

# Primjena konformnih preslikavanja u aerodinamici

---

**Kalmar, Kristijan**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:430174>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-12**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Kristijan Kalmar

# Primjena konformnih preslikavanja u aerodinamici

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Kristijan Kalmar

# Primjena konformnih preslikavanja u aerodinamici

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2019.

## Sažetak

Ovaj završni rad proširit će nam znanje o primjeni kompleksne analize u aerodinamici, konkretno o primjeni konformnih preslikavanja u oblikovanju krila zrakoplova. Prvo ćemo nešto više reći o aeroprofilu krila, a zatim i o silama koje djeluju na krilo. Navest ćemo glavne pretpostavke o stacionarnom ravninskom toku idealnog fluida. Na primjeru kružnog valjka i njegovog poprečnog presjeka pokazat ćemo kakvu ulogu ima Kutta-Joukowski teorem u letu zrakoplova.

**Ključne riječi:** aeroprofil, idealan fluid, uzgon, kompleksni potencijal, konformno preslikavanje

## Abstract

This bachelor's thesis will extend our knowledge on the application of complex analysis in aerodynamics, more concretely on the conformal mapping in shaping airfoils. First, we will say something more about basic airfoil theory and about forces acting on it. We will establish the main assumptions about stationary two-dimensional fluid flow. On cylinder we will show how the assumptions of Kutta-Joukowski theorem help us in solving the problem of fluid flow around airfoil and therefore, how airplane can fly.

**Key words:** airfoil, ideal fluid, lift, complex potential, conformal mapping

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorija aeroprofila</b>	<b>1</b>
2.1	Aerodinamički profil krila zrakoplova . . . . .	1
2.2	Bernoullijev princip . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Ravninski tok idealnog fluida</b>	<b>4</b>
3.1	Idealan fluid . . . . .	5
3.2	Tok fluida i kompleksne funkcije . . . . .	5
3.3	Primjeri kompleksnih potencijala . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Primjena konformnih preslikavanja u aerodinamici</b>	<b>9</b>
4.1	Joukowski preslikavanje . . . . .	9
4.2	Riemannov teorem o preslikavanju . . . . .	11
4.3	Cirkulacija vektorskog polja i sila uzgona . . . . .	11
4.3.1	Kutta-Joukowski teorem . . . . .	12
4.3.2	Sila uzgona kružnog valjka . . . . .	12
4.4	Poopćenja . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>14</b>

# 1 Uvod

Krilo je glavna aerodinamička noseća površina zrakoplova na kojoj se stvara sila uzgona koja je potrebna radi održavanja zrakoplova iznad Zemljine površine. Najvažniji je i najčešće najteži dio zrakoplova. O njegovoj konstrukciji i aerodinamičkim osobinama ovise i osobine cijelog zrakoplova. Krilo predstavlja složen prostorni nosivi sustav. U prošlosti materijali od kojih su se izrađivala krila zrakoplova i sam zrakoplov su bili tkanina, drvo i čelik zbog toga što u to doba nije bilo dostupno korištenje širokog spektra materijala. Zatim, nakon razvoja zrakoplovstva primjenjuju se novi materijali kao što su lagane slitine, čelici visoke otpornosti, razne plastične komponente velike čvrstoće, kompozitni materijali i dr.

Osnovni problem u teoriji leta je odrediti tok fluida oko krila čiji je geometrijski oblik unaprijed zadan. Pretpostavljamo da se krilo zrakoplova giba kroz fluid konstantnom brzinom. Potrebno je izračunati distribuciju tlaka duž rubova krila.

Korištenje konformnih preslikavanja u mehanici fluida vuče korijene još iz radova Gaussa, Riemanna, Weierstrassa, C. Neumanna, H.A. Schwarzja i Hilberta. Smatra se da je Lord Rayleigh, britanski fizičar i matematičar, prvi iznio cjelovitu primjenu konformnih preslikavanja u aerodinamici. Početkom 20. stoljeća njemački matematičar Martin Kutta i ruski znanstvenik Nikolay Zhukovsky (Joukowski u modernoj literaturi) objavili su seriju radova o teoriji krila zrakoplova koja je zatim označila početak nove ere u aerodinamici.

Namjera ovog rada jest uvesti čitatelja u osnove primjena konformnih preslikavanja u dvodimenzionalnoj teoriji krila zrakoplova s idealnim fluidima. Drugo i treće poglavlje će pružiti čitatelju osnovna znanja o teoriji avionskih krila i dinamici fluida u dvodimenzionalnom sustavu. Četvrto poglavlje objasniti će korištenje konformnih preslikavanja u pojednostavljivanju naizgled kompliciranih geometrijskih oblika krila zrakoplova.

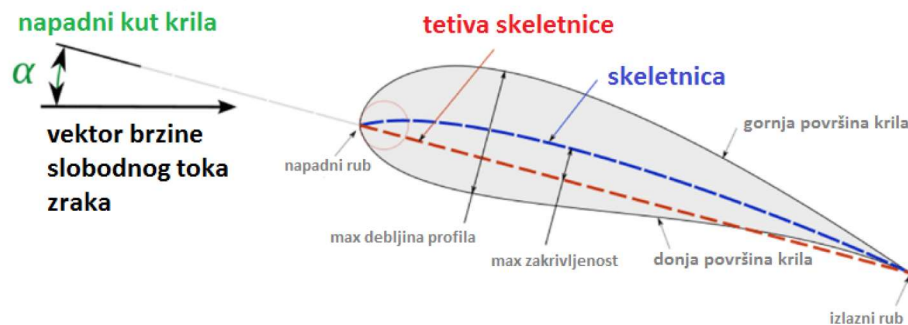
## 2 Teorija aeroprofila

Kao što smo napomenuli u uvodu, svrha teorije krila je istraživanje aerodinamike na samo krilo (ili sustav krila) koje se giba kroz fluid određenom brzinom. Djelovanje aerodinamike na poprečni presjek, odnosno aerodinamički profil krila može se općenito opisati Bernoullijevom jednadžbom koja prikazuje odnos između brzine, tlaka i gustoće fluida prilikom njegovog gibanja. Primjenjena na let zrakoplova, Bernoullijeva jednadžba kaže da zrak struji uz gornju zakrivljenu plohu krila brže nego ispod krila, pa je tlak na donju plohu krila veći nego na gornju, što ima za posljedicu da na krila djeluje ukupna sila prema gore koja diže zrakoplov. Bernoullijev princip ćemo detaljnije analizirati u pododjeljku 2.2.

### 2.1 Aerodinamički profil krila zrakoplova

*Aeroprofil*, odnosno *aerodinamički profil krila zrakoplova* je poprečni presjek krila zrakoplova (Slika 1.) To je aerodinamički oblikovana površina koja ostvaruje uzgon potreban za let zrakoplova uz što manji otpor. Geometrijska svojstva aeroprofila opisuju se specijalnim krivuljama koje se zovu linije aeroprofila. *Skeletna linija* ili *skeletnica* je linija koja spaja središta ucrtanih kružnica u aeroprofil, odnosno, to je geometrijsko mjesto točaka jednako udaljenih od gornje i donje površine krila. Njen oblik ovisi o distribuciji zakrivljenosti duž aeroprofila, tj. skeletnica daje krilu zrakoplova njegov *profil*. Obična krila zrakoplova najčešće su u blago savijenom (izbočenom) obliku. *Napadni rub* krila je točka s prednje strane krila (s lijeve strane aeroprofila) u kojoj krilo ima najveću zakrivljenost. To je ujedno i dio krila koji prvi dolazi u doticaj sa zrakom. *Izlazni rub* krila je točka sa stražnje strane

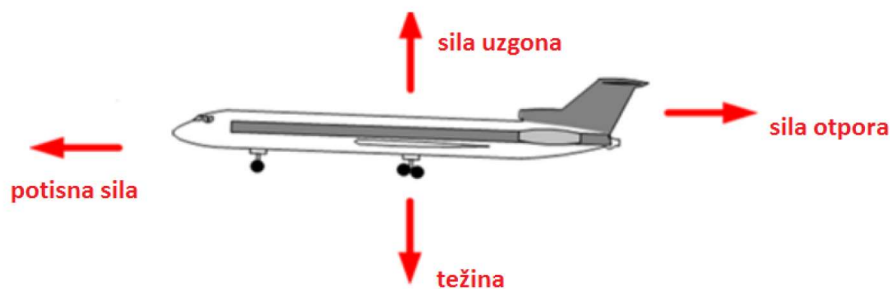
krila (s desne strane aeroprofila) u kojoj krilo ima najveću zakrivljenost. To je dio krila u kojemu se tok zraka odvojen napadnim rubom ponovno spaja. *Tetiva skeletnice* je pravac koji spaja njene krajnje točke. *Napadni kut krila*  $\alpha$  je kut između tetive skeletnice i vektora brzine slobodnog toka zraka (strujnica zraka).



Slika 1: Shema aeroprofila krila zrakoplova

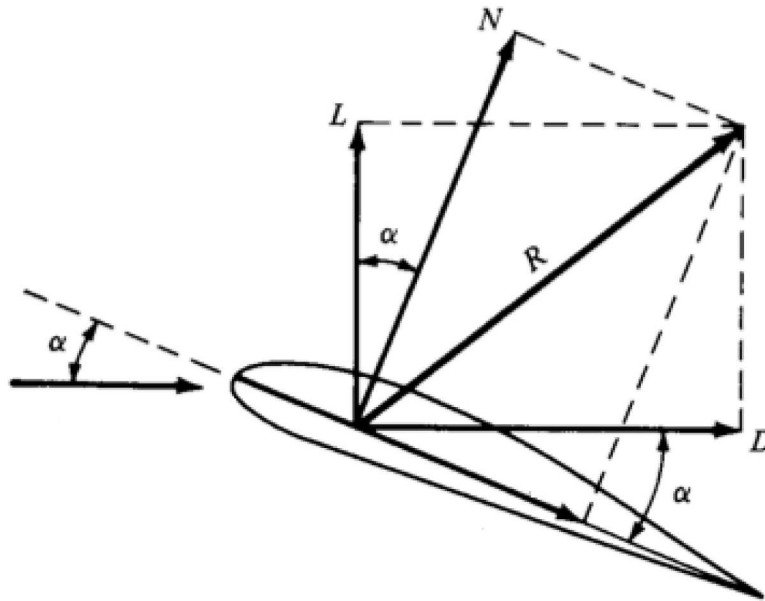
## 2.2 Bernoullijev princip

Na zrakoplov tijekom leta djeluju četiri sile prikazane na Slici 2. To su vučna ili potisna sila, težina, sila uzgona i sila otpora. *Potisna sila* se formira od pogonskog sustava koji može biti klipni, mlazni ili raketni. *Sila otpora* se javlja prolaskom krutog tijela kroz fluid, a ovisi o obliku, veličini, položaju i glatkoći površine tijela, gustoći zraka, brzini kretanja tijela i razlikama u tlakovima oko krila. *Silu uzgona* uzrokuje razlika u tlakovima zraka koji struji oko krila zbog njegovog oblika. Najvećim dijelom krilo formira uzgon.



Slika 2: Sile koje djeluju na zrakoplov tijekom ustaljenog horizontalnog leta

Mi ćemo se koncentrirati na sile koje djeluju na krilo zrakoplova, odnosno na njegov aeroprofil tijekom gibanja zrakoplova kroz zrak, 3.



Slika 3: Sile koje djeluju na krilo zrakoplova

Na krilo zrakoplova djeluje resultantna aerodinamička sila  $R$  koju možemo rastaviti na dvije komponente. Jedna je sila otpora  $D$  čiji se smjer podudara sa smjerom toka zraka, a druga je sila uzgona  $L$  koja je okomita na silu otpora. Općenito, sila uzgona  $L$  je bitna u održavanju zrakoplova u zraku, dok je sila otpora  $R$  nepoželjna i mora se smanjiti potiskom propelera. Upravo je aeroprofil krila svojim oblikom najviše zaslužan za generiranje uzgona puno većeg od sile otpora. U literaturi postoje razni tekstovi koji opisuju način na koji aeroprofil generira uzgon, neki su i pogrešni. Mi ćemo na što jednostavniji način objasniti stvaranje uzgona koristeći Bernoullijev princip.

Bernoullijev princip (prema Danielu Bernoulliju) je osnovni zakon gibanja fluida. Proizlazi iz primjene zakona o očuvanju energije na strujanje fluida. Odatle se dobije da zbroj

$$\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h + p$$

ima konstantnu vrijednost posvuda u fluidu koji struji horizontalno, pri čemu je  $p$  tlak,  $\rho$  gustoća i  $v$  brzina fluida u nekoj točki, a  $h$  je visina težišta poprečnog presjeka fluida u odnosu na neku horizontalnu ravninu. Dakle, gdje je brzina fluida veća, tlak je manji, ondje gdje je brzina fluida manja, tlak je veći. Spomenimo da se u primjenama član  $\rho \cdot g \cdot h$  izostavlja jer najčešće vrijedi  $h \approx 0$ .

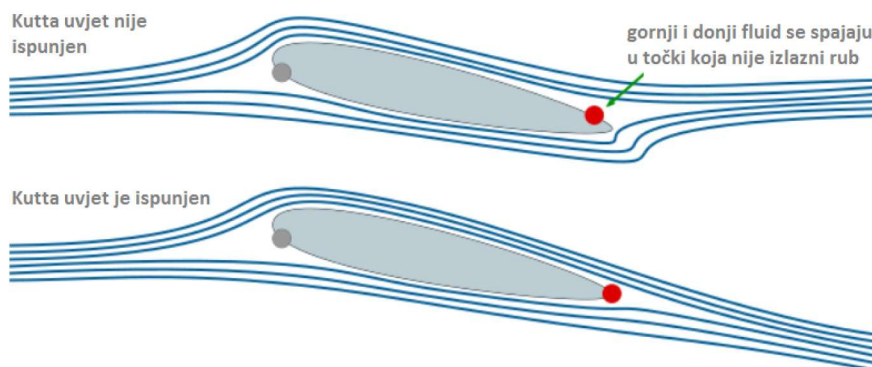
Uzgon se javlja upravo zbog razlike u tlakovima na gornjoj i donjoj površini aeroprofila. Razlika u tlakovima nastaje zbog razlike u brzinama fluida, a te razlike u brzini nastaju zbog savijanja gibajućeg fluida (na engleskom: Flow Turning Theory). Preciznije, aeroprofil zakreće smjer toka fluida, fluid nastavlja teći oko aeroprofila, pri čemu se na gornjoj površini aeroprofila počinje stvarati vertikalna brzina duž izlaznog ruba, tj. brzina pod utjecajem gravitacije. Savijanje toka fluida nastaje zbog njegove viskoznosti i zbog takozvanog *Coanda efekta*. Coanda efekt je zanimljiva pojava koja se lako uočava u svakodnevnom životu. Primjerice, ako se prst stavi neposredno pored mlaza vode koji teče iz slavine, onda mlaz



prijanja uz prst i skreće s prvobitnog pravca. Dakle, aeroprofil uz svoju gornju površinu savija tok fluida, tj. navlači zrak prema gornjoj površini, a zatim uzrokuje akceleraciju tog zraka prema dolje, tj. prema izlaznom rubu. Time se na gornjoj površini aeroprofila stvara sustav niskog tlaka koji stvara ukupnu silu - uzgon. Ovdje treba koristiti još jednu pretpostavku koja se u literaturi zove *Kutta uvjet*. Kutta uvjet glasi:

*Fluid koji teče uz gornju površinu aeroprofila se na izlaznom rubu spaja s fluidom koji teče donjom površinom aeroprofila tako da je spajanje glatko, odnosno, fluid ne teče oko izlaznog ruba (Slika 4).*

Ako je Kutta uvjet ispunjen, onda su tlakovi iznad i ispod izlaznog ruba aeroprofila jednaki.



Slika 4: Sive i crvene točke redom pokazuju mjesta gdje se fluid razdvaja i spaja.

U stvarnosti, Kutta uvjet vrijedi zbog trenja koje se javlja između ruba aeroprofila i fluida. Pritom, napadni kut  $\alpha$  ne smije biti prevelik jer bi tok fluida oko aeroprofila prestao biti gladak i neprekidan. Kada bi kut napada bio prevelik, zrakoplov bi gubio na brzini i eventualno se zaustavio.

Za jednoliko gibanje fluida gustoće  $\rho$  oko tijela u mirovanju, tlak  $p$  u proizvoljnoj točki fluida brzine  $U$  može se izračunati iz Bernoullijeve jednadžbe te vrijedi

$$p + \frac{1}{2}\rho U^2 = p_0 + \frac{1}{2}\rho V^2, \quad (1)$$

gdje je  $p_0$  tlak, a  $V$  brzina u "beskonačnosti".

Za pojednostavljivanje problema, smatrat ćemo da je krilo zrakoplova beskonačne duljine s poprečnim presjekom kao na slici 1.

### 3 Ravninski tok idealnog fluida

U ovom poglavlju navest ćemo neke osnovne činjenice i definicije u dvodimenzionalnoj dinamici fluida koje će dovesti do *Kutta-Joukowski teorema*. Taj teorem povezuje silu uzgona koja djeluje na kružni valjak (poprečni presjek) s brzinom valjka, pri čemu je valjak uronjen u fluid. Radi jednostavnosti, navest ćemo nekoliko ključnih pretpostavki o fluidu koji struji oko krila.

### 3.1 Idealan fluid

U raznim fizikalnim uvjetima, tekućine i plinovi se znaju ponašati kao idealni fluidi. To je od velike koristi jer pojednostavljuje vrlo složenu matematičku teoriju gibanja fluida. Zato ćemo navesti sve pretpostavke na fluid koje ga čine idealnim.

*Viskoznost* je trenje nastalo pri strujanju fluida (tekućine ili plina) zbog različite brzine gibanja njegovih slojeva. Uzrok viskoznosti su međumolekulske kohezijske sile u fluidu i adhezijske sile između fluida i krutoga tijela kroz koje se odvija strujanje. Iako je fluid u stvarnosti uglavnom viskozan, mi ćemo pretpostaviti da je viskoznost fluida jednaka nuli jer će takva pretpostavka i dalje dati relativno dobar model gibanja fluida. Dodatno pretpostavljamo da se fluid *giba jednoliko*, tj. brzina u proizvoljnoj točki fluida je konstantna. Također je odsutno *smicanje*, tj. paralelno klizanje jednog sloja fluida u odnosu na drugi. S obzirom da promatramo ravninski tok fluida, vektorsko polje brzina fluida označit ćemo s

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Omega,$$

pri čemu je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  područje ravnine kroz koje teče fluid.

Nadalje, pretpostavit ćemo da je fluid *nestlačiv*, odnosno, volumen mu se ne mijenja tijekom toka, a to ujedno znači da mu je gustoća konstantna. Ovaj uvjet je ekvivalentan s

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (2)$$

Dakle, divergencija nestlačivog toka fluida jednaka je nuli. Posljednja pretpostavka jest da je tok fluida *bezvrtložan*, odnosno da je rotacija polja  $\mathbf{v}$  jednaka nuli:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Svojstva jednolikog gibanja, nestlačivosti, bezvrtložnosti i odsustva viskoznosti opisuju *idealan fluid*.

### 3.2 Tok fluida i kompleksne funkcije

Primijetimo da su svojstva (2) i (3) gotovo identična Cauchy-Riemannovim (CR) uvjetima iz područja kompleksne analize. Jedina razlika je u promjeni predznaka ispred derivacije od  $v$ , ali to se može lako izbjeći ako u CR umjesto  $v$  uzmemo  $-v$ .

**Teorem 3.1 (Cauchy-Reimannovi uvjeti)** *Funkcija  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$  je derivabilna u  $z_0 = x_0 + i y_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$  ako i samo ako su funkcije  $u, v$  diferencijabilne u  $z_0$  kao funkcije dviju varijabli i ako vrijede sljedeći (Cauchy-Riemannovi) uvjeti:*

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \quad \& \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (4)$$

Dokaz teorema može se pogledati u [10], str. 4. Sada ćemo navesti rezultat koji daje vezu između ravninskog toka idealnog fluida i kompleksnih funkcija.

**Teorem 3.2** *Vektorsko polje brzina  $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$  inducira tok idealnog fluida ako i samo ako je*

$$f(z) = u(x, y) - i v(x, y)$$

*kompleksna analitička funkcija u varijabli  $z = x + i y$ .*

Odmah zaključujemo da su komponente  $u$  i  $-v$  harmonijske funkcije, odnosno da vrijedi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta u = 0 \quad \& \quad \frac{\partial^2(-v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(-v)}{\partial y^2} = \Delta(-v) = 0.$$

Preciznije,  $u$  i  $-v$  su harmonijski konjugati. Funkciju  $f$  iz Teorema 3.2 zovemo *kompleksnom brzinom* toka fluida.

Pretpostavimo da je analitička funkcija  $\omega(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  rješenje jednadžbe

$$\frac{d\omega}{dz} = f(z).$$

Tada vrijedi

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} = u - iv$$

pa je

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = u \quad \& \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = v.$$

Dakle, vrijedi  $\nabla\varphi = \mathbf{v}$ , odnosno  $\mathbf{v}$  je *potencijalno vektorsko polje*, a  $\varphi$  je kao realni dio funkcije  $\omega$  poznat pod nazivom *potencijal brzine*  $\mathbf{v}$ . Nadalje, funkcija  $\omega$  zove se *kompleksni potencijal* vektorskog polja brzina danog fluida. S obzirom da je kompleksni potencijal analitička funkcija, njen realni dio  $\varphi$  je harmonijska funkcija pa vrijedi  $\Delta\varphi = 0$  te su  $\varphi$  i  $\psi$  harmonijski konjugati pa vrijedi i  $\Delta\psi = 0$ . Funkcija  $\psi$  je u mehanici fluida poznata pod nazivom *strujna funkcija*.

**Definicija 3.1** *Nivo-krivulje potencijala brzine  $\varphi(x, y) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  zovu se ekvipotencijalne krivulje, dok se nivo-krivulje strujne funkcije  $\psi(x, y) = c$  zovu strujnice.*

**Teorem 3.3** *Ekvipotencijalne krivulje i strujnice su ortogonalne krivulje.*

*Dokaz:* Treba pokazati da su vektori  $\nabla\varphi$  i  $\nabla\psi$  ortogonalni, odnosno da im je skalarni produkt jednak nuli. Iz Cauchy-Riemannovih uvjeta slijedi

$$\begin{aligned} \nabla\varphi \cdot \nabla\psi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□.

Dakle, vektorsko polje brzina  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$  je tangencijalno na strujnice, a to je jasno s obzirom da se čestice fluida gibaju po strujnicama!

### 3.3 Primjeri kompleksnih potencijala

Navest ćemo neke jednostavne primjere kompleksnih potencijala te skicirati pripadne ekvipotencijalne linije i strujnice.

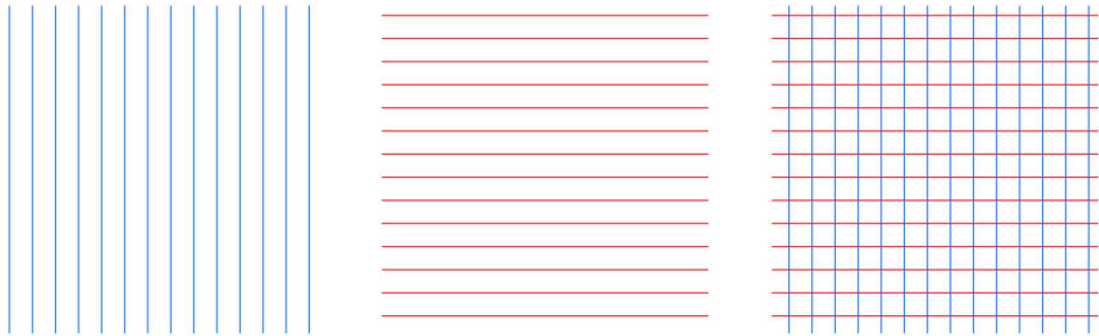
**Primjer 3.1** Najjednostavniji primjer kompleksnog potencijala je kompleksna identiteta

$$\omega(z) = z = x + iy.$$

Potencijal brzine je  $\varphi(x, y) = x$ , a strujna funkcija je  $\psi(x, y) = y$ . Kompleksna brzina je

$$f(z) = \frac{d\omega}{dz} = 1,$$

što odgovara uniformnom horizontalnom gibanju fluida. Dakle, pravci  $x = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  predstavljaju ekvipotencijalne linije, dok pravci  $y = c$  predstavljaju strujnice, slika 5.



Slika 5: Ekvipotencijalne linije i strujnice za  $\omega(z) = z$ .

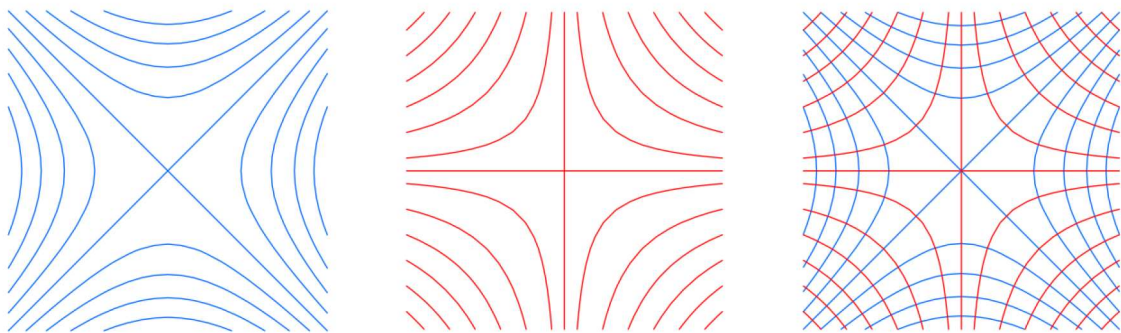
**Primjer 3.2** Kompleksna brzina kompleksnog potencijala zadanog  $s$

$$\omega(z) = \frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{2}(x^2 - y^2) + ixy$$

dana je  $s$

$$f(z) = \omega'(z) = z = x + iy$$

i vodi do hiperbolnog toka. Strujnice su nivo-krivulje od  $\psi(x, y) = xy$ , dok su ekvipotencijalne linije nivo-krivulje od  $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ , slika 6.



Slika 6: Ekvipotencijalne linije i strujnice za  $\omega(z) = \frac{1}{2}z^2$ .

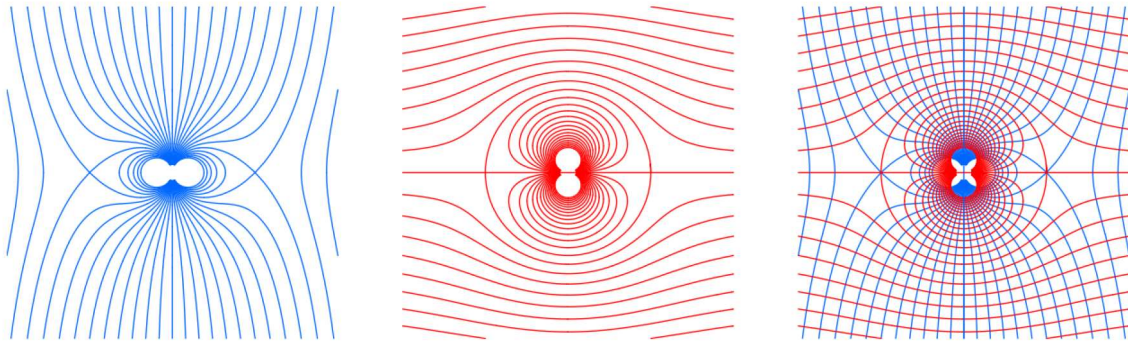
**Primjer 3.3 (Tok oko okrugle ploče)** Promotrimo kompleksni potencijal

$$\omega(z) = z + \frac{1}{z} = \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2}\right) + i \left(y - \frac{y}{x^2 + y^2}\right). \quad (5)$$

Odgovarajuća kompleksna brzina fluida je

$$f(z) = \omega'(z) = 1 - \frac{1}{z^2} = 1 - \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}. \quad (6)$$

Ekvipotencijalne linije i strujnice prikazane su na slici 7.



Slika 7: Ekvipotencijalne linije i strujnice za  $\omega(z) = z + \frac{1}{z}$ .

Točke stagnacije toka fluida su  $z = \pm 1$  jer je u njima brzina fluida jednaka nuli. Točka  $z = 0$  je singularitet. Primijetimo da strujnice

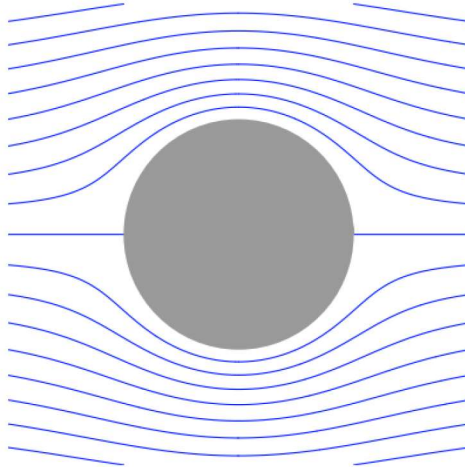
$$\psi(x, y) = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = c, \quad c \in \mathbb{R}$$

postaju horizontalni pravci na velikim udaljenostima od ishodišta. To znači da je daleko od ishodišta ovakav tok fluida uniformni s brzinom  $f(z) \equiv 1$ . Za  $c = 0$ , strujnica se sastoji od jedinične kružnice sa središtem u ishodištu  $|z| = 1$  i realne osi  $y = 0$ . Vektorsko polje brzina  $\mathbf{v} = \nabla\varphi$  je svugdje tangencijalno jediničnoj kružnici, pa nema toka kroz kružnicu. Ta tvrdnja je opravdana jer znamo da se tok mase fluida kroz neku plohu  $S$  računa po formuli

$$\iint_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS,$$

pri čemu je  $\rho$  gustoća fluida, a  $\mathbf{n}$  je polje vanjskih normala na plohu  $S$ . Ako zamislimo da je naša jedinična kružnica poprečni presjek beskonačno dugog valjka, onda vrijedi  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0$  jer je  $\mathbf{v}$  svuda tangencijalno na  $S$  pa tako i na proizvoljni poprečni presjek od  $S$ .

Ako se ograničimo na područje ravnine  $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : |z| > 1\}$ , onda (6) možemo protumačiti kao kompleksnu brzinu uniformnog toka fluida oko čvrste okrugle ploče polumjera 1 kao što je prikazano na slici 8. U trodimenzionalnom sustavu, radilo bi se o stacionarnom toku fluida oko čvrstog valjka.



Slika 8: Tok oko okrugle ploče

## 4 Primjena konformnih preslikavanja u aerodinamici

U ovom odjeljku ćemo objasniti ulogu konformnih preslikavanja u aerodinamici, s posebnim naglaskom na Joukowski preslikavanje. Najprije ćemo se prisjetiti definicije konformnog preslikavanja.

**Definicija 4.1** Preslikavanje  $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  je konformno na  $\Omega$  ako je univalentno i ako čuva kutove po veličini i orijentaciji.

Dakle, konformna preslikavanja su injektivna, a za  $z_0 \in \Omega$ ,  $g'(z_0) \neq 0$ , kut između bilo koje dvije glatke krivulje koje se sijeku u  $z_0$  jednak je kutu između njihovih slika koje se sijeku u  $w_0 = g(z_0)$ . Štoviše, ako je  $w = g(z)$  analitička funkcija i  $g'(z) \neq 0$  za  $z \in \Omega$ , onda je  $g$  konformno preslikavanje na  $\Omega$ .

Važno svojstvo konformnih preslikavanja jest da kompozicija harmonijske funkcije i konformnog preslikavanja za rezultat opet daje harmonijsku funkciju pa se konformno preslikavanje može shvatiti kao promjena varijabli koja čuva harmoničnost.

### 4.1 Joukowski preslikavanje

Joukowski preslikavanje je dano s

$$w = g(z) = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

i od posebnog je značaja u području aerodinamike. Prvi ga je koristio ruski znanstvenik Nikolay Zhukovsky (Joukowski) u proučavanju toka fluida oko krila zrakoplova. Nikolay se danas smatra utemeljiteljem moderne hidrodinamike i aerodinamike. Joukowski preslikavanje ima singularitet u  $z = 0$  i konformno je svuda osim u  $z = \pm 1$  s obzirom da

$$g'(z) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{z^2} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm 1.$$

Ako promatramo točke na jediničnoj kružnici sa središtem u ishodištu, tj. ako  $z = e^{i\theta}$ , onda

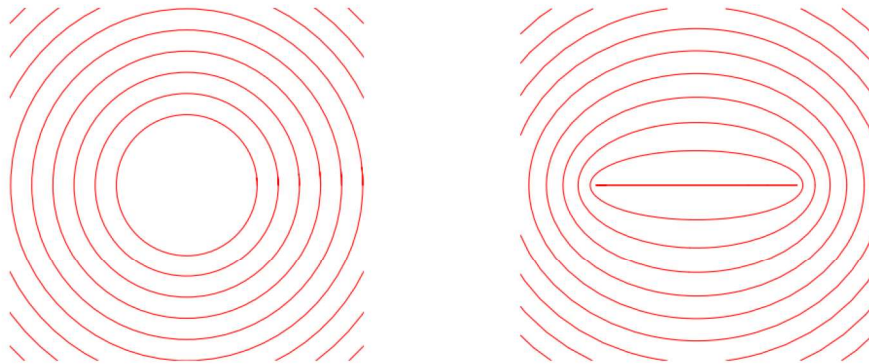
$$w = \frac{1}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \cos \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Stoga  $-1 \leq w \leq 1$  pa Joukowski preslikavanje jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu preslikava u segment  $[-1, 1]$ , slika 9. Ukoliko bi promatrali kružnice sa središtem u ishodištu i proizvoljnog polumjera, recimo  $R$ , onda bismo imali

$$w = \left( \frac{R}{2} + \frac{1}{2R} \right) \cos \theta + i \left( \frac{R}{2} - \frac{1}{2R} \right) \sin \theta$$

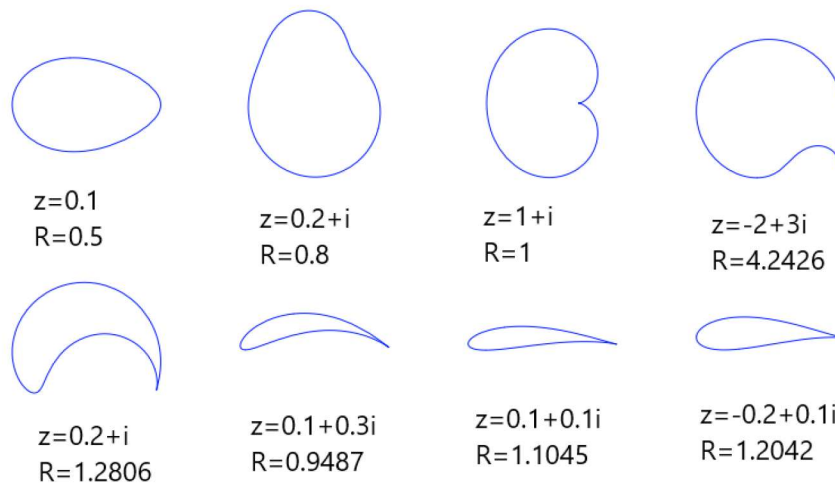
pa bi Joukowski preslikavanje kružnice pretvorilo u elipse s poluosima

$$a = \frac{R}{2} + \frac{1}{2R} \quad \& \quad b = \left| \frac{R}{2} - \frac{1}{2R} \right|.$$



Slika 9: Joukowski preslikavanje

Ono što Joukowski preslikavanje čini posebno zanimljivim jest utjecaj na kružnice čije središte nije u ishodištu. Tu se dobivaju razni zanimljivi oblici, zatvorene krivulje koje ne moraju biti glatke, a među njima su i oblici koji liče na aeroprofil krila zrakoplova, slika 10.



Slika 10: Aeroprofil kao slike kružnica pod Joukowski preslikavanjem

## 4.2 Riemannov teorem o preslikavanju

Konformna preslikavanja imaju veliku ulogu u rješavanju raznih fizikalnih problema koji se mogu opisati kompleksnim funkcijama. Ako su geometrijska svojstva problema komplicirana, onda ga konformnim preslikavanjem možemo transformirati u problem čija je geometrijska struktura jednostavnija. Tako dobiveni problem se može lako riješiti i iz njega dobiti rješenje originalnog problema.

**Teorem 4.1** *Ako je  $\Omega \subset \mathbb{C}$  jednostavno područje, tada postoji konformno preslikavanje  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  koje preslikava  $\Omega$  u jedinični krug  $D = \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ .*

Dokaz teorema može se pronaći u [6]. Uz pomoć teorema 4.1, tok fluida u složenim područjima ravnine možemo transformirati u tok fluida oko kružne ploče kao u što je analizirano u primjeru 3.3 i obratno. Upravo je tu ključno Joukowski preslikavanje. Kao što je vidljivo na slici 10, Joukowski preslikavanje će područje izvan okrugle ploče preslikati u pogodna područja koja imaju oblik aeroprofila. Međutim, treba istaknuti da potencijalna polja ne generiraju silu uzgona pa avion s našim pretpostavkama ne bi mogao letjeti. No, u stvarnosti, tok fluida se ponaša drugačije i to ćemo objasniti u narednom pododjeljku.

## 4.3 Cirkulacija vektorskog polja i sila uzgona

Promotrimo kompleksnu brzinu  $f(z) = u(x, y) - i v(x, y)$  idealnog fluida s pripadnim vektorskim poljem brzina  $\mathbf{v} = (u(x, y), v(x, y))^T$ . Integral kompleksne brzine  $f$  po nekoj krivulji  $C$  tada je

$$\int_C f(z) dz = \int_C (u - i v)(dx + i dy) = \int_C (u dx + v dy) - i \int_C (v dx - u dy).$$

Realni dio integrala zove se *cirkulacija* fluida i pišemo

$$\int_C \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_C (u dx + v dy),$$

a imaginarni dio integrala zove se *tok* fluida i pišemo

$$\int_C \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds = \int_C (v dx - u dy).$$

Ako kompleksna brzina inducira kompleksni potencijal u smislu funkcije koja poprima samo jednu vrijednost u proizvoljnoj točki domene, tj. ako vrijedi

$$\omega(z) = \varphi(z) - i \psi(z), \quad \omega'(z) = f(z),$$

tada je kompleksni integral neovisan o putu pa dobivamo

$$\int_C f(z) dz = \omega(\beta) - \omega(\alpha),$$

za proizvoljnu krivulju  $C$  između točaka  $\alpha$  i  $\beta$ . Ovo svojstvo je ispunjeno kad god je domena podintegralne funkcije jednostavno područje. No, to onda znači da ni cirkulacija ni tok ne ovise o putu pa vrijedi

$$\int_C \mathbf{v} d\mathbf{x} = \int_C \nabla \varphi d\mathbf{x} = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$



i

$$\int_C \mathbf{v} \times d\mathbf{x} = \int_C \nabla\psi d\mathbf{x} = \psi(\beta) - \psi(\alpha).$$

Dakle, u slučaju idealnog fluida, tok kroz krivulju ovisi samo o njenim krajnjim točkama. To odmah znači da nema ni cirkulacije ni toka kroz bilo koju zatvorenu krivulju  $C$  jer  $\alpha = \beta$ . No, u nastavku ćemo vidjeti da je za uzgon tijela cirkulacija itekako potrebna.

### 4.3.1 Kutta-Joukowski teorem

Želimo izračunati silu uzgona  $L$ , tj. silu koja djeluje na aeroprofil u vertikalnom smjeru dok oko njega struji fluid. Pritom ćemo koristiti pretpostavku da u potencijalnom protoku fluida nema sile otpora (ova pretpostavka je poznata pod nazivom d'Alembertov paradoks i u ovom radu nećemo ulaziti u detalje oko istoga). Sila  $L$  bit će jednaka razlici sila koje djeluju na gornji i donji dio aeroprofila. Kada bi aeroprofil bio plosnat (poprečni presjek krila bi izgledao kao ravan štap), onda bi vrijedilo

$$L = \int (p_D - p_G) dx,$$

gdje je  $p_D$  tlak ispod, a  $p_G$  tlak iznad aeroprofila. Iz Bernoullijeve jednadžbe (1) dobivamo

$$L = \frac{\rho}{2} \int (u_G^2 - u_D^2) dx = \int (u_G - u_D)(u_G + u_D) dx,$$

gdje je  $u_G$  brzina iznad, a  $u_D$  brzina fluida ispod aeroprofila. Ako je aeroprofil uzak, onda možemo pretpostaviti da su i  $u_D$  i  $u_G$  bliske slobodnoj brzini  $U$  fluida, odnosno brzini uniformnog toka. Tada imamo  $u_G + u_D \approx 2U$  pa dobivamo

$$L \approx \rho U \int (u_G - u_D) dx = -\rho U \int_C \mathbf{u} ds, \quad (7)$$

gdje je  $C$  zatvorena krivulja koja predstavlja rub aeroprofila. Primijetimo da je integral u (7) cirkulacija fluida, a u nastavu ćemo ju označavati s  $\Gamma$ . Dakle, možemo zaključiti da je sila uzgona proporcionalna cirkulaciji oko krila zrakoplova, tj. vrijedi

$$L = -\rho U \Gamma.$$

Ovaj rezultat je u literaturi poznat kao *Kutta – Joukowski teorem*.

**Teorem 4.2 (Kutta-Joukowski teorem)** *Na dvodimenzionalno tijelo koje se giba kroz fluid čija je brzina dana vektorskim poljem  $\mathbf{v}$  djeluje sila uzgona koja je okomita na  $\mathbf{v}$ , a iznosi  $L = -\rho U \Gamma$ , gdje je  $\Gamma = \int_C \mathbf{v} ds$  cirkulacija fluida oko tijela.*

### 4.3.2 Sila uzgona kružnog valjka

Opet ćemo promotriti tok fluida oko poprečnog presjeka kružnog valjka, odnosno tok oko kružne ploče polumjera 1 i uzet ćemo da je ploča smještena u koordinatni sustav tako da joj je središte u ishodištu. Kompleksni potencijal (5) je analitička funkcija i poprima jedinstvene vrijednosti svugdje osim u  $z = 0$ . Stoga je cirkulacija oko bilo koje krivulje koja okružuje ploču jednaka nuli. S obzirom da je prema Kutta-Joukowski teoremu za postojanje sile uzgona cirkulacija nužna, morat ćemo kompleksni potencijal (5) izmijeniti tako da u

nekim točkama može poprimiti više vrijednosti, a znamo da ćemo to postići ako koristimo kompleksni logaritam. Stoga ćemo definirati familiju kompleksnih potencijala oblika

$$\omega_\gamma(z) = z + \frac{1}{z} + i\gamma \log z. \quad (8)$$

Odgovarajuća kompleksna brzina dana je s

$$f_\gamma(z) = \frac{d\omega_\gamma}{dz} = 1 - \frac{1}{z^2} + i\frac{\gamma}{z}, \quad (9)$$

a poput Joukowski preslikavanja, za  $z \rightarrow \infty$  približava se broju 1. Na jediničnom krugu  $z = e^{i\theta}$  imamo

$$f_\gamma(e^{i\theta}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2i\theta} - i\gamma e^{-i\theta} = (\sin \theta + \gamma)ie^{-i\theta}.$$

Ukoliko je  $\gamma$  realan broj, funkcija  $f_\gamma$  je proporcionalna kompleksnom tangencijalnom vektoru na kružnicu  $ie^{-i\theta} = \sin \theta - i \cos \theta$ . Dakle, ako  $\gamma \in \mathbb{R}$ , tok fluida kroz kružnicu jednak je nuli. Vrijedi

$$\int_C f_\gamma(z) dz = \int_C \left(1 - \frac{1}{z^2} + i\frac{\gamma}{z}\right) dz = -2\pi\gamma, \quad (10)$$

gdje je  $C$  pozitivno orijentirana jedinična kružnica. Dakle, ako  $\gamma \neq 0$ , cirkulacija također neće biti nula pa ni sila uzgona neće biti nula. Primijetimo da su točke stagnacije toka fluida s kompleksnom brzinom  $f_\gamma(z)$  dane s

$$z_{1,2} = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{4}\gamma^2} - \frac{1}{2}i\gamma, \quad (11)$$

uz uvjet  $|\gamma| \leq 2$ . Ako komponiramo modificirani kompleksni potencijal (8) s Joukowski preslikavanjem, dobit ćemo kompleksni potencijal za tok fluida oko aeroprofila - slike jediničnog kruga. No, konformna preslikavanja ne mijenjaju vrijednost kompleksnih integrala pa zaključujemo da za proizvoljan  $\gamma \neq 0$  postoji cirkulacija (različita od nule) oko aeroprofila uz izmijenjeni tok fluida. Sada znamo da će zrakoplov imati uzgon, odnosno letjeti!

Preostaje vidjeti kakav  $\gamma$  odgovara stvarnim fizikalnim uvjetima. Davne 1902. godine Martin Kutta je iznio pretpostavku da sama priroda određuje konstantu  $\gamma$  tako da brzina fluida na izlaznom rubu aeroprofila bude konačna, a to znači da izlazni rub  $\eta = 1$  aeroprofila treba biti točka stagnacije. Izostavljajući detalje, može se pokazati da je odgovarajuća točka stagnacije na jediničnoj kružnici

$$z = \frac{1 - \beta}{\alpha} = e^{i(\delta - \theta)}, \quad \delta = \arg(1 - \beta), \quad \theta = \arg(\alpha), \quad (12)$$

i dodatno uzimamo  $|\alpha| = |1 - \beta|$  kako bi slika jedinične kružnice prolazila točkom  $w = 1$ . Izjednačavanjem (12) s (11), dobivamo

$$\gamma = 2 \sin(\theta - \delta)$$

pa je cirkulacija  $\Gamma = -4\pi \sin(\theta - \delta)$ , a prema Kutta-Joukowski teoremu sila uzgona dana je s

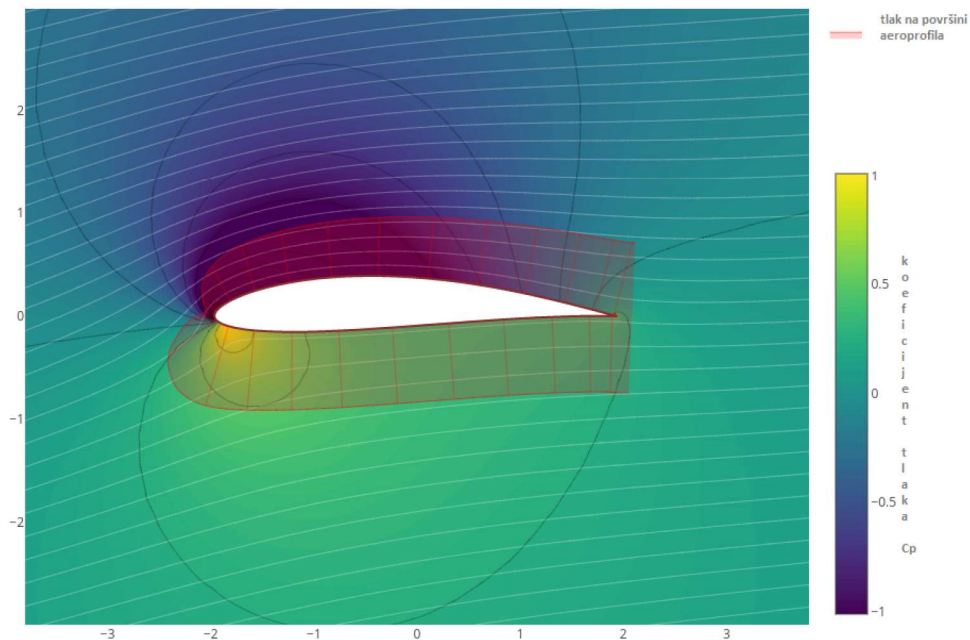
$$L = 4\pi\rho U \sin(\theta - \delta).$$

## 4.4 Poopćenja

Oblik aeroprofila dobiven Joukowski preslikavanjem ima dva nedostatka. Prvi je postojanje špica na izlaznom rubu gdje je repni kut jednak nuli, a drugi je taj što je takav aeroprofil relativno tanak. Zato se nameće potreba za generalizacijom Joukowski preslikavanja pa se pojavljuje tzv. *Kármán-Trefftz preslikavanje* dano s

$$w = \lambda \frac{\left(1 + \frac{b^2}{z}\right)^\lambda + \left(1 - \frac{b^2}{z}\right)^\lambda}{\left(1 + \frac{b^2}{z}\right)^\lambda - \left(1 - \frac{b^2}{z}\right)^\lambda},$$

gdje je  $\lambda = 2 - \frac{\theta}{\pi}$ , a  $\theta$  je repni kut na izlaznom rubu aeroprofila. Ukoliko je  $\theta = 0$ , tada je Kármán-Trefftz preslikavanje jednako Joukowski preslikavanju. Kármán-Trefftz preslikavanjem možemo dobiti aeroprofile oko kojih fluid struji većom brzinom, a tlak oko aeroprofila je bolje raspoređen u odnosu na Joukowski preslikavanje.



Slika 11: Tok fluida oko Kármán-Trefftz aeroprofila.

## 5 Zaključak

Rješavanje problema toka fluida oko krila zrakoplova je vrlo složen proces. Međutim, ako problem svedemo na dvodimenzionalni prostor, onda proučavanje aeroprofila dozvoljava primjenu raznih rezultata iz kompleksne analize, u ovom slučaju korištenje geometrijskih svojstava konformnih preslikavanja. Na raznim web stranicama postoji mnoštvo dostupnih Matlab skripti i Java aplikacija, koje nam daju jasan uvid u Joukowski i Kármán - Trefftz preslikavanja.

## Literatura

- [1] R. S. Burington, *On the Use of Conformal Mapping in Shaping Wing Profiles*, The American Mathematical Monthly, Vol. 47, No. 6 (1940), 362-373.
- [2] T. Johnson, *Conformal Mapping in Wing Aerodynamics*,  
<https://sites.math.washington.edu/morrow/33613/papers/thomas.pdf> 2013.
- [3] N. Joukowski, *On the profiles of airfoils*, Z. Flugtech, Motorluftschiffahrt, Vol. 1, p.281, vol. 2, 1912. p.81. 1910.
- [4] N. R. Kapania, K. Terracciano, S. Taylor, *Modeling the Fluid Flow around Airfoils Using Conformal Mapping*, Society for Industrial and Applied Mathematics Undergraduate Research Online, Vol. 1, No. 2, (2008), 70-99.
- [5] W. Kutta, *Lift Forces in Flowing Fluids*, III. Aero. Mit., 1902.
- [6] M. Levi, *Riemann Mapping Theorem by Steepest Descent*, American Mathematical Monthly 114 (2007), 246-251.
- [7] P. J. Oliver, *Complex Analysis and Conformal Mapping*, University of Minnesota, 2016.
- [8] E. Oršulić, *Utjecaj aeroprofila i oblika krila na aerodinamička svojstva zrakoplova*, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet prometnih znanosti Zagreb, (2007), 11-13.
- [9] A. Robinson, J.A. Laurmann, *Wing theory*, Cambridge University Press, 1956.
- [10] Š. Ungar, *Kompleksna analiza* Sveučilište u Zagrebu, 2009.
- [11] F. White, *Fluid Mechanics*, McGraw-Hill, 1986.