Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike, smjer: Financijska matematika i statistika

Toni Milas

Gama funkcija i primjene

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike, smjer: Financijska matematika i statistika

Toni Milas

Gama funkcija i primjene

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava
Komentor: prof. dr. sc. Kristian Sabo

Osijek, 2019.

Sadržaj

1 Uvod i povijesni pregled

U ranom 18. stoljeću Leonhard Euler i drugi matematičari pokušavali su proširiti domenu faktorijela na sve realne brojeve. Iako to nije moguće učiniti korištenjem elementarnih funkcija, pronađeno je nekoliko izraza pomoću limesa i integrala. Sudeći prema pismima koja su razmjenjivali Leonhard Euler i Daniel Bernoulli, potonji je prvi definirao proširenje faktorijela koristeći beskonačni produkt. Nedugo nakon toga, Euler je tijekom 1729. i 1730. došao do definicije tražene funkcije pomoću integrala kojoj je dokazao i brojna zanimljiva svojstva. Kasnije, u 19. stoljeću, Carl Friedrich Gauss proširio je domenu na kompleksnu ravninu, dok je Eulerova definicija dopuštala samo realne brojeve. Gauss je zaslužan i za notaciju $\Gamma(x)$ kakvu poznajemo danas. Za sam naziv "gama funkcija" zaslužan je Adrien-Marie Legendre, koji je izmijenio Eulerovu definiciju koristeći supstituciju u integralu. Zanimljivo je da se danas pod nazivom gama funkcija najčešće koristi Legendreov, a ne Eulerov zapis, iako je gama funkcija poznata i pod nazivom *Eulerov integral druge vrste*. Nekoliko godina nakon što je Gauss dao drugi pristup gama funkciji, Karl Weierstrass izmijenio je njegov pristup. Osim što je dao novi način definiranja gama funkcije, ovo istraživanje potaknulo je Weierstrassa da dokaže teorem koji je danas poznat pod nazivom Weierstrassov teorem o faktorizaciji, a koji kaže da se svaka cijela funkcija može napisati kao produkt njenih nultočaka nad skupom $\mathbb{C}$. U 20. stoljeću, točnije 1922. Bohr i Mollerup dokazali su teorem koji garantira jedinstvenost gama funkcije pod određenim uvjetima. Gama funkcija potaknula je interes velikih matematičara svoga doba, a neki će od njihovih pristupa definiranju gama funkcije biti navedeni u nastavku.

Ostatak rada podijeljen je na dva poglavlja. U prvom poglavlju definirana je gama funkcija i dokazana je njena dobra definiranost. Zatim je iskazan i dokazan Bohr-Mollerupov teorem o jedinstvenosti gama funkcije te su dokazana neka od njenih svojstava. Dodatno, opisano je kako se gama funkciju može proširiti na gotovo cijeli skup realnih brojeva. Posljednje poglavlje daje pregled nekih primjena gama funkcije, kao što su primjene u vjerojatnosti (izračun momenata nekih neprekidnih slučajnih varijabli te gama distribucija), primjene na računanje volumena n-dimenzionalne kugle i elipsoida, problem pakiranja, primjene u integralnom računu te primjene na računanje Laplaceovih transformacija.

2 Gama funkcija

Tijekom 1729. i 1730. (vidi npr. [7] i [11]) Euler je uveo analitičku funkciju sa svojstvom da ona interpolira faktorijele kada je argument funkcije prirodan broj. Sljedeću definiciju predložio je 1730. u jednom pismu Christianu Goldbachu:

Definicija 2.1. Funkciju $\Gamma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definiranu izrazom

$$\Gamma(x) = \int_0^1 (-\ln t)^{x-1} \mathrm{d}t \tag{1}$$

zovemo **gama funkcija**.

Supstitucijom $u = -\ln t$ koju je uveo Legendre (vidi [10], str. 477., 485., 490.) definicija (1) svodi se na često korištenu definiciju u literaturi, a koja glasi:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t.$$

U nastavku ćemo pokazati da je gama funkcija dobro definirana za svaki $x > 0$, kao što je to učinjeno u [5]. Kako bismo dokazali dobru definiranost, trebamo pokazati da pripadni nepravi integral konvergira za sve vrijednosti $x > 0$. U tu svrhu zapišimo gama funkciju u obliku

$$\Gamma(x) = \int_0^1 t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t + \int_1^\infty t^{x-1} e^{-t} \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Pokazat ćemo da oba integrala s desne strane prethodne jednakosti konvergiraju. U tu svrhu koristit ćemo sljedeće leme:

Lema A. *Integral*

$$\int_1^\infty e^{-st} \mathrm{d}t$$

konvergira za sve $s > 0$.

Dokaz. Za $t > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty e^{-st} \mathrm{d}t &= \lim_{u \to \infty} \int_1^u e^{-st} \mathrm{d}t \\
&= \lim_{u \to \infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \right) \Bigg|_1^u \\
&= \lim_{u \to \infty} \left(-\frac{1}{s} \left(e^{-su} - e^{-s} \right) \right) \\
&= \frac{1}{s} e^{-s} < \infty.
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Lema B. *Neka je $n \in \mathbb{Z}$. Vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{1}{2}t}} = 0.$$

Dokaz. Dokaz provodimo u dva slučaja.

Prvo promatramo slučaj $n \leq 1$. Tada t^{n-1} možemo zapisati kao t^{-m} za neki nenegativni cijeli broj m. Slijedi

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{-m}}{e^{\frac{1}{2}t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}t}t^m} = 0.$$

Preostaje slučaj $n > 1$. Traženi limes u ovom slučaju neodređenog je oblika ∞/∞ pa primjenom L'Hospitalovog pravila dobivamo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{1}{2}t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(n-1)t^{n-2}}{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}},$$

što je i dalje neodređeni oblik ∞/∞. Primijenimo li L'Hospitalovo pravilo još jednom, dobivamo

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{1}{2}t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(n-1)(n-2)t^{n-3}}{\frac{1}{2^2}e^{\frac{1}{2}t}},$$

te i dalje imamo isti neodređeni oblik. Lako se može uočiti da se L'Hospitalovo pravilo treba primijeniti ukupno n puta kako bi se dobio oblik

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{n-1}}{e^{\frac{1}{2}t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{(n-1)!}{\frac{1}{2^n}e^{\frac{1}{2}t}} = 0.$$

Q.E.D.

Nakon što smo dokazali potrebne leme, dokazat ćemo konvergenciju integrala iz jednakosti (2).

Propozicija 2.1. *Integral*

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

apsolutno je konvergentan za sve $x > 0$.

Dokaz. Kako je $t \in [0,1]$, to je $e^{-t} \leq 1$ pa je $t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$. U nastavku razmatramo dva slučaja.

1) Za $x \geq 1$ je

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{x}t^x\Big|_0^1 = \frac{1}{x} < \infty$$

pa zaključujemo da integral konvergira za $x \geq 1$.

2) Za $x \in \langle 0,1\rangle$ je integral kojeg promatramo nepravi pa računamo

$$\int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 t^{x-1}\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{1}{x}t^x\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{x}\lim_{\varepsilon\to 0^+}(1-\varepsilon^x) = \frac{1}{x} < \infty$$

pa integral konvergira za $x \in \langle 0,1\rangle$.

Konačno, kako je

$$0 < \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \leq \int_0^1 t^{x-1}\mathrm{d}t < \infty,$$

to po usporednom kriteriju za konvergenciju integrala slijedi tvrdnja. Q.E.D.

Propozicija 2.2. *Integral*

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

apsolutno je konvergentan za sve $x > 0$.

Dokaz. Prema Lemi B, za $\varepsilon = 1$ postoji $M > 0$ t.d. $\forall t \geq M$ vrijedi

$$\left|\frac{t^{n-1}}{e^{\frac{1}{2}t}}\right| < 1.$$

Dakle, za $t \geq M$ je $0 \leq t^{n-1} < e^{\frac{1}{2}t}$ pa slijedi

$$0 \leq e^{-t}t^{n-1} < e^{-t}e^{\frac{1}{2}t} = e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Prema Lemi A, uz $s = 1/2$, integral

$$\int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t$$

konvergira pa za sve $n \in \mathbb{Z}$ prema usporednom kriteriju konvergira i integral

$$\int_1^\infty t^{n-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

U nastavku razmatramo dva slučaja.

1) Neka je $x \geq 1$ te neka je m najveći prirodan broj takav da je $m \leq x < m+1$. Tada za $t > 0$ vrijedi $0 \leq e^{-t}t^{x-1} \leq e^{-t}t^m$, a kako već znamo da je integral

$$\int_1^\infty e^{-t}t^m\mathrm{d}t$$

konvergentan, to je prema usporedbnom kriteriju konvergentan i integral

$$\int_1^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

2) Neka je $x \in \langle 0, 1 \rangle$. Za $t \in [1, \infty\rangle$ je $t^{x-1} \leq t$. Stoga je

$$\frac{1}{e^{\frac{1}{2}t}} \leq \frac{t^{x-1}}{e^{\frac{1}{2}t}} \leq \frac{t}{e^{\frac{1}{2}t}}.$$

Kako prema Lemi B vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{e^{\frac{1}{2}t}} = 0, \ \lim_{t \to \infty} \frac{t}{e^{\frac{1}{2}t}} = 0$$

to po teoremu o sendviču slijedi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t^{x-1}}{e^{\frac{1}{2}t}} = 0$$

pa za $x \in \langle 0, 1 \rangle$ vrijedi $0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq e^{-\frac{1}{2}t}$, što povlači

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t \leq \int_1^\infty e^{-\frac{1}{2}t}\mathrm{d}t < \infty$$

te je integral

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

konvergentan prema usporednom kriteriju.

Q.E.D.

Prethodno provedenom analizom dokazali smo da je gama funkcija zaista dobro definirana za sve $x > 0$. U nastavku ćemo se detaljnije baviti jedinstvenošću gama funkcije te njenim svojstvima.

2.1 Bohr-Mollerupov teorem

Euler je htio pronaći neprekidnu funkciju koja će interpolirati faktorijele. Pokazalo se kako gama funkcija ima to svojstvo. Dodatno, kako će biti pokazano u nastavku, gama funkcija zadovoljava funkcijsku jednadžbu $f(x+1) = xf(x)$. Međutim, gama funkcija nije jedina takva funkcija. Primjerice, isto svojstvo ima i svaka funkcija $f_k(x) = \sin(2k\pi x)\Gamma(x)$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Također, kako će biti navedeno kada budemo razmatrali svojstva gama funkcije, ona zadovoljava $f(1) = 1$, što ju i dalje ne čini jedinstvenom. Kako se gama funkcija često javlja u raznim primjenama, mnogi su matematičari htjeli pronaći uvjete uz koje će gama funkcija biti jedinstvena. Do uvjeta su došli Bohr i Mollerup (vidi [4]), no prije iskaza i dokaza teorema definirat ćemo konveksnu i log-konveksnu funkciju, kao i Gaussov pristup definiranju gama funkcije, u svrhu dokaza Bohr-Mollerupova teorema.

Definicija 2.2. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, **konveksna** na D ako je

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \ \forall x, y \in D, \ \forall \lambda \in [0, 1].$$

Definicija 2.3. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, $f(x) > 0$, $\forall x \in D$, **log-konveksna** na D ako je

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}, \ \forall x, y \in D, \ \forall \lambda \in [0,1].$$

Sljedeći je rezultat vrlo koristan pri ispitivanju log-konveksnosti funkcije.

Teorem 2.4. *Funkcija $f > 0$ je log-konveksna ako i samo ako je funkcija $\log f$ konveksna.*

Dokaz. Dokaz se vrlo lako vidi iz sljedećeg niza međusobno ekvivalentnih nejednakosti, pri čemu u prvoj nejednakosti pretpostavljamo da je funkcija f log-konveksna te koristimo definiciju log-konveksnosti, dok je posljednja nejednakost definicija konveksnosti funkcije za funkciju $\log f$.

$$\begin{aligned}
& f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda} \\
\Longleftrightarrow\ & \log f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \log\left(f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}\right) \\
\Longleftrightarrow\ & (\log f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \log f(x)^\lambda + \log f(y)^{1-\lambda} \\
\Longleftrightarrow\ & (\log f)(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda(\log f)(x) + (1-\lambda)(\log f)(y)
\end{aligned}$$

Q.E.D.

Još jedan rezultat koji ćemo koristiti u dokazu Bohr-Mollerupova teorema je Galvanijev teorem. Dokaz Galvanijeva teorema tehničke je prirode te ga nećemo navoditi, a može ga se naći u [6].

Teorem 2.5 (Galvani). *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ konveksan skup i $a \in I$. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna ako i samo ako je funkcija $s_a : I \setminus \{a\} \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$s_a(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

rastuća $\forall a \in I$.

U ovom ćemo trenutku navesti i Gaussov pristup definiranju gama funkcije. Za $x > 0$ neka je

$$\Gamma_n(x) = \frac{n! n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Tada je

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \Gamma_n(x).$$

Jednostavnim računom može se provjeriti da je ova definicija ekvivalentna onoj već korištenoj u ovom radu. Gaussova definicija olakšat će dokaz Bohr-Mollerupova teorema (dokaz preuzet iz [1]).

Teorem 2.6 (Bohr-Mollerup). *Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ funkcija sa svojstvima* *i)* $f(1) = 1$,

ii) $f(x+1) = xf(x)$,

iii) f *je log-konveksna.*

Tada je $f(x) = \Gamma(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x \in \langle 0, 1\rangle$. Prema *i)* te *ii)* dovoljno je tvrdnju pokazati za tako odabrani x. Promotrimo intervale $[n, n+1]$, $[n+1, n+1+x]$ i $[n+1, n+2]$. Kako je f log-konveksna i $n+1 < n+1+x < n+2$, to je prema Galvanijevom teoremu

$$\log\frac{f(n+1)}{f(n)} \leq \frac{1}{x}\log\frac{f(n+1+x)}{f(n+1)} \leq \log\frac{f(n+2)}{f(n+1)}.$$

Prethodni niz nejednakosti može se korištenjem uvjeta *i)* te *ii)* zapisati kao

$$x\log n \leq \log\frac{(x+n)(x+n-1)\cdots xf(x)}{n!} \leq x\log(n+1),$$

što se dalje može pojednostavniti tako da se dobije

$$0 \leq \log\frac{x(x+1)\cdots(x+n)}{n!n^x} + \log f(x) \leq x\log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Prelaskom na limes kada n teži u beskonačno te korištenjem teorema o sendviču slijedi da je

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{n!n^x}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \Gamma(x),$$

što je i trebalo pokazati. Q.E.D.

2.2 Svojstva gama funkcije

U ovom ćemo dijelu navesti i dokazati samo neka svojstva gama funkcije, pri čemu se fokusiramo na ona svojstva koja će biti korištena u primjenama gama funkcije. Za dodatna svojstva i dokaze može se vidjeti npr. [1] i [3].

Teorem 2.7. *Vrijedi*

$$\Gamma(1) = 1.$$

Dokaz. Prema definiciji gama funkcije vrijedi

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-t}\mathrm{d}t = \lim_{u\to\infty}\left(-e^{-t}\right)\Big|_0^u = \lim_{u\to\infty}\left(1-e^{-u}\right) = 1.$$

Q.E.D.

Teorem 2.8. *Vrijedi*

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$

Dokaz. Prvo koristimo definiciju gama funkcije te uvodimo supstituciju u integralu:

$$\Gamma(1/2)=\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t=\left|\begin{array}{c} t=u^2 \\ \mathrm{d}t=2u\,\mathrm{d}u \end{array}\right|=2\int_0^\infty e^{-u^2}\,\mathrm{d}u.$$

Zatim promatramo izraz $\Gamma^2(1/2)$ koji možemo zapisati u obliku

$$\Gamma^2(1/2)=4\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\left(u^2+v^2\right)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}u.$$

Prethodni dvostruki integral može se riješiti prelaskom na polarne koordinate supstitucijom $u=r\cos\theta$, $v=r\sin\theta$, pri čemu je $0\le r\le\infty$ i $0\le\theta\le\pi/2$, budući da je područje integracije prvi kvadrant. Jacobijan je $|J|=r$ pa integral glasi

$$\begin{aligned}\Gamma^2(1/2)&=4\int_0^{\pi/2}\int_0^\infty e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^\infty e^{-r^2}r\,\mathrm{d}r\\ &=\left|\begin{array}{c} u=-r^2 \\ \mathrm{d}u=-2r\,\mathrm{d}r \end{array}\right|\\ &=-\pi\int_0^{-\infty}e^u\,\mathrm{d}u=\pi.\end{aligned}$$

Konačno, kako je $e^{-u^2}>0$, to je $\Gamma(1/2)\ge 0$ pa mora biti $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Q.E.D.

Teorem 2.9. *Vrijedi*

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x).$$

Dokaz. Krenemo li od izraza

$$\Gamma(x+1)=\int_0^\infty t^x e^{-t}\mathrm{d}t$$

te pripadni integral riješimo prelaskom na limes te korištenjem parcijalne integracije uz $u=t^x$ i $\mathrm{d}v=e^{-t}\mathrm{d}t$ dolazimo do

$$\Gamma(x+1)=\lim_{p\to\infty}\left(-e^{-p}p^x\right)+x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t=x\Gamma(x),$$

pri čemu limes iščezava zbog dominacije eksponencijalnog člana. Q.E.D.

Teorem 2.10. *Vrijedi*

$$\Gamma(x+1) = x!, \ \forall x \in \mathbb{N}_0.$$

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje uzastopnom primjenom Teorema 2.9.:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = \cdots = x(x-1)\cdots 1 \cdot \Gamma(1) = x!,$$

pri čemu je u zadnjoj jednakosti iskorištena činjenica da je $\Gamma(1) = 1$. Q.E.D.

Teorem 2.11. $\Gamma(0)$ *nije definirano.*

Dokaz. Po definiciji je

$$\Gamma(0) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

Kako je prethodni integral nepravi integral u obje granice integracije, prvo odaberimo proizvoljan $c \in \langle 0, \infty \rangle$ tako da integral možemo zapisati u obliku

$$\Gamma(0) = \int_0^c \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t + \int_c^\infty \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t.$$

Početni će integral konvergirati ako konvergiraju oba integrala iz prethodne jednakosti. Stoga promatramo prvi integral. Vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^c \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^c \frac{e^{-t}}{t} \,\mathrm{d}t \\
&= \left| \begin{matrix} u = e^{-t} & \mathrm{d}v = \frac{1}{t} \,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u = -e^{-t} \,\mathrm{d}t & v = \ln t \end{matrix} \right| \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(e^{-t} \ln t \Big|_\varepsilon^c + \int_\varepsilon^c e^{-t} \ln t \,\mathrm{d}t \right).
\end{aligned}$$

Sada računamo prvi limes iz prethodnog računa te dobivamo

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{-t} \ln t \Big|_\varepsilon^c &= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\frac{e^{-c}}{c} - e^{-\varepsilon} \ln \varepsilon \right) \\
&= \frac{e^{-c}}{c} - \lim_{\varepsilon \to 0^+} e^{-\varepsilon} \ln \varepsilon \to \infty.
\end{aligned}$$

Slijedi da $\Gamma(0)$ nije definirano. Q.E.D.

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza zbog njegove složenosti i činjenice da izlazi izvan okvira ovog rada budući da se nećemo baviti raznim identitetima koje gama funkcija zadovoljava, već njezinim svojstvima i primjenama, dok nam je sam rezultat važan zbog lake analize nultočaka gama funkcije. Dodatno, može se uočiti kako je domena gama funkcije u sljedećem teoremu proširena u odnosu na domenu kakvu smo do ovog trenutka razmatrali, no opravdanje za takvu domenu može se naći u sljedećem potpoglavlju.

Teorem 2.12 (Eulerova produktna formula). *Za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{\leq 0}$ vrijedi*

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

Teorem 2.13. *Gama funkcija nema nultočaka.*

Dokaz. Kada bi postojao x takav da je $\Gamma(x) = 0$, to bi prema Eulerovoj produktnoj formuli slijedilo

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = 0,$$

što je očito nemoguće budući da lijeva strana prethodne jednakosti ne može biti jednaka 0. Q.E.D.

2.3 Proširenje gama funkcije na negativne brojeve

Gama funkcija kakvom smo ju definirali na početku definirana je za pozitivne vrijednosti argumenta, međutim moguće je proširiti ju korištenjem jednog od prethodno dokazanih identiteta (vidi npr. [3]). Preciznije, koristimo formulu iz Teorema 2.9. u obliku

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1). \tag{3}$$

Kako gama funkcija prima samo pozitivne vrijednosti argumenta, to je lijeva strana jednakosti (3) dobro definirana za $x > 0$, no desna je strana dobro definirana za $x + 1 > 0$, odnosno $x > -1$. Stoga možemo koristeći desnu stranu jednakosti (3) definirati i lijevu stranu. Ovako smo došli do toga da je $\Gamma(x)$ definirano za $x > -1$, no to znači da je desna strana u (3) definirana za $x > -2$ pa to možemo iskoristiti kako bi i lijevu stranu definirali za $x > -2$. Analognim zaključivanjem možemo definirati $\Gamma(x)$ za (gotovo) sve negativne vrijednosti argumenta. Međutim, treba promotriti što se događa za $x \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

Teorem 2.14. $\Gamma(x)$ *nije definirano za* $x \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$.

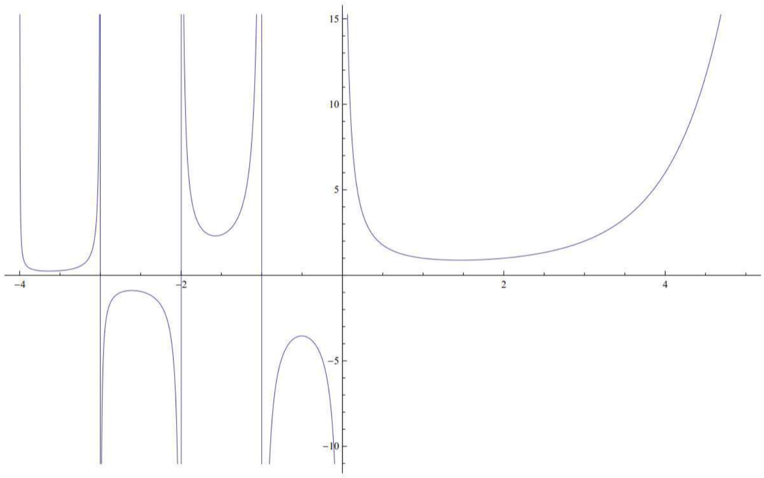
Dokaz. Kako $\Gamma(0)$ nije definirano, korištenjem (3) uočavamo da je

$$\Gamma(-1) = \frac{1}{-1}\Gamma(0)$$

pa niti $\Gamma(-1)$ nije definirano. Na isti način uočavamo da kako je

$$\Gamma(-2) = \frac{1}{-2}\Gamma(-1)$$

to ni $\Gamma(-2)$ nije definirano budući da $\Gamma(-1)$ nije definirano. Analogno se zaključuje da $\Gamma(x)$ nije definirano ni za koji $x \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$. Q.E.D.



Slika 1: Graf gama funkcije

3 Primjene

3.1 Primjene u vjerojatnosti

3.1.1 Momenti neprekidnih slučajnih varijabli

Gama se funkcija često koristi pri računanju očekivanja i varijance neprekidnih slučajnih varijabli. Promotrit ćemo primjere za eksponencijalnu i normalnu slučajnu varijablu.

Definicija 3.1. Eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$ je slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}\mathbb{I}_{\{x\geq 0\}}(x).$$

Izračunat ćemo očekivanje EX i varijancu $VarX$ eksponencijalne slučajne varijable.

$$EX = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lambda x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \lambda x \\ \mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty t e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\Gamma(2) = \frac{1}{\lambda}$$

Kako je $VarX = EX^2 - (EX)^2$, a EX smo upravo izračunali, u ovom ćemo slučaju dodatno računati samo EX^2:

$$\begin{aligned} EX^2 &= \int_{\mathbb{R}} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_0^\infty x^2 e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} t = \lambda x \\ \mathrm{d}t = \lambda\,\mathrm{d}x \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty t^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda^2}\Gamma(3) = \frac{2}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$VarX = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Definicija 3.2. Normalna slučajna varijabla s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ ima funkciju gustoće

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Očekivanje normalne slučajne varijable računamo kao

$$\begin{aligned}
EX &= \int_{\mathbb{R}} x f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sigma}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (\sigma t + \mu) e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\sigma \int_{\mathbb{R}} t e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t + \mu \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \dfrac{t^2}{2} \\ \mathrm{d}u = t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \\
&= \frac{2\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{2u}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u}\,\mathrm{d}u \\
&= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \Gamma(1/2) = \mu.
\end{aligned}$$

Varijancu ćemo u ovome slučaju računati po definiciji, tj. kao $VarX = E(X - EX)^2$:

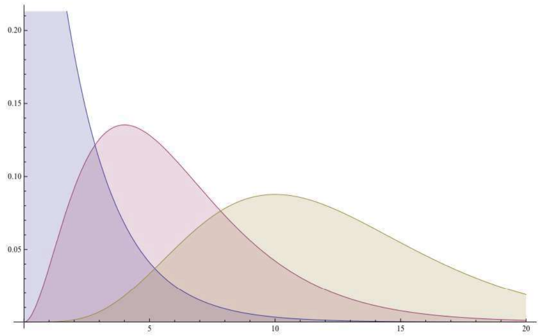
$$\begin{aligned}
VarX &= \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} (x-\mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \left| \begin{array}{c} t = \dfrac{x-\mu}{\sigma} \\ \mathrm{d}t = \dfrac{1}{\sigma}\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t = \left| \begin{array}{c} u = \dfrac{t^2}{2} \\ \mathrm{d}u = t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}} e^{-u}\,\mathrm{d}u = \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \Gamma(3/2) \\
&= \frac{2\sigma^2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{2} \Gamma(1/2) = \sigma^2.
\end{aligned}$$

3.1.2 Gama distribucija

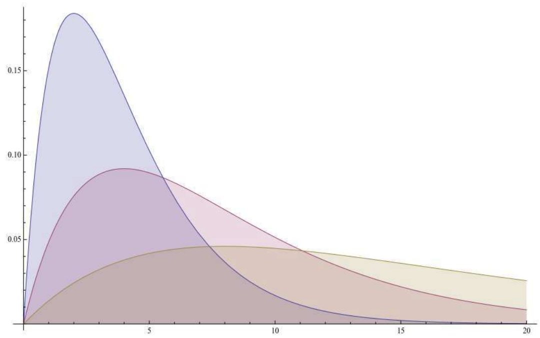
Jedna od važnih distribucija u teoriji vjerojatnosti je gama distribucija. Slučajna varijabla X ima gama distribuciju s parametrima $\alpha > 0$ te $\theta > 0$ ako je $R(X) = \langle 0, \infty \rangle$ i ako ima funkciju gustoće danu izrazom

$$f_X(x) = \frac{1}{\theta^\alpha \Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\theta x} \mathbb{I}_{\{x>0\}}(x).$$

Pišemo $X \sim (\alpha, \frac{1}{\theta})$. Parametar α određuje oblik funkcije gustoće, a parametar θ određuje skalu. Slika 2. pokazuje kako se mijenja graf funkcije gustoće gama distribucije s promjenom parametra α, a Slika 3. kako se mijenja graf s promjenom parametra θ.



Slika 2: Funkcija gustoće gama distribucije s parametrima $\alpha \in \{1, 3, 6\}$ i $\theta = 2$



Slika 3: Funkcija gustoće gama distribucije s parametrima $\alpha = 2$ i $\theta \in \{2, 4, 8\}$

U nastavku je dan primjer kako se gama distribucija može koristiti u modeliranju slučajnog pokusa.

Primjer 1. *Promatramo problem potrošnje materijala u proizvodnom procesu. Neka je ta potrošnja slučajan pokus. Svaki se dan u prosjeku potroši* 20 *komada, a svaki se mjesec nabavlja* 640 *komada potrošnog materijala. Neka je* X *slučajna varijabla koja modelira vrijeme koje je potrebno da bi se potrošile zalihe. Ovakav proces modelira se gama distribucijom, a možemo dobiti odgovore na sljedeća pitanja:*

a) Kolika je vjerojatnost da ponestane potrošnog materijala?

b) Kolika mora biti mjesečna nabava da bi vjerojatnost nestašice bila 0.01*?*

Slučajna varijabla X *ima gama distribuciju s parametrima* $\alpha = 640$ *i* $\theta = 20$*, tj.* $X \sim (640, \frac{1}{20})$*. Jednostavnim računom dobije se rješenje pitanja a) i b). Vjerojatnost da ponestane potrošnog materijala u ovim uvjetima je* 0.057*, dok je potrebno imati* 660 *komada potrošnog materijala mjesečno kako bi vjerojatnost nestašice iznosila* 0.01. □

3.2 Volumen n-dimenzionalne kugle i elipsoida

Gama funkcija pojavljuje se u formulama za volumen n-dimenzionalne kugle i n-dimenzionalnog elipsoida. U ovom ćemo dijelu dokazati formule za volumene oba navedena objekta. Dodatno, elipsoid ćemo promatrati u specijalnom obliku. U tu svrhu prvo definiramo Mahalanobis kvazimetričku funkciju $d_M : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$ izrazom

$$d_M(u, v; S) = (u - v)^T S^{-1}(u - v),$$

gdje je $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$ pozitivno definitna matrica. Pomoću Mahalanobis kvazimetričke funkcije elipsoid možemo definirati kao Mahalanobis krug:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : d_M(x, c; S) = r^2\},$$

gdje je $c \in \mathbb{R}^n$ središte, a $r > 0$ polumjer. Matrica S određuje duljine poluosi te orijentaciju elipse.
Neka je

$$S = U^T \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} U,$$

$\lambda_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, i $U^T U = UU^T = I$. Tada je

$$\sqrt[n]{detS}(x - c)^T S^{-1}(x - c) = r^2$$

ekvivalentno s

$$\sqrt[n]{\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n}(x - c)^T \sum_{i=1}^{n} u_i u_i^T (x - c) = r^2.$$

Prvo ćemo iskazati i dokazati teorem o volumenu n-kugle. Dokaz koji navodimo može se naći u [9], a drugačiji dokaz koji koristi beta funkciju može se naći primjerice u [2].

Teorem 3.3. *Volumen* n*-dimenzionalne kugle polumjera* r *jednak je*

$$V_n(r) = \frac{r^n \pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Bazu indukcije provodimo za slučajeve $n = 1$ i $n = 2$. U slučaju $n = 1$ dobivamo

$$V_1(r) = \frac{r\pi^{1/2}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \frac{r\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}.$$

Iskoristimo li rekurzivnu relaciju gama funkcije $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ iz Teorema 2.9., dobivamo da je $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, pa slijedi

$$V_1(r) = \frac{r\sqrt{\pi}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} = 2r.$$

Uočimo da se u slučaju jednodimenzionalne kugle radi o dužini čije su krajnje točke udaljene od središta za r pa je jasno kako je formula točna za $n = 1$. Ako dodatno ispitamo i slučaj $n = 2$, lako dolazimo do

$$V_2(r) = \frac{r^2\pi}{\Gamma(2)} = \frac{r^2\pi}{1!} = r^2\pi,$$

što je također dobro poznata formula. Prelazimo na korak indukcije. Kako $\mathbb{R}^n$ možemo shvatiti kao $\mathbb{R}^{n-2} \times \mathbb{R}^2$, to ćemo koristiti pri izračunu volumena. Točka $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ element je kugle $K_n(r)$ ako i samo ako je

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq r^2,$$

što je ekvivalentno zapisu

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \leq r^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2.$$

Volumen računamo kao integral

$$\begin{aligned} V_n(r) &= \int_{K_n(r)} \mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_n \\ &= \int_{K_2(r)} \left(\int_{K_{n-2}\left(\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2}\right)} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{n-2} \right) \mathrm{d}x_{n-1}\,\mathrm{d}x_n. \end{aligned}$$

Na unutarnji integral primijenimo pretpostavku indukcije, pri čemu polumjer $\sqrt{r^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2}$ nije konstantan u odnosu na vanjski integral pa ga ne možemo izvući kao konstantu ispred integrala. Slijedi

$$V_n(r) = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)} \int_{K_2(r)} \left(r^2 - x_{n-1}^2 - x_n^2\right)^{(n-2)/2} \mathrm{d}x_n\,\mathrm{d}x_{n-1}.$$

Prelaskom na polarne koordinate prethodni izraz postaje

$$V_n(r) = \frac{\pi^{(n-2)/2}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}+1\right)} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^r (r^2 - t^2)^{(n-2)/2} t\,\mathrm{d}t.$$

Integral po θ iz prethodnog izraza jednak je 2π, a integral po t riješit ćemo supstitucijom $u = r^2 - t^2$, što pomiče granice po u od r^2 do 0 te daje $du = -2t\,dt$ pa integral postaje

$$V_n(r) = -\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_{r^2}^{0} u^{(n-2)/2}\,\mathrm{d}u = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)} u^{n/2}\Big|_0^{r^2} = \frac{\pi^{n/2}}{\frac{n}{2}\Gamma(n/2)} r^n.$$

Konačno, primijenimo li rekurzivnu relaciju gama funkcije na izraz u nazivniku dobivamo

$$V_n(r) = \frac{r^n \pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)},$$

čime je dokaz završen. Q.E.D.

Nakon što smo dokazali prethodni teorem, izvest ćemo formulu za volumen n-elipsoida. Prvo promatramo jediničnu n-dimenzionalnu kuglu sa središtem c, tj. skup

$$(x-c)^T(x-c) = 1,$$

čiji je volumen jednak $V_n(1)$.
n-dimenzionalni elipsoid sa središtem u c i poluosima $a_1, \ldots, a_n$ možemo dobiti kao transformaciju

$$\sqrt[n]{detS}(x-c)^T S^{-1}(x-c) = 1. \tag{4}$$

Primijenimo li dekompoziciju matrice $S = U^T \Lambda U$, svojstva operatora inverza te svojstvo simetričnosti ortogonalne matrice U, matricu S^{-1} možemo zapisati kao

$$S^{-1} = (\Lambda^{-1/2}U)^T(\Lambda^{-1/2}U).$$

Definirajmo linearni operator $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ izrazom $T(x) = \Lambda^{-1/2}Ux$. Sada slijedi da volumen n-elipsoida možemo računati kao

$$\begin{aligned}
V &= \left(\sqrt[n]{detS}\right)^n \left|det\left(\Lambda^{-1/2}U\right)\right| V_n(1) \\
&= detS \left|det\left(\Lambda^{-1/2}\right)\right| |detU|\, V_n(1) \\
&= \lambda_1 \cdots \lambda_n \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}} \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \\
&= \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}.
\end{aligned}$$

Prethodnim smo računom dokazali sljedeći teorem:

Teorem 3.4. *Volumen n-dimenzionalnog elipsoida $\sqrt[n]{detS}(x-c)^T S^{-1}(x-c) = 1$ jednak je*

$$\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \sqrt{\lambda_1 \cdots \lambda_n}$$

3.3 Problem pakiranja

Još jedna od primjena gama funkcije vezana je uz problem pakiranja (vidi [2]). Konkretno, pitanje kojim ćemo se baviti je što bolje paše: klin kružnog presjeka u rupu oblika kvadrata ili klin kvadratnog presjeka u kružnu rupu? Ovaj se problem može lako matematički formulirati. Pitamo se što je veće - omjer površine kruga i površine njemu upisanog kvadrata ili omjer površine kvadrata i njemu upisanog kruga? Ovakav problem možemo promatrati za n-dimenzionalni slučaj. Radi jednostavnosti, a bez smanjenja općenitosti, promatrat ćemo jediničnu n-kuglu. U slučaju jedinične n-kugle brid njoj opisane n-kocke duljine je 2, dok je brid n-kugli upisane n-kocke duljine $\frac{2}{\sqrt{n}}$ (budući da je dijagonala n-kocke upravo $\sqrt{n}$ puta dulja od njenog brida). U nastavku navodimo formule volumena prethodno navedenih objekata. S $V(n)$ označavamo volumen jedinične n-kocke, s $V_o(n)$ volumen njoj opisane n-kocke, a s $V_u(n)$ volumen njoj upisane n-kocke.

$$V(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}, \tag{5}$$

$$V_o(n) = 2^n, \tag{6}$$

$$V_u(n) = \frac{2^n}{n^{n/2}}. \tag{7}$$

Označimo s $O_1(n)$ omjer volumena (5) i (6) te s $O_2(n)$ omjer volumena (7) i (5). Dobivamo izraz

$$\frac{O_1(n)}{O_2(n)} = \frac{\pi^n n^{n/2}}{4^n \Gamma^2\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Korištenjem Stirlingove aproksimacije $\Gamma(x) \sim x^{x-1/2}e^{-x}\sqrt{2\pi}$ može se pokazati da $O_1(n)/O_2(n)$ teži u 0 kada n teži u beskonačno, tj. za n dovoljno velik, omjer $O_2(n)$ veći je od $O_1(n)$. Numerički se može pokazati da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.5. *n-kugla bolje paše u n-kocku ako i samo ako je $n \leq 8$.*

3.4 Primjene u integralnom računu

Mnogi integrali mogu se jednostavno riješiti korištenjem prikladnih supstitucija koje će integral svesti na gama funkciju. U ovom ćemo dijelu navesti nekoliko takvih primjera, a još primjera može se naći primjerice u [12].

Primjer 2. *Odredimo vrijednost integrala*

$$I_1 = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-\sqrt[6]{x}} \, \mathrm{d}x.$$

Uvodimo supstituciju $x = t^6$, *što daje* $\mathrm{d}x = 6t^5 \, \mathrm{d}t$ *pa integral (uz nepromijenjene granice integracije) postaje*

$$I_1 = \int_0^\infty t^3 e^{-t} 6t^5 \, \mathrm{d}t = 6 \int_0^\infty t^8 e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

Konačno, uočimo da je posljednji integral upravo $\Gamma(9) = 8!$ *pa slijedi*

$$I_1 = 6 \cdot 8! = 6 \cdot 40320 = 241920.$$

□

Primjer 3. *Odredimo vrijednost integrala*

$$I_2 = \int_0^\infty x^3 e^{-2x^8} \, \mathrm{d}x.$$

Uvedemo li supstituciju $t = 2x^8$, *uz* $\mathrm{d}t = 16x^7$ *te nepromijenjene granice integracije, dobivamo*

$$I_2 = \int_0^\infty \left(\frac{t}{2}\right)^{3/8} e^{-t} \frac{1}{16 \left(\frac{t}{2}\right)^{7/8}} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{16} \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} \, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{2}}{16} \Gamma(1/2) = \frac{\sqrt{2\pi}}{16}.$$

□

Primjer 4. *Neka su* $m, n \in \mathbb{R}$, $a > 0$. *Odredit ćemo vrijednost integrala*

$$I_3 = \int_0^\infty x^m e^{-ax^n} \, \mathrm{d}x.$$

Primijetimo da je prethodni integrala poopćenje integrala I_1 *te* I_2 *iz prethodnih primjera.*

Prvo uvodimo supstituciju $t = ax^n$, što granice integracije ostavlja nepromijenjenima. Uz $\mathrm{d}t = anx^{n-1}$ slijedi

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{an}\int_0^\infty \left(\frac{t^{1/n}}{a^{1/n}}\right)^{m-n+1} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{na^{1+\frac{m-n+1}{n}}}\int_0^\infty t^{\frac{m+1}{n}-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{na^{\frac{m+1}{n}}}\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Uočimo da treba postaviti uvjet da je $\frac{m+1}{n} \notin \mathbb{Z}_{\leq 0}$ kako bi integral kojim je definirana gama funkcija konvergirao. □

Primjer 5. *Neka je $b > 0$. Želimo odrediti vrijednost integrala*

$$I_4 = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-b\left(x+\frac{1}{x}\right)}\,\mathrm{d}x.$$

Uvedemo li supstituciju $x = t^2$ uz $\mathrm{d}x = 2t\,\mathrm{d}t$ te nepromijenjene granice integracije dobivamo

$$\begin{aligned}
I_4 &= 2\int_0^\infty e^{-b\left(t^2+\frac{1}{t^2}\right)}\,\mathrm{d}t \\
&= 2e^{-2b}\int_0^\infty e^{-b\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-2b}\int_{-\infty}^\infty e^{-b\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= e^{-2b}\int_{-\infty}^0 e^{-b\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t + e^{-2b}\int_0^\infty e^{-b\left(t-\frac{1}{t}\right)^2}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Kako bismo riješili prethodna dva integrala, u prvom uvodimo supstituciju $t = -e^{-\theta}$, a u drugom supstituciju $t = e^\theta$. Prethodno navedene supstitucije dovest će u oba integrala do pomicanja granica integracije od $-\infty$ do ∞. Dodatno, u nastavku koristimo

$$\sinh\theta = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2},\ \cosh\theta = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2}.$$

Nakon supstitucija slijedi

$$
\begin{aligned}
I_4 &= e^{-2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b\left(e^{-\theta}-\frac{1}{e^{-\theta}}\right)^2} e^{-\theta}\,\mathrm{d}\theta + e^{-2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b\left(e^{\theta}-\frac{1}{e^{\theta}}\right)^2} e^{-\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= e^{-2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4b\sinh^2\theta} e^{-\theta}\,\mathrm{d}\theta + e^{-2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4b\sinh^2\theta} e^{\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2e^{-2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4b\sinh^2\theta} \cosh\theta\,\mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

Posljednja supstituciju koju uvodimo jest $u = \sinh\theta$ *uz koju dobivamo* $\mathrm{d}u = \cosh\theta\,\mathrm{d}\theta$ *te koja neće promijeniti granice integracije pa slijedi*

$$
I_4 = 2e^{-2b}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-4bu^2}\,\mathrm{d}u = 4e^{-2b}\int_{0}^{\infty} e^{-4bu^2}\,\mathrm{d}u.
$$

Konačno, uočimo kako je posljednji integral specijalan slučaj integrala iz Primjera 3. uz $m = 0$, $a = 4b$ *te* $n = 2$ *pa korištenjem formule iz Primjera 4 dobivamo*

$$
I_4 = 4e^{-2b}\frac{1}{2(4b)^{1/2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-2b}\sqrt{\pi}}{\sqrt{b}}.
$$

□

3.5 Laplaceove transformacije

Još jedna primjena koju ćemo obraditi, a o kojoj se više može naći u [8], je primjena gama funkcije kod računanja nekih Laplaceovih transformacija. Laplaceove transformacije koriste se pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi kako bi se one svele na algebarske jednadžbe koje je jednostavnije riješiti. Za početak ćemo definirati Laplaceovu transformaciju te navesti nekoliko primjera u kojima se pri računanju Laplaceove transformacije pojavljuje gama funkcija.

Definicija 3.6. Neka je dana funkcija $f : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$. Ako za funkciju f konvergira integral

$$
\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,\mathrm{d}t,\ \ s \in \mathbb{R},
$$

onda se funkcija $\mathcal{L}(f) = F$ zove **Laplaceov transformat** funkcije f, a preslikavanje $\mathcal{L}$ **Laplaceova transformacija**.

U nastavku navodimo primjere izvoda Laplaceova transformata za tri različite funkcije.

Primjer 6. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije* $f(t) = t^n e^{at}$, $s > a$, $a \in \mathbb{R}$.

Prema Definiciji 3.6. *imamo*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(t^n e^{at}\right) = F(s) &= \int\limits_0^\infty t^n e^{at} e^{-st}\,\mathrm{dt}\\ &= \int\limits_0^\infty t^n e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju $u = (s-a)t$, *što uz nepromijenjene granice integracije (zbog* $s > a$*) te* $\mathrm{du} = (s-a)\,\mathrm{dt}$ *daje*

$$\begin{aligned}F(s) &= \int\limits_0^\infty \left(\frac{u}{s-a}\right)^n e^{-u} \frac{1}{s-a}\,\mathrm{du}\\ &= \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \int\limits_0^\infty u^n e^{-u}\,\mathrm{du}\\ &= \frac{1}{(s-a)^{n+1}} \Gamma(n+1)\\ &= \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.\end{aligned}$$

□

Primjer 7. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije* $f(t) = \sin \omega t e^{at}$, $s > a$, $a \in \mathbb{R}$.

Prema Definiciji 3.6. *imamo*

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\sin \omega t e^{at}\right) = F(s) &= \int\limits_0^\infty \sin \omega t e^{at} e^{-st}\,\mathrm{dt}\\ &= \int\limits_0^\infty \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right) e^{-(s-a)t}\,\mathrm{dt}\\ &= \frac{1}{2i} \int\limits_0^\infty \left(e^{i\omega t-(s-a)t} - e^{-i\omega t-(s-a)t}\right)\,\mathrm{dt}\\ &= \frac{1}{2i} \int\limits_0^\infty e^{-((s-a)-i\omega)t}\,\mathrm{dt} - \frac{1}{2i} \int\limits_0^\infty e^{-((s-a)+i\omega)t}\,\mathrm{dt}.\end{aligned}$$

U prvom integralu uvodimo supstituciju $u = ((s-a) - i\omega)\,t$, *što daje* $\mathrm{du} = ((s-a) - i\omega)\,\mathrm{dt}$. *U drugom integralu uvodimo supstituciju* $v = ((s-a) + i\omega)\,t$, *što daje* $\mathrm{d}v = ((s-a)+i\omega)\,\mathrm{d}t$. *Granice integracije ostaju nepromijenjene u oba integrala. Slijedi*

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-u}\frac{1}{(s-a)-i\omega}\,\mathrm{d}u - \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-v}\frac{1}{(s-a)+i\omega}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega}\int_0^\infty e^{-u} - \frac{1}{(s-a)+i\omega}\int_0^\infty e^{-v}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega}\Gamma(1) - \frac{1}{(s-a)+i\omega}\Gamma(1)\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega} - \frac{1}{(s-a)+i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{(s-a)+i\omega-[(s-a)-i\omega]}{(s-a)^2-(i\omega)^2} \\
&= \frac{1}{2i}\cdot\frac{2i\omega}{(s-a)^2+\omega^2} \\
&= \frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

□

Primjer 8. *Odredimo Laplaceov transformat funkcije* $f(t) = \cos\omega t e^{at}$, $s > a$, $a \in \mathbb{R}$.

Prema Definiciji 3.6. *imamo*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\cos\omega t e^{at}\right) = F(s) &= \int_0^\infty \cos\omega t e^{at} e^{-st}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right)e^{-(s-a)t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{i\omega t-(s-a)t} + e^{-i\omega t-(s-a)t}\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-((s-a)-i\omega)t}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2i}\int_0^\infty e^{-((s-a)+i\omega)t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

U prvom integralu uvodimo supstituciju $u = ((s-a)-i\omega)\,t$, *što daje* $\mathrm{d}u = ((s-a)-i\omega)\,\mathrm{d}t$. *U drugom integralu uvodimo supstituciju* $v = ((s-a)+i\omega)\,t$, *što daje* $\mathrm{d}v = ((s-a)+i\omega)\,\mathrm{d}t$. *Granice integracije ostaju nepromijenjene u oba* *integrala. Slijedi*

$$\begin{aligned}
F(s) &= \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-u}\frac{1}{(s-a)-i\omega}\,\mathrm{d}u + \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty e^{-v}\frac{1}{(s-a)+i\omega}\,\mathrm{d}v \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega}\int\limits_0^\infty e^{-u} + \frac{1}{(s-a)+i\omega}\int\limits_0^\infty e^{-v}\,\mathrm{d}v\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega}\Gamma(1) + \frac{1}{(s-a)+i\omega}\Gamma(1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-a)-i\omega} + \frac{1}{(s-a)+i\omega}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{(s-a)+i\omega+[(s-a)-i\omega]}{(s-a)^2-(i\omega)^2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{2(s-a)}{(s-a)^2+\omega^2} \\
&= \frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}.
\end{aligned}$$

□

4 Literatura

[1] G. E. ANDREWS, R. ASKEY, R. ROY, *Special functions,* Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[2] J. AZOSE, *On the gamma function and its applications,* (javno dostupno: `https://sites.math.washington.edu/~morrow/336_10/papers/joel.pdf`)

[3] W. W. BELL, *Special functions for Scientists and Engineers,* D. Van Nostrand Company Ltd, Reinhold, New York, 1969.

[4] H. BOHR, I. MOLLERUP, *Loerbog I matematisk Analyse,* Kopenhagen, **3**(1922).

[5] A. DIESTRA, *The Gamma Function!,* 2016., (javno dostupno: `http://math.stmarys-ca.edu/wp-content/uploads/2017/07/Andres-Diestra.pdf`

[6] L. GALVANI, *Sulle funzioni converse di una o due variabli definite in agregate qualunque,* Rend. Circ. Mat. Palermo **41**(1916), 103.-134.

[7] M. GODEFROY, *La fonction Gamma; Theorie, Histoire, Bibliographie,* Gauthier-Villars, Paris, 1901.

[8] M. M. IDDRIU, K. J. TETTEH, *The Gamma Function and Its Analytical Applications,* Journal of Advances in Mathematics and Computer Science, **23**(3), 1-16, 2017.

[9] M. JORGENSEN, *Volumes of n-dimensional spheres and ellipsoids,* 2014., (javno dostupno: `https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/2014/jorgenmd.pdf`)

[10] A. M. LEGENDRE, *Memoires de la classe des sciences mathematiques et physiques de l'Institut de France,* Pariz, 1809.

[11] N. NIELSEN *Handbuch der Theorie der Gammafunktion,* Leipzig, 1906.

[12] M. RIBIČIĆ PENAVA, D. ŠKROBAR, *Gama i beta funkcije,* Osječki matematički list, **15**(2), 93-111, 2015.

[13] P. SEBAH, X. GOURDON, *Introduction to the Gamma Function,* 2002., (javno dostupno: `http://www.csie.ntu.edu.tw/~b89089/link/gammaFunction.pdf`

Sažetak

U ovom je radu opisana gama funkcija, kao i njena osnovna svojstva te određene primjene. Uvodni dio daje povijesni pregled gama funkcije, dok su u glavnom dijelu rada navedene definicija te dokazana osnovna svojstva gama funkcije. Dokazan je i Bohr-Mollerupov teorem, koji daje uvjete pod kojima je gama funkcija jedinstvena. Posljednji dio rada opisuje određene primjene gama funkcije, primjerice primjene u vjerojatnosti i integralnom računu.

Ključne riječi: gama funkcija, primjene, integral, vjerojatnost

Abstract

The gamma function is described in this paper, as well as some of her properties and certain applications. A historical overview of the gamma function is given in the introductory part of the paper. The main part focuses on the definition and proofs of some properties of the gamma function. The Bohr-Mollerup theorem is proved, which states conditions under which the gamma function is unique. The last part of the paper describes certain applications of the gamma function, for instance applications in probability and integral calculus.

Keywords: gamma function, applications, integral, probability

5 Životopis

Rođen sam 2. rujna 1993. u Osijeku, gdje sam završio OŠ Mladost te II. gimnaziju Osijek. Preddiplomski studij Matematike upisao sam 2012. na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, kojeg sam završio 2015. s temom završnog rada *"Ocjene pogrešaka Newton-Cotesovih i Gauss-Čebiševljevih kvadraturnih formula koristeći Grussovu nejednakost"* pod mentorstvom izv. prof. dr. sc. Mihaele Ribičić Penava. Nakon završenog preddiplomskog studija upisao sam diplomski studij na Odjelu za matematiku, smjer: Financijska matematika i statistika. Tijekom studija bio sam predsjednik Studentskog zbora Odjela za matematiku, držao sam demonstrature iz sedam kolegija (Elementarna matematika I i II, Linearna algebra I, Numerička linearna algebra, Uvod u vjerojatnost i statistiku, Vektorski i unitarni prostori, Vektorski prostori), pripreme za natjecanja iz matematike za srednjoškolske učenike, radionice na Zimskoj matematičkoj školi te Festivalu znanosti. Sudjelovao sam na dvama natjecanjima: International Mathematical Competition u Blagoevgradu (Bugarska) te Vojtech Jarnik IMC u Ostravi (Češka); na dvije ljetne škole: "Approximation Theory and Applications" u Sozopolu (Bugarska) te Scuola Matematica Interuniversitaria u Perugii (Italija). Dobitnik sam dviju Rektorovih nagrada: 2015. za seminarski rad *"Čebiševljeva nejednakost i primjene"* te 2017. za seminarski rad *"Model širenja AIDS-a"*.