Horadamovi polinomi

Pribisalić, Iva

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Pribisalić

Horadamovi polinomi

Završni rad

Osijek, 2019

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Pribisalić

Horadamovi polinomi

Završni rad

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2019

Horadam polynomials

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s polinomima zadanim rekurzivnim formulama. Navest ćemo nekoliko vrsta takvih polinoma te objasniti Binetovu formulu vezanu uz Fibonaccijeve polinome. Detaljnije ćemo obraditi dvije vrste polinoma, Pellove i Pell-Lucasove. Opisat ćemo njihova svojstva i grafički prikazati neke od polinoma. Osim Pell-Lucasovih, obradit ćemo i općenitiju vrstu, k-Pell-Lucasove polinome. Proučit ćemo pripadne matrične zapise te konvoluciju polinoma. Konačno, dokazat ćemo jednakosti koje povezuju Pellove i Pell-Lucasove polinome. Navest ćemo jednakosti koje vrijede između Fibonaccijevih, Pellovih i Pell-Lucasovih brojeva te opisati na koji način se oni mogu primijeniti u kombinatorici.

Ključne riječi: Rekurzija, Fibonaccijevi polinomi, Binetova formula, Pellovi polinomi, Pell-Lucasovi polinomi, konvolucija, Fibonaccijevi brojevi, Pellovi brojevi, Pell-Lucasovi brojevi.

Abstract

In this paper we will introduce type of polynomials defined by the recursive formulas. We will mention some of these polynomials and explain Binet formula. Furthermore, we will present two of the polynomials, Pell and Pell-Lucas, in detail. Some properties and graphical representation will also be shown. Besides that, k-Pell-Lucas polynomials will be mentioned. We will see some matrix techniques for these polynomials, as well as convolution. Finally, equalities that link Pell and Pell-Lucas polynomials will be proven. After that, we will mention the numbers which are obtained through certain polynomials. Some equalities will be used to prove connection between these numbers and trigonometric functions. We will end this paper with application of these numbers in Combinatorics.

Keywords: Recurrence, Fibonacci polynomials, Binet formula, Pell polynomials, Pell-Lucas polynomials, convolution, Fibonacci numbers, Pell numbers, Pell-Lucas numbers.

Sadržaj

1 Uvod

Riječ polinom dolazi od grčke riječi *poly* (mnogo) i latinske riječi *nomen* (ime). Prvi put ju je upotrijebio u 17. stoljeću François Viéte, no računske operacije nad polinomima i problem određivanja nultočki polinoma javljaju se puno ranije.
Definirajmo pojmove koje ćemo koristiti u nastavku ([10] i [12]).

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.1. *Funkciju $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s*

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad a_n \neq 0$$

nazivamo ***polinom*** *n-tog stupnja nad $\mathbb{R}$. Brojeve $a_i \in \mathbb{R}$ zovemo koeficijenti polinoma, broj a_0 slobodni koeficijent, a a_n vodeći koeficijent.*

Definicija 1.2. ***Diferencijalna jednadžba*** *je jednadžba u kojoj se pojavljuju i funkcija, koja je nepoznanica, i jedna ili više njenih derivacija.*

Definicija 1.3. *Neka je $y : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Kažemo da je y* ***rješenje diferencijalne jednadžbe*** *ako zadovoljava tu jednadžbu za svaki $x \in D$.*

Definicija 1.4. ***Linearna diferencijalna jednadžba drugog reda*** *je diferencijalna jednadžba oblika $y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$, gdje su a, b i f neprekidne funkcije na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ na kojem želimo riješiti jednadžbu.*
Za linearnu diferencijalnu jednadžbu kažemo da je ***homogena*** *ako vrijedi $f(x) = 0$.*

Definicija 1.5. ***Rekurzivna relacija*** *je formula u kojoj se n-ti član nekog niza a_n izražava pomoću nekoliko prethodnih članova a_k, gdje je $k < n$.*

1.2 Uvod u Horadamove polinome

Polinome možemo zadati i rekurzivno. Takve polinome istraživao je Alwyn Francis Horadam i po njemu su dobili naziv Horadamovi polinomi. Navest ćemo nekoliko određenih vrsta Horadamovih polinoma i pobliže opisati neke od njih. Uz to ćemo opisati i njihova svojstva.

Horadam je proučavao sljedeće oblike polinoma:

$$A_n(x) = pxA_{n-1}(x) + qA_{n-2}(x), \quad A_0(x) = 0,\ A_1(x) = 1 \tag{1.1}$$

i

$$B_n(x) = pxB_{n-1}(x) + qB_{n-2}(x), \quad B_0(x) = 2,\ B_1(x) = 2x, \tag{1.2}$$

gdje su $p, q \in \mathbb{R}$.

Može se pokazati da su navedeni oblici polinoma rješenja nekih diferencijalnih jednadžbi. Primjerice, polinom $x \mapsto A_n(x)$ je jedno rješenje linearne homogene diferencijalne jednadžbe drugog reda:

$$\left(1 + \frac{p^2}{4q}x^2\right) y'' + \frac{3p^2}{4q}xy' - \frac{p^2}{4q}(n^2 - 1)y = 0. \tag{1.3}$$

Ovisno o odabiru koeficijenata p i q, dobivamo različite vrste polinoma. Nabrojimo neke od njih:

1. **Fermatovi** polinomi **prve** vrste: $A_n(x)$ za $p = 1$ i $q = -2$
2. **Fermatovi** polinomi **druge** vrste: $B_n(x)$ za $p = 1$ i $q = -2$
3. **Čebiševljevi** polinomi druge vrste: $A_n(x)$ za $p = 2$ i $q = -1$
4. **Pellovi** polinomi $P_n(x)$: $A_n(x)$ za $p = 2$ i $q = 1$
5. **Pell-Lucasovi** polinomi $Q_n(x)$: $B_n(x)$ za $p = 2$ i $q = 1$
6. **Fibonaccijevi** polinomi $F_n(x)$: $A_n(x)$ za $p = 1$ i $q = 1$
7. **Lucasovi** polinomi $L_n(x)$: $B_n(x)$ za $p = 1$ i $q = 1$.

Ako uzmemo $x = 1$, dobivamo sljedeće:

- $P_n(1) = P_n$ je n-ti Pellov broj
- $Q_n(1) = Q_n$ je n-ti Pell-Lucasov broj
- $P_n(\frac{1}{2}) = F_n$ je n-ti Fibonaccijev broj
- $Q_n(\frac{1}{2}) = L_n$ je n-ti Lucasov broj.

Vrijede i sljedeće dvije jednakosti: $P_n(\frac{x}{2}) = F_n(x)$ i $Q_n(\frac{x}{2}) = L_n(x)$.

U nastavku ćemo razmotriti Fibonaccijeve polinome te Binetovu formulu, a zatim ćemo se detaljnije baviti Pellovim i Pell-Lucasovim polinomima te pripadnim brojevima. Navest ćemo njihova svojstva, matrične zapise i jednakosti koje povezuju te polinome, ali i brojeve. Više o navedenim polinomima, kao i o polinomima koje nećemo proučavati, može se pronaći u [3].

2 Fibonaccijevi polinomi

2.1 Osnovna svojstva

U ovom poglavlju ukratko ćemo opisati Fibonaccijeve polinome te objasniti Binetovu formulu koju ćemo u nastavku koristiti. Fibonaccijevi polinomi su definirani sljedećom rekurzivnom formulom:

$$F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), \tag{2.1}$$

gdje je $F_0(x) = 0$ i $F_1(x) = 1$, za $n \geq 2$. Fibonaccijevi polinomi se mogu prikazati koristeći funkciju izvodnicu

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(x)t^n = \frac{t}{1 - tx - t^2}.$$

Primjer 2.1. *Navedimo prvih nekoliko Fibonaccijevih polinoma.*

(a) $F_2(x) = xF_1(x) + F_0(x) = x$

(b) $F_3(x) = xF_2(x) + F_1(x) = x \cdot x + 1 = x^2 + 1$

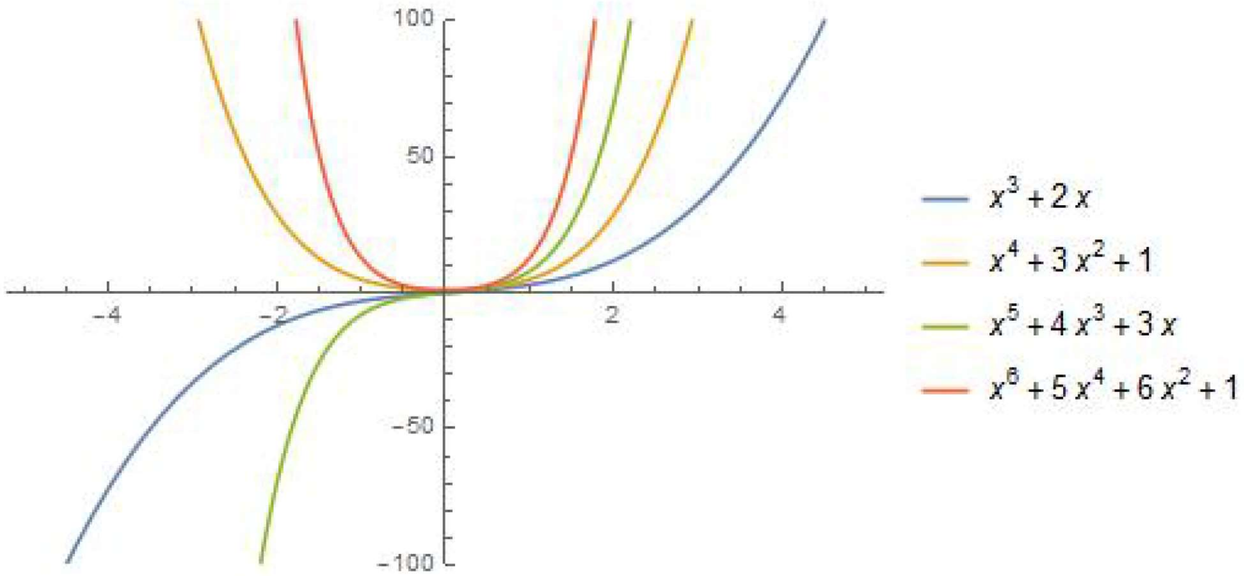
(c) $F_4(x) = xF_3(x) + F_2(x) = x(x^2 + 1) + x = x^3 + 2x$

(d) $F_5(x) = xF_4(x) + F_3(x) = x(x^3 + 2x) + x^2 + 1 = x^4 + 3x^2 + 1$

(e) $F_6(x) = xF_5(x) + F_4(x) = x(x^4 + 3x^2 + 1) + x^3 + 2x = x^5 + 4x^3 + 3x$

(f) $F_7(x) = xF_6(x) + F_5(x) = x(x^5 + 4x^3 + 3x) + x^4 + 3x^2 + 1 = x^6 + 5x^4 + 6x^2 + 1$

Primijetimo da je svaki Fibonaccijev polinom normiran[1].



Slika 1: Neki od Fibonaccijevih polinoma iz Primjera 2.1

Neka od zanimljivih svojstava te poveznica Fibonaccijevih polinoma s binomnim koeficijentima mogu se pronaći u [6].

[1] vodeći koeficijent polinoma jednak je 1

2.2 Binetova formula

Možemo li pronaći formulu pomoću koje računamo n-ti Fibonaccijev broj uz poznavanje broja n, ali ne i prethodnih Fibonaccijevih brojeva?
Na to pitanje je u 19. stoljeću dao odgovor Jacques Philippe Marie Binet te je po njemu formula dobila naziv Binetova formula. Fibonaccijevi brojevi zadani su formulom

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \tag{2.2}$$

gdje je $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$, za $n \geq 2$.
Binetova formula glasi:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \tag{2.3}$$

Do nje se došlo proučavanjem pripadne karakteristične jednadžbe rekurzije (2.2)

$$x^2 = x + 1.$$

Rješenja te jednadžbe su $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.
Sljedeći teorem nam govori u kojem obliku možemo zapisati rješenje rekurzije, ukoliko znamo rješenja karakteristične jednadžbe pripadne rekurzije.

Teorem 2.1. *Neka su x i y različita rješenja karakteristične jednadžbe koja pripada rekurziji $a_n = p\,a_{n-1} + q\,a_{n-2}$, gdje su $p, q \in \mathbb{R}$, $p, q \neq 0$. Tada je rješenje rekurzije dano formulom $a_n = Ax^n + By^n$, gdje su A i B proizvoljni realni ili kompleksni brojevi.*

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [1] (str. 126).

Prema prethodnom teoremu, rekurzija (2.2) može se napisati na sljedeći način:

$$F_n = A\varphi^n + B\psi^n. \tag{2.4}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta jednadžbe (2.2), dobivamo sljedeći sustav:

$$A + B = 0,$$

$$A\varphi + B\psi = 1.$$

Rješenja tog sustava su $A = -B = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$. Uvrštavanjem A, B, φ i ψ u (2.4) dobivamo Binetovu formulu. Ona će nam koristiti u nastavku ovog rada, a više o njoj zainteresirani čitatelji mogu pronaći u [4].

2.3 Pitagorine trojke

Svaki Fibonaccijev broj dobije se kao suma prethodna dva Fibonaccijeva broja. Dakle, prvih nekoliko Fibonaccijevih brojeva su: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... U ovom poglavlju povezat ćemo Fibonaccijeve brojeve i Pitagorine trojke. Prisjetimo se, Pitagorina trojka je uređena trojka brojeva (x, y, z) za koju vrijedi $x^2 + y^2 = z^2$, pri čemu su $x, y, z \in \mathbb{N}$. Najpoznatija Pitagorina trojka je $(3, 4, 5)$. Također, svaka uređena trojka oblika $(3n, 4n, 5n)$ je Pitagorina trojka, za $n \in \mathbb{N}$.

Proučimo sljedeći primjer.

Primjer 2.2. *Provjerite je li* (x, y, z) *Pitagorina trojka, za* $x = F_4F_7$, $y = 2F_5F_6$ *i* $z = F_5^2 + F_6^2$.

Rješenje. Zapišimo prvo spomenute Fibonaccijeve brojeve:

$$F_4 = 3, \quad F_5 = 5, \quad F_6 = 8, \quad F_7 = 13.$$

Izračunajmo zatim x, y i z:

$$x = 3 \cdot 13 = 39, \quad y = 2 \cdot 5 \cdot 8 = 80, \quad z = 5^2 + 8^2 = 89.$$

Sada je

$$x^2 + y^2 = 39^2 + 80^2 = 7921$$

te

$$z^2 = 89^2 = 7921.$$

Dakle, (x, y, z) je jedna Pitagorina trojka.

Dokazat ćemo da se Pitagorine trojke mogu zadati pomoću Fibonaccijevih brojeva. Točnije, pomoću 4 uzastopna Fibonaccijeva broja. Uvedimo sljedeće oznake:

$$x = F_nF_{n+3}, \tag{2.5}$$

$$y = 2F_{n+1}F_{n+2}, \tag{2.6}$$

$$z = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2. \tag{2.7}$$

Pokažimo da tako odabrani x, y i z zadovoljavaju jednakost $x^2 + y^2 = z^2$. Zbog (2.5) i (2.6) imamo sljedeće:

$$x^2 + y^2 = (F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2.$$

Zbog (2.2) vrijedi da je $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, odnosno $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$ te $F_{n+3} = F_{n+2} + F_{n+1}$. Koristeći i (2.7) dobivamo:

$$\begin{aligned}
(F_nF_{n+3})^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2 &= \big((F_{n+2} - F_{n+1})(F_{n+2} + F_{n+1})\big)^2 + (2F_{n+1}F_{n+2})^2 \\
&= (F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2)^2 + 4F_{n+1}^2F_{n+2}^2 \\
&= F_{n+2}^4 - 2F_{n+2}^2F_{n+1}^2 + F_{n+1}^4 + 4F_{n+1}^2F_{n+2}^2 \\
&= F_{n+2}^4 + 2F_{n+2}^2F_{n+1}^2 + F_{n+1}^4 \\
&= (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2 \\
&= z^2.
\end{aligned}$$

3 Pellovi polinomi

3.1 Osnovna svojstva

Pellovi polinomi definirani su na sljedeći način:

$$P_n(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x), \tag{3.1}$$

gdje je $P_0(x) = 0$ i $P_1(x) = 1$, za $n \geq 2$. Također vrijedi $P_{-n}(x) = (-1)^{n+1}P_n(x)$.
Pellovi polinomi mogu se prikazati pomoću funkcije izvodnice

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(x)t^n = \frac{1}{1-2xt-t^2}.$$

Primjer 3.1. *Proučimo prvih nekoliko Pellovih polinoma.*

(a) $P_2(x) = 2xP_1(x) + P_0(x) = 2x$

(b) $P_3(x) = 2xP_2(x) + P_1(x) = 2x \cdot 2x + 1 = 4x^2 + 1$

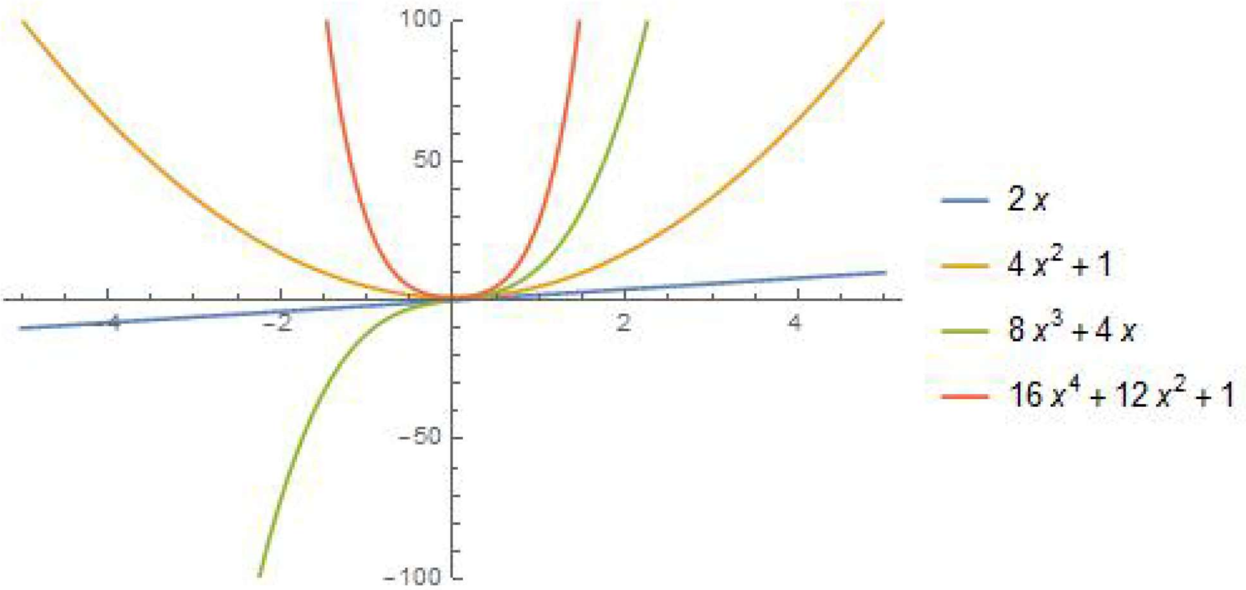
(c) $P_4(x) = 2xP_3(x) + P_2(x) = 2x(4x^2 + 1) + 2x = 8x^3 + 4x$

(d) $P_5(x) = 2xP_4(x) + P_3(x) = 2x(8x^3 + 4x) + 4x^2 + 1 = 16x^4 + 12x^2 + 1$

(e) $P_6(x) = 2xP_5(x) + P_4(x) = 32x^5 + 32x^3 + 6x$

(f) $P_7(x) = 2xP_6(x) + P_5(x) = 64x^6 + 80x^4 + 24x^2 + 1$

Primijetimo da je vodeći koeficijent polinoma $P_n(x)$ jednak 2^{n-1} (brojevi označeni crveno u Primjeru 3.1). Ako je n neparan broj, svi koeficijenti polinoma $P_n(x)$ su parni brojevi, osim slobodnog člana. Ako je n paran broj, onda $2x$ dijeli polinom $P_n(x)$. Još jedno zanimljivo svojstvo je to da je za paran broj n, $n \geq 2$, koeficijent uz x jednak upravo n.



Slika 2: Neki od Pellovih polinoma iz Primjera 3.1

3.2 Matrični zapis

Sljedeća matrica generira Pellove polinome:

$$P(x) = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.2}$$

Općenito, za Pellove polinome vrijedi sljedeće:

$$P^n(x) = \begin{bmatrix} P_{n+1}(x) & P_n(x) \\ P_n(x) & P_{n-1}(x) \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

Ako uzmemo $n = 1$, formula (3.3) izgleda ovako:

$$P(x) = \begin{bmatrix} P_2(x) & P_1(x) \\ P_1(x) & P_0(x) \end{bmatrix}.$$

Koristeći jednadžbu (3.1) i Primjer 3.1 dobivamo upravo formulu (3.2). Jednakosti koje vrijede za $P(x)$, kao i za $P^n(x)$, mogu se pronaći u [5] i [8].

Proučimo sada tridijagonalne matrice. Opći oblik ovih matrica izgleda ovako:

$$A(n) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Determinanta matrice $A(n)$ se, kao i Horadamovi polinomi, računa koristeći rekurzivnu formulu. Ona glasi:

$$\det A(n) = a_{n,n} \det A(n-1) - a_{n,n-1} a_{n-1,n} \det A(n-2), \tag{3.4}$$

uz početne uvjete

$$\det A(1) = a_{1,1} \quad \text{i}$$

$$\det A(2) = a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}.$$

Sada ćemo, koristeći tu formulu, iskazati i dokazati teorem koji povezuje determinantu tridijagonalne matrice i Pellove polinome.

Teorem 3.1. *Ako je $M_n(x)$, $n \geq 0$, kvadratna tridijagonalna matrica reda n,*

$$M_n(x) = \begin{bmatrix} 1 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2x & i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i & 2x & i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2x & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i & 2x \end{bmatrix}, \quad M_0(x) = 0,$$

onda je $\det M_n(x) = P_n(x)$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći princip matematičke indukcije po redu matrice $M_n(x)$.

- Koristeći početne uvjete formule za determinantu tridijagonalne matrice (3.4), vidimo da je $\det M_1(x) = 1 = P_1(x)$ i $\det M_2(x) = 2x = P_2(x)$ pa tvrdnja vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$.
- Pretpostavimo da tvrdnja teorema vrijedi za $n-1$ i $n-2$. Dakle, $\det M_{n-1}(x) = P_{n-1}(x)$ i $\det M_{n-2}(x) = P_{n-2}(x)$.
- Pokažimo da tvrdnja teorema vrijedi za n. Zbog (3.4) i pretpostavke indukcije imamo $\det M_n(x) = 2x \det M_{n-1}(x) - i^2 \det M_{n-2}(x) = 2xP_{n-1}(x) + P_{n-2}(x) = P_n(x)$.

Time je tvrdnja dokazana. $\square$

4 Pell-Lucasovi polinomi

4.1 Osnovna svojstva

Pell-Lucasovi polinomi su zadani istom rekurzivnom formulom kao i Pellovi polinomi, no s drugim početnim uvjetima. Definirani su na sljedeći način:

$$Q_n(x) = 2xQ_{n-1}(x) + Q_{n-2}(x), \tag{4.1}$$

gdje je $Q_0(x) = 2$ i $Q_1(x) = 2x$, za $n \geq 2$. Definicija se može proširiti i za $n < 0$: $Q_{-n} = (-1)^n Q_n(x)$.
Pell-Lucasovi polinomi se također mogu zapisati pomoću funkcije izvodnice

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{n+1}(x)t^n = \frac{2x+2t}{1-2xt-t^2}.$$

Primjer 4.1. *Proučimo prvih nekoliko Pell-Lucasovih polinoma.*

(a) $Q_2(x) = 2xQ_1(x) + Q_0(x) = 4x^2 + 2$

(b) $Q_3(x) = 2xQ_2(x) + Q_1(x) = 2x(4x^2 + 2) + 2x = 8x^3 + 6x$

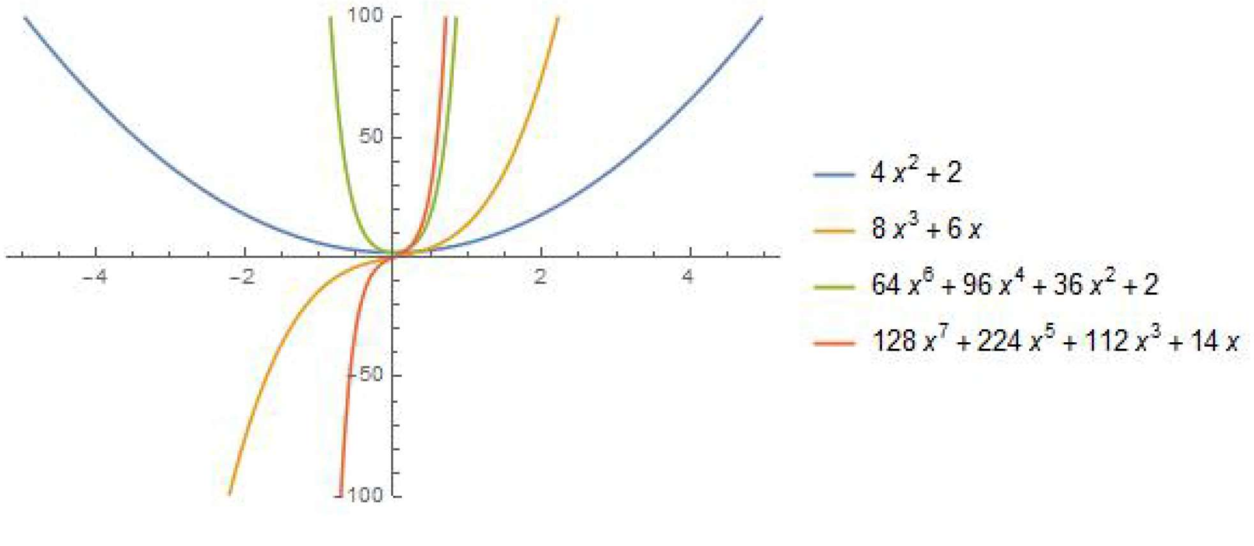
(c) $Q_4(x) = 2xQ_3(x) + Q_2(x) = 2x(8x^3 + 6x) + 4x^2 + 2 = 16x^4 + 16x^2 + 2$

(d) $Q_5(x) = 2xQ_4(x) + Q_3(x) = 2x(16x^4 + 16x^2 + 2) + 8x^3 + 6x = 32x^5 + 40x^3 + 10x$

(e) $Q_6(x) = 2xQ_5(x) + Q_4(x) = 64x^6 + 96x^4 + 36x^2 + 2$

(f) $Q_7(x) = 2xQ_6(x) + Q_5(x) = 128x^7 + 224x^5 + 112x^3 + 14x$

Primijetimo da se kod Pell-Lucasovih polinoma, kao i kod Pellovih polinoma, mogu uočiti određena svojstva. Vodeći koeficijent polinoma $Q_n(x)$ jednak je 2^n (brojevi označeni crveno u Primjeru 4.1) i svi su koeficijenti parni brojevi. Za neparan n, $2x$ dijeli $Q_n(x)$, dok je kod Pellovih polinoma to svojstvo bilo za paran n.



Slika 3: Neki od Pell-Lucasovih polinoma iz Primjera 4.1

Kao i kod Pellovih polinoma, možemo uspostaviti vezu između determinante tridijagonalne matrice i Pell-Lucasovih polinoma. Definiramo matricu

$$M_n^*(x) = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & i & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i & 2x & i & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2x & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i & 2x \end{bmatrix}, \quad M_0^*(x) = 0.$$

Za $n \geq 1$ vrijedi: $\det M_n^*(x) = Q_{n-1}(x)$.
Tvrdnja se dokazuje analogno kao i u slučaju Pellovih polinoma principom matematičke indukcije po redu matrice $M_n^*(x)$.

4.2 k-Pell-Lucasovi polinomi

Osim Pell-Lucasovih polinoma, mogu se promatrati i k-Pell-Lucasovi polinomi. Formula za računanje ovih polinoma glasi:

$$Q_{k,n+2}(x) = 2xQ_{k,n+1}(x) + kQ_{k,n}(x), \quad Q_{k,0}(x) = 2, \quad Q_{k,1}(x) = 2x, \tag{4.2}$$

gdje je $k \in \mathbb{R}$.

Primjer 4.2. *Proučimo prvih nekoliko k-Pell-Lucasovih polinoma.*

(a) $Q_{k,0}(x) = 2$

(b) $Q_{k,1}(x) = 2x$

(c) $Q_{k,2}(x) = 4x^2 + 2k$

(d) $Q_{k,3}(x) = 8x^3 + 6xk$

(e) $Q_{k,4}(x) = 16x^4 + 16x^2k + 2k^2$

Napomena 4.1. *U slučaju kada je $k = 1$ dobivamo Pell-Lucasove polinome.*

Kod Fibonaccijevih polinoma smo objasnili Binetovu formulu. Na sličan način, koristeći rekurzivnu formulu (4.2) i Teorem 2.1, može se dobiti formula za ove polinome. Ona glasi

$$Q_{k,n}(x) = r_1^n + r_2^n, \tag{4.3}$$

gdje su $r_1 = x + \sqrt{x^2 + k}$ i $r_2 = x - \sqrt{x^2 + k}$ korijeni karakteristične jednadžbe

$$\lambda^2 - 2x\lambda - k = 0.$$

Napomena 4.2. *Primijetimo da za r_1 i r_2 vrijedi $r_1 r_2 = -k$.*

U sljedećim propozicijama navest ćemo i dokazati Catalanov i Cassinijev identitet za k-Pell-Lucasove polinome.

Propozicija 4.1 (Catalanov identitet). *Za nenegativne cijele brojeve n i s, takve da je $s \leq n$, i za pozitivan realan broj k, Catalanov identitet za k-Pell-Lucasove polinome glasi:*

$$Q_{k,n-s}(x)Q_{k,n+s}(x) - \big(Q_{k,n}(x)\big)^2 = (-k)^{n-s}\left(\big(Q_{k,s}(x)\big)^2 - 4(-k)^s\right).$$

Dokaz. Prilikom raspisivanja lijeve strane iskoristit ćemo Napomenu 4.2, (4.3) i formule za r_1 i r_2 te pokazati da vrijedi jednakost. Imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
Q_{k,n-s}(x)Q_{k,n+s}(x) - \big(Q_{k,n}(x)\big)^2 &= (r_1^{n-s} + r_2^{n-s})(r_1^{n+s} + r_2^{n+s}) - (r_1^n + r_2^n)^2 \\
&= r_1^{n-s}r_2^{n+s} + r_1^{n+s}r_2^{n-s} - 2(r_1r_2)^n \\
&= (r_1r_2)^{n-s}\left(r_1^{2s} + r_2^{2s} - 2(-k)^s\right) \\
&= (-k)^{n-s}\left((r_1^s + r_2^s)^2 - 2(r_1r_2)^s - 2(-k)^s\right) \\
&= (-k)^{n-s}\left(\big(Q_{k,s}(x)\big)^2 - 4(-k)^s\right)
\end{aligned}$$

te je identitet dokazan. □

U slučaju kada je $s = 1$ dobivamo Cassinijev identitet. Uvrštavanjem u Catalanov identitet dobivamo sljedeće:

$$Q_{k,n-1}(x)Q_{k,n+1}(x) - (Q_{k,n}(x))^2 = (-k)^{n-1}\left((Q_{k,1}(x))^2 + 4k\right). \tag{4.4}$$

Međutim, mi ćemo iskazati Cassinijev identitet u nešto drugačijem obliku.

Propozicija 4.2 (Cassinijev identitet). *Za prirodan broj n i pozitivan realan broj k vrijedi:*

$$Q_{k,n-1}(x)_{k,n+1}(x) - (Q_{k,n}(x))^2 = 4(-k)^{n-1}(x^2 + k).$$

Dokaz. Za dokaz ove propozicije iskoristit ćemo Napomenu 4.2, (4.3), (4.4) i jednakost $r_1^2 + r_2^2 = 4x^2 + 2k$.

$$\begin{aligned}
Q_{k,n-1}(x)Q_{k,n+1}(x) - (Q_{k,n}(x))^2 &= (-k)^{n-1}\left((Q_{k,1}(x))^2 + 4k\right) \\
&= (-k)^{n-1}\left((r_1 + r_2)^2 + 4k\right) \\
&= (-k)^{n-1}\left(r_1^2 + 2(r_1r_2) + r_2^2 + 4k\right) \\
&= (-k)^{n-1}(r_1^2 + r_2^2 + 2k) \\
&= (-k)^{n-1}(4x^2 + 2k + 2k) = 4(-k)^{n-1}(x^2 + k).
\end{aligned}$$

Time je dokaz završen.

□

Slični identiteti postoje i za k-Pellove polinome, no njima se nećemo baviti u ovom radu. Više o njima, kao i o dodatnim svojstvima k-Pell-Lucasovih polinoma, može se pronaći u [2].

5 Konvolucija

A. F. Horadam je istraživao i definirao k-tu konvoluciju Pellovih, Pell-Lucasovih i mješovitih Pellovih polinoma za prirodan broj k. U nastavku ćemo definirati i navesti neka od svojstava ovih polinoma. Detaljnije o konvoluciji Pellovih i Pell-Lucasovih polinoma može se pronaći u [9].

Sljedećom formulom definiramo k-tu konvoluciju Pellovih polinoma:

$$P_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i(x) P_{n+1-i}^{(k-1)}(x), & k \geq 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i^{(1)}(x) P_{n+1-i}^{(k-2)}(x), & \begin{cases} P_n^{(0)}(x) = P_n(x) \\ P_0^{(k)}(x) = 0 \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i^{(m)}(x) P_{n+1-i}^{(k-1-m)}(x), & 0 \leq m \leq k-1 \quad . \end{cases} \tag{5.1}$$

Na sličan način definiramo i k-tu konvoluciju Pell-Lucasovih polinoma. Ona glasi:

$$Q_n^{(k)}(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q_i(x) Q_{n+1-i}^{(k-1)}(x), & k \geq 1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q_i^{(1)}(x) Q_{n+1-i}^{(k-2)}(x), & \begin{cases} Q_n^{(0)}(x) = Q_n(x) \\ Q_0^{(k)}(x) = 0 \end{cases} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Q_i^{(m)}(x) Q_{n+1-i}^{(k-1-m)}(x), & 0 \leq m \leq k-1 \quad . \end{cases} \tag{5.2}$$

U sljedećoj tablici prikazat ćemo neke od konvolucija navedenih polinoma te kratkim računom pokazati kako su one dobivene koristeći formule (5.1) i (5.2).

n	$\boldsymbol{P_n^{(1)}(x)}$	$\boldsymbol{P_n^{(2)}(x)}$	$\boldsymbol{Q_n^{(1)}(x)}$	$\boldsymbol{Q_n^{(2)}(x)}$
1	1	1	$4x^2$	$8x^3$
2	$4x$	$6x$	$16x^3 + 8x$	$48x^4 + 24x^2$
3	$12x^2 + 2$	$24x^2 + 3$	$48x^4 + 40x^2 + 4$	$192x^5 + 168x^3 + 24x$
4	$32x^3 + 12x$	$80x^3 + 24x$	$128x^5 + 144x^3 + 32x$	$640x^6 + 768x^4 + 216x^2 + 8$

Tablica 1: Prva i druga konvolucija polinoma $P_n(x)$ i $Q_n(x)$, za $n = 1, 2, 3, 4$

Pokazat ćemo postupak računanja prve konvolucije polinoma $P_3(x)$ i druge konvolucije polinoma $Q_2(x)$. Prilikom računanja druge konvolucije, iskoristit ćemo prvu konvoluciju koja se nalazi u Tablici 1. Ostale konvolucije za proizvoljan n dobiju se analogno.

- $P_3^{(1)}(x) = \sum_{i=1}^{3} P_i(x)P_{4-i}^{(0)}(x) = \sum_{i=1}^{3} P_i(x)P_{4-i}(x) = P_1(x)P_3(x) + P_2(x)P_2(x) + P_3(x)P_1(x)$
$= 1 \cdot (4x^2+1) + 2x \cdot 2x + (4x^2+1) \cdot 1 = 12x^2 + 2$

- $Q_2^{(2)}(x) = \sum_{i=1}^{2} Q_i(x)Q_{3-i}^{(1)}(x) = Q_1(x)Q_2^{(1)}(x) + Q_2(x)Q_1^{(1)}(x)$
$= 2x \cdot (16x^3 + 8x) + (4x^2+2) \cdot 4x^2 = 48x^4 + 24x^2$

Napomena 5.1. *Za $x = 1$ dobivamo pripadne konvolucije Pellovih i Pell-Lucasovih brojeva.*

Također se može proučavati konvolucija polinoma dobivenih kombinacijom Pellovih i Pell-Lucasovih polinoma. Nju nazivamo mješovita Pellova konvolucija u oznaci $\pi_n^{(p,q)}(x)$ pri čemu vrijedi:

1. $p + q \geq 1$
2. $\pi_n^{(0,0)}(x)$ nije definirano.

Mješovitu Pellovu konvoluciju računamo koristeći prethodnu konvoluciju Pellovih te Pell-Lucasovih polinoma na sljedeći način:

$$\pi_n^{(p,q)}(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i^{(p-1)}(x)Q_{n+1-i}^{(q-1)}(x), \quad p \geq 1, \quad q \geq 1. \tag{5.3}$$

Može se pokazati da vrijedi sljedeće:

- ako je $p = 0$, imamo $\pi_n^{(0,q)}(x) = Q_n^{(q-1)}(x)$
- ako je $q = 0$, imamo $\pi_n^{(p,0)}(x) = P_n^{(p-1)}(x)$.

Navedenu konvoluciju možemo zapisati koristeći funkciju izvodnicu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \pi_{n+1}^{(p,q)}(x)t^n = \frac{(2x+2t)^q}{(1-2xt-t^2)^{p+q}}. \tag{5.4}$$

Koristeći tu funkciju izvodnicu možemo dobiti konvoluciju mješovitih Pellovih konvolucija. Znamo da vrijedi sljedeća jednakost:

$$\frac{(2x+2t)^q}{(1-2xt-t^2)^{p+q}} \cdot \frac{(2x+2t)^p}{(1-2xt-t^2)^{q+p}} = \frac{(2x+2t)^{p+q}}{(1-2xt-t^2)^{2p+2q}}.$$

Pomoću formule (5.4) slijedi

$$\pi_n^{(p+q,p+q)}(x) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^{(p,q)}(x)\pi_{n+1-i}^{(q,p)}(x).$$

6 Veze između Pellovih i Pell-Lucasovih polinoma

U ovom poglavlju navest ćemo i dokazati tvrdnje koje povezuju Pellove i Pell-Lucasove polinome. Proučimo najprije na koji se još način mogu prikazati spomenuti polinomi.
Pellove polinome možemo zapisati kao

$$P_n(x) = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, \tag{6.1}$$

pri čemu su α i β rješenja karakteristične jednadžbe $\lambda^2 = 2x\lambda + 1$. Na sličan način možemo zapisati i Pell-Lucasove polinome koristeći α i β:

$$Q_n(x) = \alpha^n + \beta^n. \tag{6.2}$$

Primjenom određenih računskih operacija nad rješenjima α i β karakteristične jednadžbe, dobivamo jednakosti koje će nam biti od pomoći pri dokazivanju nekih svojstava u nastavku. Za $\alpha = x + \sqrt{x^2+1}$ i $\beta = x - \sqrt{x^2+1}$ vrijedi:

$$\alpha + \beta = x + \sqrt{x^2+1} + x - \sqrt{x^2+1} = 2x, \tag{6.3}$$

$$\alpha - \beta = x + \sqrt{x^2+1} - x + \sqrt{x^2+1} = 2\sqrt{x^2+1}, \tag{6.4}$$

$$\alpha\beta = (x + \sqrt{x^2+1})(x - \sqrt{x^2+1}) = x^2 - (\sqrt{x^2+1})^2 = -1. \tag{6.5}$$

Horadam i Mahon su u [7] razmatrali mnoge jednakosti koje povezuju Pellove i Pell-Lucasove polinome. Neke od tih jednakosti su:

- $\boldsymbol{P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_n(x) + 2P_{n-1}(x) = Q_n(x)}$

  Dokaz. Prva jednakost direktno slijedi iz definicije Pellovih polinoma (3.1). Dakle,

  $$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_n(x) + P_{n-1}(x) + P_{n-1}(x) = 2xP_n(x) + 2P_{n-1}(x).$$

  Nadalje, pretpostavimo da druga jednakost ne vrijedi, odnosno

  $$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) \neq Q_n(x).$$

  Koristeći (6.1) i (6.2) imamo

  $$\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \neq \alpha^n + \beta^n.$$

  Sređivanjem tog izraza dobivamo

  $$\alpha^{n+1} - \beta^{n+1} + \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \neq \alpha^{n+1} + \alpha\beta^n - \beta\alpha^n - \beta^{n+1},$$

  tj.

  $$\alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \neq (\alpha\beta)\beta^{n-1} - (\beta\alpha)\alpha^{n-1}.$$

  Iskoristimo li (6.5) dobivamo $0 \neq 0$, što je kontradikcija pa jednakost vrijedi. □

- $\boldsymbol{Q_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x) = 4(x^2+1)P_n(x)}$

Dokaz. Raspisivanjem desne strane, koristeći (6.1) i (6.4) dobivamo

$$4(x^2+1)P_n(x) = (\alpha-\beta)^2\,\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta} = \alpha^{n+1} - \alpha\beta^n - \beta\alpha^n + \beta^{n+1}.$$

Nadalje, zbog (6.2) imamo

$$\alpha^{n+1} - \alpha\beta^n - \beta\alpha^n + \beta^{n+1} = Q_{n+1}(x) - (\alpha\beta)\beta^{n-1} - (\beta\alpha)\alpha^{n-1}$$

te zbog (6.5) slijedi

$$Q_{n+1}(x) - (\alpha\beta)\beta^{n-1} - (\beta\alpha)\alpha^{n-1} = Q_{n+1}(x) + Q_{n-1}(x),$$

što daje traženu jednakost. □

- $\boldsymbol{P_n(x)Q_n(x) = P_{2n}(x)}$

Dokaz. Iskoristimo li (6.1) i (6.2) dobivamo

$$P_n(x)Q_n(x) = \frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}(\alpha^n+\beta^n) = \frac{\alpha^{2n}-\beta^{2n}}{\alpha-\beta} = P_{2n}(x),$$

čime je dokaz ove jednakosti završen. □

- $\boldsymbol{Q_{2n}(x) = \frac{1}{2}\big(Q_n^2(x) + 4(x^2+1)P_n^2(x)\big)}$

Dokaz. Krenimo od desne strane. Koristit ćemo (6.1), (6.2) i (6.4). Dakle,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\big(Q_n^2(x) + 4(x^2+1)P_n^2(x)\big) &= \frac{1}{2}\left((\alpha^n+\beta^n)^2 + (\alpha-\beta)^2\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{2}(\alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} + \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n})\\ &= \alpha^{2n} + \beta^{2n}\\ &= Q_{2n}(x)\end{aligned}$$

i jednakost je dokazana. □

- $\boldsymbol{P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - P_n^2(x) = (-1)^n}$

Dokaz. Pri dokazivanju ove jednakosti iskoristit ćemo definiciju (6.1). Imamo

$$P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) - P_n^2(x) = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta}\,\frac{\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}}{\alpha-\beta} - \left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2. \quad (*)$$

Svodeći razlomke na zajednički nazivnik te koristeći (6.5) dobivamo

$$\begin{aligned}(*) &= \frac{\alpha^{2n} - \alpha^{n+1}\beta^{n-1} - \beta^{n+1}\alpha^{n-1} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} + 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}\\ &= \frac{-\alpha^2(-1)^{n-1} - \beta^2(-1)^{n-1} + 2\alpha\beta(-1)^{n-1}}{(\alpha-\beta)^2} = \frac{(-1)^n(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2)}{(\alpha-\beta)^2}\end{aligned}$$

pa jednakost vrijedi. □

- $\boldsymbol{Q_{n+1}(x)Q_{n-1}(x) - Q_n^2(x) = (-1)^{n-1}4(x^2+1)}$

  Dokaz. Raspišimo lijevu stranu koristeći (6.2):

$$\begin{aligned} Q_{n+1}(x)Q_{n-1}(x) - Q_n^2(x) &= (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1}) - (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n} + \alpha^{n+1}\beta^{n-1} + \beta^{n+1}\alpha^{n-1} + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n}. \ (*) \end{aligned}$$

  Zbog (6.4) i (6.5) imamo

$$\begin{aligned} (*) &= \alpha^2(-1)^{n-1} + \beta^2(-1)^{n-1} - 2\alpha\beta(-1)^{n-1} \\ &= (-1)^{n-1}(\alpha-\beta)^2 = (-1)^{n-1}4(x^2+1) \end{aligned}$$

  i time je dokaz završen. □

- $\boldsymbol{4(x^2+1)P_n^2(x) - Q_n^2(x) = 4(-1)^{n+1}}$

  Dokaz. Iskoristimo li (6.1), (6.2) i (6.4) na lijevu stranu jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} 4(x^2+1)P_n^2(x) - Q_n^2(x) &= (\alpha-\beta)^2\left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha-\beta}\right)^2 - (\alpha^n + \beta^n)^2 \\ &= \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n + \beta^{2n} - \alpha^{2n} - 2\alpha^n\beta^n - \beta^{2n} = -4\alpha^n\beta^n \end{aligned}$$

  pa zbog (6.5) slijedi jednakost. □

7 Fibonaccijevi, Pellovi i Pell-Lucasovi brojevi

Prisjetimo se, s F_n smo označili n-ti Fibonaccijev broj, s P_n n-ti Pellov broj, a s Q_n n-ti Pell-Lucasov broj. Za Fibonaccijeve brojeve smo već izveli Binetovu formulu. Pellovi i Pell-Lucasovi brojevi se, kao i pripadni polinomi, zadaju rekurzivnom formulom na sljedeći način:

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}, \quad n \geq 3, \quad P_1 = 1, \quad P_2 = 2 \tag{7.1}$$

$$Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2}, \quad n \geq 3, \quad Q_1 = 2, \quad Q_2 = 6, \tag{7.2}$$

Za njih se mogu izvesti formule kojima se računaju n-ti Pellov i n-ti Pell-Lucasov broj poznavanjem samo broja n. Izvode se na sličan način kao i Binetova formula.
Pronađimo najprije pripadne karakteristične jednadžbe. Jednadžbu (7.1) zapišemo na sljedeći način:

$$P^n = 2P^{n-1} + P^{n-2}$$

te umjesto P uvrstimo x

$$x^n = 2x^{n-1} + x^{n-2}.$$

Jednadžbu zatim podijelimo s x^{n-2} pa dobivamo traženu karakterističnu jednadžbu

$$x^2 = 2x + 1.$$

Korijeni te jednadžbe su $\gamma = 1 + \sqrt{2}$ i $\delta = 1 - \sqrt{2}$. Za γ i δ vrijedi

$$\gamma + \delta = 2, \tag{7.3}$$

$$\gamma - \delta = 2\sqrt{2}, \tag{7.4}$$

$$\gamma\delta = -1. \tag{7.5}$$

Prema Teoremu 2.1, rješenje rekurzije (7.1) je $P_n = A\gamma^n + B\delta^n$.
Koristeći početne uvjete iz (7.1) dobivamo sljedeći sustav:

$$A\gamma + B\delta = 1,$$

$$A\gamma^2 + B\delta^2 = 2.$$

Rješenja tog sustava su $A = -B = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\gamma - \delta}$.
Dakle, još jedna formula za P_n je

$$P_n = \frac{\gamma^n - \delta^n}{\gamma - \delta}. \tag{7.6}$$

Za Q_n je karakteristična jednažba jednaka kao i za P_n pa tako i pripadna rješenja. Zbog različitih početnih uvjeta dobivamo sljedeći sustav:

$$A\gamma + B\delta = 2,$$

$$A\gamma^2 + B\delta^2 = 6.$$

Rješenja tog sustava su $A = B = 1$ i formula za Q_n je

$$Q_n = \gamma^n + \delta^n. \tag{7.7}$$

Napomena 7.1. *Primijetimo da za α i β iz (6.1) i (6.2), ukoliko uzmemo da je $x = 1$, vrijedi $\alpha = \gamma$ i $\beta = \delta$.*

7.1 Identiteti

Sljedeći primjeri mogu se pronaći u [11].

Primjer 7.1. *Dokažite da za Pellove brojeve P_n i Pell-Lucasove brojeve Q_n vrijedi:*

$$8P_nP_{n+1}\big(Q_{2n+1}+2(-1)^n\big)=Q_nQ_{n+1}\big(Q_{2n+1}-2(-1)^n\big).$$

Dokaz. Koristeći (7.4), (7.5), (7.6) i (7.7) raspisat ćemo lijevu i desnu stranu jednakosti te pokazati da su one jednake. Polazeći od lijeve strane imamo:

$$\begin{aligned}
8P_nP_{n+1}\big(Q_{2n+1}+2(-1)^n\big) &= 8\frac{\gamma^n-\delta^n}{\gamma-\delta}\frac{\gamma^{n+1}-\delta^{n+1}}{\gamma-\delta}\left(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}+2(-1)^n\right)\\
&= 8\frac{\gamma^n-\delta^n}{2\sqrt{2}}\frac{\gamma^{n+1}-\delta^{n+1}}{2\sqrt{2}}\left(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}+2(-1)^n\right)\\
&= \big(\gamma^n-\delta^n\big)\big(\gamma^{n+1}-\delta^{n+1}\big)\big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}+2(-1)^n\big)\\
&= \big(\gamma^{2n+1}-(\gamma^n\delta^n)\delta-(\delta^n\gamma^n)\gamma+\delta^{2n+1}\big)\big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}+2(-1)^n\big)\\
&= \big(\gamma^{2n+1}-(-1)^n(1-\sqrt{2})-(-1)^n(1+\sqrt{2})+\delta^{2n+1}\big)\big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}+2(-1)^n\big)\\
&= \big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}-2(-1)^n\big)\big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}+2(-1)^n\big)\\
&= \big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}\big)^2-\big(2(-1)^n\big)^2\\
&= \big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}\big)^2-4.
\end{aligned}$$

Raspišimo sada desnu stranu:

$$\begin{aligned}
Q_nQ_{n+1}\big(Q_{2n+1}-2(-1)^n\big) &= \left(\gamma^n+\delta^n\right)\left(\gamma^{n+1}+\delta^{n+1}\right)\left(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}-2(-1)^n\right)\\
&= \big(\gamma^n+\delta^n\big)\big(\gamma^{n+1}+\delta^{n+1}\big)\big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}-2(-1)^n\big)\\
&= \big(\gamma^{2n+1}+(\gamma^n\delta^n)\delta+(\delta^n\gamma^n)\gamma+\delta^{2n+1}\big)\big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}-2(-1)^n\big)\\
&= \big(\gamma^{2n+1}+(-1)^n(1-\sqrt{2})+(-1)^n(1+\sqrt{2})+\delta^{2n+1}\big)\big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}-2(-1)^n\big)\\
&= \big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}+2(-1)^n\big)\big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}-2(-1)^n\big)\\
&= \big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}\big)^2-\big(2(-1)^n\big)^2\\
&= \big(\gamma^{2n+1}+\delta^{2n+1}\big)^2-4.
\end{aligned}$$

Kako su lijeva i desna strana jednakosti jednake, dokaz je završen. □

Primjer 7.2. *Dokažite da za Pellove brojeve P_n i Pell-Lucasove brojeve Q_n vrijedi:*

$$4\left(P_{n+1}^2 - P_n^2\right) = Q_{n+1}Q_n.$$

Dokaz. Kao i u dokazu prethodnog primjera, raspisat ćemo lijevu i desnu stranu jednakosti te pokazati da su one jednake. Prilikom raspisivanja lijeve strane jednakosti koristit ćemo (7.4), (7.5) i (7.6). Dakle,

$$\begin{aligned}
4\left(P_{n+1}^2 - P_n^2\right) &= 4\left(\left(\frac{\gamma^{n+1}-\delta^{n+1}}{\gamma-\delta}\right)^2 - \left(\frac{\gamma^{n}-\delta^{n}}{\gamma-\delta}\right)^2\right) \\
&= 4\left(\frac{\gamma^{2n+2} - 2\gamma^{n+1}\delta^{n+1} + \delta^{2n+2}}{(\gamma-\delta)^2} - \frac{\gamma^{2n} - 2\gamma^n\delta^n + \delta^{2n}}{(\gamma-\delta)^2}\right) \\
&= 4\frac{\gamma^{2n+2} - \gamma^{2n} + \delta^{2n+2} - \delta^{2n} - 2(\gamma\delta)^{n+1} + 2(\gamma\delta)^n}{8} \\
&= 4\frac{\gamma^{2n+1}(\gamma - \frac{1}{\gamma}) + \delta^{2n+1}(\delta - \frac{1}{\delta}) - 2(-1)^{n+1} + 2(-1)^n}{8} \\
&= \frac{\gamma^{2n+1}\cdot 2 + \delta^{2n+1}\cdot 2 - 2(-1)^{n+1} + 2(-1)^n}{2} \\
&= \gamma^{2n+1} + \delta^{2n+1} - (-1)^{n+1} + (-1)^n \\
&= \gamma^{2n+1} + \delta^{2n+1} + 2(-1)^n.
\end{aligned}$$

Za raspisivanje desne strane jednakosti koristit ćemo (7.5) i (7.7):

$$\begin{aligned}
Q_{n+1}Q_n &= (\gamma^{n+1} + \delta^{n+1})(\gamma^n + \delta^n) \\
&= \gamma^{2n+1} + \gamma^{n+1}\delta^n + \delta^{n+1}\gamma^n + \delta^{2n+1} \\
&= \gamma^{2n+1} + (-1)^n\gamma + (-1)^n\delta + \delta^{2n+1} \\
&= \gamma^{2n+1} + (-1)^n(1+\sqrt{2}) + (-1)^n(1-\sqrt{2}) + \delta^{2n+1} \\
&= \gamma^{2n+1} + \delta^{2n+1} + 2(-1)^n.
\end{aligned}$$

Lijeva i desna strana jednakosti su jednake te je dokaz završen. □

Primjer 7.3. *Dokažite da za Pellove brojeve P_n i Pell-Lucasove brojeve Q_n vrijedi:*

$$2\operatorname{tg}^{-1}\frac{P_n}{P_{n+1}} + (-1)^n \operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{Q_{2n+1}} = \frac{\pi}{4}.$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati razmatrajući dva slučaja, kada je n paran i neparan.
Neka je n paran. Označimo $\varphi_n = 2\operatorname{tg}^{-1}\dfrac{P_n}{P_{n+1}}$. Prisjetimo se formule za tangens dvostrukog kuta:

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\operatorname{tg}\theta}{1-\operatorname{tg}^2\theta}.$$

Koristeći tu formulu imamo sljedeće:

$$\operatorname{tg}\varphi_n = \operatorname{tg}\left(2\operatorname{tg}^{-1}\frac{P_n}{P_{n+1}}\right) = \frac{2\frac{P_n}{P_{n+1}}}{1-\frac{P_n^2}{P_{n+1}^2}} = \frac{2P_nP_{n+1}}{P_{n+1}^2-P_n^2}.$$

Zbog Primjera 7.2 slijedi

$$\frac{2P_nP_{n+1}}{P_{n+1}^2-P_n^2} = \frac{8P_nP_{n+1}}{Q_{n+1}Q_n}.$$

Označimo $\theta_n = 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{P_n}{P_{n+1}} + \operatorname{tg}^{-1}\frac{2}{Q_{2n+1}}$. Primijetimo da je u ovom slučaju $(-1)^n = 1$, jer je n paran.
Koristeći formulu za tangens sume $\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$ dobivamo

$$\operatorname{tg}\theta_n = \frac{\frac{8P_nP_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}+\frac{2}{Q_{2n+1}}}{1-\frac{8P_nP_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}}\frac{2}{Q_{2n+1}}} = \frac{8P_nP_{n+1}Q_{2n+1}+2Q_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}Q_{2n+1}-16P_nP_{n+1}}.$$

Primijetimo da je zbog Primjera 7.1 i zbog toga što je n paran, $\operatorname{tg}\theta_n = 1$. Zaista, kako je

$$8P_nP_{n+1}(Q_{2n+1}+2) = Q_nQ_{n+1}(Q_{2n+1}-2),$$

raspisivanjem dobivamo

$$8P_nP_{n+1}Q_{2n+1}+16P_nP_{n+1} = Q_nQ_{n+1}Q_{2n+1}-2Q_nQ_{n+1},$$

tj.

$$8P_nP_{n+1}Q_{2n+1}+2Q_nQ_{n+1} = Q_nQ_{n+1}Q_{2n+1}-16P_nP_{n+1}.$$

Dakle, $\theta_n = \frac{\pi}{4}$.
Proučimo sada slučaj kada je n neparan.
Označimo $\theta_n = 2\operatorname{tg}^{-1}\frac{P_n}{P_{n+1}} - \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{Q_{2n+1}}$ te prema već dokazanom imamo

$$\operatorname{tg}\theta_n = \frac{8P_nP_{n+1}Q_{2n+1}-2Q_nQ_{n+1}}{Q_nQ_{n+1}Q_{2n+1}+16P_nP_{n+1}}.$$

Budući da je sada n neparan, imamo $(-1)^n = -1$ te zbog Primjera 7.1 dobivamo $\operatorname{tg}\theta_n = 1$, odnosno $\theta_n = \frac{\pi}{4}$. □

Fibonaccijevi brojevi mogu se iskoristiti kao gornja međa za Pellove brojeve. U obliku napomene navest ćemo dvije takve nejednakosti.

Napomena 7.2. *Za Fibonaccijeve brojeve F_n i Pellove brojeve P_n vrijedi:*

$$P_n < F_{\lfloor\frac{11n+2}{6}\rfloor}, \quad n \geq 4.$$

Napomena 7.3. *Za Fibonaccijeve brojeve F_n i Pellove brojeve P_n vrijedi:*

$$P_{6n} < F_{11n}, \quad n \geq 1.$$

Obje nejednakosti dokazuju se principom matematičke indukcije po n. Dokazi se nalaze u [11] (str. 325-327).

7.2 Primjena

Fibonaccijevi, Pellovi te Pell-Lucasovi brojevi imaju veliku primjenu u kombinatorici. Mi ćemo navesti jednu od primjena, a ostale se mogu pogledati u [11].

Najprije ćemo se baviti primjenom Fibonaccijevih brojeva. Prije toga, trebamo proučiti kompozicije prirodnih brojeva. Kompozicije su rastavi prirodnih brojeva na sume niza prirodnih brojeva. Posebice, nas će zanimati rastavi na sume jedinica i dvojki. Na primjer, 3 se može zapisati kao 1+1+1, 2+1 i 1+2. To su kompozicije broja 3. Broj kompozicija prirodnog broja n označit ćemo s K_n. U tu svrhu, proučimo sljedeću tablicu:

n	**Kompozicije broja *n***	$\boldsymbol{K_n}$
1	1	1
2	1+1, 2	2
3	1+1+1, 1+2, 2+1	3
4	1+1+1+1, 1+1+2, 1+2+1, 2+1+1, 2+2	5
5	1+1+1+1+1, 1+1+1+2, 1+1+2+1, 1+2+1+1, 2+1+1+1, 1+2+2, 2+1+2, 2+2+1	8
6	1+1+1+1+1+1, 1+1+1+1+2, 1+1+1+2+1, 1+1+2+1+1, 1+2+1+1+1, 2+1+1+1+1, 1+1+2+2, 1+2+1+2, 1+2+2+1, 2+1+1+2, 2+1+2+1, 2+2+1+1, 2+2+2	13

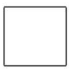
Tablica 2: Kompozicije broja n, za $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

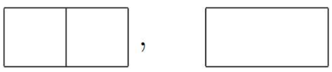
Teorem 7.1. *Broj kompozicija K_n broja n jednak je F_{n+1}, za $n \in \mathbb{N}$.*

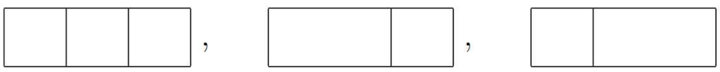
Dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [11] (str. 304).

Zamislimo da imamo ploču dimenzija $1 \times n$. Želimo ju popločiti s pločicama dimenzija 1×1 i 1×2. Zanima nas na koliko načina je to moguće napraviti?

Tablica 2 daje nam odgovor na to pitanje. Budući da su naše pločice dimenzija 1×1 i 1×2, ploča dimenzije $1 \times n$ mogla bi se na F_{n+1} način popločiti danim pločicama.

$n = 1$: 

$n = 2$: 

$n = 3$: 

$n = 4$:

Vidimo da se ploča dimenzije 1×3 može popločiti na 3 načina što odgovara četvrtom Fibonaccijevom broju. U nastavku ćemo se i dalje baviti problemom popločavanja, ali ćemo ga povezati s Pellovim brojevima.
Zamislimo sada da popločavanje dolazi s određenom cijenom. Neka pločica dimenzije 1×1 ima cijenu 2, a pločica dimenzije 1×2 neka ima cijenu 1. Cijenu ploče dobijemo kao umnožak cijena pločica kojima je ona popločena. Označimo sumu cijena ploča jednakih dimenzija s C_n. Prazna ploča neka ima cijenu 1. Dakle $C_0 = 1$.

$n = 1$: $\boxed{2}$

$$C_1 = 2$$

$n = 2$: $\boxed{2}\boxed{2}$, $\boxed{\quad 1 \quad}$

$$C_2 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

$n = 3$: $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$, $\boxed{\quad 1 \quad}\boxed{2}$, $\boxed{2}\boxed{\quad 1 \quad}$

$$C_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 12$$

$n = 4$: $\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$, $\boxed{\quad 1 \quad}\boxed{2}\boxed{2}$, $\boxed{2}\boxed{\quad 1 \quad}\boxed{2}$

$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{\quad 1 \quad}$, $\boxed{\quad 1 \quad}\boxed{\quad 1 \quad}$

$$C_4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 29$$

Teorem 7.2. *Suma cijena ploča dimenzija $1 \times n$ jednaka je P_{n+1}, za $n \in \mathbb{N}_0$.*

Dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [11] (str. 306).

Literatura

[1] P. A. Bankole, E. K. Ojo i M. O. Odumosu, *On Recurrence Relations and Application in Predicting Price Dynamics in the Presence of Economic Recession*, International Journal of Discrete Mathematics, 2.4, 2017.

[2] P. Catarino, *Diagonal functions of the k-Pell and k-Pell-Lucas polynomials and some identities*, Acta Mathematica Universitatis Comenianae, 87.1, 2018.

[3] G. B. Djordjević i G. M. Milovanović, *Special Classes of Polynomials*, University of Niš, Faculty of Technology, 2014.

[4] R. A. Dunlap, *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific, 1997.

[5] S. Halici, *On the Pell Polynomials*, Applied Mathematical Sciences, 5.37, 2011.

[6] S. Harne, V. H. Badshah i V. Verma, *Fibonacci Polynomial Identities, Binomial coefficients and Pascal's Triangle*, Advances in Applied Science Research, 6.2, 2015.

[7] A. F. Horadam i Bro. J. M. Mahon, *Pell and Pell-Lucas Polynomials*, The Fibonacci Quarterly, 23.1, 1985.

[8] A. F. Horadam i Bro. J. M. Mahon, *Matrix and Other Summation Techniques for Pell Polynomials*, The Fibonacci Quarterly, 24.4, 1986.

[9] A. F. Horadam i Bro. J. M. Mahon, *Mixed Pell Polynomials*, The Fibonacci Quarterly, 48.3, 1987.

[10] D. Jukić i R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[11] T. Koshy, *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*, Springer, 2014.

[12] G. Nagy, *Ordinary Differential equations*, Michigan State University, 2017.