcija i omjera. Sastoji se od 25 propozicija, a neke od njih su *distributivnost množenja prema zbrajanju, asocijativnost množenja prirodnih brojeva, komutativnost množenja*. Šesta knjiga se bavi teorijom sličnosti (*teoremi sličnosti trokuta*), sedma teorijom brojeva (jedna od važnijih propozicija je *određivanje najvećeg zajedničkog višekratnika*). Osma knjiga kroz 27 propozicija govori o djeljivosti i omjerima, deveta knjiga sadrži 36 propozicija o parnim, neparnim i savršenim brojevima, a deseta se bavi teorijom iracionalnih brojeva. Jedanaesta, dvanaesta i trinaesta se bave stereometrijom, a najznačajnija je teorija pravilnih poliedara.

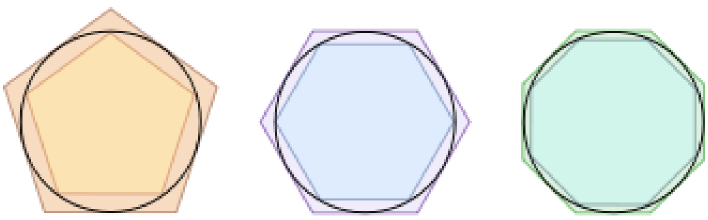
8 Arhimed

Arhimed (287.-212. g.pr.Kr.), rođen u Sirakuzi, bio je grčki fizičar, astronom i veliki matematičar starog vijeka. Potaknut znanjem svog oca, Fidija, koji je inače bio astronom i matematičar, Arhimed je živio tragajući za novim znanjem. Neko vrijeme boravio je u Aleksandriji, ali je najveći dio života proveo u rodnom gradu.
Kralj Sirakuze, Hijeron, zatražio je jednog dana od Arhimeda da mu kaže ima li u zlatnoj kraljevskoj kruni i srebra. Arhimeda je dugo mučio taj problem. Jednog dana, ušavši u kadu da se okupa, opazio je kako se razina vode podigla. Odmah je izašao iz kupaonice i pojurio ulicama Sirakuze vičući *"eureka"*, što znači 'našao sam'. Arhimed je riješio Hijeronov problem. Najprije je izmjerio koliko je kruna teška, onda je pronašao grumen zlata i grumen srebra koji su, svaki pojedinačno, težili koliko i kraljevska kruna. Zatim je spustio krunu u posudu s vodom i izmjerio za koliko se razina vode podigla. To isto je učinio i s grumenom zlata. Da je kruna bila izrađena od čistog zlata, voda bi se podigla do iste visine. Međutim, postojala je razlika pa je Arhimed, izmjerivši i visinu što ju je postigao grumen srebra, mogao izmjeriti kakav je točan odnos između zlata i srebra u kruni.

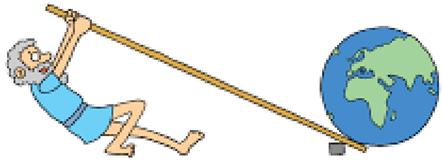
Zakon specifične težine, ili **Arhimedov zakon**, kaže da svaki predmet, potopljen u tekućini, biva potisnut naviše silom koja je jednaka težini istisnute tekućine.

„Tijelo uronjeno u tekućinu lakše je za masu istisnute tekućine."

Najveću slavu, Arhimed je stekao svojim raspravama o zaobljenim geometrijskim tijelima. Izračunao je opseg i površinu kruga, površinu odsječka parabole, volumen kugle, površinu elipse itd. Pri tome se služio metodama kojima se danas služimo u diferencijalnom i integralnom računu, tako da se Arhimed može smatrati tvorcem integralnog računa. Upisivanjem pravilnih mnogokuta od 6, 12, 24, 38 i 96 stranica u krug i njihovim opisivanjem oko kruga Arhimed je našao da se vrijednost broja π nalazi u području od 3 i $\frac{1}{7}$ do 3 i $\frac{10}{71}$ (a to odgovara približnoj vrijednosti $\pi \approx 3.14$).

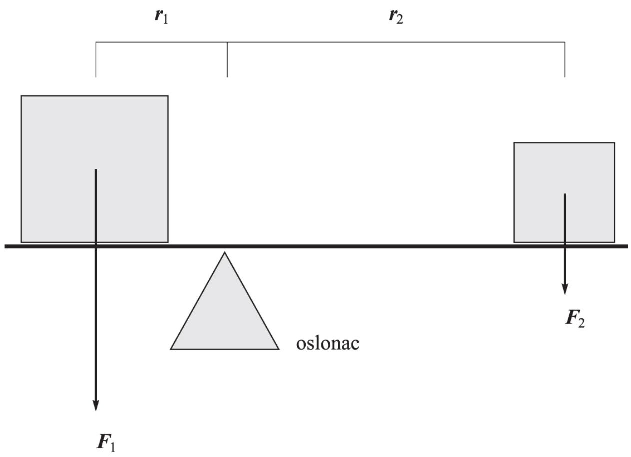


Proširenjem te metode na druge slučajeve, ne samo u ravnini već i u prostoru, Arhimed je vješto izveo mnoge kvadrature ravnih likova i kubature tijela, a i određivanje položaja težišta tijela i ravnih likova. Osobito je važan njegov rezultat da se volumeni stošca, kugle i valjka jednakih polumjera i visina odnose kao 1 : 2 : 3.
Kao genijalni fizičar otkrio je mnoge zakone: zakon poluge (legendarni je njegov uzvik: *"Dajte mi oslonac i dovoljno dugačku polugu pa ću pomaknuti Zemlju"*).



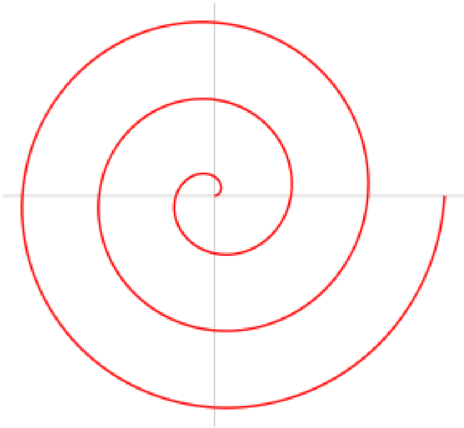
Zakon poluge:

Ako na polugu djeluju dvije sile, tada je: $F_1 \cdot r_1 = F_2 \cdot r_2$, gdje su F_1 i F_2 sile na jednoj i drugoj strani poluge, a r_1 i r_2 kraci sile na jednoj i drugoj strani poluge, pri čemu su vektori sile, kraci sile i os rotacije međusobno okomiti.



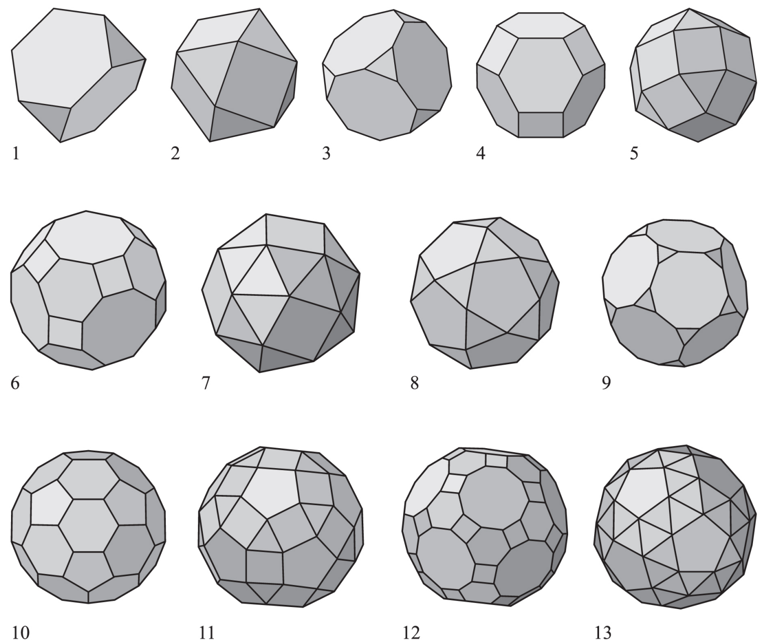
Slika 20: Zakon poluge

Između sačuvanih Arhimedovih djela najvažnija su: O kugli i valjku, O sferoidima i konoidima, O mjerenju kruga, Metoda, O tijelima uronjenima u vodu, O ravnoteži ravnih likova. Arhimed je u djelu *O spiralama* opisao spiralu koja je danas poznata kao **Arhimedova spirala**. Krivulja koja nastaje kad točka, polazeći iz ishodišta, jednako obilazi ishodište i jednako se udaljava od njega. Udaljenost svake točke Arhimedove spirale od odredišta, proporcionalna je kutu zaokreta. Prvi ju je otkrio Konon ali je Arhimed otkrio njena brojna svojstva, među kojima je problem kvadrature kruga, pa stoga spirala nosi njegovo ime.



Slika 21: Arhimedova spirala

Arhimed je tijekom obrane rodnog grada Sirakuze od Rimljana postao legendaran po svom tehničkom umijeću konstrukcije ratnih strojeva i pripisuju mu se mnoge ratne sprave (parabolična zrcala za paljenje brodova ili Arhimedove zrake smrti, Arhimedova kandža, najjači katapult u antici i drugo), ali nema valjanih dokaza da su uistinu bile izrađene i korištene.
Starogrčki matematičar Papo iz Aleksandrije u djelu *Zbornik radova* opisao je 13 tijela koja se zovu polupravilni ili Arhimedovi poliedri. Neki matematičari, među kojima je i hrvatski matematičar Stanko Bilinski, sredinom 20. st. pronašli su 14. Arhimedov poliedar.



Slika 22: Arhimedova tijela:
1. krnji tetraedar, 2. kuboktaedar, 3. krnja kocka, 4. krnji oktaedar, 5. rombokuboktaedar, 6. veliki rombokuboktaedar, 7. skošena kocka, 8. ikosadodekaedar, 9. krnji dodekaedar, 10. krnji ikosaedar, 11. rombikosadodekaedar, 12. veliki rombikosadodekaedar, 13. skošeni dodekaedar

9 Sažetak

U ovom radu upoznali smo se sa početcima i razvitkom matematike u vrijeme antičke Grčke. Stari Grci su utjecali na znanost, posebno matematiku, a njihov utjecaj je od velike važnosti i danas.
Na početku rada smo prikazali grčki brojevni sustav, način na koji su Grci zapisivali brojeve, te nedostatak takvog zapisa. Nadalje, upoznali smo najranijeg grčkog matematičara, Talesa Milečanina. On je zapisao mnoge teoreme, rezultate svojih proučavanja i s razlogom ga grčka tradicija naziva osnivačem matematike. Nakon Talesa, dolazimo do sljedećeg velikog matematičara, Pitagore. Pitagora i njegovi sljedbenici ostvarili su brojne rezultate na području glazbe, teorije brojeva i geometrije. Osvrnuli smo se na Pitagorin poučak, Pitagorine trojke, iracionalan broj. Zatim smo rekli nešto o Platonu i njegovim tijelima, Aristotelu, Zenonovim paradoksima. Pred kraj rada upoznajemo najpoznatijeg grčkog matematičara, Euklida. Euklid, često zvan ocem geometrije, ostavio je iza sebe 13 knjiga koje je obuhvatio u jedno veliko djelo "Elementi". Elementi su i danas jedno od najprevođenijih i najviše proučavanih djela ljudske povijesti. Naveli smo neke definicije, postulate, aksiome i propozicije zapisane u Elementima, te ukratko opisali čime se bavi svaka od 13 knjiga. Na kraju smo rekli najbitnije o Arhimedu s kojim i završava antičko doba matematike.

Ključne riječi:

Antička Grčka, grčki brojevi, Tales, Pitagora, Platon, Aristotel, Zenonovi paradoksi, Euklid, Elementi, Arhimed.

10 Summary

In this paper, we presented the beginnings and the development of mathematics in ancient Greece. Old Greeks influenced science, especially mathematics, and their influence is of great importance today. At the beginning of the paper we introduced the Greek numerical system, the way the Greeks wrote the numbers and the lack of such inscription. Furthermore, we presented the earliest Greek mathematician, Thales of Miletus. He wrote many theories and the results of his studies, so in Greek tradition he is called 'the founder of mathematics' with reason. After Thales, we came to the next great mathematician, Pythagoras. Pythagoras and his followers achieved numerous results in the field of music, numerical theory and geometry. We also wrote about Pythagorean theorem, Pythagorean triple and an irrational number. Then we mentioned something about Plato and his forms, Aristotle and Zeno's paradoxes. Near the end of the paper we introduced the most famous Greek mathematician, Euclid. Euclid, often named the father of geometry, inscribed 13 books which he included in one great work called 'Elements'. Elements are still one of the most translated and the most studied works of human history. We gave some definitions, postulates, axioms and propositions written in Elements, and briefly described each of the 13 books. In the end we mentioned the most important facts about Archimedes, with whom the ancient era of mathematics ended.

Keywords

Ancient Greece, Greek numbers, Thales, Pythagoras, Plato, Aristotle, Zeno's Paradoxes, Euclid, Elements, Archimedes.

Literatura

[1] Victor J.Katz, *History of Mathematics, 3rd edition, Pearson Education, 2009.*

[2] F. M. Brueckler, *Povijest matematike I, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2007.*

[3] *The MacTutor History of Mathematics Archives*, dostupno na
`http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/`

[4] Joško Dvornik *Grčki brojevi, Časopis Nova Akropola, br. 66, 2011.*, dostupno na
`https://nova-akropola.com/mozaik/zanimljivosti/starogrcki-brojevi/`

[5] Elementi, *prva knjiga*, dostupno na
`http://mapmf.pmfst.unist.hr/~gorerc/OG-materijali/ELEMENTI%20-%20prva%20knjiga.pdf`