Leonhard Euler - znameniti matematičar 18. stoljeća

Lovrić, Alen

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:726248

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Alen Lovrić

Leonhard Euler - znameniti matematičar XVIII. stoljeća

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Alen Lovrić

Leonhard Euler - znameniti matematičar XVIII. stoljeća

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Kraj 17. stoljeća i dio ranog 18. stoljeća glavnu ulogu u matematici preuzeli su sljedbenici Newtona i Leibniza koji su svoje ideje o računanju primijenili na rješavanje raznih problema u fizici, astronomiji i inženjerstvu.

U tom razdoblju dominira obitelj Bernoulli u Baselu (Švicarska) koja je dala par generacija izuzetnih matematičara, osobito braću Jacoba (1655. - 1705.) i Johanna (1667. - 1748.). Oni su u velikoj mjeri bili odgovorni za daljnji razvoj Leibnizovog infinitezimalnog računa, osobito kroz generalizaciju i proširenje varijacijskog računa te Pascalove kombinatorne teorije vjerojatnosti i Fermatove teorije brojeva.

Basel je bio rodni grad još jednog velikog matematičara 18. stoljeća, Leonharda Eulera, sina Paula Eulera. Paul je studirao teologiju na Sveučilištu u Baselu gdje je prisustvovao predavanjima Jacoba Bernoullija. Zapravo, Paul Euler i Johann Bernoulli živjeli su u kući Jacoba Bernoullija dok su studirali u Baselu. Kako je Paul imao neka matematička znanja, mogao je podučavati sina elementarnu matematiku zajedno s drugim predmetima. Tako je Leonhardov otac izazvao njegovu zainteresiranost za matematiku, iako je on htio da Leonhard slijedi njegove stope i postane svećenikom. No, to nije spriječilo Leonharda da čita razne tekstove i da uzima privatne lekcije iz matematike. Tijekom svog života Leonhard je napisao više od 500 knjiga i radova (oko 800 stranica godišnje), a poslije njegove smrti pojavilo se još nevjerojatnih 400 dodatnih radova. Njegova prikupljena djela popunjavaju više od 70 velikih svezaka koji sadrže desetke tisuća stranica. Stoga se Leonhard Euler smatra jednim od najznamenitijih matematičara 18. stoljeća i povijesti matematike. Iako je rođen u Baselu, većinu svog života provodi u inozemstvu.

1 Biografija Leonharda Eulera

Leonhard Paul Euler rođen je 15. travnja 1707. godine u Baselu u Švicarskoj. U Baselu je pohađao školu i za to vrijeme živio je kod bake sa majčine strane. Škola je bila prilično siromašna pa Euler u njoj nije učio ništa vezano za matematiku, već ga je matematici podučavao njegov otac. Godine 1720. počinje pohađati Sveučilište u Baselu kako bi prvo ostvario opće obrazovanje prije nego započne pohađanje naprednijih studija. Johann Bernoulli ubrzo otkriva Eulerov veliki potencijal za matematiku u privatnim lekcijama koje je Euler sam organizirao.

Slika 1. Leonhard Euler.

Godine 1723. Euler je završio magisterij iz filozofije uspoređujući filozofske ideje Descartesa i Newtona. Teologiju je počeo pohađati u jesen 1723. godine slijedeći očevu želju, ali iako je cijelog života bio pobožan kršćanin nije mogao naći entuzijazam za studiranje i proučavanje teologije, grčkog i hebrejskog jezika kao kod matematike. Euler počinje studirati matematiku nakon što je Johann Bernoulli uvjerio njegova oca da mu dozvoli promjenu smjera studiranja. Činjenica da je Eulerov otac bio prijatelj Johanna Bernoullija u danima studiranja nesumnjivo je olakšala zadatak uvjeravanja.

Euler završava studij na Sveučilištu u Baselu 1726. godine. Za vrijeme boravka u Baselu proučavao je mnoge matematičke radove kao što su djela Varignona[1], Des-

[1]Pierre Varignon (1654. - 1722.) - francuski matematičar koji se bavio grafičkom statikom i mehanikom.

cartesa[2], Newtona[3], Galilea[4], van Schootena[5], Jacoba Bernoullija i mnogih drugih. Do 1726. godine Euler je već imao tiskani kratki članak o izokronim krivuljama, a 1727. godine objavio je još jedan članak i podnio prijavu za Veliku nagradu Pariške akademije o najboljem rasporedu jarbola na brodu. Nagrada je otišla Pierre Bougueru[6], stručnjaku za matematiku vezanu za brodove, ali Eulerov esej osvojio je drugo mjesto, što je za mladog matematičara bilo izvrsno postignuće.

Kada je preminuo Nicolaus II. Bernoulli, sin Johanna Bernoullija, u Sankt Peterburgu u srpnju 1726. godine, Euleru je ponuđeno mjesto na Sanktpeterburškoj akademiji znanosti. Ondje bi podučavao primjenu matematike i mehanike u fiziologiji. Nakon saznanja da neće dobiti posao predavača fizike na Sveučilištu u Baselu, Euler je prihvatio ponudu i napustio Basel. U Sankt Peterburgu je živio kod Daniela Bernoullija[7] te nakon zahtjeva Daniela Bernoullija i Jakoba Hermanna[8] Euler je prebačen na matematičko-fizički odjel akademije.

Euler je također bio medicinski poručnik u ruskoj mornarici od 1727. do 1730. godine, a zatim je postao profesorom fizike na Sanktpeterburškoj akademiji znanosti. Budući da mu je to omogućilo da postane punopravni član akademije, mogao je odustati od svoje službe u ruskoj mornarici.

Daniel Bernoulli bio je glavni profesor za matematiku na akademiji, ali kada je 1733. godine napustio Sankt Peterburg kako bi se vratio u Basel, Euler je bio imenovan na tu poziciju. Financijsko poboljšanje koje je došlo iz tog imenovanja omogućilo je Euleru da se oženi. To je i učinio 7. siječnja 1734. godine oženivši Katharinu Gsell, kćer slikara sanktpeterburške gimnazije. Imali su ukupno trinaestero djece, iako ih je samo petero preživjelo rano djetinjstvo. Euler je tvrdio da je došao do nekih najvećih matematičkih otkrića dok je jedno dijete držao u naručju, a druga djeca se igrala oko njegovih nogu. Objavljivanjem mnogih članaka i njegove knjige *Mechanica* (1736. - 1737.), koja je opsežno predstavljala Newtonovu dinamiku u obliku matematičke analize, Euler se počinje baviti važnim matematičkim problemima.

Eulerovi zdravstveni problemi počeli su 1735. godine kada je zadobio jaku

[2]René Descartes (1596. - 1650.) - francuski filozof, fizičar, matematičar i utemeljitelj analitičke geometrije.

[3]Isaac Newton (1643. – 1727.) - engleski fizičar, matematičar i astronom.

[4]Galileo Galilei (1564. - 1642.) - talijanski astronom, fizičar i inženjer.

[5]Frans van Schooten (1615. - 1660.) - nizozemski matematičar.

[6]Pierre Bouguer (1698. - 1758.) - francuski geodeta.

[7]Daniel Bernoulli (1700. – 1782.) - švicarski matematičar i fizičar.

[8]Jakob Hermann (1678. - 1733.) - švicarski matematičar.

groznicu i gotovo izgubio život. U svojim autobiografskim spisima Euler navodi da su mu problemi vida započeli 1738. godine s prenaprezanjem očiju zbog kartografskog rada. Također navodi i da je do 1740. godine potpuno izgubio vid na jedno oko te da je drugo oko bilo u istoj opasnosti.

Do 1740. godine Euler je stekao vrlo visok ugled, osvojivši Veliku nagradu Pariške akademije 1738. i 1740. godine. Njegov ugled mu je donio ponudu za odlazak u Berlin, ali je on htio ostati u Sankt Peterburgu. Međutim, politički nemiri u Rusiji posebno su otežavali položaj stranaca, što je pomoglo Euleru da se predomisli. Prihvaćajući poboljšanu ponudu, Euler je na poziv pruskog kralja Fridrika II. Velikog otišao u Berlin. Za vrijeme boravka u Berlinu nastavio je primati dio svoje plaće iz Rusije. Za tu naknadu je kupio knjige i instrumente za Sanktpeterburšku akademiju te nastavio pisati za njih znanstvene izvještaje. Tijekom 25 godina provedenih u Berlinu, Euler je napisao oko 380 članaka. Napisao je knjige o varijacijskom računu, izračunu planetarnih orbita, artiljeriji i balistici, matematičkoj analizi, brodogradnji i plovidbi, gibanju Mjeseca, itd.

Godine 1759. umire predsjednik Berlinske akademije Pierre-Louis Moreau de Maupertuis te Euler preuzima vodstvo akademije, premda ne i titulu predsjednika. Kralj je imao glavnu ulogu na akademiji i Euler više nije bio u dobrim odnosima s kraljem Fridrikom, unatoč ranije dobroj naklonosti. Euler, koji se prepirao s d'Alembertom o nekim znanstvenim pitanjima, bio je uznemiren kada je kralj Fridrik 1763. godine ponudio d'Alembertu mjesto predsjednika akademije. D'Alembert je odbio preseliti se u Berlin, ali je Fridrikovo konstantno uplitanje u vođenje akademije natjeralo Eulera da odluči napustiti akademiju.

Tako se 1766. godine Euler vraća u Sankt Peterburg, što kralja Fridrika uvelike ljuti. Ubrzo nakon povratka u Rusiju Euler je postao gotovo potpuno slijep nakon bolesti. Godine 1771. njegov dom je uništila vatra, a on je uspio spasiti samo sebe i neke svoje matematičke spise. Operacija očne mrene ubrzo nakon požara vratila mu je vid na nekoliko dana, ali čini se da Euler nije uspio voditi potrebnu brigu o sebi i postao je potpuno slijep. Zbog njegove izvanredne sposobnosti pamćenja, mogao je nastaviti raditi na optici, matematici i lunarnim kretnjama i nakon sljepoće. Nakon povratka u Sankt Peterburg, u 59. godini života, Euler je proizveo gotovo polovicu svojih ukupnih radova unatoč potpunoj sljepoći. Naravno, te radove nije proizveo bez pomoći. Pomogli su mu sinovi Johann Albrecht Euler (1734. - 1800.) koji je radio na odjelu za fiziku na Sanktpeterburškoj akademiji i Christoph Euler (1743. - 1808.) koji je imao vojnu karijeru. Euleru su pomogla još dva člana akademije, Wolfgang Ludwig Krafft[9] i Anders Johan Lexell[10] te mladi matematičar Nikolai Fuss[11]. Fuss, koji je bio Eulerov rođak, postao je njegov pomoćnik 1776. godine. Nakon 40 godina zajedničkog života, 1773. godine, Euleru umire žena. Nesposoban brinuti se o sebi, tri godine kasnije ženi se s Abigail Gsell, sestričnom pokojne žene. 18. rujna 1783. godine Euleru dolazi do izljeva krvi u mozak i on umire. Sanktpeterburška akademija nastavlja objavljivati njegov rad još gotovo 50 godina nakon njegove smrti.

2 Neki važni Eulerovi doprinosi u matematici

Danas se Euler smatra jednim od najvećih matematičara svih vremena. Njegovi interesi su pokrivali gotovo sve aspekte matematike, od geometrije do analize, trigonometrije, algebre, teorije brojeva, optike, astronomije, kartografije, mehanike pa čak i teorije glazbe.

2.1 Matematička analiza

Matematička analiza bila je glavno područje djelovanja matematičara 18. stoljeća. Posebice je obitelj Bernoulli svojim radom bitno utjecala na razvitak ove grane matematike. Eulerova bliskost s tom obitelji potaknula je njegov interes za matematičkom analizom, pa je ona dugo bila središte njegova interesa i rada. Tako je i prva u nizu sjajnih Eulerovih knjiga bila *Introductio in analysin infinitorum* iz 1748. godine.

Prvi dio ove knjige bavi se beskonačnim procesima. Dani su prikazi funkcija u obliku beskonačnih redova, obrađuju se verižni razlomci, trigonometrijski redovi itd.

2.1.1 Prvi značajni rezultati

Rezultat koji je Euleru donio najveću slavu u njegovim mladim danima, bilo je njegovo rješenje problema koji je kasnije postao poznat kao baselski problem. Problem se bavi pronalaskom zatvorenog oblika beskonačnog reda

[9] Wolfgang Ludwig Krafft (1743. - 1814.) - njemački astronom i fizičar.
[10] Anders Johan Lexell (1740. - 1784.) - finsko-švedski astronom, matematičar i fizičar.
[11] Nikolai Fuss (1755. - 1826.) - švicarski matematičar, asistent Euleru nakon gubitka vida.

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,,\quad n\in\mathbb{N},$$

kojeg nisu uspjeli riješiti veliki matematičari kao što su Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli i Daniel Bernoulli. Isti problem su također neuspješno proučavali Leibniz[12], Stirling[13], de Moivre[14] i drugi. Problem je postavio talijanski matematičar Pietro Mengoli (1626. - 1686.) 1650. godine, a rješenje problema dao je Euler 1735. godine. Naime, Euler je dokazao da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\,,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Dokaz. Euler je znao da svaka algebarska jednadžba n-tog stupnja ima n rješenja $(x_1,\ x_2,...,\ x_n)$ te da se može napisati u obliku

$$a(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=0,\ \ a\in\mathbb{R}.$$

Također je znao prikaz funkcije sinus u obliku beskonačnog reda

$$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots,\tag{1}$$

iz čega se vidi da se funkcija sinus može prikazati kao beskonačan polinom. Kako je znao da jednadžba $sinx=0$ ima beskonačno mnogo rješenja $(0,\ \pm\pi,\ \pm2\pi,...)$ i kako se funkcija sinus može prikazati kao polinom (1), Euler je zapisao $sinx$ kao

$$\begin{aligned} sinx&=a(x-0)(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)\cdots\\ &=ax(x^2-\pi^2)(x^2-4\pi^2)(x^2-9\pi^2)\cdots\\ &=a_1x\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\Big)\cdots. \end{aligned}\tag{2}$$

Jednadžbu (2) je podijelio s x i dobio

$$\frac{sinx}{x}=a_1\Big(1-\frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\Big)\Big(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\Big)\cdots.\tag{3}$$

[12]Gottfried Leibniz (1646. - 1716.) - njemački matematičar, filozof i fizičar.
[13]James Stirling (1692. - 1770.) - škotski matematičar.
[14] Abraham de Moivre (1667. - 1754.) - francuski matematičar.

Kada na jednadžbu (3) djelujemo limesom gdje x teži prema 0, dobivamo da je $a_1 = 1$. Stoga, slijedi

$$\begin{aligned} \frac{sinx}{x} &= \Big(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\Big)\cdots \\ &= 1 - x^2\Big(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\Big) + x^4(\cdots) - x^6(\cdots) + \cdots . \end{aligned} \tag{4}$$

Također je podijelio jednadžbu (1) s x i dobio

$$\frac{sinx}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots . \tag{5}$$

Euler ovdje tvrdi kako su lijeve strane jednadžbi (4) i (5) jednake, moraju biti i desne. Nadalje, kada se izjednače koeficijenti uz x^2 s lijeve i desne strane dobiva se

$$-\Big(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \cdots\Big) = -\frac{1}{3!} \quad \Big/ \cdot (-\pi^2)$$

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

□

Iako dokaz koji je Euler dao nije rigorozan, prihvaćen je i smatra se prvim dokazom baselskog problema. Nakon toga Euler je nastavio dokazivati puno više, naime dokazao je da vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691\pi^{12}}{638512875}.$$

Godine 1737. dokazao je povezanost Riemannove zeta funkcije ($\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, $n \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{C}$) s nizom prostih brojeva koji daju poznati odnos

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p} \frac{1}{1 - p^{-s}}, \quad p \ prost, \ \ n \in \mathbb{N}, \ \ s \in \mathbb{C}, \ \ Re(s) > 1,$$

gdje se $Re(s)$ odnosi na realni dio kompleksnog broja $s = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Danas ideja o funkciji prožima matematiku, a studenti matematike lako prepoznaju oznaku $f(x)$ kao oznaku za funkciju. No, matematičarima su trebala stoljeća da prijeđu s uporabe algebarskih izraza za opisivanje određenih krivulja na opći pojam funkcija kao samostalnih objekata. Euler je imao važnu ulogu u postavljanju funkcije kao jednog od središnjih objekata matematike. Euler i njegov učitelj Johann Bernoulli su ideju da krivulja postoji ako se može konstruirati nekim geometrijskim ili mehaničkim procesom zamijenili konceptom koji tvrdi da krivulja postoji ako se može opisati analitičkim izrazom, bilo ona polinom, beskonačni niz potencija ili nekog drugog oblika. Euler je funkciji dao njezino analitičko značenje. Također je uveo sada već poznatu $f(x)$ notaciju za funkciju, koristeći je najprije za linearnu funkciju. Koristio je funkcije pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi, osobito kod onih povezanih s fizikalnim pojavama kao što su valovi, vibracija žice i kosi hitac. U to vrijeme uporaba funkcija je bila vrlo mala i gotovo nevažna u područjima kao što je fizika. Eulerov rad pokazao je da funkcije imaju širok raspon primjena koje obuhvaćaju matematički spektar i korisne su za rješavanje problema u fizici. Euler je još zaslužan za oznake: π za broj 3.14159..., e za bazu prirodnog logaritma, i za kvadratni korijen od -1 i $\sum$ za sumu.

2.1.2 Eulerov broj e

Konstantu e otkrio je Jacob Bernoulli 1683. godine kada je proučavao pitanje složenih kamata. Zanimala ga je granična vrijednost izraza $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ kada n teži prema beskonačno. Znao je kako izraz teži prema broju koji se nalazi između 2 i 3, ali nije uspio dokazati koji je to broj. Euler se bavio tim problemom i uspio dokazati da je

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.718281828459045235...$$

Euler je taj broj označio s e, oznaku koja se i danas koristi, te ga izračunao na 23 decimalna mjesta. Za računanje znamenaka broja e koristio je zapis

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots .$$

Također je dokazao da je e iracionalan. Kako bi to dokazao koristio je verižne razlomke. Euler prvo definira opći oblik verižnog razlomka kao

$$A+\cfrac{\alpha}{B+\cfrac{\beta}{C+\cfrac{\gamma}{D+\cfrac{\delta}{E+\cfrac{\varepsilon}{F+\cdots}}}}}$$

pri čemu su A, B, C, D, E, F,..., te α, β, γ, δ, ε,..., pozitivni cijeli brojevi. Grčka slova Euler naziva *brojnicima*, a latinska slova *nazivnicima*. U praksi, najzanimljiviji verižni razlomci su oni kod kojih su svi *brojnici* jednaki 1. Verižni razlomci takvog oblika nazivaju se jednostavni verižni razlomci. Euler zna da je zapis svakog racionalnog broja u obliku jednostavnog verižnog razlomka konačan. Stoga, kako bi dokazao da je dani broj iracionalan, treba pokazati kako se on ne može prikazati kao konačan jednostavan verižni razlomak. Euler promatra broj

$$\frac{e-1}{2} \approx 0.8591409142295 = \frac{8591409142295}{10000000000000}.$$

Budući da je ovaj broj manji od 1, slijedi da je $A = 0$. Sada Euler invertira razlomak i dobiva

$$\frac{10000000000000}{8591409142295} = 1 + \frac{1408590847704}{8591409142295}.$$

Sljedeći *nazivnik* je cijeli dio tog broja pa slijedi da je $B = 1$. Sada ponavlja postupak za razlomak $\frac{1408590847704}{8591409142295}$ i dobiva

$$\frac{8591409142295}{1408590847704} = 6 + \frac{139862996071}{1408590847704}.$$

Sada slijedi da je $C = 6$. Nastavljajući taj postupak, Euler dolazi do zapisa

$$\frac{e-1}{2} = 0+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\cfrac{1}{22+\cdots}}}}}}$$

Euler ovdje staje i navodi ako bi vrijednost za e na početku bila točnija, onda bi slijed *nazivnika* bio 1, 6, 10, 14, 18, 22, 26,..., što čini aritmetički niz izuzevši 1 na početku. Još navodi kako bi se ovaj rezultat mogao potvrditi infinitezimalnim računom. Budući da se redoslijed *nazivnika* jasno povećava i nastavlja, to nije konačan jednostavan verižni razlomak. Prema tome, Euler zaključuje kako je broj $\frac{e-1}{2}$ iracionalan. Odatle slijedi da je onda i e iracionalan. Na sličan način Euler pokazuje da je

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}}}$$

2.1.3 Kompleksna analiza

Euler je bio jedan od začetnika teorije funkcija kompleksne varijable. Definirao je eksponencijalnu funkciju e^x i na skupu kompleksnih brojeva te ju povezao s trigonometrijskim funkcijama sinus i kosinus. Danas tu povezanost nazivamo Eulerova formula.

Definicija 2.1.1 (Eulerova formula). *Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$e^{ix} = cosx + isinx,$$

pri čemu je e baza prirodnog logaritma, i imaginarna jedinica, a x argument funkcija sinus i kosinus dan u radijanima.

Euler je izveo ovu formulu promatrajući zapis kompleksne eksponencijalne funkcije u obliku beskonačnog reda, odnosno promatrao je

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots .$$

Zbog toga što je $i^2 = -1$ slijedi da je

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{ix^5}{5!} - \cdots .$$

Sada Euler grupira izraze s obzirom na i i dobiva

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right).$$

Kako je znao da je razvoj funkcija kosinus i sinus u beskonačan red dan s

$$cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots ,$$

Euler zaključuje kako je $e^{ix} = cosx + isinx$. Izravne posljedice Eulerove formule su jednakosti

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \qquad \text{i} \qquad sinx = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2}.$$

Također, uvrštavanjem broja π u Eulerovu formulu dobivamo jednakost koja se naziva **Eulerov identitet**

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

te jer ujedinjuje pet važnih matematičkih konstanti (e, π, i, 1 i 0) smatra se najljepšom jednakošću cijele matematičke znanosti.

2.2 Teorija brojeva

Teorija brojeva, kao grana matematike koja se bavi svojstvima cijelih brojeva, može se reći da potječe od francuskog matematičara Pierrea de Fermata (1607. - 1665.) i njegovih otkrića. Sumnja se da je Fermat imao dokaze za mnoge od rezultata koje je otkrio, ali ih nije objavio pa je dokazivanje tih otkrića prešlo na Eulera. Čini se kako je Eulerovo zanimanje za ovu granu matematike došlo od pruskog matematičara Christiana Goldbacha (1690. - 1764.), ali vjerojatno je izvorno interes došao od obitelji Bernoulli i njihove veze s tom granom matematike.

Goldbach je 1729. godine putem pisma upitao Eulera zna li za Fermatovu pretpostavku da su brojevi $2^n + 1$ uvijek prosti ako je n potencija broja 2. Euler je to potvrdio za $n = 1, 2, 4, 8$ i 16, a do 1732. godine je pokazao da je broj $2^{32} + 1 = 4294967297$ djeljiv sa 641, što znači da nije prost. Euler je proučavao

Fermatov rad 1730. godine i pronašao mnoge zanimljive tvrdnje vezane uz proste brojeve. Radeći na Fermatovim otkrićima, Euler je 1736. godine dokazao tvrdnju koju danas nazivamo mali Fermatov teorem.

Definicija 2.2.1. *Neka je n prirodan broj te neka su a i b cijeli brojevi. Ako n dijeli razliku a - b, tada kažemo da je a kongruentan b modulo n, ili da su a i b kongruentni modulo n te pišemo $a \equiv b \,(mod\, n)$.*

Teorem 2.2.1 (**Mali Fermatov teorem**). *Neka je p prost broj i a cijeli broj. Tada je $a^p \equiv a \ (mod\ p)$ te ako p ne dijeli a vrijedi i $a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$.*

Treba naglasiti kako u Eulerovo vrijeme nije postojao pojam kongruencije, koji puno olakšava aritmetiku vezanu uz dokaz tog teorema. Mali Fermatov teorem je 1760. godine Euler generalizirao koristeći funkciju $\varphi(n)$, n prirodan broj, koju danas nazivamo Eulerova funkcija.

Definicija 2.2.2. *Neka je n prirodan broj. Broj prirodnih brojeva u nizu $1, 2, ..., n$ koji su relativno prosti s n se označava s $\varphi(n)$; ovim je definirana funkcija $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ koja se naziva* ***Eulerova funkcija****.*

Teorem 2.2.2 (**Eulerov teorem**). *Neka je a cijeli broj te n prirodan broj. Ako su brojevi a i n relativno prosti, tada je $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (mod\ n)$.*

Prije nego dokažemo Eulerov teorem, iskažimo nekoliko tvrdnji potrebnih za njegov dokaz.

Definicija 2.2.3. *Neka je $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Skup $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ naziva se* ***potpuni sustav ostataka*** *modulo n ako za svaki cijeli broj b postoji jedinstveni $a_i \in S$ za koji vrijedi $b \equiv a_i \ (mod\ n)$.*

Definicija 2.2.4. *Neka je $n > 1$, $n \in \mathbb{N}$. Skup $S = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$ naziva se* ***reducirani sustav ostataka*** *modulo n ako za svaki cijeli broj b, koji je relativno prost s n, postoji jedinstveni $a_i \in S$ za koji vrijedi $b \equiv a_i \ (mod\ n)$.*

Primjer 2.2.1. *Skupovi $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ su potpuni sustavi ostataka modulo 5, dok su skupovi $\{1, 2, 3, 4\}$ i $\{-2, -6, 6, 7\}$ reducirani sustavi ostataka modulo 5.*

Lema 2.2.1. *Neka je $S = \{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo n. Tada za svaki cijeli broj b, koji je relativno prost s n, vrijedi da je i $\{b \cdot a_1, b \cdot a_2, ..., b \cdot a_{\varphi(n)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo n.*

Propozicija 2.2.1. *(i) Neka su $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ i neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka je $a \equiv a'$ (mod n) i $b \equiv b'$ (mod n). Tada vrijedi da je $a + b \equiv a' + b'$ (mod n), $a - b \equiv a' - b'$ (mod n) i $a \cdot b \equiv a' \cdot b'$ (mod n).*
(ii) Neka su $a, b, c \in \mathbb{Z}$ i neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka su a i n relativno prosti. Ako je $ab \equiv ac$ (mod n), tada vrijedi i $b \equiv c$ (mod n).

Dokaz teorema 2.2.2 (Eulerov teroem). Neka je $S = \{a_1, a_2, ..., a_{\varphi(n)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo n. Prema prethodnoj lemi slijedi da je i skup $\{a \cdot a_1, a \cdot a_2, ..., a \cdot a_{\varphi(n)}\}$ reducirani sustav ostataka modulo n. Prema tome, za svaki a_i, $1 \leq i \leq \varphi(n)$, postoji jedinstveni $a_j \in S$ takav da je $a_i \equiv a \cdot a_j$ (*mod* n).

Primjenom propozicije 2.2.1 (i) dobivamo $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\varphi(n)} \equiv aa_1 \cdot aa_2 \cdots aa_{\varphi(n)}$ (*mod* n), tj. $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\varphi(n)} \equiv a^{\varphi(n)} a_1 \cdot a_2 \cdots a_{\varphi(n)}$ (*mod* n). Kako je svaki $a_i \in S$ relativno prost s n, uzastopnom primjenom propozicije 2.2.1 (ii) dobivamo $1 \equiv a^{\varphi(n)}$ (*mod* n). □

Euler je dokazao i veliki Fermatov teorem za brojeve $n = 3$ i $n = 4$.

Teorem 2.2.3 (Veliki Fermatov teorem). *Ne postoje pozitivni cijeli brojevi x, y, z takvi da vrijedi $x^n + y^n = z^n$, za $n > 2$.*

Dokazao je i nekoliko ostalih Fermatovih pretpostavki. Primjerice, tvrdnju da se svaki prost broj oblika $4k + 1$ na jedinstven način može predočiti u obliku zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva. Dugačak bi bio niz u kojem bi mogli popisati sve Eulerove rezultate u teoriji brojeva. No, u njegovo doba to područje matematike sastojalo se od niza manjih, međusobno gotovo izoliranih tema i rezultata. Izgradnja teorije brojeva u sustavnu matematičku teoriju započela je 1801. godine pojavom Gaussove[15] *Aritmetike*.

2.3 Geometrija

Nitko ne bi tvrdio da Eulerovo matematičko nasljeđe počiva prvenstveno na njegovom doprinosu geometriji. Ipak, pogrešno je zaključiti da je Euler ignorirao ovu fascinantnu i bezvremensku temu. Naprotiv, četiri sveska njegovog djela *Opera Omnia*, koje sadrži gotovo 1600 stranica, posvećeno je geometrijskim istraživanjima. Većina Eulerovih radova u geometriji bila je analitičkog tipa. Jedan od važnijih Eulerovih rezultata je dokaz Heronove formule.

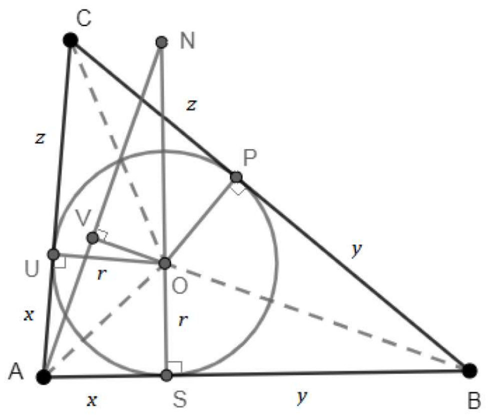
[15]Carl Friedrich Gauss (1777. - 1855.) - njemački matematičar i fizičar koji je dao značajan doprinos mnogim područjima matematike.

Teorem 2.3.1 (Heronova formula). *Ako stranice trokuta imaju duljine a, b, c, tada je površina tog trokuta dana sa*

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

gdje je s poluopseg tog trokuta, tj. $s = \frac{a+b+c}{2}$.

Dokaz. Neka je $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ i neka su α, β, γ mjere kutova trokuta ABC. Euler prvo upisuje kružnicu trokutu ABC. Neka je O središte trokutu upisane kružnice s polumjerom duljine $r = |OS| = |OU| = |OP|$ (Slika 2.). Kako su pravci OA, OB, OC simetrale kutova α, β, γ, slijedi da su kutovi $\angle OAB = \frac{\alpha}{2}$, $\angle OBA = \frac{\beta}{2}$, $\angle OCA = \frac{\gamma}{2}$. Prema K-S-K poučku[16] o sukladnosti trokuta, trokuti AOS i AOU su sukladni, kao i trokuti BOS i BOP, odnosno trokuti COP i COU.



Slika 2. Trokut ABC.

Euler je zatim konstruirao okomicu iz vrha A na pravac OB i označio sjecište s V. Zatim je s N označio sjecište pravaca AV i OS. To su bile jedine konstrukcije u Eulerovom dokazu. Kako je kut $\angle AOV$ vanjski kut trokuta ABO, Euler je zaključio da je

$$\angle AOV = \angle OAB + \angle OBA = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}.$$

Nadalje, zbog toga što je trokut OAV pravokutan, znao je da su kutovi $\angle AOV$ i $\angle OAV$ komplementarni, tj. zbroj im je 90°. Slijedi da je $\angle OAV + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 90°$. Ali također je i $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 90°$, pa slijedi $\angle OAV = \frac{\gamma}{2} = \angle OCU$. Iz toga Euler zaključuje sličnost pravokutnih trokuta OAV i OCU pomoću K-K-K poučka[17]. Stoga, slijedi

[16] K-S-K poučak: Dva su trokuta suklanda ako su im sukladne jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.

[17] K-K-K poučak: Dva su trokuta slična ako su im odgovarajući kutovi jednaki.

omjer

$$\frac{|AV|}{|OV|} = \frac{|CU|}{|OU|} = \frac{z}{r}. \tag{6}$$

Očito su slični i trokuti NOV i NAS, te trokuti NAS i BAV, pa stoga moraju biti i trokuti NOV i BAV slični. Slijedi $\frac{|AV|}{|AB|} = \frac{|OV|}{|ON|}$, ili ekvivalentno

$$\frac{|AV|}{|OV|} = \frac{|AB|}{|ON|}. \tag{7}$$

Kombinirajući izraze (6) i (7), dobivamo

$$\frac{z}{r} = \frac{|AB|}{|ON|} = \frac{x+y}{|SN|-r}. \tag{8}$$

Kako je $a = y + z$, $b = x + z$ i $c = x + y$, slijedi da je poluopseg

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{(y+z)+(x+z)+(x+y)}{2} = x+y+z. \tag{9}$$

Iz (9) slijedi

$$\begin{aligned} s-a &= (x+y+z)-(y+z) = x, \\ s-b &= (x+y+z)-(x+z) = y, \\ s-c &= (x+y+z)-(x+y) = z. \end{aligned}$$

Iz (8) i (9) slijedi

$$z \cdot |SN| = r(x+y+z) = rs.$$

Zadnje je potrebno odrediti $|SN|$. Kako su kutovi $\angle BOS$ i $\angle VON$ vršni[18], oni su i jednaki. Zato slijedi

$$\angle OBS = 90^\circ - \angle BOS = 90^\circ - \angle VON = \angle ONV = \angle ANS.$$

Stoga, prema K-K-K poučku trokuti NAS i BOS su slični pa slijedi

$$\frac{|SN|}{|AS|} = \frac{|BS|}{|OS|} \implies \frac{|SN|}{x} = \frac{y}{r} \implies |SN| = \frac{xy}{r}.$$

Euler je znao da se površina trokuta može izraziti kao umnožak polumjera trokutu upisane kružnice i poluopsega ($P = r \cdot s$), zbog čega slijedi

[18]Vršni kutovi su kutovi koji imaju zajednički vrh, a kraci jednoga kuta suprotni su polupravci kracima drugoga kuta.

$$P_{\triangle ABC} = rs = \sqrt{rs(rs)} = \sqrt{z \cdot |SN| \cdot (rs)}$$
$$= \sqrt{z\left(\frac{xy}{r}\right)rs} = \sqrt{sxyz} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

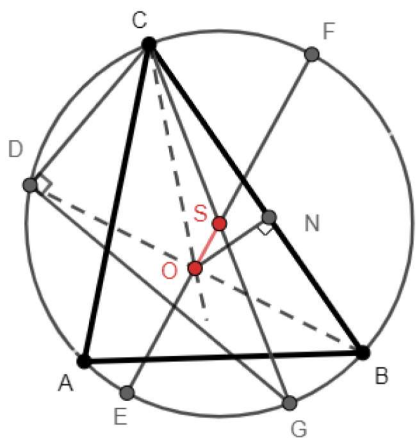
□

Još jedan važan Eulerov rezultat u geometriji je teorem nazvan po njemu, a koji govori o udaljenosti između središta opisane i središta upisane kružnice trokuta. Za dokaz tog teorema potrebna nam je sljedeća tvrdnja.

Teorem 2.3.2. *Neka je k kružnica, a T točka ravnine. Neka je p bilo koji pravac koji prolazi točkom T i siječe kružnicu k u točkama A i B. Tada je vrijednost izraza $|TA| \cdot |TB|$ konstanta, tj. ne ovisi o izboru pravca p.*

Teorem 2.3.3 (Eulerov teorem). *Neka je $k(S,R)$*[19] *opisana kružnica, a $k(O,r)$ upisana kružnica trokuta ABC. Tada je $|SO|^2 = R^2 - 2Rr$.*

Dokaz. Neka je $k(S,R)$ opisana kružnica, a $k(O,r)$ upisana kružnica trokuta ABC i neka su α, β, γ mjere kutova trokuta ABC. Nadalje, neka je D sjecište pravca BO i kružnice $k(S,R)$. Pravac BO je simetrala kuta β, a pravac CO simetrala kuta γ. Neka su E i F točke sjecišta pravca SO i kružnice $k(S,R)$. Prema teoremu 2.3.2



Slika 3. Trokut ABC.

[19] $k(S,R)$ - oznaka za kružnicu sa središtem u točki S i polumjerom $R > 0$.

slijedi

$$|BO| \cdot |OD| = |EO| \cdot |OF| = (R - |SO|)(R + |SO|) = R^2 - |SO|^2,$$

tj. slijedi da je $|SO|^2 = R^2 - |BO| \cdot |OD|$. Preostaje pokazati da je $|BO| \cdot |OD| = 2Rr$.

Kutovi $\angle DCA$ i $\angle DBA$ su obodni kutovi nad istim kružnim lukom, stoga slijedi da je $\angle DCA = \angle DBA$. Pravac DB je simetrala kuta β pa slijedi da je $\angle DBA = \angle DBC = \frac{\beta}{2}$. Analogno, kako je pravac CO simetrala kuta γ, slijedi $\angle ACO = \angle BCO = \frac{\gamma}{2}$.

Sada je $\angle DCO = \angle DCA + \angle ACO = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$. $\angle DOC$ je vanjski kut trokuta BCO, pa je $\angle DOC = \angle DBC + \angle BCO = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$. Što znači da je $\angle DCO = \angle DOC$, odakle slijedi $|OD| = |CD|$. Nadalje, neka je N nožište okomice iz O na stranicu $\overline{BC}$ te neka je G sjecište pravca CS i kružnice $k(S,R)$. Prema Talesovom[20] poučku je $\angle CDG = 90^\circ$ i stoga je $\angle CDG = \angle ONB$. Uz to je i $\angle DGC = \angle DBC$ (obodni kutovi nad istim kružnim lukom), pa su prema K-K-K poučku o sličnosti trokuta, trokuti BNO i GDC slični. Iz sličnosti slijedi

$$\frac{|BO|}{|GC|} = \frac{|ON|}{|CD|} \Longrightarrow \frac{|BO|}{2R} = \frac{r}{|CD|},$$

pa na kraju dobivamo

$$|BO| \cdot |OD| = |BO| \cdot |CD| = 2Rr.$$

□

U svom radu iz 1767. godine, Euler se ponovno vraća promatranju trokuta. Ovog puta, umjesto promatranja površine trokuta, proučavao je odnose između ortocentra[21], težišta[22] i središta trokutu opisane kružnice. Promatrajući te točke otkrio je sljedeću tvrdnju.

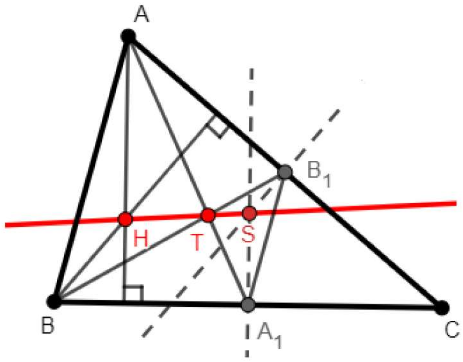
Teorem 2.3.4 (Eulerov pravac). *Točke središta opisane kružnice S, težišta T i ortocentra H svakog trokuta leže na istom pravcu. Nadalje, $|TH| = 2|TS|$.*

Za dokaz teorema potrebna su nam dva teorema i jedna lema.

[20] Talesov poučak: Svaki obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.

[21] Ortocentar trokuta je točka u kojoj se sijeku pravci na kojima leže visine trokuta.Visina trokuta je dužina kojoj je jedan kraj vrh trokuta, a drugi nožište okomice spuštene iz tog vrha na pravac na kojemu leži suprotna stranica.

[22] Težište trokuta je točka u kojoj se sijeku sve tri težišnice trokuta. Težišnica trokuta je dužina koja spaja vrh trokuta s polovištem nasuprotne stranice.



Slika 4. Eulerov pravac.

Teorem 2.3.5. *Srednjica*[23] *trokuta je paralelna jednoj stranici trokuta i njena duljina je jednaka polovini duljine te stranice.*

Teorem 2.3.6. *Težište T trokuta ABC dijeli svaku težišnicu u omjeru $2:1$ računajući od vrha trokuta, tj. $|AT| : |TA_1| = |BT| : |TB_1| = |CT| : |TC_1| = 2 : 1$, pri čemu su A_1, B_1, C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$.*

Lema 2.3.1. *Ako su X i Y točke na dužini $\overline{AB}$ sa svojstvom $\dfrac{|AX|}{|BX|} = \dfrac{|AY|}{|BY|}$, tada se točke X i Y podudaraju.*

Dokaz teorema 2.3.4 (Eulerov pravac). Neka je S točka središta opisane kružnice, T težište i H ortocentar trokuta ABC. Nadalje, neka je u trokutu ABC točka A_1 polovište stranice $\overline{BC}$, a B_1 polovište stranice $\overline{AC}$. Tada je $\overline{A_1B_1}$ srednjica trokuta ABC, pa su prema teoremu 2.3.5 pravci A_1B_1 i AB paralelni i $|A_1B_1| = \frac{1}{2}|AB|$.

Kako su pravci AH i A_1S okomiti na pravac BC, slijedi da su pravci AH i A_1S međusobno paralelni. Također, pravci BH i B_1S okomiti su na pravac AC pa su i oni međusobno paralelni. Dakle, odgovarajuće stranice u trokutima ABH i A_1B_1S su paralelne. Stoga su šiljasti kutovi $\angle HAB$ i $\angle SA_1B_1$ s paralelnim kracima međusobno sukladni, kao i $\angle ABH$ i $\angle A_1B_1S$.

Sada K-K-K poučak o sličnosti trokuta povlači da su trokuti ABH i A_1B_1S slični, pa vrijedi $\dfrac{|AH|}{|A_1S|} = \dfrac{|AB|}{|A_1B_1|} = 2$. Neka je točka T_1 presjek pravaca HS i AA_1. Kako su pravci AH i A_1S paralelni, a točke A, A_1 i T_1 odnosno točke H, S i T_1 leže na istom pravcu, prema K-K-K poučku slijedi da su trokuti AHT_1 i A_1ST_1 slični. Slijedi $\dfrac{|AT_1|}{|A_1T_1|} = \dfrac{|AH|}{|A_1S|} = 2$.

[23]Srednjica trokuta je dužina koja spaja dva polovišta trokuta.

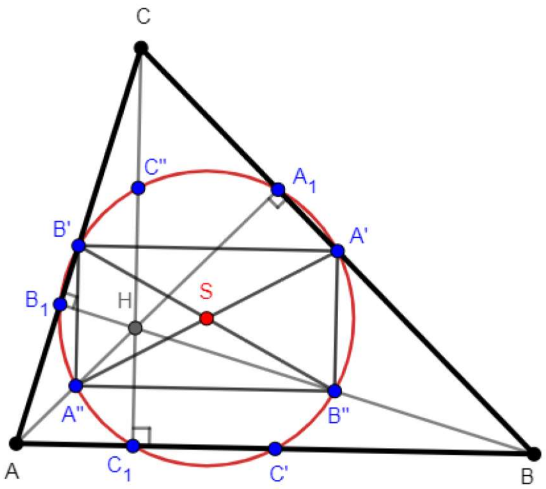
Međutim, dužina $\overline{AA_1}$ je težišnica trokuta ABC, pa prema teoremu 2.3.6 za težište T vrijedi $\dfrac{|AT|}{|A_1T|} = 2$. Sada iz $\dfrac{|AT_1|}{|A_1T_1|} = \dfrac{|AT|}{|A_1T|}$ zbog leme 2.3.1 slijedi da se T_1 i T podudaraju. Dakle, T leži na pravcu HS odnosno točke T, H i S leže na istom pravcu. Kako su trokuti AHT i A_1ST slični, slijedi

$$\frac{|TH|}{|TS|} = \frac{|AT|}{|A_1T|} = 2 \Longrightarrow |TH| = 2|TS|.$$

□

Sljedeći rezultat koji ćemo iskazati u literaturi je poznat kao Eulerova kružnica ili kružnica devet točaka.

Teorem 2.3.7 **(Eulerova kružnica).** *Neka su A', B', C' polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ trokuta ABC; točke A'', B'', C'' polovišta dužina $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, gdje je H ortocentar, a točke A_1, B_1, C_1 nožišta visina. Svih devet točaka A', B', C', A'', B'', C'', A_1, B_1, C_1 leže na istoj kružnici.*



Slika 5. Eulerova kružnica.

Dokaz. Kako je $\overline{A'B'}$ srednjica trokuta ABC, prema teoremu 2.3.5 slijedi $|A'B'| = \frac{1}{2}|AB|$ i $A'B' \parallel AB$. Također, kako je $\overline{A''B''}$ srednjica trokuta ABH, slijedi $|A''B''| = \frac{1}{2}|AB|$ i $A''B'' \parallel AB$. Sada slijedi da je $|A'B'| = |A''B''|$ i $A'B' \parallel A''B''$, pa možemo tvrditi da je četverokut $A'B'A''B''$ paralelogram te da se $\overline{A'A''}$ i $\overline{B'B''}$ međusobno raspolavljaju. Sa S označimo njihov presjek.

Kako je $\overline{A''B'}$ srednjica trokuta AHC, slijedi $A''B' \parallel CH$, pa je $A''B' \perp AB$ i stoga $A''B' \perp A''B''$. Prema tome, četverokut $A'B'A''B''$ je pravokutnik, pa mu možemo opisati kružnicu sa središtem S i polumjerom duljine $\frac{1}{2}|A'A''|$. Označimo tu kružnicu s k.

Analogno se dokazuje da je $A'C'A''C''$ pravokutnik, pa mu možemo opisati kružnicu s istim središtem i istim polumjerom kao kružnica k. Kako je trokut $A'A''A_1$ pravokutan s hipotenuzom $\overline{A'A''}$, slijedi da kružnica opisana tom trokutu ima isto središte S i polumjer duljine $\frac{1}{2}|A'A''|$. Znači da i A_1 leži na k. Analogno se dokazuje da B_1 i C_1 leže na k. □

U zadnjem dijelu Eulerovog doprinosa geometriji bavit ćemo se Eulerovom formulom za konveksne poliedre.

Definicija 2.3.1. ***Poliedar*** *je geometrijsko tijelo omeđeno ravnim plohama odnosno mnogokutima koje nazivamo stranama poliedra. Dužine u kojima se sastaju dvije susjedne strane poliedra zovu se* ***bridovi*** *poliedra, a točke u kojima se sastaju susjedni bridovi su* ***vrhovi*** *poliedra.* ***Konveksan poliedar*** *je geometrijsko tijelo koje se čitavo nalazi s iste strane ravnine svakog mnogokuta njegova ruba.*

Teorem 2.3.8 (Eulerova formula za poliedre). *Za svaki konveksan poliedar u kojem je V broj vrhova, B broj bridova i S broj strana vrijedi*

$$V - B + S = 2.$$

Primjer 2.3.1. *Kocka ima 8 vrhova ($V = 8$), 12 bridova ($B = 12$) i 6 strana ($S = 6$). Slijedi*

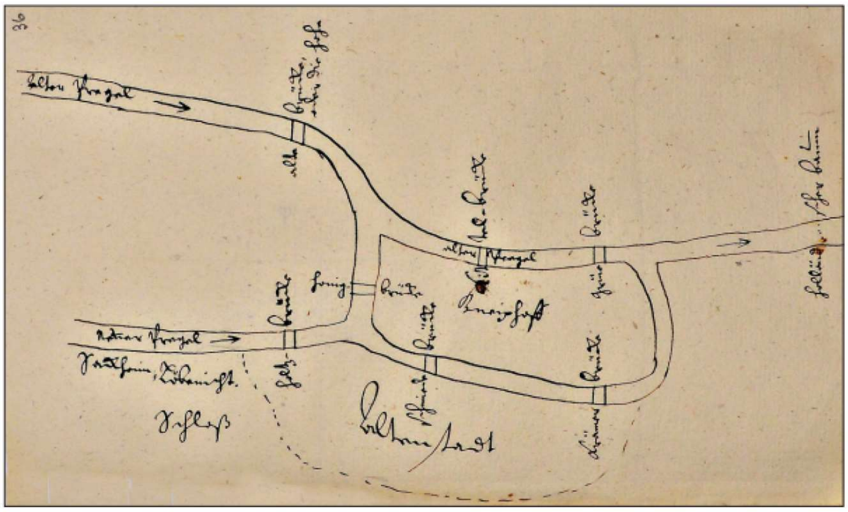
$$V - B + S = 8 - 12 + 6 = 2.$$

Njegov rad na toj formuli obilježen je s tri važna dokumenta. Prvi dokument bilo je pismo Goldbachu 1750. godine u kojem govori o otkriću tog odnosa. U tom je pismu uključio, bez dokaza, deset drugih opažanja o poliedrima. Razočaran, priznao je da je formula za poliedre toliko teška da tvrdnju još nije uspio dokazati na zadovoljavajući način. Godine 1750. i 1751. Euler je napisao dva članka o svojoj formuli za poliedre. U prvom radu, *Elementa doctrinae solidorum*, počeo je proučavati stereometriju. Prvih 30 stranica rada iznosio je opće primjedbe o poliedrima. Zatim je započeo raspravljati o odnosima između broja vrhova, bridova i strana poliedra, ali još uvijek u tom radu nije uspio dokazati tvrdnju za sve poliedre. Zatim, sljedeće godine objavio je drugi članak, *Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum* *quibus solida hedris planis inclusa sunt praedita.* Ovdje je napokon uspio dokazati svoju danu formulu za poliedre, ali taj dokaz nije zadovoljavao današnje standarde pa se ne priznaje kao točan dokaz, iako se ispostavilo da je moguće dati ispravan dokaz njegovom metodom. Euler je pokušao dokazati teorem dijeleći poliedar na manje i jednostavnije poliedre, ali nije se dosjetio lakšeg načina za dokazivanje, koje bi bilo moguće da je promatrao poliedre u obliku grafova. Eulerova formula ima veliku primjenu u teoriji grafova, pa ćemo u tom dijelu rada i dati jedan od dokaza formule.

2.4 Teorija grafova

Za teoriju grafova može se reći da ima svoj početak 1736. godine, kada je Euler razmatrao problem Königsberških mostova (današnji Kalinjingrad, Rusija). Euler je pokušao otkriti postoji li šetnja preko svih sedam mostova pruskog grada Königsberga tako da se svaki most prijeđe samo jednom?

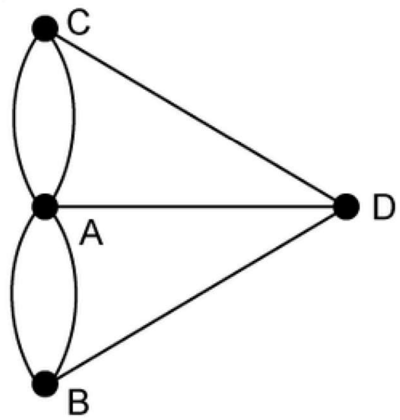
Euler je prvo transformirao stvarnu sliku grada i njegovih mostova u graf. Korištenje riječi "graf" u ovom kontekstu može biti različit od onoga o čemu većina ljudi misli kada se spominje riječ "graf". U ovom slučaju, graf mora imati vrhove i bridove. Nadalje, graf mora imati pravilo koje govori kako se bridovi pridružuju različitim vrhovima. U problemu Königsberških mostova, vrhovi predstavljaju kopnene mase povezane mostovima, a sami mostovi predstavljaju bridove grafa, dok je šetnja niz vrhova i bridova, kao što je šetnja koju vode ljudi u Königsbergu niz kopnenih masa i mostova.



Slika 6. Eulerova skica problema Königsberških mostova.

Definicija 2.4.1. ***Graf G*** *je uređena trojka* $G = (V(G), E(G), \psi(G))$ *koja se sastoji od nepraznog skupa* $V = V(G)$*, čiji su elementi vrhovi od* G*, skupa* $E = E(G)$ *disjunktnog s* $V(G)$*, čiji su elementi bridovi od* G *i funkcije incidencije* $\psi(G)$ *koja svakom bridu od* G *pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova od* G*.*

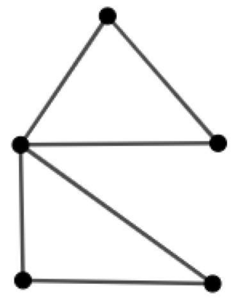
Definicija 2.4.2. ***Šetnja*** *u grafu* G *je netrivijalan konačan niz* $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 ... e_k v_k$ *čiji su članovi naizmjence vrhovi* v_i *i bridovi* e_i*, tako da su krajevi od* e_i *vrhovi* v_{i-1} *i* v_i*, za svako* i*,* $1 \leq i \leq k$*. Šetnja je zatvorena ako je* $v_0 = v_k$*. Ako su svi bridovi u šetnji* W *međusobno različiti, onda se* W *zove* ***staza*** *duljine* k*. Ako se šetnja* W *sastoji od međusobno različitih vrhova (a zatim i bridova), onda se* W *zove* ***put*** *duljine* k*.*



Slika 7. Prikaz problema Konigsberških mostova pomoću grafa.

Euler nije htio riješiti problem samo za sedam mostova u Königsbergu. Htio je utvrditi hoće li ova šetnja biti moguća za bilo koji broj mostova. Kako bi odgovorio na to pitanje, proučavao je druge grafove s različitim brojem vrhova i bridova. Donio je nekoliko zaključaka. Prvo, otkrio je da ako više od dvije kopnene površine imaju neparan broj mostova koji vode do njih, onda takva šetnja ne postoji. Drugo, pokazao je da ako točno dva kopnena područja imaju neparan broj mostova koji vode do njih, takva šetnja bi bila moguća samo ako bi početak bio u bilo kojem od dva područja s neparnim brojem mostova. Na kraju Euler zaključuje da ako nema kopnenih područja s neparnim brojem mostova koji vode do njih, šetnja je moguća s početkom s bilo kojeg područja. Euler je rješenjem ovog problema dao temelje teoriji grafova. Danas u teoriji grafova imamo Eulerovu stazu i Eulerov graf kao posljedicu ovog problema.

Definicija 2.4.3. ***Eulerova staza*** *grafa G je staza koja sadrži sve bridove od G.* ***Eulerova tura*** *je zatvorena Eulerova staza. Graf G je* ***Eulerov*** *ako sadrži Eulerovu turu.*



Slika 8. Primjer Eulerovog grafa.

Karakterizacija Eulerovih grafova je moguća pomoću Eulerovog teorema. Prvo je potrebno definirati nekoliko općih pojmova.

Definicija 2.4.4. ***Stupanj vrha*** *grafa G je broj $d_G(v)$ bridova u G incidentnih s v.*

Definicija 2.4.5. ***Udaljenost*** *$d_G(u, v)$ dvaju vrhova $u, v \in V(G)$ je duljina najkraćeg (u, v)-puta u G. Ako ne postoji takav put u G, stavljamo $d_G(u, v) = \infty$.*

Definicija 2.4.6. *Graf G je* ***povezan*** *ako $d_G(u, v) < \infty$, za svaki $u, v \in V(G)$. U suprotnom, kažemo da je G nepovezan.*

Teorem 2.4.1 (Eulerov teorem). *Povezan graf G je Eulerov ako i samo ako su svi vrhovi u G parnog stupnja.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je G Eulerov graf i neka je W Eulerova tura na G s početkom i krajem u vrhu u. Neka je $v \neq u$ vrh koji posjećujemo k puta u W. Svaki puta kada posjetimo vrh v, brojimo brid preko kojeg "dolazimo" u v i brid preko kojeg "izlazimo" iz v, pa slijedi $d_G(v) = 2k$, tj. stupanj od v je paran. Također, stupanj vrha u je paran jer W počinje i završava s u.
$\Leftarrow$ Neka je G povezan graf u kojemu je svaki vrh parnog stupnja. Pretpostavimo da G ima najmanji broj bridova i da G nije Eulerov graf. Zbog uvjeta o parnosti stupnjeva slijedi da G sadrži neku zatvorenu stazu. (Krenemo od nekog vrha i "ulazimo" odnosno "izlazimo" iz vrhova koristeći bridove točno jednom. Zbog parnog stupnja početnog vrha, svakako cemo ga opet posjetiti.) Neka je W takva staza i

neka je maksimalne duljine. Zbog pretpostavke da G nije Eulerov, slijedi da W nije Eulerova tura od G pa postoje bridovi u G koji nisu u W. Označimo s G' graf koji dobijemo uklanjanjem svih bridova iz W i pripadnih izoliranih vrhova (ukoliko postoje). Slijedi da su svi vrhovi u G' također parnog stupnja, pa zbog $|E(G')| < |E(G)|$ zaključujemo da G' ima Eulerovu turu W'. Zbog povezanosti od G slijedi da postoji $v \in V(W) \cap V(W')$ i možemo uzeti taj vrh za početak i kraj od W i W'. No, tada je WW' zatvorena staza od G sa $|E(WW')| > |E(W)|$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da je W zatvorena staza maksimalne duljine. Stoga, slijedi da je graf G Eulerov.

□

Također postoji karakterizacija Eulerovih staza u obliku korolara, ali prvo iskažimo lemu koju ćemo upotrijebiti za dokaz te tvrdnje.

Lema 2.4.1 (Lema o rukovanju). *U svakom grafu je broj vrhova neparnog stupnja paran broj.*

Korolar 2.4.1. *Povezan graf G sadrži Eulerovu stazu ako i samo ako G ima najviše dva vrha neparnog stupnja.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Prema teoremu 2.4.1 ako G ima Eulerovu stazu, tada su svi unutarnji vrhovi te staze parnog stupnja. Prema lemi o rukovanju slijedi da je u G ili 0 ili 2 vrha neparnog stupnja.

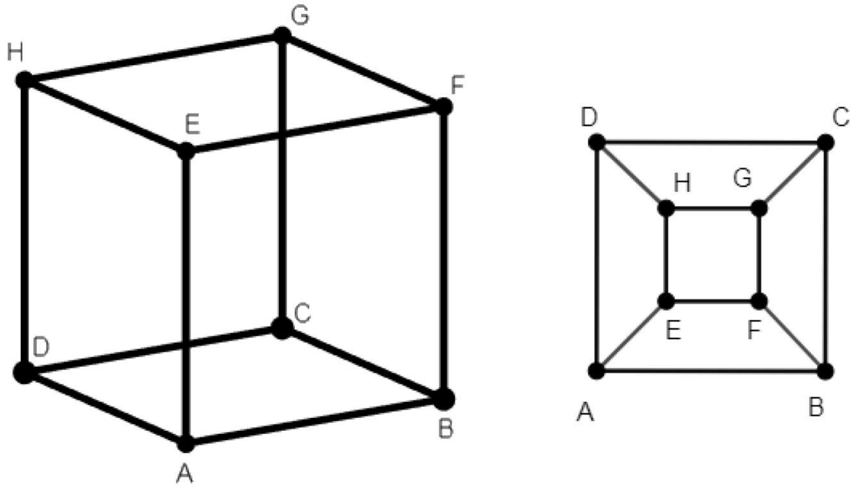
$\Leftarrow$ Neka je G netrivijalan povezan graf s najviše dva vrha neparnog stupnja. Prema lemi o rukovanju, broj takvih vrhova je ili 0 ili 2. Ako u G nema takvih vrhova, onda G sadrži sve vrhove parnog stupnja, pa prema teoremu 2.4.1 G sadrži Eulerovu turu, odnosno sadrži Eulerovu stazu. Ako su u G dva takva vrha, u i v, onda dodavanjem brida $e = uv$ grafu G svi vrhovi postaju parnog stupnja. Slijedi prema teoremu 2.4.1 da graf $G + e$ (graf G kojemu je dodan brid e) sadrži Eulerovu turu $W = v_0 e_1 v_1 ... e_{|E(G)|+1} v_{|E(G)|+1}$, gdje je $e_1 = e$, $v_0 = u$ i $v_1 = v$, a $v_0 = v_{|E(G)|+1}$. Slijedi da je staza $v_1 e_2 v_2 ... e_{|E(G)|+1} v_{|E(G)|+1}$ Eulerova staza od G.

□

Vratimo se sada na Eulerovu formulu za poliedre. Konveksni poliedar možemo u ravnini prikazati kao povezan ravninski[24] graf ako vrhove poliedra prikažemo kao

[24]Ravninski graf je graf koji se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima. Takva realizacija grafa zove se ravninsko smještenje grafa.

vrhove grafa, a rubove strana poliedra kao bridove grafa koji spajaju dva vrha (Slika 9.).



Slika 9. Prikaz kocke u obliku ravninskog grafa.

Sada Eulerovu formulu možemo promatrati u terminima broja vrhova v, broja bridova b i broja strana[25] s povezanog ravninskog grafa G, tj. $v - b + s = 2$. Postoji 20 različitih dokaza Eulerove formule, a mi ćemo provesti dokaz indukcijom po broju bridova b. No, prvo je potrebno iskazati nekoliko pojmova.

Definicija 2.4.7. ***Ciklus*** *je zatvorena šetnja u kojoj su svi vrhovi, osim početnog i krajnjeg, međusobno različiti.* ***Aciklički graf*** *ili* ***šuma*** *je graf koji ne sadrži cikluse.* ***Stablo*** *je povezan aciklički graf.*

Teorem 2.4.2. *Ako je graf G stablo, tada je $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

Dokaz teorema 2.3.8 (*Eulerova formula za poliedre*). Neka je G povezan ravninski graf nekog poliedra s brojem vrhova v, brojem bridova b i brojem strana s.
Baza indukcije:

Ako je $b = 0$, tada se graf sastoji od jednog vrha i jedne strane koja ga okružuje, odnosno $v - b + s = 1 - 0 + 1 = 2$.
Pretpostvka indukcije:

Pretpostavimo da formula vrijedi za sve poliedre čiji se pripadni ravninski graf sastoji od $b - 1$ bridova.

[25]Stranom grafa G nazivamo dio ravnine zatvorenog bridovima kod ravninskog smještenja grafa G.

Korak indukcije:

Neka je G pripadni ravninski graf nekog poliedra s b bridova, v vrhova i s strana. Postoje dva slučaja:

1. Slučaj: Graf G ne sadrži ciklus, odnosno G je stablo. Tada prema teoremu 2.4.2 vrijedi $v - b = 1$, a kako G ne sadrži ciklus slijedi da postoji samo jedna strana koja ga okružuje, odnosno $s = 1$. Stoga, $v - b + s = 1 + 1 = 2$.

2. Slučaj: G sadrži barem jedan ciklus. Tada odaberemo jedan brid e koji je sadržan u ciklusu i uklonimo ga iz grafa G. Dobiveni graf označimo s G'. Budući da ciklus dijeli ravninu na dvije različite strane, uklanjanjem brida e te dvije strane postanu jedna. Stoga, G' sadrži jednu stranu manje od G. Kako G' ima $b-1$ bridova (jer smo jedan uklonili), po pretpostavci indukcije Eulerova formula vrijedi za G'. Nadalje, G' ima jednak broj vrhova kao i G, stoga slijedi

$$v' - b' + s' = v - (b - 1) + (s - 1) = 2 \Longrightarrow v - b + s = 2.$$

$\square$

Općenito, za bilo koji graf G, Eulerova formula povezuje veličine $|E(G)|$, $|V(G)|$ i $\phi(G)$, gdje je $\phi(G)$ broj strana ravninskog grafa G. Ta formula glasi $\chi(G) = |E(G)| - |V(G)| + \phi(G)$, pri čemu se broj $\chi(G)$ naziva **Eulerova karakteristika** grafa G. Za povezan ravninski graf G je Eulerova karakteristika $\chi(G) = 2$.

3 Ostala Eulerova dostignuća

Iako je Euler najpoznatiji po svojim doprinosima u matematici, njegovi doprinosi u drugim područjima, kao što su mehanika, astronomija, kartografija, brodogradnja itd., nisu zanemarivi.

3.1 Mehanika

Gledajući Eulerov doprinos mehanici, njezina veličina, raznolikost i kvaliteta vrlo su impresivni. Problemi u analitičkoj fizici doveli su Eulera do proučavanja mehanike. Tako, 1736. godine Euler objavljuje svoju prvu knjigu pod nazivom *Mechanica*, koja donosi veliki napredak u mehanici. U knjizi Euler promatra gibanje materijalne točke u vakuumu i u mediju koji pruža otpor te analizira kretanje materijalne točke pod utjecajem sile. Euler je težio prema tome da se mehanika transformira u racionalnu znanost, ponovno procjenjujući prijašnje definicije i propozicije. Istraživanje koje je proveo Euler, postupno je pokazalo plodnost Newtonove mehanike.

U svom radu iz 1744. godine, Euler je dao izraz za princip najmanjeg djelovanja (princip koji se može koristiti za dobivanje jednadžbi gibanja u mehaničkom sustavu) pomoću integrala

$$\int mv\,ds,$$

pri čemu je m masa tijela, v brzina tijela i ds diferencijal puta kojeg slijedi tijelo.

Godine 1750. otkrio je da se načelo linearnog momenta (načelo koje tvrdi da je brzina promjene linearnog momenta $P = mv$, gdje je m masa i v brzina tijela, jednaka primijenjenoj sili F) može primijeniti na sve mehaničke sustave neovisno o njihovoj specifičnosti, drugim riječima, bilo da su sustavi diskretni ili kontinuirani.

Zatim, 1760. godine objavljuje rad *Theoria motus corporum solidorum seu rigidorum*, u kojem glavnu karakteristiku krutog tijela definira kao nepromjenjivost udaljenosti između bilo koje dvije točke krutog tijela. Osim toga, Euler za svako tijelo definira centar mase[26] i naglašava kako težište[27] krutog tijela podrazumijeva ograničeniji koncept od centra mase, a zatim uvodi i koncept momenta tromosti[28] krutog tijela.

Euler je prvi zapisao drugi Newtonov zakon u diferencijalnom obliku koristeći isti Newtonov koncept sile. Ova činjenica, povezana s uspješnom primjenom ovih jednadžbi na veliku raznolikost problema, imala je temeljnu važnost za prihvaćanje Newtonove mehanike u Europi.

3.2 Astronomija

Euler je 1730. godine bio i astronom na kraljevskom opservatoriju u Sankt Peterburgu. Prvih deset godina svoje karijere provodio je astronomska promatranja kao dio svog istraživačkog rada na Sanktpeterburškoj akademiji znanosti. Uspostavljajući svoju reputaciju matematičara, Euler je promatrao sunčeve pjege i vršio izravna promatranja kretanja Mjeseca. U svom prvom članku koji se odnosi na

[26]Centar mase je hvatište ukupne vanjske sile koja djeluje na sustav čestica ili na tijelo.

[27]Težište tijela je materijalna točka u kojoj djeluje rezultanta sila što djeluju na neko tijelo ili sustav materijalnih točaka u polju sile teže.

[28]Moment tromosti je fizikalna veličina koja opisuje tromost ili inerciju čestice ili krutoga tijela pri promjeni brzine ili smjera rotacije. Tromost ili inercija tijela je otpor bilo kojeg fizičkog objekta na svaku promjenu njegove brzine.

astronomiju, predstavio je sferne trokute za dobivanje metode za određivanje koordinata polarne zvijezde. Tri godine kasnije počeo je promatrati kretanje planeta i proučavao njihove orbite te tako razvio iterativnu metodu rješavanja Keplerovog problema (poseban slučaj problema u kojem dva tijela uzajamno djeluju silom F koja se mijenja po jačini kao inverzni kvadrat udaljenosti između njih).

Kada je počeo gubiti vid, Euler je prekinio svoju dnevnu rutinu promatranja planeta u opservatoriju. Međutim, on je nastavio svoje istraživanje kako bi pronašao matematičke teorije potrebne za rješavanje teških i složenih problema nebeske mehanike. Postignuća uključuju određivanje orbita kometa i drugih nebeskih tijela s velikom točnošću te izračunavanje paralakse[29] Sunca. Neposredno prije smrti, slijep i sa sedamdeset i šest godina proučavao je otkriće novog planeta kojem bi izračunao orbitu da je imao dovoljno vremena.

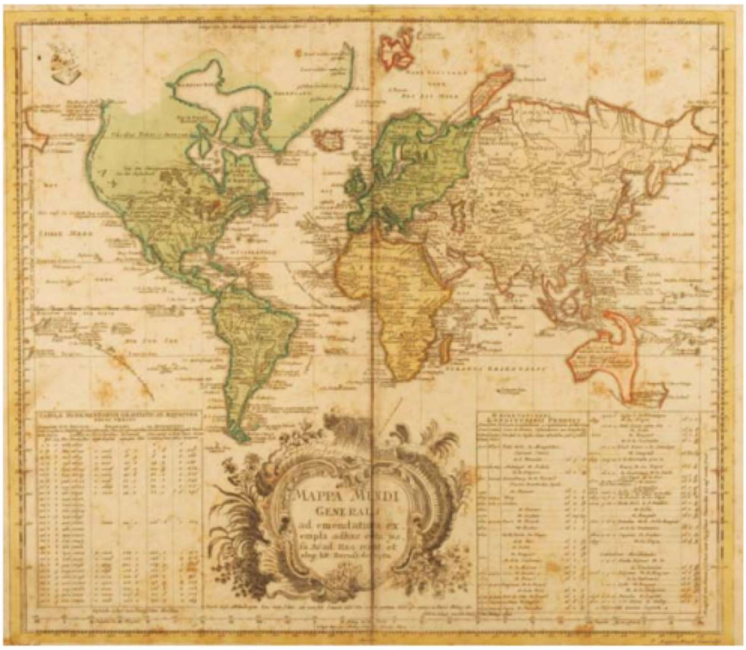
3.3 Kartografija

Kartografija je još jedno područje kojim se bavio Euler za vrijeme svog boravka u Sankt Peterburgu. Godine 1735. imenovan je ravnateljem geografskog odjela Sanktpeterburške akademije, a zadatak mu je bio pomoći francuskom kartografu Josephu Nicolasu Delisleu (1688. - 1768.) izraditi kartu cjelokupnog Ruskog Carstva. Usprkos sljepoći koja je uslijedila zbog prevelikog zamora tijekom kartografskog rada, nastavio je raditi s velikim žarom i posvetio se izradi atlasa. Euler se bavio kartografijom i za vrijeme svog boravka na Kraljevskoj akademiji znanosti u Berlinu. Autor je školskog atlasa čije je prvo izdanje izašlo 1753. godine. Iduće izdanje atlasa s prijevodima na njemački, francuski i latinski, izašlo je 1760. godine i sadrži 44 karte. Euler se nastavio baviti kartografijom i za vrijeme svog drugog boravka u Sankt Peterburgu. Sanktpeterburška akademija znanosti 1777. godine objavljuje tri Eulerova rada o kartografiji koji donose znatan doprinos u razvoju ruske kartografije. Euler je dokazao i činjenicu da se dio sfere ne može projicirati u ravninu uz sačuvanje mjerila u obje dimenzije. Zatim je razmatrao pitanje o najpogodnijoj projekciji za kartu Rusije i došao do zaključka da treba upotrijebiti Delisleovu projekciju zbog njezinih svojstava:

- paralele i meridijani sijeku se u projekciji pod pravim kutom,
- lokalno daje dobru aproksimaciju.

[29] Paralaksa je prividan pomak nebeskog tijela opažan iz dvaju različitih smjerova; služi za određivanje udaljenosti nebeskih tijela.

Slika 10. Karta Europe iz Eulerovog atlasa, izdanje iz 1760. godine.



Slika 11. Karta svijeta iz Eulerovog atlasa, izdanje iz 1760. godine.

Zaključak

Eulerovo nasljeđe je veliko u smislu oblikovanja moderne matematike i inženjerstva, a njegov rad je istaknut i poštovan od strane matematičara diljem svijeta te se ne može cijeli iskazati u ovom radu. Doista, kroz njegove knjige, koje su obilježene najvišim težnjama za jasnoćom i jednostavnošću te koje predstavljaju prve stvarne udžbenike u suvremenom smislu, Euler je postao glavnim učiteljem Europe, ne samo svoga vremena, nego i za vrijeme 19. stoljeća. Osjećaji mržnje, bilo zbog prioritetnih pitanja ili zbog nepoštene kritike, bili su potpuno nepoznati Euleru. Razmjena ideja s drugima i dopuštanje drugima da sudjeluju u procesu otkrivanja je još jedna plemenita osobina Eulera. Tako je Euler ostao upamćen, ne samo kao odličan matematičar i inženjer, već i kao dobar čovjek.

Literatura

[1] J. Alama, *A formal proof of Euler's polyhedron formula*, Department of Philosophy Standford University, 2009.

[2] G.L. Alexanderson, *About the cover: Euler and Konigsberg's bridges: A historical view*, American Mathematical Society, Vol. 43, No. 4, 2006., 567–573

[3] P. Barlow, *An elementary investigation of the Theory of numbers*, London, 1811.

[4] M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, skripta verzija 1.0, 2007.

[5] R. Calinger, *Leonhard Euler: The first St. Petersburg years (1727 - 1741)*, Historia mathematica 23 (1996.), 121–166

[6] R. Cretney, *The origis of Euler's early work on continued fractions*, Historia Mathematica 41 (2014.), 139–156

[7] B. Dakić, *Leonhard Euler (1707. - 1783.)*, 1. dio, Matematika i škola 39(2007), 177–180

[8] B. Dakić, *Leonhard Euler (1707. - 1783.)*, 2. dio, Matematika i škola 40(2007), 211–215

[9] R. Diestel, *Graph Theory*, Electronic Edition 2000, Springer-Verlag,NY 1997.

[10] B. Divjak, A. Lovrenčić, *Diskretna matematika s teorijom grafova*, Varaždin, 2005.

[11] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, PMF - Matematički odjel Sveučilište u Zagrebu

[12] W. Dunhman, *Euler: The master of us all*, The Mathematical Association of America, 1999.

[13] W. Gautschi, *Leonhard Euler: His life, the Man, and his works*, Siam Review Vol. 50, No. 1, 2008., 3–33

[14] T. Harju, *Lecture Notes on Graph Theory*, Department of Mathematics University of Turku, 2011.

[15] A. Kleinert, *Leonhardi Euleri Opera Omnia: Editing the works and correspondence of Leonhard Euler*, Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Physik, 2015.

[16] R. Krishnan, R.L. Kumar, *Euler and his contributions*, Bulletin of the Marathwada Mathematical Society, Vol. 11, No. 1, 2010., 25–34

[17] I. Matić, *Uvod u teoriju brojeva*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera, Osijek, 2013.

[18] D.E. Musielak, *Euler: Genius Blind Astronomer Mathematician*, University of Texas at Arlington, 2014.

[19] A.R.E. Oliveira, *Euler's contribution to classical mechanics*, Federal University of Rio de Janeiro, 2007.

[20] C.E. Sandifer, *How Euler did it*, Mathematical Association of America, 2007.

bibitemSan C.E. Sandifer, *The early mathematics of Leonhard Euler*, Mathematical Association of America, 2007.

[21] P. Yiu, *The elementary mathematical works of Leonhard Euler (1707 - 1783)*, Florida Atlantic University, 1999.

[22] `http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Euler.html` Zadnji posjet: 03.05.2019.

[23] `https://www.ics.uci.edu/~eppstein/junkyard/euler/`

[24] `https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/smajstor/graf_pred1.pdf`

[25] `https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/smajstor/graf_pred3.pdf`

[26] `https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/smajstor/graf_pred5.pdf`

[27] https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/smajstor/pred8graf.pdf

[28] https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/smajstor/pred12_13graf.pdf

[29] https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/eg/dodatni/7.stereometrija.pdf

[30] https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/mnm2/pojam-poliedra.pdf
Zadnji posjet: 03.05.2019.

Sažetak

Ovaj rad opisuje život i doprinos švicarskog matematičara Leonharda Eulera u raznim granama znanosti, napose matematici. Također, ovo je pokušaj iskazivanja dijela njegove genijalnosti. U prvom poglavlju opisuje se njegov životni put koji ga vodi po Europi od Basela, njegova mjesta rođenja, do Sankt Peterburga pa do Berlina i zatim ponovno u Sankt Peterburg, gdje provodi ostatak svoga života.

U drugom poglavlju rada riječ je o Eulerovim doprinosima u raznim područjima matematike kao što su matematička analiza, teorija brojeva, geometrija i teorija grafova. Upravo rad u matematičkoj analizi donosi Euleru veliku slavu u matematičkoj zajednici. Euler također uvodi razne matematičke oznake koje se koriste i danas.

Na kraju rada promatraju se Eulerovi doprinosi u mehanici, astronomiji i kartografiji. Zbog puno napornog rada u kartografiji Euleru je oslabio vid, no gubitak vida Eulera nije obeshrabrio, već nastavlja pisati i objavljivati svoje radove sve do kraja života.

Ključne riječi: Leonhard Euler, Eulerov pravac, Eulerov teorem, Eulerova kružnica, Eulerova formula, Eulerov broj, Eulerova karakteristika, Eulerova funkcija, Eulerov identitet.

Summary

This paper describes the life and contributions of Swiss mathematician Leonhard Euler in various fields of science and especially in mathematics. Also, this is an attempt to express part of his genius. The first chapter describes his life path in Europe, from Basel, his place of birth, to St. Petersburg, then to Berlin and then back to St. Petersburg, where he spent the rest of his life.

In the second chapter of the paper, Euler's contributions in various fields of mathematics, such as mathematical analysis, number theory, geometry and graph theory are discussed. Precisely his work in mathematical analysis brings him a great glory in the mathematical community. Euler also introduced various mathematical symbols that are used today.

At the end of the paper, Euler's contributions to mechanics, astronomy, and cartography are observed. Cartography has had a major impact on Euler's loss of vision on both eyes, but that did not discourage Euler, and he even continues to write and publish his work for the rest of his life.

Key words: Leonhard Euler, Euler's line, Euler's theorem, Euler's circle, Euler's formula, Euler's number, Euler characteristic, Euler's function, Euler's identity.

Životopis

Rođen sam 25.09.1991. godine u Mohaču, Mađarska. Od 1998. do 2006. godine pohađao sam Osnovnu školu Bilje u Bilju. Nakon toga, od 2006. do 2010. godine, pohađam Strojarsku tehničku školu u Osijeku. Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike upisujem 2012. godine na Odjelu za matematiku u Osijeku.