Dekompozicija mjere

Marković, Tamara

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Tamara Marković

Dekompozicija mjere

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Tamara Marković

Dekompozicija mjere

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Dragana Jankov Maširević

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod **1**

1 Osnove teorije mjere i integracije **2**

2 Motivacija **8**

3 Mjera s predznakom **10**

4 Hahnova i Jordanova dekompozicija **18**

5 Lebesgueova dekompozicija **25**

5.1 Lebesgueova dekompozicija σ-konačne mjere 25

5.2 Primjena Lebesgueove dekompozicije 30

Literatura **33**

Sažetak **35**

Summary **35**

Životopis **36**

Uvod

Dobro nam je poznato da je mjera nenegativna, σ-aditivna funkcija koja praznom skupu pridružuje vrijednost nula. Dakle, slika mjere je podskup skupa $[0, \infty]$. Mi ćemo u ovom radu proširiti sliku mjere tako da ona bude podskup skupa $\overline{\mathbb{R}}$. Takvo proširenje mjere nazivamo mjera s predznakom. Pokazat će se da mjera s predznakom nema *lijepa* svojstva poput monotonosti. Ovaj problem riješit ćemo Jordanovom dekompozicijom koja će nam omogućiti rastav mjere s predznakom na razliku dviju mjera. U drugom dijelu rada upoznat ćemo se s pojmom apsolutne neprekidnosti mjere s predznakom u odnosu na danu mjeru te s pojmom singularnosti dviju mjera s predznakom. Također, dokazat ćemo da svaku σ-konačnu mjeru možemo na jedinstven način rastaviti kao zbroj apsolutno neprekidne i singularne mjere, što će nam omogućiti Lebesgueova dekompozicija. Za kraj, navest ćemo nekoliko primjera primjene Lebesgueove dekompozicije u teoriji vjerojatnosti.

Poglavlje *Osnove teorije mjere i integracije* sadrži pojmove i tvrdnje iz teorije mjere i teorije integracije koje ćemo koristiti za dokazivanje tvrdnji iskazanih u radu kao i za rješavanje primjera.

Iduće poglavlje je naslovljeno *Motivacija* te obrazlaže potrebu za generalizacijom pojma mjere. Odgovor na ovu potrebu bit će definiranje mjere s predznakom u poglavlju *Mjera s predznakom*. Također, u poglavlju *Mjera s predznakom* vidjet ćemo da mjera s predznakom općenito nema svojstva mjere što otežava rad s takvim funkcijama.

U poglavlju *Hahnova i Jordanova dekompozicija* vidjet ćemo da se svaka mjera s predznakom može zapisati kao razlika dviju mjera, što će nam znatno olakšati baratanje s takvim funkcijama.

Zadnje poglavlje naslovljeno *Lebesgueova dekompozicija* proučava rastav σ-konačne mjere s obzirom na drugu mjeru. Ovaj rezultat ima važnu primjenu u teoriji vjerojatnosti koju ćemo vidjeti u potpoglavlju *Primjena Lebesgueove dekompozicije*.

1 Osnove teorije mjere i integracije

U ovom poglavlju ponovit ćemo osnovne pojmove i teoreme teorije mjere i integracije koje ćemo trebati u radu. Teoremi će biti samo iskazani, a umjesto dokaza čitatelj će moći pronaći referencu na mjesto u literaturi gdje se može pronaći dokaz. Također, teoriju ćemo potkrijepiti i odgovarajućim primjerima.

Definicija 1.1. *Familiju Σ podskupova skupa X nazivamo σ-algebra skupova na skupu X ako ona ima sljedeća svojstva:*

(σ1) $X \in \Sigma$,

(σ2) $A \in \Sigma \Rightarrow A^c \in \Sigma$,

(σ3) *za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ vrijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.*

Za uređeni par (X, Σ) kažemo da je izmjeriv prostor. Svaki element od Σ zove se izmjeriv skup.

Primjer 1.1.

(1) Neka je X neprazan skup. Tada je familija $\{\emptyset, X\}$ najmanja σ-algebra na X, a familija $\mathcal{P}(X)$ najveća σ-algebra na X.

(2) Neka je $X = \{0, 1, 2\}$. Tada je familija $\{\emptyset, \{0, 1\}, \{2\}, X\}$ jedna σ-algebra na X. ■

Korolar 1.1. *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova od X. Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\Sigma : \Sigma \text{ je } \sigma\text{-algebra}, \mathcal{F} \subseteq \Sigma\}$$

najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$. Za $\sigma(\mathcal{F})$ kažemo da je σ-algebra generirana s $\mathcal{F}$.

Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ je σ-algebra generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}^d$. Nama će od interesa biti Borelova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ generirana familijom otvorenih skupova u $\mathbb{R}$. Alternativni načini generiranja $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ mogu se pronaći u [9, str. 19, Teorem 2.9.].

Definicija 1.2. *Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor. Mjera na Σ je svaka funkcija $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ s ovim svojstvima:*

(σ1) $\mu(\emptyset) = 0$,

(σ2) ***(nenegativnost)*** *$\mu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \Sigma$,*

(σ3) ***(σ-aditivnost)*** *za niz disjunktnih skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ iz Σ vrijedi*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Uređenu trojku (X, Σ, μ) zovemo prostor mjere.

Primjer 1.2. Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor.

(1) *Trivijalna mjera* je mjera zadana formulom $\mu(A) := 0$ za svaki $A \in \Sigma$.

(2) Funkcija $\mu \colon \Sigma \to [0, \infty]$ zadana s

$$\mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{A diskretan} \\ \infty, & \text{A nije diskretan,} \end{cases} \qquad \forall A \in \Sigma,$$

je mjera.

(3) Neka je $\mu \colon \Sigma \to [0, \infty]$ funkcija zadana za svaki $A \in \Sigma$ s

$$\mu(A) := \begin{cases} n, & \text{ako je } A \text{ konačan skup s } n \text{ elemenata} \\ \infty, & \text{ako je } A \text{ beskonačan.} \end{cases}$$

Ovako zadana funkcija je mjera i zove se *diskretna mjera* ili *mjera prebrojavanja.*

(4) Neka je $x \in X$. Mjera $\delta_x \colon \Sigma \to [0, \infty]$ definirana s

$$\delta_x(A) := \begin{cases} 0, & x \notin A \\ 1, & x \in A, \end{cases} \qquad \forall A \in \Sigma,$$

zove se *Diracova δ-mjera koncentrirana u točki x* ili samo *Diracova δ-mjera.* ■

Definicija 1.3. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere.*

(i) Za skup $A \in \Sigma$ kažemo da je skup konačne mjere ako je $\mu(A) < \infty$.

(ii) Za skup $A \in \Sigma$ kažemo da je σ-konačan ako se može prikazati kao prebrojiva unija izmjerivih skupova konačne mjere.

(iii) Mjera μ je konačna ako je $\mu(X) < \infty$.

(iv) Mjera μ je σ-konačna ako je X σ-konačan skup.

(v) Mjera μ je vjerojatnost ili vjerojatnosna mjera ako je $\mu(X) = 1$. Uređenu trojku (X, Σ, μ), gdje je μ vjerojatnosna mjera, zovemo vjerojatnosni prostor.

Primijetimo da je svaka konačna mjera ujedno i σ-konačna, ali da obrat ne vrijedi. Na primjer, ako je μ diskretna mjera na izmjerivom prostoru $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, tada je ona σ-konačna, ali nije konačna.

Propozicija 1.1 (Osnovna svojstva mjere). *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Mjera μ ima sljedeća svojstva:*

(i) ***(monotonost)*** *Za svaka dva izmjeriva skupa A i B takva da je $A \subseteq B$ vrijedi da je $\mu(A) \leq \mu(B)$. Dodatno, ako je skup A konačne mjere, tada je $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(ii) ***(σ-subaditivnost)*** *Za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ vrijedi*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

(iii) ***(neprekidnost na rastuće nizove)*** *Za svaki rastući niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ vrijedi*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

(iv) ***(neprekidnost na padajuće nizove)*** *Za svaki padajući niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ takav da je $\mu(A_1) < \infty$ vrijedi*

$$\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k).$$

Dokaz. Vidi [9, str. 29, Propozicija 2.19.]. □

Prisjetimo se da je funkcija $\mu^*\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ zadana na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{P}(X))$ vanjska mjera ako je ona monotona, σ-subaditivna funkcija koja praznom skupu pridružuje vrijednost nula. Lebesgueovu mjeru označavamo s λ i ona je restrikcija Lebesgueove vanjske mjere λ^* na familiju svih λ^*-izmjerivih skupova. Restrikcija Lebesgueove vanjske mjere λ^* na Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ također se zove Lebesgueova mjera i označava s λ, a iz konteksta treba biti jasno o kojoj se mjeri radi. Više o konstrukciji Lebesgueove mjere može se pronaći u svakoj knjizi koja se bavi teorijom mjere (vidi npr. [9]). Važno je napomenuti da za $d = 1$ Lebesgueova mjera predstavlja standardnu mjeru za duljinu, za $d = 2$ mjeru za površinu pravokutnika, za $d = 3$ mjeru za volumen kvadra, a za $d > 3$ volumen d-dimenzionalnog hiperkvadra.

Definicija 1.4. *Neka su $(X, \mathcal{A})$ i $(Y, \mathcal{B})$ izmjerivi prostori i $A \subseteq X$. Za funkciju $f\colon A \to Y$ kažemo da je izmjeriva u paru σ-algebri $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ ili kraće $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}$-izmjeriva ako je $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ za svaki $B \in \mathcal{B}$.*

Ukoliko je u *Definiciji* 1.4 $Y = \mathbb{R}$ (*ili* $\overline{\mathbb{R}}$) tada kažemo da je funkcija f $\mathcal{A}$-izmjeriva ili, kraće, izmjeriva, a ako je, dodatno, $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, onda kažemo da je funkcija f izmjeriva u smislu Borela ili Borelova. Analogno se definira izmjerivost funkcije u smislu Lebesguea.

Primjer 1.3. Neka je $B \subseteq X$. Karakteristična funkcija skupa B $\chi_B\colon X \to \mathbb{R}$ je definirana formulom

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in B \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je B izmjeriv skup, onda je χ_B izmjeriva funkcija. ■

Za funkciju $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je stepenasta ako f poprima samo konačno mnogo različitih vrijednosti.

Definicija 1.5. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \subseteq X$ i $f\colon A \to \mathbb{R}$ stepenasta i $\mathcal{A}$-izmjeriva funkcija. Tada kažemo da je f jednostavna funkcija s obzirom na izmjeriv prostor $(X, \mathcal{A})$ ili kraće jednostavna funkcija.*

Svaka jednostavna funkcija $f\colon A \to \mathbb{R}$ može se prikazati u obliku

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

gdje su α_i različiti realni brojevi, A_i disjunktni i izmjerivi skupovi za svaki $i = 1, ..., n$ te vrijedi $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Definicija 1.6. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f\colon X \to [0, \infty\rangle$ jednostavna nenegativna funkcija s prikazom*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}.$$

(i) Broj

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

zove se integral funkcije f s obzirom na mjeru μ ili, kraće, integral funkcije f. Za funkciju f kažemo da je integrabilna ako je $\int f d\mu < \infty$.

(ii) Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, \mu(E \cap A_i)$$

zove se integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ ili, kraće, integral funkcije f na skupu E. Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E ako je $\int\limits_E f d\mu < \infty$.

Teorem 1.1. *Neka je $(X, \mathcal{A})$ izmjeriv prostor, $A \in \mathcal{A}$ i $f\colon A \to [0, \infty]$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jednostavnih funkcija $f_n\colon A \to [0, \infty\rangle$ sa sljedećim svojstvima:*

(i) $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je monotono rastući niz funkcija omeđen odozgo funkcijom f.

(ii) Niz $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergira po točkama prema funkciji f, to jest

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \qquad \text{za svaki } x \in A.$$

(iii) Ako je funkcija f omeđena na skupu $K \subseteq A$, onda $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformno konvergira prema funkciji f na cijelom skupu K.

Dokaz. Vidi [9, str. 104, Teorem 3.23.]. $\square$

Ovaj teorem motivira nas na uvođenje sljedeće definicije.

Definicija 1.7. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f\colon X \to [0, \infty]$ nenegativna Σ-izmjeriva funkcija.*

(i) Broj

$$\int f d\mu := \sup\left\{ \int g d\mu : g \text{ jednostavna nenegativna funkcija, } g \leq f \right\}$$

zove se integral funkcije f s obzirom na mjeru μ ili, kraće, integral funkcije f. Za funkciju f kažemo da je integrabilna ako je $\int f d\mu < \infty$.

(ii) Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu$$

zove se integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ ili, kraće, integral funkcije f na skupu E. Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E ako je $\int_E f d\mu < \infty$.

Teorem 1.2 (Levijev teorem za redove). *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz Σ-izmjerivih funkcija $f_n\colon X \to [0, \infty]$. Ako red $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ konvergira, tada je*

$$\int \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Vidi [9, str. 129, Teorem 4.22.]. $\square$

Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor te neka je $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ funkcija. Definirajmo nenegativne funkcije $f^+, f^-\colon X \to [0, \infty]$ na sljedeći način

$$f^+ := \max\{ f, 0 \}, \qquad f^- := \max\{ -f, 0 \}.$$

Ako je funkcija f Σ-izmjeriva, tada su f^+ i f^- Σ-izmjerive funkcije (za dokaz vidi [9, str. 103, Propozicija 3.20.]).

Definicija 1.8. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ Σ-izmjeriva funkcija.*

(i) Ako je barem jedan od brojeva $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ konačan, onda se definira broj

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

i zovemo ga integral funkcije f s obzirom na mjeru μ ili, kraće, integral funkcije f. Za funkciju f kažemo da je integrabilna ako je $\int f d\mu < \infty$.

(ii) Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Ako je definiran integral $\int_E f d\mu$, onda broj

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu$$

zovemo integral funkcije f na skupu E s obzirom na mjeru μ ili, kraće, integral funkcije f na skupu E. Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E ako je $\int_E f d\mu < \infty$.

Lema 1.1. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ Σ-izmjeriva funkcija. Funkcija f je integrabilna ako i samo ako je funkcija $|\, f\,|$ integrabilna.*

Dokaz. Vidi [9, str. 132, Lema 4.27.]. □

Teorem 1.3. *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ Σ-izmjeriva funkcija. Ako je definiran integral $\int f d\mu$, onda je*

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |\, f\,| \, d\mu.$$

Dokaz. Vidi [9, str. 137, Teorem 4.34.]. □

Teorem 1.4 (Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost). *Neka je $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija.*

(i) Funkcija f je R-integrabilna ako i samo ako je ona neprekidna skoro svuda na $[a, b]$.

(ii) Ako je funkcija f R-integrabilna, onda je ona integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome se Lebesgueov integral $\int\limits_{[a,b]} f d\lambda$ podudara s Riemannovim integralom $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Dokaz. Vidi [9, str. 150–153, Teorem 4.53.]. □

2 Motivacija

U prethodnom poglavlju mjeru smo definirali kao nenegativnu, σ-aditivnu funkciju koja praznom skupu pridružuje vrijednost nula. Provjera ova tri svojstva nekad može biti mukotrpan posao, stoga je prirodno pitati se možemo li iskoristiti već poznate mjere za generiranje novih mjera. Lako se pokaže da je zbroj dviju ili više mjera opet mjera. Nažalost, množenje mjere skalarom ne rezultira uvijek mjerom. Naime, ako je naš skalar negativan realan broj, tada uvjet nenegativnosti nije ispunjen pa tako dobivena funkcija nije mjera. Ipak, negativnost našeg skalara ne utječe na σ-aditivnost i svojstvo ($\sigma 1$) (*Definicija* 1.2) što otvara mogućnost za generalizaciju pojma mjere. Ponukani činjenicom da je zbroj mjera ponovno mjera, mogli bismo pokušati oduzeti dvije mjere. U *Primjeru* 2.1 vidjet ćemo da razlika mjera općenito nije mjera. Štoviše, može se dogoditi da ta razlika uopće nije definirana.

Primjer 2.1. Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor te neka su μ_1 i μ_2 mjere na njemu. Definirajmo funkciju $\mu = \mu_1 - \mu_2$. Ovako definirana funkcija μ općenito nije mjera.
Za protuprimjer možemo uzeti izmjeriv prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, $\mu_1 = \delta_1$, $\mu_2 = \lambda$, gdje je δ_1 Diracova δ-mjera koncentrirana u točki jedan, a λ Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$.
Tada je $\mu([0,2]) = \mu_1([0,2]) - \mu_2([0,2]) = 1 - 2 = -1 < 0$. ■

Iz definicije Diracove δ-mjere (*Primjer* 1.2 (4)), očito je da je ona konačna. Ako bismo stavili uvjet da u razlici dviju mjera barem jedna od njih mora biti konačna, tada bi tako definirana funkcija opet bila σ-aditivna te zadovoljavala uvjet ($\sigma 1$) iz *Definicije* 1.2. Obratimo pažnju na jednu zanimljivu karakteristiku ovako definirane funkcije. Za razliku od množenja mjere s negativnim skalarom, razlika dviju mjera ne mora nužno biti u potpunosti nenegativna ili nepozitivna. Funkcija $\mu = \delta_1 - \lambda$, iz *Primjera* 2.1, za jednočlan skup $\{1\}$ poprima vrijednost jedan dok je $\mu([0,2]) = -1$. Dakle, razlika dviju mjera, ukoliko je definirana, općenito može poprimati i pozitivne i negativne vrijednosti. Ovo opažanje bit će nam od velike koristi kasnije.

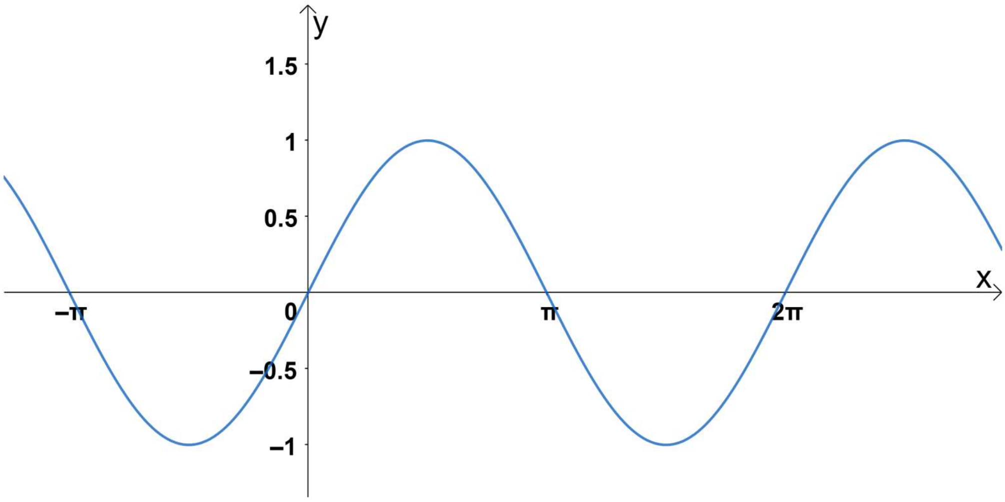
Također, bitno je napomenuti da je funkcija $\nu(A) = \int_A f d\mu$ mjera ako i samo ako je funkcija f nenegativna jednostavna ([9, str. 118, Lema 4.5.]) ili nenegativna izmjeriva ([9, str. 128, Korolar 4.19.]). U *Primjeru* 2.2 vidjet ćemo da ako je funkcija f negativna, tada ν nije mjera. No, funkcija ν je σ-aditivna te $\nu(\emptyset) = 0$, što opet implicira da ima smisla posvetiti pažnju funkcijama koje nisu nenegativne, ali zadovoljavaju uvjete ($\sigma 1$) i ($\sigma 3$) iz *Definicije* 1.2.

Primjer 2.2. Neka je $([\pi, 2\pi], \mathcal{B}([\pi, 2\pi]), \lambda)$ prostor mjere, gdje je λ Lebesgueova mjera na $[\pi, 2\pi]$. Izračunajte

$$\int_{[\pi, 2\pi]} \sin x \, d\lambda.$$

Rješenje. Ako pogledamo *Sliku* 2.1, vidimo da je funkcija $f(x) = \sin x$ negativna na $[\pi, 2\pi]$. Nadalje, $f(x) = \sin x$ je neprekidna na $[\pi, 2\pi]$ pa je i R-integrabina na $[\pi, 2\pi]$ te se Lebesgueov i Riemannov integral podudaraju (*Teorem* 1.4). Stoga imamo:

$$\int_{[\pi,2\pi]} \sin x \, d\lambda = \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx = -2 < 0. \qquad \blacksquare$$



Slika 2.1: Graf funkcije $f(x) = \sin(x)$

3 Mjera s predznakom

U ovom poglavlju bavit ćemo se mjerama s predznakom. Mjera s predznakom je poopćenje pojma mjere na način da se izostavi svojstvo nenegativnosti. Navest ćemo neke primjere mjera s predznakom i doznati što je to realna mjera. Nadalje, pokazat ćemo da je integral integrabilne funkcije na izmjerivom skupu konačna mjera s predznakom te da mjera s predznakom ima svojstvo neprekidnosti na padajuće i rastuće nizove skupova.

Definicija 3.1. *Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor. Mjera s predznakom je svako preslikavanje $\mu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ sa svojstvima:*

1) $\mu(\emptyset) = 0$,

*2) **(σ-aditivnost)** za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz Σ vrijedi:*

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Iz prethodne definicije je očito da je svaka mjera ujedno i mjera s predznakom te da obrat ne vrijedi. U idućoj napomeni pokazat ćemo da mjera s predznakom zadovoljava svojstvo konačne σ-aditivnosti te ćemo vidjeti alternativne načine definiranja mjere s predznakom koji se mogu pojaviti u literaturi.

Napomena 3.1.

(1) Za mjeru s predznakom vrijedi svojstvo konačne σ-aditivnosti, tj. za konačan niz $A_1, ..., A_k$ disjunktnih izmjerivih skupova vrijedi:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

Zaista, ako konačni niz $A_1, ..., A_k$ nadopunimo praznim skupovima do prebrojivog niza $A_1, ..., A_k, \emptyset, \emptyset, ...$ vrijedi da je

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{k} \mu(A_i).$$

(2) U literaturi se pri definiranju mjere s predznakom često navodi uvjet da funkcija μ ne smije istovremeno poprimati vrijednost $-\infty$ i ∞ (vidi npr. [1], [14], [22]). U nastavku ćemo pokazati da se ovaj uvjet ne treba posebno isticati.

Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor, $A \in \Sigma$. Skup X možemo prikazati kao uniju skupova A i A^c. Skupovi A i A^c su disjunktni pa po konačnoj σ-aditivnosti mjere s predznakom slijedi:

$$\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c).$$

Iz prethodne jednakosti vidimo da ako je $\mu(A) = \infty$ tada je nužno $\mu(X) = \infty$, a u tom slučaju $\mu(A^c)$ poprima konačnu vrijednost ili je također jednako $+\infty$, jer u suprotnom desna strana ne bi bila dobro definirana. Analogno zaključujemo u slučaju kada je $\mu(A) = -\infty$.

Kao što smo već rekli, svaka mjera je mjera s predznakom, stoga nam ti primjeri nisu previše zanimljivi. *Primjer* 3.1 ilustrira da množenjem mjere (vidi *Primjer* 1.2 (2)) negativnim skalarom dobivamo mjeru s predznakom. U *Primjeru* 3.2 dokazat ćemo da je razlika svake dvije mjere, od kojih je jedna konačna, mjera s predznakom.

Primjer 3.1. Neka je (X, Σ) izmjeriv prostor. Pokažite da je funkcija $\mu \colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ zadana s

$$\mu(E) := \begin{cases} 0, & \text{E diskretan skup} \\ -\infty, & \text{E nije diskretan skup,} \end{cases} \qquad \forall E \in \Sigma$$

mjera s predznakom.

Rješenje. Trivijalno je $\mu(\emptyset) = 0$.
Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz Σ. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da skup A_{n_0} nije diskretan, tada ni $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ nije diskretan skup, to jest

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = -\infty.$$

Ako su, pak, svi skupovi A_n diskretni, tada je i njihova unija diskretan skup pa vrijedi

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0.$$

Iz prethodnih razmatranja, slijedi da je μ mjera s predznakom. ■

Općenito, ako je μ mjera na izmjerivom prostoru (X, Σ), tada je $\alpha\mu$ mjera s predznakom za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

Primjer 3.2. Neka su λ_1 i λ_2 dvije mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ). Ukoliko je barem jedna od mjera λ_1 i λ_2 konačna, tada je s $\lambda_2 - \lambda_1$ definirana mjera s predznakom na (X, Σ).

Rješenje. Bez smanjenja općenitosti, neka je λ_1 konačna mjera.
Funkcije λ_1 i λ_2 su mjere stoga je $\lambda_1(\emptyset) = \lambda_2(\emptyset) = 0$ zbog čega je i $(\lambda_2 - \lambda_1)(\emptyset) = 0$.
Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz Σ. Primjenom σ-aditivnosti za mjere dobivamo

$$(\lambda_2 - \lambda_1)\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} (\lambda_2 - \lambda_1)(A_n).$$

Kako razlika dvije mjere općenito nije nenegativan broj, slijedi da je $\lambda_2 - \lambda_1$ mjera s predznakom. ■

Primijetimo da se uvjet konačnosti jedne od mjera iz *Primjera* 3.2 ne smije izostaviti. Izostavljanjem tog uvjeta može se dogoditi da izraz $\lambda_2 - \lambda_1$ nije definiran. U nastavku ćemo vidjeti kakva je to realna mjera.

Definicija 3.2. *Mjera s predznakom je konačna ako je* $|\mu(A)| < \infty$ *za svaki izmjerivi skup* A. *Konačnu mjeru s predznakom zovemo realna mjera.*

Važno je primijetiti da je oznaka $|\mu(A)| < \infty$ zapravo kraći oblik zapisa: $-\infty < \mu(A) < \infty$ (ili $\mu(A) \in \mathbb{R}$). Dakle, mjera s predznakom je konačna ako ne poprima vrijednost $-\infty$ ili ∞. U *Primjeru* 3.3 imamo primjer realne mjere.

Primjer 3.3. Neka je $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ izmjeriv prostor te neka je funkcija $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \overline{\mathbb{R}}$ zadana pravilom pridruživanja

$$\mu(E) := \begin{cases} 1, & \{1\} \subseteq E \ i \ \{3\} \nsubseteq E \\ -1, & \{1\} \nsubseteq E \ i \ \{3\} \subseteq E \\ 0, & \text{inače}, \end{cases} \qquad \forall E \in \Sigma.$$

Pokažite da je ovako zadana funkcija μ realna mjera.

<u>*Rješenje.*</u> Funkcija μ očito poprima samo konačne vrijednosti. Trivijalno vrijedi da je $\mu(\emptyset) = 0$.
Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih i izmjerivih skupova. Promotrimo sljedeće slučajeve:

1° $\{1\} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\{3\} \nsubseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

Kako se radi o nizu disjunktnih skupova, tada postoji jedinstveni $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\{1\} \subseteq A_{n_0}$ i vrijedi da je $\mu(A_{n_0}) = 1$ te $\mu(A_n) = 0$ za svaki $n \neq n_0$. Tada je

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = 1 = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Analogno se pokazuje slučaj $\{1\} \nsubseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $\{3\} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

2° $\{1,3\} \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ te postoje jedinstveni $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$, $n_0 \neq n_1$ takvi da je $\{1\} \subseteq A_{n_0}$ i $\{3\} \subseteq A_{n_1}$

Imamo $\mu(A_{n_0}) = 1$, $\mu(A_{n_1}) = -1$ te $\mu\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0$. Tada je

$$\mu(A_{n_0}) + (A_{n_1}) + \sum_{\substack{n\in\mathbb{N} \\ n\neq n_0, n_1}} \mu(A_n) = 0 = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Slučaj da postoji jedinstveni $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\{1,3\} \subseteq A_{n_0}$ se pokazuje kao 1°.

Iz prethodnih razmatranja vidimo da je μ realna mjera. ■

Kako bismo dokazali da je integral po mjeri mjera s predznakom, trebamo iduću napomenu. Dokaz tvrdnje iskazane u napomeni može se pronaći u [8, str. 12, Zadatak 1.16.].

Napomena 3.2. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz međusobno disjunktnih podskupova od X. Tada vrijedi:

$$\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n}.$$

Propozicija 3.1. *Neka je* (X, Σ, μ) *prostor mjere i* $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}}$ *integrabilna funkcija. Funkcija* $\nu\colon \Sigma \to \overline{\mathbb{R}}$ *definirana pravilom pridruživanja*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \qquad \textit{za svaki } E \in \Sigma,$$

je realna mjera.

Dokaz. Očito je $\nu(\emptyset) = 0$.
Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih i izmjerivih skupova. Koristeći Levijev teorem o redovima (*Teorem* 1.2) i *Napomenu* 3.2, slijedi:

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \int f\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n} d\mu = \int f^+\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n} d\mu - \int f^-\chi_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n} d\mu \\
&= \int f^+ \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n} d\mu - \int f^- \sum_{n\in\mathbb{N}} \chi_{A_n} d\mu \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f^+\chi_{A_n} d\mu - \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f^-\chi_{A_n} d\mu \\
&= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int f\chi_{A_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).
\end{aligned}$$

Prema *Teoremu* 1.3, vrijedi

$$\left| \int_E f\, d\mu \right| \leq \int_E |f|\, d\mu, \text{ za svaki } E \in \Sigma.$$

Budući da je funkcija $|\, f\,|$ integrabilna (*Lema* 1.1), tada je desni integral gornje nejednakosti konačan, pa je i lijevi integral konačan. Slijedi da je ovako zadana funkcija ν realna mjera. $\square$

U idućem primjeru vidjet ćemo da mjera s predznakom općenito ne zadovoljava svojstvo monotonosti. Za konstrukciju odgovarajućeg primjera poslužit će nam prethodna propozicija, budući da podintegralna funkcija $f(x) = \cos x$ nije nenegativna na cijeloj svojoj domeni (vidi *Sliku* 3.1). Ipak, svaka mjera s predznakom *djelomično* zadovoljava to svojstvo o čemu će više biti riječi u *Propoziciji* 3.2.

Primjer 3.4. Neka je $([-\pi, \pi], \mathcal{B}([-\pi, \pi]), \lambda)$ prostor mjere, gdje je λ Lebesgueova mjera na $[-\pi, \pi]$. Neka je μ mjera s predznakom dana s $\mu(E) = \int_E \cos x\, d\lambda$, za svaki $E \in \mathcal{B}([-\pi, \pi])$ (vidi *Propoziciju* 3.1). Odredite koliko je $\mu\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$, $\mu\left(\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ i $\mu([-\pi, \pi])$.

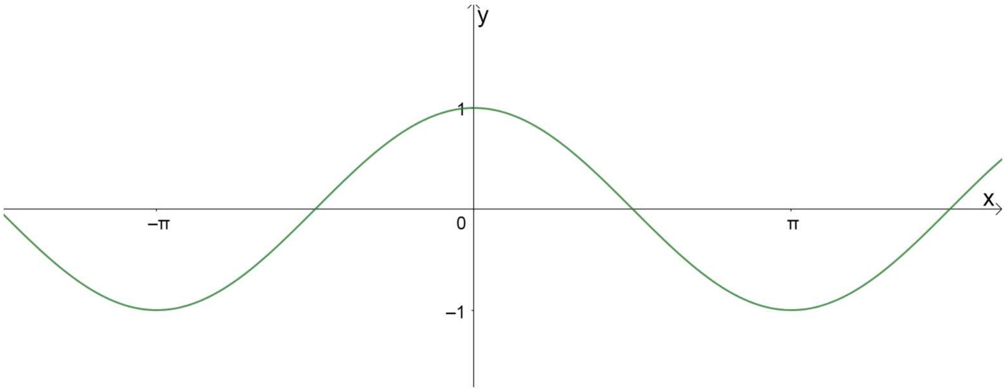
Rješenje. Koristeći Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost dobivamo sljedeće jednakosti:

$$\mu\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \int_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \cos x\, d\lambda = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = 2$$

$$\mu\left(\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \int\limits_{\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]} \cos x \, d\lambda = \int\limits_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = 1$$

$$\mu([-\pi, \pi]) = \int\limits_{[-\pi,\pi]} \cos x \, d\lambda = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos x \, dx = 0.$$

Vrijedi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right] \subset [-\pi, \pi]$ i $\mu\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) > \mu\left(\left[-\pi, \frac{\pi}{2}\right]\right) > \mu([-\pi, \pi])$. ■



Slika 3.1: Graf funkcije $f(x) = \cos(x)$

Propozicija 3.2. *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ) i neka su $A, B \in \Sigma, A \subseteq B$. Tada vrijedi:*

(i) Ako je $\mu(B) \in \mathbb{R}$, onda je $\mu(A) \in \mathbb{R}$.

(ii) Ako je $\mu(A) = \infty$, onda je $\mu(B) = \infty$.

(iii) Ako je $\mu(A) = -\infty$, onda je $\mu(B) = -\infty$.

(iv) Ako je $\mu(A) \in \mathbb{R}$, onda je $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Dokaz. Neka su $A, B \in \Sigma,\ A \subseteq B$. Tada je $B = A \cup (B \setminus A)$. Skupovi A i $B \setminus A$ su disjunktni pa primjenom konačne σ-aditivnosti mjere s predznakom dobivamo

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A). \tag{$*$}$$

(i) Neka je $\mu(B) \in \mathbb{R}$. Kada bi bilo $\mu(A) = \pm\infty$, zbog $\infty \pm a = \infty$ te zbog $-\infty \pm a = -\infty$, za svaki $a \in \mathbb{R}$, tada bi dobili $\mu(B) = \pm\infty$. Slijedi da je $\mu(A) \in \mathbb{R}$.

(ii) Neka je $\mu(A) = \infty$. Tada je nužno $\mu(B \setminus A) \neq -\infty$ jer mjera s predznakom ne može istovremeno poprimiti vrijednost ∞ i $-\infty$. Slijedi da je $\mu(B) = \infty$.

(iii) Analogno kao pod (ii).

(iv) Neka je $\mu(A) \in \mathbb{R}$. Tada je dobro definiran izraz $\mu(B) - \mu(A)$ te prema $(*)$ vrijedi da je

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A). \qquad \square$$

Mjera s predznakom, kao i mjera, ima svojstvo neprekidnosti na padajuće, odnosno rastuće, nizove skupova. Prije dokaza ovog teorema treba nam sljedeća napomena.

Napomena 3.3. Neka je $\mathcal{F}$ familija skupova. Vrijede de Morganova pravila:

$$\left(\bigcap_{A\in\mathcal{F}} A\right)^c = \bigcup_{A\in\mathcal{F}} A^c, \qquad \left(\bigcup_{A\in\mathcal{F}} A\right)^c = \bigcap_{A\in\mathcal{F}} A^c.$$

Teorem 3.1. *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Tada*

(i) ***(neprekidnost na rastuće nizove)*** *za svaki rastući niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ vrijedi:*

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ii) ***(neprekidnost na padajuće nizove)*** *za svaki padajući niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ vrijedi: Ako je $\mu(A_1) \in \mathbb{R}$, onda je*

$$\mu\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz.

(i) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova iz Σ te neka postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu(A_{i_0}) = \infty$. Budući da je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova, tada za svaki $i \geq i_0$ vrijedi da je $\mu(A_i) = \infty$ (*Propozicija* 3.2 (ii)). Kako je $\mu(A_i) = \infty$ za svaki $i \geq i_0$, slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty.$$

Međutim, zbog $A_{i_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ je i $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \infty$ (*Propozicija* 3.2 (ii)). Konačno imamo:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \infty.$$

Slično se pokaže da je:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = -\infty,$$

ako postoji $i_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\mu(A_{i_0}) = -\infty$.
Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $\mu(A_i) \in \mathbb{R}$, za svaki $i \in \mathbb{N}$. Definirajmo novi niz skupova $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1, \\ B_2 &= A_2 \setminus A_1, \\ B_3 &= A_3 \setminus A_2, \\ &\vdots \\ B_n &= A_n \setminus A_{n-1}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz međusobno disjunktnih skupova takvih da je $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$, zbog čega slijedi:

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n).$$

Nadalje, *Propozicija* 3.2 (iv) povlači da je za svaki $n \geq 2$

$$\mu(B_n) = \mu(A_n) - \mu(A_{n-1}).$$

Sada imamo:

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) &= \mu(B_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(B_n) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{n\to\infty} (\mu(A_2) - \mu(A_1) + \mu(A_3) - \mu(A_2) + \ldots + \mu(A_n) - \mu(A_{n-1})) \\ &= \mu(A_1) + \lim_{n\to\infty} (\mu(A_n) - \mu(A_1)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

(ii) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz iz Σ takav da je $\mu(A_1) \in \mathbb{R}$. Kako je $A_1 \supseteq A_n$, za svaki $n > 1$, tada je $\mu(A_n) \in \mathbb{R}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (*Propozicija* 3.2 (i)). Niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je padajući niz skupova, stoga je $(A_1 \setminus A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz skupova na koji možemo primijeniti tvrdnju (i). Primjenom prethodne napomene i tvrdnje (i) imamo:

$$\begin{aligned} \mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) &= \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)^c\right) \\ &= \mu\left(A_1 \cap \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n^c\right)\right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_1 \setminus A_n)\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_1 \setminus A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} (\mu(A_1) - \mu(A_n)) \\ &= \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n). \end{aligned}$$

Vrijedi $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \in \mathbb{R}$ (*Propozicija* 3.2 (i)) pa primjenom *Propozicije* 3.2 (iv) dobivamo:

$$\mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) = \mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right).$$

Konačno imamo:

$$\mu(A_1) - \mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(A_1 \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) = \mu(A_1) - \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Oduzimanjem $\mu(A_1)$ s obje strane jednakosti i množenjem s -1 slijedi tvrdnja (ii). $\square$

4 Hahnova i Jordanova dekompozicija

Prisjetimo se *Primjera* 3.2. U njemu smo pokazali da je razlika dviju mjera, od kojih je jedna konačna, mjera s predznakom. U ovom poglavlju pokazat ćemo da vrijedi i obrat, to jest da se mjera s predznakom može na jedinstven način prikazati kao razlika dviju mjera od kojih je barem jedna konačna. Glavna ideja dokaza je ta da krenemo od pretpostavke da je mjera s predznakom μ poopćenje neke mjere. Ako je to tako, onda sigurno mora postojati izmjerivi skup A za koji će vrijediti $\mu(A) \geq 0$ te izmjerivi skup B za koji je $\mu(B) \leq 0$. *Teorem* 4.2, odnosno Hahnova dekompozicija, će nam omogućiti maksimalnost i disjunktnost tih skupova. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da su A i B već takvi skupovi. Tada je restrikcija mjere s predznakom μ na skup A mjera. Vrijedi i da je $\mu(B) \leq 0$ pa množenjem s -1 dobivamo $-\mu(B) \geq 0$. Tada će funkcija $-\mu_{|B}$ također biti mjera. Pritom moramo paziti da nemamo degeneriranih slučajeva (npr. za $C \subseteq A$ vrijedi da je $\mu(C) < 0$). Idućom definicijom eliminirat ćemo tu mogućnost.

Definicija 4.1. *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Za skup $A \in \Sigma$ kažemo da je:*

(i) pozitivan skup (s obzirom na μ, u odnosu na μ) ako je $\mu(E) \geq 0$, za svaki $E \in \Sigma$, $E \subseteq A$.

(ii) negativan skup (s obzirom na μ, u odnosu na μ) ako je $\mu(E) \leq 0$, za svaki $E \in \Sigma$, $E \subseteq A$.

(iii) nul-skup (s obzirom na μ, u odnosu na μ) ako je $\mu(E) = 0$, za svaki $E \in \Sigma, E \subseteq A$.

Napomena 4.1. Trivijalne posljedice *Definicije* 4.1 su:

(1) Ako je skup A pozitivan [negativan, nul-], tada je $\mu(A) \geq 0$ [$\mu(A) \leq 0$, $\mu(A) = 0$], ali obrat općenito ne vrijedi (vidi *Primjer* 4.2).

(2) Skup A je nul-skup ako i samo ako je A istovremeno pozitivan i negativan skup.

U nastavku ćemo navesti nekoliko primjera pozitivnih, negativnih i nul-skupova.

Primjer 4.1. Za mjeru s predznakom ν iz *Propozicije* 3.1:

$$\begin{aligned} P &= \{\, x \in X : f(x) \geq 0 \,\} \text{ je pozitivan skup s obzirom na } \nu, \\ N &= \{\, x \in X : f(x) \leq 0 \,\} \text{ je negativan skup s obzirom na } \nu, \\ Z &= \{\, x \in X : f(x) = 0 \,\} \text{ je nul-skup s obzirom na } \nu. \end{aligned}$$

Rješenje. Neka je $A \subseteq P$. Tada je $f(x) \geq 0$, za sve $x \in A$ pa je

$$\nu(A) = \int_A f \, d\mu = \int f \chi_A \, d\mu \geq 0.$$

Slučajevi $A \subseteq N$ i $A \subseteq Z$ dokazuju se analogno. ■

Primjer 4.2. Neka je μ mjera s predznakom definirana kao u *Primjeru* 3.3. Skup:

$$\begin{aligned} Z &= \{\, n \in \mathbb{N} : n \notin \{1,3\}\,\} \text{ je nul-skup s obzirom na } \mu, \\ P &= \{\, n \in \mathbb{N} : n \neq 3\,\} \text{ je pozitivan skup s obzirom na } \mu, \\ N &= \{\, n \in \mathbb{N} : n \neq 1\,\} \text{ je negativan skup s obzirom na } \mu. \end{aligned}$$

Skup $\mathbb{N}$ je skup mjere nula, ali nije nul-skup.
Zaista, $\{1\} \subseteq \mathbb{N}$ i $\mu(\{1\}) = 1 \neq 0$ pa prema *Definiciji* 4.1 $\mathbb{N}$ nije nul-skup. ■

Propozicija 4.1, koja slijedi, govori nam da je svaki podskup pozitivnog [negativnog, nul-] skupa, opet pozitivan [negativan, nul-] skup. U *Propoziciji* 4.2 dokazat ćemo da je familija svih pozitivnih [negativnih, nul-] skupova zatvorena s obzirom na prebrojivu uniju njezinih članova. Pomoću ovih propozicija dobivamo alat za stvaranje novih pozitivnih [negativnih, nul-] skupova.

Propozicija 4.1. *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Svaki izmjeriv podskup negativnog skupa je negativan skup. Tvrdnja vrijedi i za pozitivne i za nul-skupove.*

Dokaz. Neka je $A \in \Sigma$ negativan skup za μ i neka je $B \in \Sigma$, $B \subseteq A$. Tada, po *Definiciji* 4.1 i tranzitivnosti relacije $\subseteq$, za svaki $C \in \Sigma$, $C \subseteq B$ vrijedi $\mu(C) \leq 0$. □

Napomena 4.2. Posljedica *Napomene* 4.1 i *Propozicije* 4.1 je:
Ako je $A \in \Sigma$ pozitivan skup za μ i $B \in \Sigma$ negativan skup za μ, tada je $A \cap B$ nul-skup za μ.

Teorem 4.1 daje karakterizaciju pozitivnih, negativnih i nul-skupova s obzirom na μ. Ovaj teorem se može pronaći u [7] i [9] kao definicija pozitivnog [negativnog, nul-] skupa.

Teorem 4.1. *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Skup $A \in \Sigma$ je:*

(i) pozitivan skup s obzirom na μ ako i samo ako je $\mu(A \cap F) \geq 0$, za svaki $F \in \Sigma$,

(ii) negativan skup s obzirom na μ ako i samo ako je $\mu(A \cap F) \leq 0$, za svaki $F \in \Sigma$,

(iii) nul-skup s obzirom na μ ako i samo ako je $\mu(A \cap F) = 0$, za svaki $F \in \Sigma$.

Dokaz. Ovaj teorem dokazat ćemo u slučaju kada je A negativan skup s obzirom na μ. Ostali slučajevi se dokazuju analogno.
$\Rightarrow$ Neka je $A \in \Sigma$ negativan skup i $F \in \Sigma$. Skup $A \cap F$ je izmjerivi podskup od A pa je $\mu(A \cap F) \leq 0$ (*Propozicija* 4.1).
$\Leftarrow$ Neka su $A, E \in \Sigma$ te neka je $E \subseteq A$. Nadalje, neka vrijedi $\mu(A \cap F) \leq 0$, za svaki $F \in \Sigma$. Specijalno, za $F = E$:

$$\mu(A \cap E) = \mu(E) \leq 0,$$

pa je A negativan skup s obzirom na μ. □

Propozicija 4.2. *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Prebrojiva unija negativnih skupova je negativan skup. Specijalno, konačna unija negativnih skupova je negativan skup. Tvrdnje propozicije vrijede i za pozitivne i za nul-skupove.*

Dokaz.

(i) Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz negativnih skupova za μ i $B \in \Sigma, B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, gdje je $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz disjunktnih skupova iz Σ takvih da je $B_n \subseteq A_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada po *Propoziciji* 4.1 i σ-aditivnosti mjere s predznakom slijedi $\mu(B) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) \leq 0$.

(ii) Neka je sada $A_1, ..., A_n$ konačni niz negativnih skupova za μ. Nadopunimo niz $A_1, ..., A_n$ do prebrojivog tako što ćemo staviti $A_m = \emptyset$, za prirodan broj $m \geq n + 1$. Primjenom tvrdnje (i) na novi niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ slijedi tvrdnja (ii). □

Kao što smo već najavili na početku poglavlja, za danu mjeru s predznakom, definiranu na izmjerivom prostoru (X, Σ), *Teorem* 4.2 nam daje dekompoziciju skupa X na dva njegova disjunktna podskupa od kojih je jedan pozitivan, a drugi negativan. Teorem je dobio ime po austrijskom matematičaru H. Hahnu koji ga je objavio u svojoj knjizi *Theorie der reellen Funktionen* 1921. godine.

Teorem 4.2 (Hahnova dekompozicija). *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Tada postoje dva izmjeriva skupa, P i N, takvi da je P pozitivan skup, a N negativan skup s obzirom na μ te $X = P \cup N, P \cap N = \emptyset$.*

Dokaz. Neka je $-\infty < \mu(A) \leq \infty$, za svaki $A \in \Sigma$. Nadalje, neka je

$$L = \inf\{\mu(A) : \mu(A) \leq 0\}$$

i $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz negativnih izmjerivih skupova takav da je $L = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$. Označimo s $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. N je negativan skup konačne mjere s predznakom prema *Propoziciji* 4.2. Kako je N negativan, tada je $\mu(N \setminus A_n) \leq 0$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ (*Propozicija* 4.1). Stoga je

$$L \leq \mu(N) \leq \mu(A_n), \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Prelaskom na limes slijedi $\mu(N) = L$.
Definirajmo $P = X \setminus N$. Tada su N i P disjunktni i $X = N \cup P$. Preostaje još dokazati da je P pozitivan skup. Pretpostavimo suprotno, to jest neka postoji $B_0 \in \Sigma, B_0 \subseteq P$ takav da je $\mu(B_0) < 0$. Kada bi skup B_0 bio negativan, zbog disjunktnosti B_0 i N, vrijedilo bi da je

$$\mu(N \cup B_0) = \mu(N) + \mu(B_0) = L + \mu(B_0) < L$$

što je u kontradikciji s definicijom infimuma. Dakle, skup B_0 nije negativan skup (to jest B_0 sadrži izmjerivi podskup B_1 takav da je $\mu(B_1) > 0$). Neka je

$$k_1 = \min\left\{k \in \mathbb{N} : \mu(B_1) \geq \frac{1}{k}, B_1 \subseteq B_0 \text{ } izmjeriv\right\}.$$

Budući da su brojevi $\mu(B_0)$ i $\mu(B_1)$ konačni (*Propozicija* 3.2 (i)), možemo primijeniti *Propoziciju* 3.2 (iv):

$$\mu(B_0 \setminus B_1) = \mu(B_0) - \mu(B_1) \leq \mu(B_0) - \frac{1}{k_1} < 0.$$

Dobili smo $\mu(B_0 \setminus B_1) < 0$. Skup $B_0 \setminus B_1$ nije negativan (analogno kao za B_0), stoga neka je

$$k_2 = \min\left\{ k \in \mathbb{N} : \mu(B_2) \geq \frac{1}{k}, B_2 \subseteq B_0 \setminus B_1 \; izmjeriv \right\}.$$

Primjenom *Propozicije* 3.2 (i), (iv) i konačne σ-aditivnosti mjere s predznakom dobivamo

$$\mu((B_0 \setminus (B_1 \cup B_2)) = \mu(B_0) - \mu(B_1) - \mu(B_2) \leq \mu(B_0) - \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2} < 0.$$

Opet zaključujemo da je $\mu(B_0 \setminus (B_1 \cup B_2)) < 0$ te da skup $(B_0 \setminus (B_1 \cup B_2)$ nije negativan skup.

Induktivno ponavljajući ovaj postupak dobivamo dva niza - niz disjunktnih skupova $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i niz prirodnih brojeva $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Primijetimo da zbog načina odabira brojeva k_n za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\frac{1}{k_n} \leq \mu(B_n) \leq \frac{1}{k_n - 1}.$$

Kako za sve prirodne brojeve n vrijedi da je $\mu(B_n) \in \mathbb{R}$ (*Propozicija* 3.2 (i)), slijedi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{k_n} = 0.$$

Dakle, za svaki izmjerivi podskup F skupa $F_0 = B_0 \setminus \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$ vrijedi da je za dovoljno veliki k_n

$$\mu(F) \leq \frac{1}{k_n - 1}.$$

Prelaskom na $\lim\limits_{n\to\infty}$ dobivamo $\mu(F) \leq 0$ iz čega pak slijedi da je F_0 negativan skup. Niz $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je niz disjunktnih skupova takvih da je $\mu(B_n) \in \mathbb{R}$ pa primjenom *Propozicije* 3.2 (iv) i σ-aditivnosti mjere s predznakom dobivamo $\mu(F_0) \leq \mu(B_0) < 0$. Kako su F_0 i N disjunktni skupovi primjenom konačne σ-aditivnosti dobivamo

$$\mu(N \cup F_0) = \mu(N) + \mu(F_0) < L,$$

što je u kontradikciji s definicijom infimuma. Odbacujemo pretpostavku da P nije pozitivan skup. □

Napomena 4.3. Hahnova dekompozicija mjere s predznakom nije jedinstvena (vidi *Primjer* 4.3).

Neka su (P_1, N_1) i (P_2, N_2) dvije Hahnove dekompozicije mjere s predznakom μ na izmjerivom prostoru (X, Σ). Prema *Napomeni* 4.2 skupovi $N_1 \cap P_2$ i $N_2 \cap P_1$ su nul-skupovi za μ. Kako vrijedi $N_1 \cap P_2 = N_1 \setminus N_2$ i $N_2 \cap P_1 = N_2 \setminus N_1$, slijedi da je $N_1 \triangle N_2$ nul-skup za μ (*Propozicija* 4.2). Analogno se pokaže da je $P_1 \triangle P_2$ nul-skup za μ.

Primjer 4.3. Neka je μ mjera s predznakom iz *Primjera* 3.3. Jedna Hahnova dekompozicija je dana s:

$$\begin{aligned} P &= \{1\}, \\ N &= \{\, n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \,\}. \end{aligned}$$

Druga Hahnova dekompozicija je dana s:

$$\begin{aligned} P &= \{\, n \in \mathbb{N} : n = 2k-1, n \neq 3, k \in \mathbb{N} \,\}, \\ N &= \{\, n \in \mathbb{N} : n = 2k, k \in \mathbb{N} \,\} \cup \{3\}. \end{aligned}$$

■

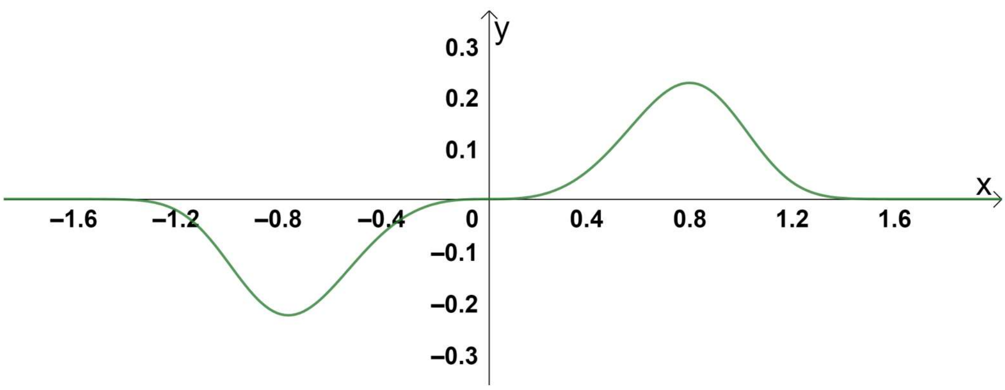
Primjer 4.4. Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere, gdje je λ Lebesgueova mjera. Odredite Hahnovu dekompoziciju mjere s predznakom μ zadane formulom

$$\mu(E) := \int_E x^3 e^{-2x^4} d\lambda, \qquad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Rješenje. Neka je

$$f(x) := x^3 e^{-2x^4}.$$

Znamo da je $P = \{\, x \in \mathbb{R} : f(x) \geq 0 \,\}$ pozitivan skup za μ te da je $N = \{\, x \in \mathbb{R} : f(x) \leq 0 \,\}$ negativan skup za μ (*Primjer* 4.1). Skup $N' = \{\, x \in \mathbb{R} : f(x) < 0 \,\}$ je podskup od N pa je i on negativan skup (*Propozicija* 4.1). Skupovi P i N' su disjunktni i u uniji daju cijeli $\mathbb{R}$ pa je (P, N') tražena Hahnova dekompozicija. Preostaje odrediti skupove P i N'.
Na *Slici* 4.1 vidimo da je $f(x) \geq 0$ za $x \in [0, \infty\rangle$ i $f(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, 0\rangle$. Dakle, možemo staviti $P = [0, \infty\rangle$ i $N' = \langle -\infty, 0\rangle$. ■



Slika 4.1: Graf funkcije $f(x) := x^3 e^{-2x^4}$

Idući teorem dat će nam alat pomoću kojeg ćemo zapisati mjeru s predznakom kao razliku dviju mjera. Ovakav rastav mjere s predznakom pripisuje se Lebesgueu, a ime je dobio po C. Jordanu koji je pokazao specijalni slučaj ovog teorema. Pokazat će se da je Jordanova dekompozicija mjere s predznakom jedinstvena.

Teorem 4.3 (Jordanova dekompozicija). *Neka je μ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Tada postoje jedinstvene mjere μ^+, $\mu^- : \Sigma \to [0, \infty]$ takve da je*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

i pri tome je barem jedna od mjera μ^+, μ^- konačna.

Dokaz. Neka je s (P, N) dana Hahnova dekompozicija mjere s predznakom μ te neka su funkcije
$\mu^+, \mu^- : \Sigma \to [0, \infty]$ definirane za svaki $E \in \Sigma$ s

$$\begin{aligned} \mu^+(E) &:= \mu(E \cap P), \\ \mu^-(E) &:= -\mu(E \cap N). \end{aligned}$$

Očito je da su μ^+ i μ^- mjere s predznakom. Kako bismo dokazali da su μ^+ i μ^- mjere, treba još provjeriti njihovu nenegativnost. Prema *Teoremu* 4.1: $\mu^+(E) = \mu(E \cap P) \geq 0$ i $\mu^-(E) = -\mu(E \cap N) \geq 0$, za svaki $E \in \Sigma$. Mjere μ^+ i μ^- su definirane preko mjere s predznakom μ koja istovremeno ne poprima vrijednosti ∞ i $-\infty$, stoga je barem jedna od njih konačna.
Neka je $E \in \Sigma$. Kako su P i N disjunktni te $X = P \cup N$ vrijedi:

$$\mu(E) = \mu(E \cap P) + \mu(E \cap N) = \mu^+(E) - \mu^-(E),$$

što je i trebalo pokazati. U nastavku preostaje pokazati jedinstvenost.
Neka su (P_1, N_1) i (P_2, N_2) dvije Hahnove dekompozicije mjere s predznakom μ na izmjerivom prostoru (X, Σ) te neka su mjere $\mu_1^+, \mu_1^-, \mu_2^+, \mu_2^- : \Sigma \to [0, \infty]$ zadane s:

$$\begin{aligned} \mu_1^+(E) &= \mu(E \cap P_1), \\ \mu_1^-(E) &= -\mu(E \cap N_1), \\ \mu_2^+(E) &= \mu(E \cap P_2), \\ \mu_2^-(E) &= -\mu(E \cap N_2). \end{aligned}$$

Skupovi $P_1 \setminus P_2$ i $P_2 \setminus P_1$ su nul-skupovi za μ (*Napomena* 4.2). Tada za svaki $E \in \Sigma$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \mu_1^+(E) &= \mu(E \cap P_1) \\ &= \mu(E \cap ((P_1 \setminus P_2) \cup (P_1 \cap P_2))) \\ &= \mu(E \cap (P_1 \setminus P_2)) + \mu(E \cap (P_1 \cap P_2)) \\ &= \mu(E \cap P_2 \cap P_1) + 0 \\ &= \mu(E \cap P_2 \cap P_1) + \mu(E \cap (P_2 \setminus P_1)) \\ &= \mu(E \cap ((P_2 \cap P_1) \cup (P_2 \setminus P_1))) \\ &= \mu(E \cap P_2) \\ &= \mu_2^+(E). \end{aligned}$$

Analogno se pokaže da je $\mu_1^- = \mu_2^-$. $\square$

Definicija 4.2. *Neka je* $\mu = \mu^+ - \mu^-$ *Jordanova dekompozicija mjere s predznakom* μ *na izmjerivom prostoru* (X, Σ). *Mjera* μ^+ *naziva se pozitivni dio (gornja ili pozitivna varijacija), a mjera* μ^- *negativni dio (donja ili negativna varijacija) mjere s predznakom* μ. *Mjeru* $|\,\mu\,| \colon \Sigma \to [0, \infty]$ *definiranu s* $|\,\mu\,| = \mu^+ + \mu^-$ *nazivamo (apsolutna) varijacija mjere s predznakom* μ. *Totalna varijacija mjere s predznakom* μ *je broj* $\|\,\mu\,\| = |\,\mu\,|(X)$.

Definicije varijacije i totalne varijacije se mogu razlikovati u literaturi. Ponekad se mjera $|\,\mu\,|$ naziva totalna varijacija, a varijacija se kao takva ne definira (vidi [7] i [22]).

Primjer 4.5. Odredite Jordanovu dekompoziciju funkcije iz *Primjera* 4.4.

Rješenje. Jedna Hahnova dekompozicija mjere s predznakom μ iz *Primjera* 4.4 jednaka je $([0, \infty\rangle, \langle -\infty, 0\rangle)$.
Tada je Jordanova dekompozicija dana s:

$$\mu^+(E) := \mu(E \cap P) = \int_E f \chi_{[0,\infty\rangle} \, d\lambda,$$

$$\mu^-(E) := -\mu(E \cap N) = -\int_E f \chi_{\langle -\infty,0\rangle} \, d\lambda. \qquad \blacksquare$$

Općenito, ako je (P, N) Hahnova dekompozicija mjere s predznakom ν iz *Propozicije* 3.1, tada je Jordanova dekompozicija dana s:

$$\begin{aligned} \nu^+ &= \int \chi_P f \, d\mu, \\ \nu^- &= -\int \chi_N f \, d\mu. \end{aligned}$$

5 Lebesgueova dekompozicija

U ovom poglavlju vidjet ćemo da se svaka σ-konačna mjera može prikazati kao zbroj dviju mjera i pri tome je taj rastav jedinstven. Ova dekompozicija mjere ima važnu primjenu u teoriji vjerojatnosti koju ćemo vidjeti u *Potpoglavlju* 5.2.

5.1 Lebesgueova dekompozicija σ-konačne mjere

Definicija 5.1. *Neka je μ mjera, a ν mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Kažemo da je ν apsolutno neprekidna u odnosu na μ i pišemo $\nu \ll \mu$ ako za svaki $E \in \Sigma$ vrijedi*

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0.$$

Za mjeru s predznakom ν na $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ kažemo da je apsolutno neprekidna ako je ν apsolutno neprekidna s obzirom na d-dimenzionalnu Lebesgueovu mjeru.

Primjer 5.1. Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i ν mjera s predznakom iz *Propozicije* 3.1. Tada je $\nu \ll \mu$. ■

Napomena 5.1.

(1) Trivijalna mjera je apsolutno neprekidna sa svakom mjerom na istom izmjerivom prostoru.

(2) Relacija " $\ll$ " je refleksivna i tranzitivna, ali nije antisimetrična.

Neka je δ_n Diracova δ-mjera koncentrirana u točki $n \in \mathbb{N}$ te neka je mjera μ zadana formulom $\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{6}{7^n}\delta_n$. Vrijedi $\delta_n \ll \mu$ i $\mu \ll \delta_n$ te $\mu \neq \delta_n$.

Za mjere μ i ν za koje vrijedi $\nu \ll \mu$ i $\mu \ll \nu$ kažemo da su ekvivalentne i pišemo $\nu \equiv \mu$.

Definicija 5.2. *Neka su μ i ν dvije mjere s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Kažemo da su μ i ν međusobno okomite ili singularne i pišemo $\mu \perp \nu$ ako postoji $A \in \Sigma$ takav da je A nul-skup za μ, a A^c nul-skup za ν.*

Nekad se za singularne mjere s predznakom μ i ν kaže da je μ singularna s obzirom na ν (ili obratno). Pritom se simetričnost ove relacije podrazumijeva.
Za mjeru s predznakom ν na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ kažemo da je singularna ako su ν i d-dimenzionalna Lebesgueova mjera singularne.

Napomena 5.2.

(1) Trivijalna mjera je singularna s obzirom na svaku mjeru s predznakom na istom izmjerivom prostoru.

(2) Neka je $\mu = \mu^+ - \mu^-$ Jordanova dekompozicija mjere s predznakom μ na izmjerivom prostoru (X, Σ). Tada su očito μ^+ i μ^- singularne.

Primjer 5.2. Neka su Lebesgueova mjera λ i Diracova δ-mjera δ_0 definirane na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Tada je $\lambda \perp \delta_0$. $\blacksquare$

Može se pokazati da je svaka Diracova δ-mjera singularna s Lebesgueovom mjerom (vidi npr. [8, str. 221, Zadatak 7.8.]).

U idućem primjeru vidjet ćemo da postoje mjere μ i ν tako da ne vrijedi niti jedna od ovih relacija: $\mu \perp \nu$, $\mu \ll \nu$ te $\nu \ll \mu$.

Primjer 5.3. Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere, gdje je λ Lebesgueova mjera i neka su mjere μ i ν definirane za svaki $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$:

$$\nu(E) := \int_E \frac{1}{1+x^2}\, \chi_{\langle -\infty, 0]}\, d\lambda, \qquad \mu(E) := \int_E \frac{1}{1+x^2}\, \chi_{\langle -1, \infty\rangle}\, d\lambda.$$

Pokažite da mjere μ i ν nisu niti singularne niti apsolutno neprekidne.

Rješenje. Pokažimo prvo da ν nije apsolutno neprekidna u odnosu na μ. Lako se pokaže da je $\mu\left(\left[-\sqrt{3}, -1\right]\right) = 0$. Pogledajmo sada koliko je $\nu\left(\left[-\sqrt{3}, -1\right]\right)$. Prema Lebesgueovom kriteriju za R-integrabilnost imamo:

$$\nu\left(\left[-\sqrt{3}, -1\right]\right) = \int_{[-\sqrt{3}, -1]} \frac{1}{1+x^2}\, \chi_{\langle -\infty, 0]}\, d\lambda = \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{12} \neq 0.$$

Dakle, postoji skup $A = \left[-\sqrt{3}, -1\right]$ takav da je $\mu(A) = 0$ i $\nu(A) \neq 0$ pa ν nije apsolutno neprekidna u odnosu na μ.

Slično se pokaže da μ nije apsolutno neprekidna u odnosu na ν. Kao protuprimjer može se uzeti skup $\left[1, \sqrt{3}\right]$.

Preostaje pokazati da μ i ν nisu singularne. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ takav da je $\nu(A) = 0$ i $\mu(A^c) = 0$. Kako je $A \subseteq \mathbb{R}$, tada je ili $\langle -1, 0] \subseteq A$ ili $\langle -1, 0] \subseteq A^c$ čime smo došli do kontradikcije. Naime,

$$\int_{\langle -1, 0]} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda = \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

zbog čega je ili $\nu(A) = \frac{\pi}{4}$ ili $\mu(A^c) = \frac{\pi}{4}$ što ne može biti. $\blacksquare$

Lema 5.1. *Neka su ν_1, ν_2 i μ realne mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ) takve da je $\nu_1 \perp \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$. Tada je $(\nu_2 - \nu_1) \perp \mu$.*

Dokaz. Neka su ν_1 i ν_2 realne mjere takve da je $\nu_1 \perp \mu$ i $\nu_2 \perp \mu$. Po *Definiciji* 5.2 tada postoje skupovi $A_1, A_2 \in \Sigma$ takvi da je A_1 nul-skup za ν_1, A_1^c nul-skup za μ, A_2 nul-skup za ν_2 te A_2^c nul-skup za μ. Definirajmo skup $A := A_1 \cap A_2$. $A_1 \cap A_2 \subseteq A_1$ i $A_1 \cap A_2 \subseteq A_2$ pa je prema *Propoziciji* 4.1 A nul-skup za ν_1 i ν_2. Kako je A nul-skup za ν_1 i ν_2, tada je A nul-skup i za $\nu_2 - \nu_1$. Za dokaz ove tvrdnje trebamo još provjeriti je li A^c nul-skup za μ. Koristeći De Morganova pravila dobivamo $A^c = (A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$. Unija dva nul-skupa je nul-skup (*Propozicija* 4.2), stoga je A^c nul-skup za μ, što je i trebalo dokazati. $\square$

Lema 5.2. *Neka je μ mjera, a ν mjera s predznakom na izmjerivom prostoru (X, Σ). Ako je $\nu \ll \mu$ i $\nu \perp \mu$, onda je $\nu = 0$.*

Dokaz. Neka je $\nu \ll \mu$ i $\nu \perp \mu$ te neka je $E \in \Sigma$. Kako je $\nu \perp \mu$, po *Definiciji* 5.2 postoji $A \in \Sigma$ takav da je A nul-skup za μ, a A^c nul-skup za ν. Skup $E \cap A$ je izmjerivi podskup od A, stoga je $\mu(E \cap A) = 0$ (*Definicja* 4.1). Analogno se dobiva $\nu(E \cap A^c) = 0$. Kako je $\nu \ll \mu$, tada po *Definiciji* 5.1 slijedi da je $\nu(E \cap A) = 0$. Koristeći činjenice da je $X = A \cup A^c$ te $E \cap X = E$ imamo

$$\nu(E) = \nu(E \cap A) + \nu(E \cap A^c) = 0. \qquad \square$$

Idući teorem nam govori kako se svaka σ-konačna mjera može zapisati kao zbroj apsolutno neprekidne i singularne mjere s obzirom na neku mjeru te da je takav rastav jedinstven. Ovaj teorem može se poopćiti na mjere s predznakom (vidi [3]). *Primjer* 5.5 nam daje primjer Lebesgueove dekompozicije mjere, a *Primjer* 5.4 ilustrira specijalni slučaj Lebesgueove dekompozicije.

Teorem 5.1 (Lebesgueova dekompozicija). *Neka su μ, $\nu \colon \Sigma \to [0, \infty]$ dvije mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ). Ako je ν σ-konačna, onda postoje jedinstvene mjere ν_a i ν_s na (X, Σ) takve da je:*

(i) $\nu_a \ll \mu$,

(ii) $\nu_s \perp \mu$,

(iii) $\nu = \nu_a + \nu_s$.

Mjeru ν_a nazivamo apsolutno neprekidni dio, a ν_s singularni dio mjere ν u odnosu na mjeru μ, a par (ν_a, ν_s) Lebesgueova dekompozicija mjere ν s obzirom na μ.

Dokaz. Neka je ν konačna mjera te označimo s $\mathcal{N}_\mu$ familiju svih nul-skupova za μ, to jest

$$\mathcal{N}_\mu := \{A \in \Sigma : \mu(A) = 0\}.$$

Nadalje, neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{N}_\mu$ takav da je

$$\lim_{n \to \infty} \nu(A_n) = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}.$$

Supremum skupa $\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}$ postoji zbog pretpostavke o konačnosti mjere ν. Označimo s $M = \sup\{\nu(A) : A \in \mathcal{N}_\mu\}$ te definirajmo skup $N := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$. Za mjeru μ vrijedi

$$0 \leq \mu(N) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Kako je $\mu(A_n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, slijedi $\mu(N) = 0$. Dakle, $N \in \mathcal{N}_\mu$ pa vrijedi $\nu(N) \leq M$. S druge strane, $A_n \subseteq N$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ što daje $\nu(A_n) \leq \nu(N)$ (*Propozicija* 1.1 (i)). Konačno imamo $\nu(A_n) \leq \nu(N) \leq M$ pa prelaskom na limes slijedi da je $\nu(N) = M$. Neka je sada $E \in \Sigma$ te

$$\begin{aligned}\nu_s(E) &:= \nu(E \cap N),\\ \nu_a(E) &:= \nu(E \cap N^c).\end{aligned}$$

Vidimo da je $\nu = \nu_a + \nu_s$. Nadalje, kako je $\mu(N) = 0$, a lako se pokaže da je i $\nu_s(N^c) = 0$, slijedi singularnost tih mjera. Od danih uvjeta na ν_a i ν_s, preostaje još provjeriti je li ν_a apsolutno neprekidna u odnosu na μ. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka je $E \in \Sigma$, $\mu(E) = 0$ te $\nu_a(E) \neq 0$. Tada je

$$\nu(N \cup (E \cap N^c)) = \nu(N) + \nu(E \cap N^c) = \nu(N) + \nu_a(E) > \nu(N)$$

što je u kontradikciji s definicijom supremuma M. Treba još provjeriti jedinstvenost ovakvog rastava te slučaj kada je ν σ-konačna mjera. Provjerimo prvo jedinstvenost.
Neka je $\nu = \nu_a' + \nu_s'$ druga Lebesgueova dekompozicija mjere ν. Kako je $\nu_s \perp \mu$ i $\nu_s' \perp \mu$, po *Lemi* 5.1 slijedi $(\nu_s' - \nu_s) \perp \mu$. Također, $\nu_a \ll \mu$ i $\nu_a' \ll \mu$ povlače da je i $(\nu_a - \nu_a') \ll \mu$. Po pretpostavci je $\nu_a + \nu_s = \nu = \nu_a' + \nu_s'$ iz čega slijedi $\nu_s' - \nu_s = \nu_a - \nu_a'$. Sada je $(\nu_a - \nu_a') \ll \mu$ i $(\nu_a - \nu_a') \perp \mu$ pa po *Lemi* 5.2 slijedi da je $\nu_a - \nu_a' = 0$. Vrijedi i $(\nu_s' - \nu_s) \ll \mu$ te $(\nu_s' - \nu_s) \perp \mu$ pa po *Lemi* 5.2 je $\nu_s' - \nu_s = 0$. Preostaje provjeriti slučaj kada je ν σ-konačna mjera.
Neka je ν σ-konačna, to jest neka je $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$, $X_n \in \Sigma$, $\nu(X_n) < \infty$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Označimo s $\Sigma_n := \{E \in \Sigma : E \subseteq X_n\}$ familiju izmjerivih podskupova od X_n te označimo sa ν_n i μ_n restrikcije mjera ν i μ na (X_n, Σ_n). Budući da je svaki od skupova X_n konačan, tada je mjera ν_n konačna mjera te možemo odrediti njezinu dekompoziciju s obzirom na μ_n. Ovim postupkom dobivamo niz nul-skupova (s obzirom na μ_n) te označimo ga s $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Uz oznaku $N = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_n$, dekompozicija $\nu = \nu_a + \nu_s$ gdje je $\nu_a(E) = \nu(E \cap N^c)$ i $\nu_s(E) = \nu(E \cap N)$ je tražena Lebesgueova dekompozicija. □

Korolar 5.1. *Neka je (X, Σ) prostor mjere takav da su točke $\{x\} \subseteq X$ izmjerivi skupovi i neka su ν i μ σ-konačne mjere na (X, Σ). Tada je $\nu = \nu_1 + \nu_2 + \nu_3$, gdje su ν_1, ν_2 i ν_3 mjere te vrijedi $\nu_1 \ll \mu$, $\nu_2 + \nu_3 \perp \mu$, $\nu_i \perp \nu_j$ za $i \neq j$ i $\nu_3(\{x\}) = 0$ za svaki $x \in X$.*

Dokaz. Neka je $\nu = \nu_a + \nu_s$ Lebesgueova dekompozicija mjere ν s obzirom na mjeru μ. Tada je $\nu_a = \nu_1 \ll \mu$ i $\nu_s \perp \mu$. Nadalje, neka je $A = \{x \in X : \nu_s(\{x\}) > 0\}$ te za svaki $E \in \Sigma$ definirajmo mjere ν_1 i ν_3 na sljedeći način:

$$\begin{aligned}\nu_2(E) &:= \nu_s(E \cap A),\\ \nu_3(E) &:= \nu_s(E \cap A^c).\end{aligned}$$

Kako je $\nu_s = \nu_2 + \nu_3$ slijedi da je $\nu_2 + \nu_3 \perp \mu$. Mjere ν_2 i ν_3 su singularne zato što je $\nu_2(A^c) = 0$ i $\nu_3(A) = 0$. Zbog načina na koji smo definirali ν_2 i ν_3 slijedi da je $\nu_2, \nu_3 \perp \nu_1$. □

U *Propoziciji* 3.1 smo pokazali da je integral po mjeri mjera s predznakom. Ako uvedemo dodatnu pretpostavku da je funkcija f iz te propozicije nenegativna, tada je taj integral apsolutno neprekidna mjera s obzirom na mjeru po kojoj integriramo (*Primjer* 5.1). Zanimljivo je to da ako su mjere μ i ν iz *Propozicije* 3.1 σ-konačne, tada vrijedi i obrat *Primjera* 5.1 koji je iskazan u *Teoremu* 5.2. Spomenuti teorem nećemo koristiti u daljnjem radu, stoga izostavljamo dokaz.

Teorem 5.2 **(Radon - Nikodymov teorem).** *Neka su μ i ν σ-konačne mjere na izmjerivom prostoru (X, Σ). Ako je $\nu \ll \mu$, tada postoji Σ-izmjeriva funkcija $f\colon X \to [0, \infty\rangle$ takva da je*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu, \qquad \text{za svaki } A \in \Sigma.$$

Funkcija f je jedinstvena μ-s.s.

Dokaz. Vidi [3, str. 132–134, Teorem 4.2.2.]. □

Funkciju f iz *Teorema* 5.2 zovemo gustoća ili Radon-Nikodymova derivacija mjere ν po mjeri μ i označavamo s $d\nu = f d\mu$ ili $f = \frac{d\nu}{d\mu}$. Radon-Nikodymov teorem nam može poslužiti za određivanje mjere ν_a Lebesgueove dekompozicije mjere ν s obzirom na mjeru μ. U literaturi ovakav način određivanja mjere ν_a poznat je kao Lebesgue-Radon-Nikodymov teorem (vidi [5, str. 90, Teorem 3.8.]).

U *Primjeru* 5.4 vidjet ćemo kako izgleda Lebesgueova dekompozicija mjere s obzirom na mjeru s kojom je apsolutno neprekidna. Za ovaj primjer važno je prisjetiti se činjenice da je trivijalna mjera singularna sa svakom realnom mjerom.

Primjer 5.4. Lebesgueova dekompozicija mjere ν s obzirom na mjeru μ iz *Propozicije* 3.1 dana je s

$$\nu_a(E) = \int_E f d\mu$$

$$\nu_s(E) = 0,$$

za svaki izmjerivi skup E. ■

Primjer 5.5. Neka je $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ prostor mjere, gdje je λ Lebesgueova mjera te neka su $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcije zadane formulama:

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{4-x}, & x \leq 4 \\ 0, & x > 4 \end{cases}, \qquad g(x) := \begin{cases} (x-2)^3, & x \geq 2 \\ 0, & x < 2. \end{cases}$$

Nadalje, neka su ν i μ mjere na $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$\nu(E) := \int_E f\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

$$\mu(E) := \int_E g\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Odredite Lebesgueovu dekompoziciju mjere ν s obzirom na mjeru μ.

Rješenje. Definirajmo funkciju ν_s s

$$\nu_s(E) = \int_E f\chi_{\langle -\infty, 2]}\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Vrijedi $\nu_s \perp \mu$ zato što je skup $\langle -\infty, 2]$ nul-skup za mjeru μ (*Primjer* 4.1) te

$$\nu_s(\langle 2, \infty\rangle) = \int f\chi_{\langle -\infty, 2]}\chi_{\langle 2, \infty\rangle}\, d\lambda = \int f\chi_{\emptyset}\, d\lambda = 0,$$

pa je $\langle 2, \infty\rangle$ nul-skup za ν_s.
Definirajmo sada funkciju ν_a s

$$\nu_a(E) = \int_E f\chi_{\langle 2, \infty\rangle}\, d\lambda, \qquad E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Tvrdimo $\nu_a \ll \mu$.
Neka je $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ i $\mu(A) = 0$.

1° Ako je $A \subseteq \langle -\infty, 2]$, tada je očito da je i $\nu_a(A) = 0$.

2° Ako je $A \subseteq \langle 2, \infty\rangle$, tada je $\lambda(A) = 0$ (zbog $g(x) > 0$ za svaki $x \in \langle 2, \infty\rangle$).
Kako je $\lambda(A) = 0$, A je diskretan skup pa je i $\nu_a(A) = 0$.

Par (ν_a, ν_s) ovako definiranih mjera je Lebesgueova dekompozicija mjere ν s obzirom na μ. ■

5.2 Primjena Lebesgueove dekompozicije

U ovom potpoglavlju vidjet ćemo dva primjera primjene Lebesgueove dekompozicije u teoriji vjerojatnosti. Za početak ponovimo osnovne pojmove teorije vjerojatnosti (vidi [2] i [16]). U ovom poglavlju vjerojatnosni prostor ćemo označavati s $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ zato što je u teoriji vjerojatnosti oznaka X rezervirana za slučajnu varijablu, koju ćemo definirati u nastavku.

Definicija 5.3. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ jest slučajna varijabla ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, to jest $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \mathcal{F}$.*

Definicija 5.4. *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Funkcija distribucije od X jest funkcija $F_X\colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana s*

$$F_X(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = P(X \leq x).$$

Definicija 5.5. *Neka je Ω konačan ili prebrojiv skup. Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ zovemo diskretni vjerojatnosti prostor, a svaku funkciju $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$, na njemu, diskretna slučajna varijabla.*

Definicija 5.6. *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi*

(i) $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$,

(ii) postoji nenegativna funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi

$$P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \qquad \textit{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju X zovemo apsolutno neprekidna slučajna varijabla na Ω ili, kraće, neprekidna slučajna varijabla. Funkciju f tada zovemo funkcija gustoće vjerojatnosti slučajne varijable X ili, kraće, funkcija gustoće slučajne varijable X.

Znamo da je vjerojatnost konačna mjera pa možemo odrediti njezinu dekompoziciju s obzirom na Lebesgueovu mjeru λ. No vrijedi i više, odnosno svaka se vjerojatnost može prikazati kao konveksna kombinacija apsolutno neprekidne i singularne vjerojatnosti (*Primjer* 5.6).

Primjer 5.6. Svaka vjerojatnost P na $(\Omega, \mathcal{F})$ može se na jedinstven način prikazati kao konveksna kombinacija apsolutno neprekidne vjerojatnosti P_a i singularne vjerojatnosti P_s, to jest

$$P = \alpha P_a + (1-\alpha)P_s, \qquad \alpha \in [0,1].$$

Rješenje. Neka je $P = \nu_a + \nu_s$ Lebesgueova dekompozicija vjerojatnosti P s obzirom na Lebesgueovu mjeru λ. Mjere ν_a i ν_s nisu nužno vjerojatnosti zato što je

$$P(\Omega) = \nu_a(\Omega) + \nu_s(\Omega) = 1,$$

pa za $\nu_a(\Omega), \nu_s(\Omega) \neq 0$ vrijedi da je $\nu_a(\Omega), \nu_s(\Omega) < 1$.
Ako je $\nu_s(\Omega) = 0$, tada je očito $\nu_a(\Omega) = P(\Omega) = 1$ te je $P_a = \nu_a$ tražena apsolutno neprekidna vjerojatnost. Ako je, pak, $\nu_a(\Omega) = 0$, tada je $\nu_s(\Omega) = P(\Omega) = 1$ te je $P_s = \nu_s$ tražena singularna vjerojatnost. Stoga, pretpostavimo $\nu_a(\Omega) \neq 0, 1$. Kako je ν_a mjera, tada za svaki $B \in \mathcal{F}$ prema *Propoziciji* 1.1 (i) vrijedi

$$0 \le \nu_a(B) \le \nu_a(\Omega).$$

Dijeljenjem s $\nu_a(\Omega)$ dobivamo

$$0 \le \frac{\nu_a(B)}{\nu_a(\Omega)} \le 1$$

te za $B = \Omega$ vrijedi da je prethodni kvocijent jednak jedan, odnosno vjerojatnost P_a je dobro definirana s

$$P_a(B) = \frac{\nu_a(B)}{\nu_a(\Omega)}, \qquad B \in \mathcal{F}.$$

Analogno se dobiva da je

$$P_s(B) = \frac{\nu_s(B)}{\nu_s(\Omega)}, \qquad B \in \mathcal{F}.$$

Iz uvjeta $\alpha P_a(\Omega) = \nu_a(\Omega)$, dobivamo da je $\alpha = \nu_a(\Omega)$. Također, dobivamo da je $1 - \alpha = \nu_s(\Omega)$. Jedinstvenost ovakvog rastava slijedi iz jedinstvenosti Lebesgueove dekompozicije. ■

Singularna vjerojatnost P_s iz prethodnog primjera može se dalje rastaviti (vidi [17, str. 99]), a takav rastav se primjenjuje za računanje vjerojatnosti i matematičkog očekivanja miješanih slučajnih varijabli (eng. *mixed random variables*) o čemu se može više pronaći u knjigama [4], [10], [11] i [17].

U idućem primjeru pokazat ćemo da se svaka funkcija distribucije može prikazati kao konveksna kombinacija apsolutno neprekidne i singularne funkcije distribucije.

Primjer 5.7. Svaka funkcija distribucije $F_X\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ slučajne varijable X može se na jedinstven način prikazati u obliku

$$F_X = \alpha F_a + (1-\alpha)F_s, \quad \alpha \in [0,1],$$

gdje je F_a apsolutno neprekidna, a F_s singularna funkcija distribucije.

Rješenje. Prema *Primjeru* 5.6 vjerojatnost P na $(\Omega, \mathcal{F})$ može se jedinstveno prikazati kao:

$$P = \alpha P_a + (1-\alpha)P_s, \qquad \alpha \in [0,1].$$

Za svaki $x \in \mathbb{R}$ imamo:

$$F_X(x) = P(X \le x) = \alpha P_a(X \le x) + (1-\alpha)P_s(X \le x).$$

Uz oznake $F_a(x) = P_a(X \le x)$ te $F_s(x) = P_s(X \le x)$ slijedi tvrdnja. ■

Literatura

[1] G. de Barra, *Measure Theory and Integration*, 2nd Edition, Woodhead Publishing, Cambridge, 2003.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[3] D. L. Cohn, *Measure Theory*, Birkhäuser, Boston, 1980.

[4] J. D. Enderle, D. C. Farden, D. J. Krause, *Basic Probability Theory for Biomedical Engineers*, Morgan & Claypool Publishers, 2006.
URL: https://doi.org/10.2200/S00037ED1V01Y200606BME005

[5] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*, 2nd Edition, Wiley, 2007.

[6] A. Friedman, *Foundations of Modern Analysis*, Dover, New York, 1982.

[7] P. R. Halmos, *Measure Theory*, Springer-Verlag, New York, 1974.

[8] D. Jankov Maširević, *Zbirka riješenih zadataka iz teorije mjere i integracije*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[9] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[10] R. Kaas, M. Goovaerts, J. Dhaene, M. Denuit, *Modern Actuarial Risk Theory: Using R*, 2nd Edition, Wiley, New York, 2009.

[11] L. H. Koopmans, *Teaching Singular Distributions to Undergraduates*, The American Statistician, 37 (1983), 313–316.
URL: https://www.jstor.org/stable/2682772

[12] M. Papadimitrakis, *Notes on Measure Theory*, University of Crete, Department of Mathematics, 2004.

[13] A. Pietsch, *History of Banach Spaces and Linear Operators*, Birkhäuser, Boston, 2007.

[14] M. Pivato, *Analysis, Measure, and Probability: A visual introduction*, Mexico McGraw-Hill, Mexico, 2003.

[15] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, *Real Analysis*, 4th Edition, Pearson, Prentice Hall, Boston, 2010.

[16] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[17] J. J. Shynk, *Probability, Random Variables, and Random Processes: Theory and Signal Processing Applications*, Wiley, Hoboken, New Jersey, 2013.

[18] A. E. Taylor, *General Theory of Functions and Integration*, Blaisdell Publishing Company, Waltham, 1966.

[19] J. C. Taylor, *An Introduction to Measure and Probability*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[20] S. J. Taylor, *Introduction to Measure and Integration*, Cambridge University Press, New York, 2008.

[21] G. Teschl, *Topics in Real and Functional Analysis*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2019.
URL: `https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/fa.pdf`

[22] J. Yeh, *Real Analysis, Theory of Measure and Integration*, 2nd Edition, University of California, Irvine, 2006.

Naslov: **Dekompozicija mjere**

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s pojmom mjere s predznakom i njezinim rastavom na razliku dviju mjera. Ovakav rastav omogućuju nam dva teorema koja su u literaturi poznata kao Hahnovova i Jordanova dekompozicija mjere s predznakom. Također, upoznat ćemo se s dekompozicijom σ-konačne mjere na zbroj apsolutno neprekidne i singularne mjere koja je poznata kao Lebesgueova dekompozicija. Rad sadrži puno ilustrativnih primjera koji konkretiziraju ove apstraktne pojmove i tvrdnje.

Ključne riječi: mjera s predznakom, Hahnova dekompozicija, Jordanova dekompozicija, Lebesgueova dekompozicija

Title: **Measure decomposition**

Abstract

In this paper we will introduce the notion of signed measure and its representation as the difference of two measures. Such representation is enabled by two theorems which are known in the literature as Hahn and Jordan decomposition of signed measure. Also, we will introduce the decomposition of the σ-finite measure into the sum of an absolutely continuous and singular measure, which is known as Lebesgue decomposition. The paper contains many illustrative examples that concretize these abstract concepts and claims.

Keywords: signed measure, Hahn decomposition, Jordan decomposition, Lebesgue decomposition

Životopis

Rođena sam 22. veljače 1996. u Beogradu. Osnovnu školu Ernestinovo u Ernestinovu upisala sam 2002. godine. Nakon završene osnovne škole upisala sam III. gimnaziju Osijek u Osijeku, smjer prirodoslovno-matematički. Po završetku srednje škole 2014. godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom svog školovanja sudjelovala sam na brojnim natjecanjima od kojih bi istaknula osvojenu nagradu za likovno djelo na XIII. likovno-literarnom natječaju *Hrvatska kulturna baština*. Osim toga, moj crtež je objavljen u dječjem časopisu *Radost* (godina 56, broj 1) te se godinama nalazio naslikan na pročelju škole.