Redni i kardinalni brojevi. Hipoteza kontinuuma

Krizmanić, Antonio

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Antonio Krizmanić

Redni i kardinalni brojevi. Hipoteza kontinuuma.

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Antonio Krizmanić

Redni i kardinalni brojevi. Hipoteza kontinuuma.

Završni rad

Voditeljica: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2019.

Sadržaj

Sažetak

Pobliža objašnjenja pojmova rednih i kardinalnih brojeva i njihove povezanosti s hipotezom kontinuuma, dokazi njihovih osnovnih svojstava i svojstava kardinalne i ordinalne aritmetike te ukratko opisan proces dokaza neovisnosti hipoteze kontinuuma od Zermelo–Fraenkelove teorije skupova čine okosnicu ovoga rada. Svrha ovoga rada, koja se očituje kroz detaljna objašnjenja toka misli i zaključaka u dokazima teorema te u općim razmatranjima pojmova koji se uvode, čitatelja je postupno, na pristupačan i jasan način, upoznati s apstraktnim pojmovima rednih i kardinalnih brojeva te kompleksnim tumačenjem hipoteze kontinuuma postavljajući tako temelj za njihova daljnja izučavanja.

Ključne riječi

skup, dobro uređen skup, segmentni skup, redni brojevi, kardinalnost skupova, kardinalni brojevi, hipoteza kontinuuma, metoda forsiranja

Abstract

Closer explanation of the concepts of ordinal and cardinal numbers as well as their relationship to the continuum hypothesis, proofs of their fundamental properties and the properties of cardinal and ordinal arithmetic and the brief description of proving the independence of continuum hypothesis from Zermelo-Fraenkel set theory make up the framework of this paper. The purpose of this paper, which manifests itself in detailed explanations of thought processes and ideas throughout the proofs of theorems as well as general examination of terms which are defined, is to gradually introduce the reader to abstract concepts of ordinal and cardinal numbers and complex analysis of continuum hypothesis, setting the foundations for further research.

Keywords

set, well-ordered set, ordinals, ordinal numbers, cardinality, cardinal numbers, continuum hypothesis, method of forcing

1 Uvodna riječ

U jednom trenutku tijekom svojega obrazovanja, većina matematičara nauči kako se svi poznati matematički objekti mogu definirati u terminima skupova. Skup prirodnih brojeva s nulom možemo definirati kao najmanji induktivan skup; uređeni par (x, y) možemo definirati kao skup skupova $\{\{x\},\ \{x, y\}\}$; relacije, pa zatim i funkcije skupa sa svojim svojstvima mogu biti definirane skupovima uređenih parova i sl.

Važnost teorije skupova upravo je rezimirana gore navedenim: ona je kamen temeljac teorijske matematike, novi način tumačenja cjelokupnog matematičkog svijeta kroz striktni sustav aksioma upotpunjen jasnim logičkim načelima nadovezan na filozofska tumačenja prirode same matematike. Moći opisati kompleksne i/ili apstraktne matematičke pojave povlači potrebu za uporabom često jednako složenih pojmova i tvrdnji.

Cilj ovoga rada zbog toga i je prikupiti čim veći broj što jednostavnijih dokaza osnovnih tvrdnji vezanih uz jedne od fundamentalnih svojstava skupova - rednih i kardinalnih brojeva. Studenti (i čitatelji općenito, iako je rad stvaran prvenstveno sa studentima na pameti) koji se po prvi put susreću s navedenim pojmovima stoga mogu ovaj rad koristiti kao kolekciju znanja oblikovanu s namjerom lakšega razumijevanja i razvijanja intuicije.

Dokazi svih teorema su u potpunosti razrađeni čime se moguće poteškoće minimiziraju; tok misli pri dokazima prirodan je, cilj čega nije samo lakše razumijevanje istih, već i razvijanje intuicije kako konstruirati vlastite dokaze. Teorija je upotpunjena što općenitijim primjerima i razmatranjima svojstava koja se često uzimaju trivijalnima, a studenta početnika mogu omesti i otežati mu učenje gradiva.

U radu je dodatno razmotrena hipoteza kontinuuma kao primjer dokazano nedokazive tvrdnje, jedne od mnogobrojnih koje su se pojavile paralelno s razvojem teorije skupova. Ideja je u čitatelju probuditi znatiželju, ali i ukazati na moguće probleme koji su se javili u modernome matematičkome svijetu, a s kojima brojni matematičari nisu upoznati, što je dodatno elaborirano u završnim riječima zaključka samoga rada.

2 Redni brojevi

2.1 Dobra uređenost skupa. Segmentni skupovi.

Definicija 2.1. Potpuno uređen skup je ***dobro uređen*** ako svaki njegov neprazni podskup ima najmanji element.

Prisjetimo se kako je potpuno uređen skup (*lanac*) uređeni par $(X, <)$ sastavljen od skupa X i na njemu zadane binarne relacije $<$ koja je antirefleksivna, tranzitivna i povezana, odnosno koja za proizvoljne x, y, z iz skupa X zadovoljava:

(i) $\neg(x < x)$;

(ii) iz $x < y$ i $y < z$ slijedi $x < z$;

(iii) iz $x \neq y$ slijedi $x < y$ ili $y < x$.

Dobro uređen skup prvi put spominje G. Cantor[1] 1883. godine u članku "Grundlagen". Njegova je definicija bila nezgrapnija od definicije 2.1, no logički ekvivalentna s njom.

> *Dobro uređenim skupom* smatramo svaki dobro definiran skup čiji su elementi povezani jedan s drugim pridruženim, točno određenim slijedom po kojemu postoji prvi element skupa, čiji je svaki element, u slučaju da nije posljednji u slijedu, popraćen drugim koji je odrediv, te dodatno za svaki konačan ili beskonačnom podskup postoji element koji je sljedeći u slijedu u odnosu na sve njegove elemente (osim u slučaju kada ne postoji sljedbenik odabranog podskupa), v. [1].

Uočimo da, kako bi bio dobro uređen po Cantoru, proizvoljan potpuno uređen skup S treba zadovoljiti sljedeća dva svojstva:

(i) postoji prvi element;

(ii) ako je S' proizvoljan podskup od S, te ako postoji barem jedan element skupa S koji dolazi nakon svih elemenata skupa S', tada postoji element skupa S takav da između njega i elemenata skupa S' ne postoji niti jedan element skupa S.

Prazan skup te svaki jednočlani skup uzimaju se za dobro uređene skupove.

Razmotrimo jedno od osnovnih svojstava dobro uređenog skupa: neka je $(X, <)$ proizvoljan dobro uređen skup i A njegov neprazan podskup. Dobra uređenost skupa X povlači njegovu potpunu uređenost, pa je i podskup A potpuno uređen (pokazujemo *svođenjem na kontradikciju*). Svaki je neprazan podskup B skupa A ujedno i podskup skupa X, pa on ima najmanji element u X koji je ujedno element skupa A, odnosno:

$$\exists min(B) = b \in X \quad \wedge \quad B \subseteq A \quad \Rightarrow \quad b \in A.$$

Dakle, neprazan podskup skupa X potpuno je uređen skup čiji svaki neprazan podskup ima minimalan element, što motivira lemu 2.1.

[1] *Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor*, 1845. - 1918. Njemački matematičar, utemeljitelj teorije skupova i koncepta transfinitnih brojeva, v. [7].

Lema 2.1. *Svaki podskup dobro uređenog skupa također je dobro uređen.*

Slučaj praznoga podskupa dobro uređenog skupa u prethodnoj lemi nema potrebe dodatno razmatrati zbog trivijalnosti istoga.

Sljedeći primjer ilustrira karakteristiku dobro uređenoga skupa bitnu za definiciju kardinalnosti preko rednoga broja: relacija dobroga uređaja na nepraznome skupu ne mora biti jedinstvena. Točnije, ona nije jedinstvena kada god radimo sa skupovima s više od jednoga elementa.

Primjer 2.1. Lako se pokaže kako je relacija "biti kongruentan modulo n" na skupu $\mathbb{Z}$ relacija ekvivalencije za svaki prirodan broj n sa pripadnim klasama ekvivalencije oblika

$$[k] = \{z \in \mathbb{Z} \mid z = k (\mathrm{mod}\ n)\}, \quad \forall k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1.$$

Svaki element skupa $\mathbb{Z}$, pa posebno i svaki prirodan broj, pripada jednoj i točno jednoj od navedenih klasa, iz čega slijedi kako je familija $\mathcal{A} = \{[k] \cap \mathbb{N},\, k = 0, 1, \ldots, n-1\}$ jedna particija skupa prirodnih brojeva. Familiju $\mathcal{A}$ čine podskupovi skupa prirodnih brojeva koji pri dijeljenju s brojem n daju isti ostatak.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Definirajmo uređajnu relaciju $\prec$ na $\mathbb{N}$ na sljedeći način:

- ako su $x, y \in \mathbb{N}, x \neq y$ te ako su $x, y \in [k] \cap \mathbb{N}$ za neki $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, bit će $x \prec y$ ako je $x < y$ u prirodnom uređaju;
- ako su $x, y \in \mathbb{N}, x \neq y$ te ako su $x \in [k] \cap \mathbb{N}, y \in [l] \cap \mathbb{N}$ za neke $k, l \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $k \neq l$, bit će $x \prec y$ ako je $k < l$ u prirodnom uređaju.

Dobro uređen skup $(\mathbb{N}, \prec)$ izgleda ovako:

$$n,\, 2n,\, \ldots,\, kn,\, \ldots,\, 1,\, n+1,\, \ldots,\, kn+1,\, \ldots,\, 2,\, n+2,\, \ldots,\, kn+2,\, \ldots,\, n-1,\, 2n-1,\, \ldots,\, kn-1,\, \ldots$$

$\triangle$

Gornjim smo primjerom generirali beskonačno mnogo relacija dobroga uređaja na skupu prirodnih brojeva. U slučaju $n = 1$, relacija uređaja svodi se na prirodan uređaj $<$, slučaj $n = 2$ svodi se na razdiobu skupa prirodnih brojeva na parne i neparne brojeve, pri čemu su parni brojevi "kolektivno manji" od neparnih i sl.

U istom se primjeru očituje jedno od definicijskih svojstava u Cantorovoj definiciji dobro uređenoga skupa: *ne mora svaki element koji nije najmanji imati neposrednog prethodnika, no svaki njegov element osim zadnjega (ako on postoji) ima neposrednog sljedbenika.* Kako bismo se uvjerili u prvi dio tvrdnje, dovoljno je razmotriti element 2 u primjeru 2.1. Njegov neposredni prethodnik bio bi najveći element skupa $[1] \cap \mathbb{N}$, no kako takav ne postoji, ne postoji niti neposredni prethodnik elementa 2. S druge strane, uzmimo proizvoljan $a \in \mathbb{N}$ i razmotrimo skup $B = \{x \in \mathbb{N} \mid a \prec x\}$. Jer je $(\mathbb{N}, \prec)$ dobro uređen skup i B njegov neprazan podskup, on ima najmanji element koji je ujedno i neposredni sljedbenik elementa a (kada on to ne bi bio, imali bismo element skupa B manjeg od njegova najmanjeg elementa). Time smo ujedno pokazali kako iz definicije 2.1 slijedi Cantorova definicija dobre uređenosti.

Definicija 2.2. Neka je $(X,<)$ dobro uređen skup i $y \in X$. ***Segment*** $X(y)$ skupa X definiran elementom y podskup je skupa X koji se sastoji od svih elemenata skupa X koji su strogo manji od y:

$$X(y) = \{z \in X \mid z < y\}.$$

Uzmimo dobro uređen skup $(X,<)$ te neke njegove različite elemente a i b. Zbog povezanosti relacije $<$, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti kako je $a < b$. Po definiciji segmenta skupa X definiranog elementom a, $\forall y \in X(a)$ vrijedi $y < a$. Uzevši u obzir tranzitivnost relacije $<$ te činjenicu kako $b \notin X(a)$, slijedi $X(a) \subset X(b)$. Dakle, $\mathcal{F} = \{X(x) \mid x \in X\}$ je strogo monotono rastuća familija podskupova skupa X s obzirom na relaciju sadržavanja $\subset$ koja je ujedno i relacija potpunog uređaja na $\mathcal{F}$. Definirajmo funkciju $f\colon X \to Y$ pravilom pridruživanja $f(x) = X(x)$. Pokazali smo kako je f strogo monotono rastuća funkcija, pa je ona i injekcija. Uzmimo sada Y proizvoljan segment skupa X. Po kontrapoziciji tvrdnje kako svaki dobro uređen skup nije sličan niti jednom svojem segmentu[2] slijedi kako je $Y \neq X$, odnosno postoji element u X veći od svakog elementa u Y (jer je Y segment). Dalje, Cantorova definicija dobro uređenog skupa implicira kako postoji element y skupa X takav da između njega i elemenata skupa Y ne postoji niti jedan element skupa X. Lako se pokaže kako je $Y = X(y)$. Surjektivnost funkcije f slijedi.

To je razmatranje motivacija za sljedeći teorem, bitan u tumačenju i dokazivanju svojstava segmentnoga skupa ključnih za definiciju rednoga broja, a onda i kardinalnosti.

Teorem 2.2. *Svaki dobro uređen skup sličan je skupu svih svojih segmenata uređenih relacijom sadržavanja.*

Dokaz. Uzmimo dobro uređen skup $(X,<)$ i pripadnu familiju segmenata $\mathcal{F}$ kao u razmatranju iznad. Kako je X potpuno uređen skup te funkcija f iz razmatranja uzlazna bijekcija sa X na $\mathcal{F}$, sličnost odmah slijedi[3]. ∎

Dobro uređeni skupovi igraju vrlo bitnu ulogu pri apstrahiranju metode matematičke indukcije koju smo do sada koristili na skupu $\mathbb{N}$ i/ili $\mathbb{N}_0$.

Teorem 2.3. *(Princip transfinitne indukcije)*
Neka je $(A,<)$ dobro uređen skup, a $S \subseteq A$ takav podskup skupa A da za svaki element $x \in A$ iz $A(x) \subseteq S$ slijedi $x \in S$. Tada je $S = A$.

Dokaz. Dokaz provodimo svođenjem na kontradikciju.
Pretpostavimo zato kako je $S \neq A$. Budući da je po pretpostavci teorema $S \subseteq A$, nužno je $S \subsetneq A$. Tada $A \backslash S$ nije prazan skup, a kako je podskup dobro uređenog skupa, ima najmanji

[2] *Teorem.* Dobro uređen skup nije sličan nijednom svom segmentu.
Dokaz teorema je izostavljen budući da su za njega potrebne tvrdnje koje nisu od važnosti za ovaj rad; v. [5], str. 93.

[3] *Sličnost.* Sličnost dvaju djelomično uređenih skupova $(X,<)$ i $(Y,\prec)$ slijedi iz egzistencije bijektivnog preslikavanja $f\colon X \to Y$ takvog da su f i f^{-1} izotone funkcije. Međutim, može se pokazati kako je nužan i dovoljan uvjet sličnosti potpuno uređenih skupova $(X,<)$ i $(Y,\prec)$ egzistencija bijekcije koja čuva uređaj.
Definicija sličnosti - v. [5], str. 78.
Dokaz tvrdnje - v. [5], str. 80.

element m. Međutim, kako je m najmanji element u $A \backslash S$, svaki $x < m$ nalazi se u S, pa je segment $A(m)$ sadržan u S. Prema pretpostavci je tada i $m \in S$, što je kontradikcija. Dakle, $S = A$. ∎

Neka podskup A dobro uređenog skupa $(\mathbb{N}, <)$, pri čemu je $<$ prirodan uređaj na $\mathbb{N}$, zadovoljava uvjete teorema 2.3, što možemo zapisati u formi sljedećih opservacija:

- Prazan skup podskup je svakoga skupa, pa tako i skupa A. Koristeći činjenicu kako je $\mathbb{N}(1) = \emptyset$, slijedi kako je $1 \in A$;

- Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$, iz činjenice kako je $\mathbb{N}(n) \subseteq A$ slijedi kako je $n \in A$. Dakle, $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n-1\} \subseteq A$ implicira $n \in A$.

Tada je $A = \mathbb{N}$. Ovaj slučaj primjene principa transfinitne indukcije nazivamo *principom jake indukcije*, istinskim poopćenjem standardnoga principa matematičke indukcije:

> *Neka je $\mathcal{P}(n)$ tvrdnja zadana na skupu $\mathbb{N}$. Ako je $\mathcal{P}(1)$ istinita, te ako iz činjenice kako je tvrdnja $\mathcal{P}(k)$ istinita $\forall k \in \mathbb{N}_{n-1}$ slijedi istinitost tvrdnje $\mathcal{P}(n)$, tada je tvrdnja $\mathcal{P}$ istinita za svaki prirodan broj n.*

Gornje se razmatranje, isto kao i u principu standardne matematičke indukcije, može poopćiti u smislu početnoga uvjeta, odnosno baze. Naime, jer je $(\mathbb{N}, <)$ dobro uređen skup, to je i svaki njegov podskup (prema lemi 2.1). U ovome slučaju, podskup od interesa je oblika $\mathbb{N}_{\geq k}$, $k \in \mathbb{N}$. Postupimo li analogno kao u gornjem razmatranju, dobit ćemo *opći oblik principa jake indukcije*:

> *Neka je $\mathcal{P}(n)$ tvrdnja zadana na skupu $\mathbb{N}_{\geq k}$, $k \in \mathbb{N}$. Ako je $\mathcal{P}(k)$ istinita, te ako iz činjenice kako je tvrdnja $\mathcal{P}(l)$ istinita $\forall l \in \{k,\ k+1,\ \ldots,\ n-1\}$ slijedi istinitost tvrdnje $\mathcal{P}(n)$, tada je tvrdnja $\mathcal{P}$ istinita za svaki prirodan broj $n \geq k$.*

Teorem 2.4. *Neka su $(X, <)$ i $(Y, \prec)$ dva slična dobro uređena skupa, a $f\colon X \to Y$ slično preslikavanje. Tada f preslikava svaki segment skupa X u segment skupa Y te je $f(X(a)) = Y(f(a))$.*

Dokaz. Neka je $a \in X$ po volji odabran i $f(a)$ slika elementa a u Y.
Neka je $y \in f(X(a))$; tada zbog bijektivnosti f postoji $x \in X(a)$ takva da je $y = f(x)$. Kako je $x < a$ i kako sličnost čuva uređaj, bit će $y = f(x) \prec f(a)$, tj. $f(x) \in Y(f(a))$, pa je

$$f(X(a)) \subseteq Y(f(a)). \tag{1}$$

Uzmimo sada kako je $y \in Y(f(a))$, tj. $y \prec f(a)$, i neka je $x \in X$ takav da je $f(x) = y$. Kako je $f(x) = y \prec f(a)$ te kako sličnost čuva uređaj, bit će $x < a$, tj. $x \in X(a)$ i $f(x) = y \in f(X(a))$, pa je

$$Y(f(a)) \subseteq f(X(a)). \tag{2}$$

Iz (1) i (2) slijedi $f(X(a)) = Y(f(a))$. ∎

2.2 Definicija i svojstva segmentnih skupova. Teorem o dobrom uređenju.

Definicija 2.3. Dobro uređen skup $(X, <)$ naziva se ***segmentni skup*** ako za svaki element $x \in X$ vrijedi $x = X(x)$, odnosno svaki element skupa jednak je segmentu koji je definiran tim elementom.

Neka je X segmentni skup čiji je jedini element x. Da bi X uistinu bio segmentni skup, po definiciji mora vrijediti $x = X(x)$, a kako je x ujedno i najmanji element segmentnoga skupa X, segment definiran elementom x prazan je skup. Iz toga slijedi kako je svaki jednočlani segmentni skup oblika $\{\emptyset\}$.

Razmotrimo dvočlani segmentni skup $X = \{x, y\}$, $x < y$. Najmanji element toga skupa je x, pa slijedeći postupak iz razmatranja oblika jednočlanoga segmentnog skupa zaključujemo kako je $x = \emptyset$. Nadalje, za $y \in X$ vrijedi

$$y = X(y) = \{z \in X \mid z < y\} = \{x\} = \{\emptyset\},$$

odnosno svaki dvočlani segmentni skup je oblika $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Nastavljajući gornji postupak, induktivno bismo mogli pokazati kako je početak svakog segmentnog skupa koji ima barem tri člana oblika $\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$.

Dokazat ćemo sada neka važna svojstva segmentnih skupova.

Teorem 2.5. *Svaki je segment segmentnog skupa $(X, <)$ segmentni skup. Ako je pravi podskup Y segmentnog skupa X segmentni skup, onda je Y segment skupa X.*

Dokaz. Neka je $(X, <)$ segmentni skup te $(Y, <)$ njegov segment. Prije samoga dokaza pokažimo kako za $a, b \in X, b < a$ vrijedi $(X(a))(b) = X(b)$.

$$y \in (X(a))(b) \quad \overset{i)}{\Leftrightarrow} \quad y \in \{x \in X(a) \mid x < b\} \quad \overset{ii)}{\Leftrightarrow} \quad y \in X(b), \tag{3}$$

i) Definicija segmenta dobro uređenog skupa $X(a)$.

ii) Kako je $b < a$, skup elemenata segmenta $X(a)$ manjih od b jednak je skupu elemenata skupa X koji su manji od b, odnosno jednak je skupu $X(b)$.

Već smo pokazali (dokaz teorema 2.2) kako postoji $a \in X$ takav da je $Y = X(a)$. Neka je $b < a$ bilo koji element iz Y. Slijedi

$$Y(b) = (X(a))(b) \overset{(3)}{=} X(b) \overset{X \text{ seg. skup}}{=} b,$$

tj. Y je segmentni skup.

Neka je Y segmentni pravi podskup od X. Tada za svaki $a \in Y$ vrijedi $X(a) = a = Y(a)$, tj. $X(a) = Y(a)$. Dakle, skup svih prethodnika elementa a u X podudara se sa skupom svih prethodnika elementa a u Y. Osim toga, po pretpostavci je $X \backslash Y$ neprazan pa ima najmanji element, recimo c. Kada bi postojao $y \in Y$ takav da je $c < y$ (odnos elemenata c i y razmatramo u skupu X, jer $c \notin Y$), vrijedilo bi $c \in X(y) = Y(y)$ pa bi po definiciji segmenta slijedilo $c \in Y$, što je kontradikcija. Iz toga slijedi tvrdnja teorema: svaki element skupa Y manji je od elementa c koji je najmanji element u $X \backslash Y$, tj. $Y = X(c)$. ■

Teorem 2.6. *Ako su segmentni skupovi X i Y slični, oni su jednaki.*

Dokaz. Dokaz provodimo primjenom principa transfinitne indukcije i metode svođenja na kontradikciju.
Neka je $f\colon X \to Y$ slično preslikavanje skupa X na skup Y i neka je $S = \{t \in X \mid f(t) = t\}$ skup fiksnih točaka preslikavanja f. Pretpostavimo kako je $S \neq X$, odnosno kako se skup $X \backslash S$ sastoji od barem jednoga elementa. Budući da je $X \backslash S$ neprazan podskup dobro uređenog skupa X, postoji najmanji element $t_0 \in X$ za kojeg je $f(t_0) \neq t_0$. Iz invarijantnosti sličnosti djelomično uređenih skupova slijedi kako je $f(t_0)$ najmanji element u Y koji nije u skupu $f(S)$[4]. Prema teoremu 2.4, slično preslikavanje f segment skupa X preslikat će u segment skupa Y te će dodatno vrijediti $Y(f(t_0)) = f(X(t_0))$. Dalje, kako za sve $t < t_0$ vrijedi $f(t) = t$, slika segmenta $X(t_0)$ bit će jednaka istome, odnosno $f(X(t_0)) = X(t_0)$. Jer su X i Y segmentni skupovi, možemo upotpuniti slijed zaključaka iz kojega slijedi kontradikcija s pretpostavkom:

$$f(t_0) = Y(f(t_0)) = f(X(t_0)) = X(t_0) = t_0.$$

Dakle, $S = X$ (*slično preslikavanje sa skupa X na skup Y je identiteta*), iz čega slijedi $X = Y$. ■

Korolar 2.6.1. *Dobro uređen skup može biti sličan najviše jednom segmentnom skupu.*

Dokaz. Ako je dobro uređen skup sličan s dva segmentna skupa, po tranzitivnosti relacije "biti sličan" su i oni međusobno slični, pa su po teoremu 2.6 i jednaki. ■

Teorem 2.7. *Presjek dvaju segmentnih skupova je segmentni skup.*

Dokaz. Neka su X i Y segmentni skupovi. Neka je $a \in X \cap Y$, tj $a \in X$ te $a \in Y$; onda je $X(a) = a$ i $Y(a) = a$. Jer a ima iste prethodnike u X i u Y, slijedi $a = (X \cap Y)(a)$. Prema tome je i $X \cap Y$ segmentni skup. ■

Teorem 2.8. *Neka su X i Y dva segmentna skupa. Tada je ispunjena jedna i samo jedna od mogućnosti.*

1. *$X = Y$;*
2. *Y je jednak segmentu od X;*
3. *X je jednak segmentu od Y.*

Dokaz. Neka je $X \neq Y$. Prema teoremu 2.7 je $X \cap Y$ segmentni skup. Ako je $X \cap Y$ pravi podskup od X, onda je $Y \subset X$. Prema teoremu 2.5, Y je segment od X i *2.* je ispunjeno. Slično, ako je $X \cap Y$ pravi podskup od Y, slijedi da je X segment skupa Y i *3.* je ispunjeno.

[4]Svako slično preslikavanje f dvaju djelomično uređenih skupova $(X, <)$ i $(Y, \prec)$ zadovoljava tzv. *invarijante sličnosti*: svojstva koja, ako vrijede za jedan od skupova u pitanju, vrijedit će i za drugi. Jedna od osnovnih invarijanti sličnosti je egzistencija infimuma skupa $f(A) \subseteq Y$ u slučaju kada postoji infimum skupa $A \subseteq X$. Dodatno, ako je $a = inf(A)$, tada je $f(a) = inf(f(A))$. Zainteresirani čitatelj može saznati više na stranicama 80. i 81. udžbenika [5].

Pretpostavka da je $X \cap Y$ pravi podskup od X i pravi podskup od Y nije moguća. Tada bi, naime, prema teoremu 2.5 postojali elementi $a \in X$ i $b \in Y$ takvi da je $X \cap Y = X(a)$ i $X \cap Y = Y(b)$ pa bi iz segmentnosti skupova X i Y slijedilo $a = b$. Zbog jednakosti a i b bi bilo $a \in X \cap Y$, što je u proturječju s $X \cap Y = X(a)$ (*isto bi se dalo pokazati za* $b \in X \cap Y$). Ako nije ispunjeno ni *2.* ni *3.*, onda je ispunjeno *1.* ■

Sljedeći teorem ćemo iskazati, no njegov dokaz, zbog opsežnosti i činjenice kako nam sam teorem koristi isključivo kao pomoćna tvrdnja pri dokazu teorema koji ga slijedi, nećemo izvoditi. Najprije ćemo definirati relaciju produljenja na skupu dobro uređenih skupova.

Definicija 2.4. Neka su $(X,<)$ i $(Y,<)$ dobro uređeni skupovi. Ako je skup Y segment skupa X, kažemo da je skup X ***produljenje*** skupa Y.

Teorem 2.9. *Neka je S potpuno uređen skup segmentnih skupova uređen relacijom produljenja, a A neka je unija svih elemenata iz S. Tada postoji jedinstveno dobro uređenje skupa A tako da je A segmentni skup koji je produljenje svakog elementa iz S (različit od A, ako je $A \in S$). Skup A ujedno je i supremum skupa S.*

Teorem 2.10. *(Teorem enumeracije)*
Svaki dobro uređen skup sličan je jedinstvenom segmentnom skupu.

Dokaz. Nakon što pokažemo egzistenciju segmentnoga skupa sličnog proizvoljnome dobro uređenom skupu, njegova će jedinstvenost slijediti iz teorema 2.6 ili korolara 2.6.1.
Neka je $(X,<)$ dobro uređen skup i neka je $a \in X$ takav da je za svaki $x \in X$, $x < a$ segment $X(x)$ sličan nekom segmentnom skupu S_x, te neka je $Z = \{S_x \mid x < a\}$ klasa svih takvih segmentnih skupova. Kako je po teoremu 2.6 segmentni skup S_x sličan sa skupom $X(x)$ jedinstven za svaki $x < a$, dobro je definirana funkcija $f\colon X(x) \to Z$, $f(x) = S_x$. Prema *aksiomu supstitucije*[5], klasa Z, kao slika funkcije f, je skup. Iz teorema 2.9 slijedi da je i unija $S_a = \bigcup\{S_x \mid x < a\}$ segmentni skup, a kako je dobro uređen skup sličan skupu svojih segmenata te kako je po lemi 2.1 $X(a)$ dobro uređen skup, zaključujemo da je $X(a) \simeq S_a$. Ostatak dokaza provodimo koristeći princip transfinitne indukcije i metodu svođenja na kontradikciju.

Principom transfinitne indukcije dokazat ćemo da je svaki segment skupa X sličan segmentnom skupu. Kada to ne bi bilo točno, postojao bi najmanji element $t_0 \in X$ takav da $X(t_0)$ nije sličan nekom segmentnom skupu. To, međutim, prema upravo dokazanom, nije moguće, jer ako su za sve $x < t_0$ segmenti $X(x)$ slični segmentnim skupovima S_x, onda je i $X(t_0)$ sličan uniji $S_{t_0} = \bigcup\{S_x \mid x < t_0\}$.

[5]*Aksiom supstitucije.* Neka je A zadan skup, a $P(x,y)$ izjavna funkcija dviju nepoznanica tako da za svaki element $a \in A$ postoji jedinstven skup b tako da je $P(a,b)$ istinito. Tada postoji jedinstven skup B kojemu su elementi svi skupovi y za koje postoji element $x \in A$ tako da je $P(x,y)$ istinito.
Intuitivno se aksiom može ovako izreći, iskaz kojega smo mi koristili pri dokazu:

> ako je na skupu A definirana funkcija f i za svaki element $a \in A$ je $f(a)$ skup, onda je $B = \{f(a) \mid a \in A\}$ također skup.

Na taj smo način ustanovili da za svaki segment $X(x)$ skupa X postoji jedinstveni segmentni skup S_x koji mu je sličan. Ponovnom primjenom aksioma supstitucije zaključujemo da je $\{S_x \mid x \in X\}$ skup. Označimo ga sa $\mathcal{S}$. Prema teoremu 2.9, svi elementi skupa $\mathcal{S}$ čine segmentni skup, nazovimo ga Y, kojeg su segmenti upravo elementi od $\mathcal{S}$. Kako je po teoremu 2.2 svaki dobro uređen skup sličan skupu svih svoji segmenata, zaključujemo da je $X \simeq Y$ ■

U dokazu teorema o dobrom uređenju važnu ulogu igra Zornova lema koju je 1922. godine dokazao K. Kuratowski. **M. Zorn** pokazao je njezinu važnost u mnogim dokazima i ukazao na bitnu ulogu koju je obnašala u teoriji skupova te uopće u matematici. Pri dokazu, kojega mi nećemo razmatrati zbog opširnosti, Kuratowski bitno rabi aksiom izbora[6] zbog čega su Zornova lema i teorem o dobrom uređenju bili predmetom mnogih rasprava u matematičkome svijetu.

Lema 2.11. *(Zornova lema)*
Ako je $(X, <)$ djelomično uređen skup u kojem svaki lanac ima gornju među, onda X ima barem jedan maksimalan element.

Proučavajući dobro uređene skupove, vrlo brzo bismo se uvjerili kako ti skupovi imaju neka jednostavna svojstva koja nemaju skupovi koji nisu dobro uređeni. Zato se prirodno postavlja pitanje može li se svaki skup dobro urediti. I sam se Cantor pitao isto već pri samoj definiciji dobro uređenih skupova u svome radu [1], no potrebna je bila 21 godina da bi **E. Zermelo** dokazao kako je odgovor na to pitanje potvrdan. Njegov je teorem u potpunosti egzistencijalan, tj. ne daje postupak kako skup dobro urediti. Dakle, ako radimo s rednim brojem i kardinalnošću skupa $\mathbb{R}$, koristimo činjenicu kako $\mathbb{R}$ možemo dobro urediti iako njegov dobar uređaj još nije poznat.

Teorem 2.12. *(**Teorem o dobrom uređenju**, Zermelov teorem)*
Svaki se skup može dobro urediti.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti služeći se Zornovom lemom.
Neka je X bilo koji skup i neka je $\mathcal{A}$ sustav svih dobro uređenih podskupova skupa X. Kako je $\emptyset \subseteq X$ te kako je prazan skup dobro uređen po definiciji, bit će $\emptyset \in \mathcal{A}$. Dodatno, svaki jednočlani podskup skupa X element je $\mathcal{A}$, dakle $\mathcal{A}$ je neprazan. Skup $\mathcal{A}$ ćemo djelomično urediti relacijom produljenja koju ćemo označiti s $\prec$. Djelomična uređenost slijedi iz činjenice kako nisu svaka dva elementa skupa $\mathcal{A}$ usporediva po relaciji $\prec$. Neka je $\mathcal{L} = \{X_\alpha \mid \alpha \in S\}$ lanac u $\mathcal{A}$, tj. ako su X_{α_1} i X_{α_2} elementi iz $\mathcal{L}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in S$ i $\alpha_1 \neq \alpha_2$, onda je jedan od dobro uređenih skupova X_{α_1} ili X_{α_2} produljenje drugoga. Skup $B = \bigcup \mathcal{L}$ produljenje je svakog elementa iz $\mathcal{L}$ ili je jednak najvećem elementu, ako postoji. Po Zornovoj lemi, kako je skup $\mathcal{A}$ djelomično uređen te kako smo svakom lancu $\mathcal{L}$ pridružili njegovu gornju među B, skup

[6] *Aksiom izbora.* Za svaki skup A elementi kojeg su međusobno disjunktni skupovi A_α, postoji barem jedan skup B koji sadrži jedan i samo jedan element svakog od skupova A_α.
Specifičnost ovoga aksioma u tome je što on omogućuje da se izvrši beskonačno mnogo izbora. Aksiom izbpra osigurava egzistenciju skupa B, ali ne daje mogućnost njegove konstrukcije. **K. Gödel** pokazao je da uporaba aksioma izbora ne može dovesti do proturječja ako nije postojalo proturječje i bez tog aksioma.

$\mathcal{A}$ ima barem jedan maksimalan element M. Skup M dobro je uređen i sastoji se od svih elemenata skupa X, tj. M je dobro uređenje skupa X. Naime, kad bi bilo $M \neq X$, postojao bi element $m \in X \backslash M$, a tada se skup $\overline{M} = M \cup \{m\}$ može dobro urediti tako da m bude zadnji elementa u $\overline{M}$, pa bi $\overline{M}$ bio produljenje od M, što je nemoguće jer je M maksimalan element. ■

Primjer 2.2. Neka je X proizvoljno odabran konačan skup s više od jednog elementa. Svaka permutacija elemenata skupa X definira jedan dobar uređaj na skupu X, odakle slijedi kako imamo $n!$ načina na koji možemo dobro urediti konačan skup s n elemenata, $n > 1$.

△

2.3 Redni brojevi. Aritmetika rednih brojeva.

Definicija 2.5. Neka je $(X, <)$ dobro uređen skup. Jedinstven segmentni skup sličan skupu X naziva se ***redni broj*** skupa X.

Redni broj skupa X označava se sa $\overline{X}$, $ordA$ ili $t(A)$. Mi ćemo koristiti posljednju od navedenih oznaka. U slučaju kada radimo sa segmentnim skupom $(X, <)$, on je ujedno i redni broj toga skupa, pa se pojam rednog broja ne razlikuje od pojma segmentnog skupa. Stoga se segmentni skupovi, kada se rabe kao redni brojevi, označavaju malim grčkim slovima, dok u slučaju razmatranja segmentnog skupa kao skupa koristimo standardizirana velika latinična slova.

Uzmimo proizvoljan skup T. Skup $T^+ = T \cup \{T\}$, tj. unija skupa T i jednočlanog skupa $\{T\}$ naziva se *sljedbenik skupa* T. Skup koji sadrži prazan skup i sljedbenika svakog svog elementa nazivamo *induktivnim skupom.* Egzistenciju takvog skupa jamči aksiom beskonačnosti. Jednostavno se pokaže kako familija svih induktivnih skupova ima najmanji element u smislu relacije sadržavanja, skup kojega uobičajeno označavamo sa ω. Napisat ćemo sada po redu nekoliko elemenata skupa ω i ujedno uobičajenu oznaku za svaki od napisanih elemenata:

$$\emptyset =: 0,$$
$$\emptyset \cup \{\emptyset\} = \{\emptyset\} =: 1 = 0^+,$$
$$\{\emptyset\} \cup \{\{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\} =: 2 = 1^+, \ \ldots$$

Uspoređujući elemente skupa ω s razmatranjem koje je slijedilo nakon definicije 2.3, uočit ćemo kako su elementi skupa ω konačni segmentni skupovi. Te ćemo skupove shvaćati kao redne brojeve, tako da su sada uključeni i beskonačni redni brojevi.

Redne brojeve koji odgovaraju konačnim segmentnim skupovima označavat ćemo s $0, 1, 2$ itd. Skup svih konačnih rednih brojeva i dalje ćemo označavati sa ω. Svaki redni broj α ima neposrednog sljedbenika $\alpha^+ = \alpha \cup \{\alpha\}$, no nema svaki redni broj svog neposrednog prethodnika. Ta se činjenica očituje već za prvi beskonačan redni broj ω: po samoj konstrukciji induktivnog skupa, tj. rednog broja ω očigledno ne postoji redni broj α takav da je $\alpha^+ = \omega$. Gornje razmatranje motivira sljedeću podjelu rednih brojeva:

Definicija 2.6. Redni broj α je ***prve vrste*** ili ***izoliran redni broj*** ako ima neposrednog prethodnika; α je ***redni broj druge*** vrste ili ***granični redni broj*** ako nema neposrednog prethodnika.

Definicija 2.7. Ako su α i β dva različita redna broja, kaže se da je $\alpha < \beta$ ako je α segment od β ili $\alpha \subset \beta$.

Prirodno se postavlja pitanje o uređenosti proizvoljnog skupa rednih brojeva. Naime, nakon što smo ustanovili što za dva različita redna broja znači da je jedan manji od drugoga, te uzevši u obzir kako se jednakost rednih brojeva na prirodan način definira jednakošću skupova, ostaje nam ispitati mogu li se svaka dva proizvoljna redna broja usporediti, neovisno o njihovoj konačnosti. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.13. *(Trihotomija rednih brojeva)*
Za redne brojeve α i β uvijek je ispunjena jedna i samo jedna od relacija

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha$$

Dokaz. Kako su redni brojevi u suštini segmentni skupovi, tvrdnja slijedi iz teorema 2.8. ■

Teorem 2.14. *Neka su X i Y dobro uređeni skupovi i neka je redni broj skupa X jednak α, a redni broj skupa Y jednak β. Ako je $X \subseteq Y$, onda je $\alpha \leq \beta$.*

Dokaz. Koristeći teorem o trihotomiji rednih brojeva zaključujemo da, kada ne bi bilo $\alpha \leq \beta$, bilo bi $\beta < \alpha$. Tada bi iz $Y \simeq \beta \subset \alpha \simeq X \subseteq Y$ slijedilo kako je Y sličan segmentu svoga podskupa X, što je nemoguće. ■

Teorem 2.15. *Svaki skup $\mathcal{S}$ rednih brojeva dobro je uređen po veličini.*

Dokaz. Elementi skupa $\mathcal{S}$ segmentni su skupovi. Ako tvrdnju pokažemo za skup segmentnih skupova s obzirom na relaciju produljenja, tvrdnja za skup rednih brojeva izravno će slijediti. Po teoremu 2.8 sijedi kako je $\mathcal{S}$ potpuno uređen skup. Sada nam preostaje pokazati kako svaki neprazan podskup skupa $\mathcal{S}$ ima najmanji element. Dokaz ćemo provesti svođenjem na kontradikciju.
Uzmimo, dakle, neprazan $V \subseteq \mathcal{S}$ i pretpostavimo kako on nema najmanji element. Neka je $X_0 \in V$. Kako je V kolekcija segmentnih skupova, X_0 je segmentni skup. Jer V nema najmanji element, postoji segmentni skup X_1 koji je pravi podskup od X_0, pa je, prema teoremu 2.5, segment skupa X_0. Indukcijom se zaključje da postoji niz elemenata $(X_n)_{n\in\omega}$ tako da je X_{n+1} pravi podskup od X_n za svaki n. Kako su svi skupovi X_n segmentni, može se pisati da je $X_{n+1} \in X_n$ za svaki $n \in \omega$[7]. To je, međutim, nemoguće prema aksiomu regularnosti[8]. Naime, ako je za svaki n, $X_{n+1} \in X_n$, tada je za svaki $n \in \omega$, $X_n \cap \{X_n \mid n \in \omega\} \neq \emptyset$ jer se u tome presjeku nalazi barem X_{n+1}. Prema tome, V ima najmanji element i $\mathcal{S}$ je dobro uređen. ■

[7] *Teorem.* Ako su X i Y segmentni skupovi i X je pravi podskup od Y, onda je X element od Y. Zainteresirani čitatelj više saznati više na stranici 101. udžbenika [5].

[8] *Aksiom regularnosti.* Svaki neprazan skup A ima barem jedan element a tako da A i a nemaju zajedničkog elementa, tj. $a \cap A = \emptyset$.

Sada ćemo definirati temeljne aritmetičke operacije ze redne brojeve te dokazati osnovna svojstva tih operacija. Međutim, najprije ćemo pokazati kako se svaki dobro uređen skup može napisati u obliku transfinitnoga niza, postupak kojega smo već prešutno koristili u primjeru 2.1.

Neka je $(A, <)$ dobro uređen skup rednog broja α. Po definiciji je tada α jedinstveni segmentni skup sličan skupu A, odnosno $A \simeq \alpha = W(\alpha)$ pri čemu je W klasa svih rednih brojeva. Dalje, postoji preslikavanje $a\colon W(\alpha) \to A$. Uvodeći oznake $a(0) = a_0$ i za svaki $\xi < \alpha$, $a(\xi) = a_\xi$, A se može prikazati kao dobro uređen skup elementi kojeg imaju kao indekse sve redne brojeve koji su manji od α: $A = \{a_\xi \mid \xi < \alpha\} = \{a_\xi \mid \xi \in W(\alpha)\}$, ili eksplicitno kao niz

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_\xi, \ldots \quad (\xi < \alpha).$$

Zbrajanje rednih brojeva.

Definicija 2.8. Neka je $\{A_\alpha \mid \alpha \in S\}$ sustav međusobno disjunktnih potpuno uređenih skupova, a S također potpuno uređen skup. ***Redna unija*** $\bigcup\langle A_\alpha,\, \alpha \in S\rangle$ (koristi se i oznaka $\bigsqcup\{A_\alpha,\, \alpha \in S\}$) skup je $\bigcup\{A_\alpha,\, \alpha \in S\}$ uređen tako da za svaka dva elementa x, y iz unije bude $x < y$ u uniji ako x, y pripadaju istom A_α te je pri tome $x < y$ u A_α ili ako je $x \in A_\alpha$ i $y \in A_\beta$ i $\alpha < \beta$.

Uz pretpostavku kako su svi skupovi A_α te skup S iz definicije redne unije dobro uređeni skupovi, njihova će redna unija biti dobro uređen skup. Naime, ako je $T \subseteq \bigcup\langle A_\alpha,\, \alpha \in S\rangle$ neprazan skup te ukoliko razmotrimo podfamiliju $\{A_\beta,\, \beta \in P \subseteq S\}$ skupova koji u pesjeku sa skupom T ne daju prazan skup, zbog dobre uređenosti skupa S (i skupa P po lemi 2.1) postoji najmanji redni broj $\alpha_0 \in P$ takav da je $A_{\alpha_0} \cap T \neq \emptyset$. Kako je $A_{\alpha_0} \cap T$ podskup dobro uređenoga skupa, on ima najmanji element koji je ujedno i najmanji element u T uz definicijsku relaciju redne unije.

Definicija 2.9. Neka je $\{\alpha_\xi \mid \xi < \beta\}$ skup rednih brojeva, a $\{A_\xi \mid \xi < \beta\}$ sustav u parovima međusobno disjunktnih dobro uređenih skupova tako da za svaki $\xi < \beta$ je $\alpha_\xi = t(A_\xi)$. Tada je suma $\sum_{\xi<\beta} \alpha_\xi$ svih rednih brojeva sustava, prema definiciji

$$\sum_{\xi<\beta} \alpha_\xi = t\Big(\bigcup\langle A_\xi \mid \xi < \beta\rangle\Big) = t\Big(\bigcup_{\xi<\beta}\langle A_\xi\rangle\Big).$$

Valjanost definicije operacije zbrajanja rednih brojeva proizlazi iz neovisnosti izbora dobro uređenih skupova A_ξ takvih da je $\alpha_\xi = t(A_\xi)$. Naime, ako se skupovi A_ξ zamijene odgovarajućim sličnim skupovima, pridruženi redni brojevi ostat će isti. Ta se tvrdnja može pokazati primjenom principa transfinitne indukcije i poopćenja leme 2.16.

Prirodno se nameće pitanje koja od svojstava aritmetičkih operacija koja vrijede za konačne redne brojeve ostaju sačuvana pri radu s onim beskonačnima. Svojstvo komutativnosti i asocijativnosti ćemo razmotriti u sljedećem primjeru, dok ćemo netrivijalnija svojstva iskazati i dokazati kao zasebne teoreme.

Primjer 2.3. Svojstvo komutativnosti vrijedi za konačne redne brojeve (tj. prirodne brojeve). Kako bismo to dokazali, uzmimo redne brojeve $m, n \in \omega$ različite od nule, odnosno praznoga skupa kako bismo se ogradili od trivijalnosti razmatranja. Uzmimo $\mathbb{N}_m = \{1,\, 2,\, \ldots,\, m\}$ i $\mathbb{N}_{m+n} \backslash \mathbb{N}_m = \{m+1,\, m+2,\, \ldots,\, m+n\}$, podskupove dobro uređenog skupa $(\mathbb{N}, <)$ (prirodna relacija $<$ na skupu $\mathbb{N}$) čiji su redni brojevi redom m i n. Tada je

$$\begin{aligned} m+n &= t(\mathbb{N}_m \sqcup (\mathbb{N}_{m+n} \backslash \mathbb{N}_m)) = t(\{1,\, 2,\, \ldots,\, m+n-1,\, m+n\}) = \\ &= t(\{m+1,\, m+2,\, \ldots,\, m+n,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, m\}) = t((\mathbb{N}_{m+n} \backslash \mathbb{N}_m) \sqcup \mathbb{N}_m) = n+m, \end{aligned}$$

odnosno pokazali smo da vrijedi komutativnost zbrajanja konačnih rednih brojeva.

Uzmimo sada nešto drugačije dobro uređene skupove: $\mathbb{N}_m$ i $\mathbb{N}_{>m} = \{m+1, m+2, \ldots\}$. Egzistencija jednostavnog sličnog preslikavanja $f\colon \mathbb{N}_{>m} \to \omega$ zadanog pravilom pridruživanja $f(n) = n - (m+1)$ implicira kako je $t(\mathbb{N}_{>m}) = \omega$. Sada imamo:

$$m + \omega = t(\mathbb{N}_m \sqcup \mathbb{N}_{>m}) = t(\{1,\, 2,\, 3,\, \ldots\}) = \omega;$$

$$\omega + m = t(\mathbb{N}_{>m} \sqcup \mathbb{N}_m) = t(\{m+1,\, m+2,\, \ldots,\, 1,\, 2,\, \ldots,\, m\}) \overset{\text{invarijante sl.}}{\neq} \omega,$$

pa slijedi kako komutativnost zbrajanja ne vrijedi općenito.

Neka su sada A, B i C proizvoljni dobro uređeni skupovi. Lako se pokaže kako je $A \sqcup (B \sqcup C) = (A \sqcup B) \sqcup C$ iz čega izravno slijedi asocijativnost zbrajanja rednih brojeva.

$\triangle$

Upravo zbog činjenice kako zakon komutacije općenito ne vrijedi pri radu s rednim brojevima, brojna svojstva koja inače vrijede za prirodne brojeve također neće vrijediti za redne brojeve. Pri uspostavljanju odnosa suma rednih brojeva važno je, stoga, pripaziti na redoslijed sumiranja s obje strane nejednakosti. Razmatranja ćemo započeti s lemom.

Lema 2.16. *Neka su A, B i C proizvoljni dobro uređeni skupovi te neka je $C \cap A = C \cap B = \emptyset$. Ako je skup A sličan segmentu skupa B, onda je skup $C \sqcup A$ sličan segmentu skupa $C \sqcup B$.*

Dokaz. Neka je $a \in B$ i f slično preslikavanje sa skupa A na skup $B(a)$. Pokažimo kako je preslikavanje

$$g\colon C \sqcup A \to C \sqcup B(a), \quad g(x) = \begin{cases} x, & x \in C \\ f(x), & x \in A \end{cases}$$

bijekcija koja čuva uređaj, odnosno slično preslikavanje ovih dvaju skupova (v. fusnota [3], str. 4). Neka je $x, y \in C \sqcup A$, $x < y$. Očuvanje uređaja slijedi iz sljedećeg:

- ako x i y pripadaju skupu C, onda je $g(x) \prec g(y)$ trivijalno;
- ako x i y pripadaju skupu A, onda je $g(x) = f(x) \prec f(y) = g(y)$ po uzlaznosti preslikavanja f;
- ako je $x \in C$ i $y \in A$, onda je $g(x) \in C$ i $g(y) = f(y) \in B(a)$ pa je $g(x) \prec g(y)$ po definiciji redne unije.

Injektivnost slijedi iz stroge monotonosti dok surjektivnost slijedi trivijalno. Pokazali smo $C \sqcup A \simeq C \sqcup B(a)$. Sljedeći niz ekvivalencija dokazuje $C \sqcup A \simeq (C \sqcup B)(a)$:

$$x \in C \sqcup B(a) \Leftrightarrow x \in C \vee x \in B(a) \overset{(\forall x \in C)(x<a)}{\Longleftrightarrow} (x \in C \wedge x < a) \vee (x \in B \wedge x < a) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x \in C \vee x \in B) \wedge (x < a) \Leftrightarrow x \in (C \sqcup B)(a) \Longrightarrow C \sqcup B(a) = (C \sqcup B)(a).$$

■

Teorem 2.17. *Neka su α, β i γ redni brojevi te neka vrijedi $\alpha < \beta$. Tada vrijedi $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.*

Dokaz. Uzmimo tri dobro uređena skupa A, B i C, $C \cap A = C \cap B = \emptyset$, čiji su redni brojevi redom α, β i γ. Kako je $\alpha < \beta$, prema definiciji 2.7 je α pravi podskup od β te je $\alpha \in \beta$ (v. fusnota [7], str. 11.), tj. $\alpha = \beta(\alpha)$. Segmentni skupovi su dobro uređeni skupovi pa po teoremu 2.4 postoji $b \in B$ za kojeg je $\beta(\alpha) \simeq B(b)$. Slijedi:

$$A \simeq \alpha = \beta(\alpha) \simeq B(b),$$

pa je po lemi 2.16 $C \sqcup A$ sličan segmentu skupa $C \sqcup B$. Dalje, po teoremu 2.8, dokazanome razmatranju kako je redna unija dobro uređenih skupova dobro uređen skup te činjenici kako dobro uređen skup nije sličan niti jednom svom segmentu (v. fusnota [2], str. 7), segmentni skup $t(C \sqcup A)$ segment je segmentnog skupa $t(C \sqcup B)$. Prema definiciji 2.7 je tada $\gamma + \alpha = t(C \sqcup A) < t(C \sqcup B) = \gamma + \beta$. ■

Korolar 2.17.1. *Za svaki redni broj α je $\alpha + 1 > \alpha$.*

Dokaz. Svaki element skupa ω redni je broj, pa su to i 0 i 1. Po teoremu 2.17 te činjenici da je $0 = \emptyset \subset \{\emptyset\} = 1$, za proizvoljan redni broj α i skup A za kojega je $t(A) = \alpha$ vrijedi $\alpha + 0 = t(A \sqcup \emptyset) = t(A) = \alpha < \alpha + 1$. ■

Korolar 2.17.2. *Ako je $\gamma + \alpha = \gamma + \beta$, onda je $\alpha = \beta$.*

Dokaz. Pretpostavimo kako uvjeti korolara vrijede, no kako je $\alpha \neq \beta$. Zbog trihotomije rednih brojeva je tada $\alpha < \beta$ ili $\beta < \alpha$. Međutim, u oba slučaja izravno iz teorema 2.17 slijedi kontradikcija: ako je, recimo, $\alpha < \beta$, lijeva strana jednakosti bila bi strogo manja od desne. ■

Teorem 2.18. *Iz $\alpha < \beta$ slijedi $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.*

Dokaz. Prije samoga dokaza, ilustrirajmo sljedeće: iako za tri dobro uređena skupa A, B i C vrijedi $C \cap A = C \cap B = \emptyset$ te $A \subset B$, bez dodatnih uvjeta postavljenih na skup C redni brojevi $t(A \sqcup C)$ i $t(B \sqcup C)$ i dalje mogu biti jednaki. Uzmimo $A = 1$, $B = 2 = \{0, 1\}$ i $C = \mathbb{N}_{>2}$. Lako se uvjerimo kako je $A \subset B$, ali $t(A \sqcup C) = \omega = t(B \sqcup C)$. Dakle, ukoliko su skupovi A, B i C dodatno takvi da su njihovi redni brojevi redom α, β i γ, iz uvjeta teorema i gornjeg razmatranja slijedi $t(A \sqcup C) \subseteq t(B \sqcup C)$, odnosno $\alpha + \gamma \subseteq \beta + \gamma$. Iz teorema 2.14 slijedi da $\alpha + \gamma$ ne može biti veći od $\beta + \gamma$, odakle po trihotomiji rednih brojeva slijedi tvrdnja. ■

Teorem 2.19. *Ako su α i β redni brojevi i $\alpha > \beta$, tada postoji jedan i samo jedan redni broj $\gamma > 0$ tako da bude $\alpha = \beta + \gamma$. Ako je $\alpha = \beta$, onda je $\gamma = 0$.*

Dokaz. Neka je $\alpha = t(A)$. Kako je $\beta < \alpha$, odnosno $\beta \subset \alpha$, β je redni broj nekog segmenta iz A. Neka je $b \in A$ takav da je $\beta = t(A(b))$.
Egzistencija. A se na prirodan način tada može prikazati sa $A = A(b) \sqcup (A \backslash A(b))$. Uz uvođenje oznake $\gamma = t(A \backslash A(b))$, dobili smo $\alpha = \beta + \gamma$.
Jedinstvenost. Pretpostavimo kako postoji $\gamma_1 \neq \gamma$ takav da vrijedi $\alpha = \beta + \gamma_1$. Zbog trihotomije rednih brojeva bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\gamma_1 < \gamma$. Kako smo dokazali egzistenciju rednoga broja iz tvrdnje teorema, postojao bi barem jedan redni broj $\delta > 0$ takav da je $\gamma = \gamma_1 + \delta$. Međutim, prethodni niz zaključaka u kontradikciji je sa teoremom 2.17:

$$\alpha = \beta + \gamma = \beta + (\gamma_1 + \delta) \overset{\text{dist.}}{=} (\beta + \gamma_1) + \delta = \alpha + \delta > \alpha, \text{ za } \delta > 0.$$

■

Korolar 2.19.1. *Između rednog broja α i $\alpha + 1$ ne postoji niti jedan redni broj.*

Dokaz. Pretpostavimo kako postoji redni broj β takav da je $\alpha < \beta < \alpha + 1$. Prema teoremu 2.19 bi tada postojao $\gamma > 0$ takav da je $\beta = \alpha + \gamma$, odnosno $\gamma > 0$ za kojega bi vrijedilo $\alpha + \gamma < \alpha + 1$. Kada bi γ bio veći ili jednak 1, po teoremu 2.17 i trihotomiji rednih brojeva imali bismo suprotnu jednakost, točnije $\alpha + \gamma \geq \alpha + 1$. Stoga nam preostaje mogućnost da je γ redni broj između 0 i 1 što je nemoguće budući da smo 1 definirali kao neposrednog sljedbenika rednog broja 0.

Jedna od posljedica ovoga korolara činjenica je kako je neposredni sljedbenik rednog broja isti taj redni broj zdesna uvećan za jedan, odnosno $\alpha^+ = \alpha \sqcup \{\alpha\} = \alpha + 1$. ■

Teorem 2.20. *Za svaki skup S rednih brojeva postoji redni broj koji je veći od svakog rednog broja iz S.*

Dokaz. Ako u skupu S postoji najveći element, odnosno najveći redni broj γ, onda je $\gamma + 1$ redni broj veći od svakog rednog broja u tome skupu. Ako u S nema najvećeg elementa, neka je zbroj svih rednih brojeva poredanih po veličini jednak δ. Kako je svaki redni broj iz S segment rednog broja γ (*budući da smo ih poredali po veličini*), uzevši u obzir definiciju relacije "biti manji" na klasi svih rednih brojeva zaključujemo kako je δ veći od svakog rednog broja u skupu S. ■

Množenje rednih brojeva.

Neka su A i B dobro uređeni skupovi. Konstruirajmo potpuno uređen skup $A \times B$ uređen prema principu prvih diferencija (leksikografski)[9]. Pokažimo kako je skup $A \times B$ dobro uređen. U tu svrhu uzmimo neprazan $S \subseteq A \times B$ i pokažimo kako ima najmanji element.

[9] *Leksikografski uređaj.* Ako su (a_1, b_1) i (a_2, b_2) elementi skupa $A \times B$, uređen par (a_1, b_1) u produktu će doći prije uređenog para (a_2, b_2), ako je $a_1 <_A a_2$ ili ako je $a_1 = a_2$ i $b_1 <_B b_2$.

Neka je $P = \{a \in A \mid \exists(x,y) \in S \text{ t.d. } x = a\}$ skup elemenata iz A koji se pojavljuju kao prva komponenta u elementima iz S. Jer je A dobro uređen, skup P ima najmanji element kojeg ćemo označiti sa a_0. Uvedimo skup $R = \{b \in B \mid \exists(a_0,y) \in S \text{ t.d. } y = b\}$, trivijalno neprazan skup elemenata iz B koji se nalaze kao druga komponenta u uređenom paru s prvom komponentom a_0. R je podskup dobro uređenog skupa B pa ima najmanji element, recimo b_0. Tada je očito (a_0, b_0) najmanji element u S, odnosno $A \times B$ je dobro uređen. Zbog toga je sljedeća definicija uistinu valjana.

Definicija 2.10. Neka su α i β redni brojevi te A i B dobro uređeni skupovi za koje je $\alpha = t(A)$, $\beta = t(B)$. Umnožak $\alpha \cdot \beta$ redni je broj $t(B \times A)$.

Primjer 2.4. Kao i pri zbrajanju rednih brojeva, lako možemo pronaći kontraprimjer za svojstvo komutativnosti operacije množenja.
Uzmimo skup $\{0,1\}$ rednog broja 2 te skup $\mathbb{N}$ rednog broja ω. Razmotrimo sljedeće:

$$2 \cdot \omega = t(\mathbb{N} \times \{0,1\}) = t(\{(1,0),\ (1,1),\ (2,0),\ (2,1),\ (3,0),\ (3,1),\ \ldots\}) = \omega,$$
$$\omega \cdot 2 = t(\{0,1\} \times \mathbb{N}) = t(\{(0,1),\ (0,2),\ (0,3),\ \ldots,\ (1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ \ldots\}) = \omega + \omega.$$

Prema teoremu 2.17 slijedi kako je $2 \cdot \omega < \omega \cdot 2$, pa je po trihotomiji rednih brojeva $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$.

△

U aritmetici se operacija množenja može svesti na zbrajanje tako da se jedan od faktora uzme kao sumand dok drugi faktor određuje kroz koliko iteracija će suma proći. Kako su elementi skupa ω ujedno i redni brojevi, prirodno se nameće pitanje možemo li na sličan način pristupiti i množenju rednih brojeva. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.21. *Umnožak rednih brojeva α i β može se prikazati u obliku $\alpha\beta = \sum_{\xi<\beta} \alpha_\xi$, pri čemu je $\alpha_\xi = \alpha$ za svaki $\xi < \beta$.*

Dokaz. Neka su A i B dobro uređeni skupovi čiji su redni brojevi redom α i β. Napišimo te skupove u obliku transfinitnih skupova: $A = \{a_\xi \mid \xi < \alpha\}, B = \{b_\psi \mid \psi < \beta\}$. Neka je B_ψ skup svih elemenata iz $B \times A$ kojima je prva komponenta zadan element b_ψ iz B, dok druga komponenta prolazi svim elementima $a_\xi \in A$, odnosno $B_\psi = \{(b_\psi, a_\xi) \mid \xi < \alpha\}$. Skup B_ψ dobro je uređen naslijeđenim uređajem (*budući da je $B_\psi = \{b_\psi\} \times A$ Kartezijev produkt dobro uređenih skupova*) i $t(B_\psi) = t(A) = \alpha$ za svaki $\psi \in B$. Ako su $\psi', \psi'' < \beta$, $\psi' \neq \psi''$, bit će $B_{\psi'}$ i $B_{\psi''}$ disjunktni po konstrukciji skupa B_ψ te za $\psi' < \psi''$ čitav $B_{\psi'}$ doći će prije $B_{\psi''}$ što izravno slijedi iz definicije leksikografskog uređaja. Zbog toga se $B \times A$ može prikazati kao redna unija skupova B_ψ: $B \times A = \bigsqcup\{B_\psi \mid \psi < \beta\}$ i konačno će biti

$$\alpha\beta = t(B \times A) = t\Big(\bigsqcup\{B_\psi \mid \psi < \beta\}\Big) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{\psi<\beta} \alpha_\psi, \quad \alpha_\psi = \alpha.$$

■

Iz definicije množenja slijedi $1 \cdot \alpha = \sum_{i<\alpha} 1 = \alpha$ te $\alpha \cdot 1 = \alpha$. Uz to se definira $0 \cdot \alpha = \alpha \cdot 0 = 0$. Jednostavnim kontraprimjerom možemo pokazati kako distributivnost množenja s desna prema zbrajanju rednih brojeva ne vrijedi. Na primjer, $(1+1) \cdot \omega = 2 \cdot \omega$ za što smo već pokazali da je jednako ω. U drugu ruku je $1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega = \omega + \omega$. Sada, primjenjujući razmatranje iz primjera 2.4 slijedi $(1+1) \cdot \omega \neq 1 \cdot \omega + 1 \cdot \omega$. Međutim, za redne brojeve vrijedi lijevi zakon distribucije.

Teorem 2.22. *Za redne brojeve vrijedi lijevi zakon distribucije (distribucija s lijeva), tj.* $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi neposredno iz činjenice što za redne unije vrijedi zakon asocijacije, odnosno uzeti $\beta + \gamma$ puta redni broj α isto je što uzeti boja α najprije β puta, pa onda još γ puta:

$$\text{uz } \alpha_\xi = \alpha \text{ za svaki } \xi < \beta + \gamma \text{ je } \alpha(\beta+\gamma) = \sum_{\xi < \beta+\gamma} \alpha_\xi = \sum_{\xi<\beta} \alpha_\xi + \sum_{\xi<\gamma} \alpha_\xi = \alpha\beta + \alpha\gamma.$$

■

Teorem 2.23. *Za množenje rednih brojeva vrijedi zakon asocijacije* $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$.

Dokaz. Neka su A, B i C skupovi čiji su redni brojevi redom α, β i γ. Kartezijev produkt $C \times B \times A$ uredimo po principu prvih diferencija: ako su (x, y, z) i (a, b, c) bilo koje dvije trojke u uređaju kojeg ćemo označiti s $\prec$, bit će $(x, y, z) \prec (a, b, c)$ ako je $x < a$ ili $x = a$ i $y < b$ ili $x = a$, $y = b$ i $z < c$. Analogno razmatranju koje je prethodilo definiciji 2.10, da se pokazati kako je relacija $\prec$ dobro uređenje navedenoga tročlanoga Kartezijevog produkta. Preslikavanja $(x, y, z) \mapsto ((x, y), z)$ i $(x, y, z) \mapsto (x, (y, z))$ bijekcije su koje čuvaju uređaj, odnosno slična preslikavanja, zbog čega su skupovi $C \times B \times A$, $C \times (B \times A)$ te $(C \times B) \times A$ međusobno slični. Stoga su njihovi redni brojevi jednaki: $\alpha\beta\gamma = \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ ■

Kako je, za dobro uređene skupove A i B, produkt $A \times B$ dobro uređen skup, možemo razmatrati njegove segmente. Za $a \in A$ i segment skupa $A(a)$, lako se pokaže kako je $A(a) \times B$ segment skupa $A \times B$ koji se sastoji od uređenih parova (x, y) za koje je $x < a$, a $y \in B$. U drugu ruku, za $b \in B$, $A \times B(b)$ nije segment skupa $A \times B$. Primjerice, ako razmotrimo $\mathbb{N} \times \{1, 2, 3\}$, jednostavnim ispisom nekoliko prvih članova uočit ćemo kako $\mathbb{N} \times \{1\}$ nije segment istoga. Stoga je najbolje što možemo tvrditi $t(A \times B(b)) \leq t(A \times B)$ prema teoremu 2.15. Sljedeći teoremi govore nešto više o nejednakostima produkata rednih brojeva.

Teorem 2.24. *Neka je* $\alpha = t(A)$, $\beta = t(B)$, $\gamma = t(C))$, *tada:*

a) Iz $\alpha < \beta$ *slijedi* $\gamma\alpha < \gamma\beta$ *za svaki* $\gamma > 0$.

b) Iz $\alpha < \beta$ *slijedi* $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ *za svaki* γ.

Dokaz. *a)* Kako su po pretpostavci A, B i C dobro uređeni skupovi, njihovi Kartezijevi produkti također će biti dobro uređeni. Ako uzmemo $\alpha < \beta$, po definiciji relacije *"biti manji"* na klasi svih rednih brojeva, postoji $b \in B$ za kojega je $A \simeq B(b)$. Stoga je

$t(A) = \alpha = t(B(b))$. Prema razmatranju prije iskaza teorema slijedi kako je $B(b) \times C$ segment skupa $B \times C$. Dalje, kako dobro uređen skup nije sličan niti jednom svom segmentu (v. fusnota [2], str. 4) je $t(B(b) \times C) < t(B \times C)$ što upotpunjuje niz (ne)jednakosti $\gamma\alpha = t(C) \cdot t(B(b)) = t(B(b) \times C) < t(B \times C) = t(C) \cdot t(B) = \gamma\beta$.

b) Kao i u a) je $\alpha = t(B(b))$ za neki $b \in B$, pa po razmatranju koje je prethodilo teoremu slijedi kako je $C \times B(b) \subseteq C \times B$, što po teoremu 2.14 daje $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$.

■

Sljedeća tvrdnja pokazuje kako se teorem o dijeljenju s ostatkom, inače zadan na skupu cijelih brojeva, može apstrahirati na klasu svih rednih brojeva.

Teorem 2.25. *Za bilo koje brojeve $\alpha > 0$ i γ postoje jedinstveni redni brojevi β i η tako da bude $\gamma = \alpha\beta + \eta$, pri čemu je $\eta < \alpha$.*

Dokaz. Neka je $\delta = \gamma + 1$ te skupovi A i D dobro uređeni skupovi za koje je $\alpha = t(A)$ te $\delta = t(D)$.

Egzistencija prikaza. Imamo $\alpha\delta = \alpha(\gamma + 1) \overset{\text{tm. 2.24}}{\geq} \gamma + 1 \overset{\text{kor. 2.19.1}}{>} \gamma$, odnosno $\gamma < \alpha\delta$. Uz gornje oznake je $\alpha\delta = t(D \times A)$, a γ je redni broj nekog segmenta S skupa $D \times A$, $\gamma = t(S)$. Skup S definiran je nekim elementom, recimo $(d, a) \in D \times A$. Dakle, S se sastoji od svih uređenih parova (z, x) u kojima je prva komponenta $z < d$ i $x \in A$ na koje se nadovezuju oni parovi kojima je $z = d$ te $x < a$. Elementi $d \in D$ te $a \in A$ na prirodan način definiraju segmente $D(d) \subseteq D$ i $A(a) \subseteq A$ te neka su β i η redom pripadni redni brojevi tih segmenata. Po definiciji relacije "biti manji" na klasi svih rednih brojeva je $\eta = t(A(a)) < t(A) = \alpha$. Dalje, skup S možemo napisati kao rednu uniju skupova $\{(z, x) \mid z < d, x \in A\} = D(d) \times A$ i $\{(d, y) \mid y < \eta\}$. Prema definiciji operacije zbrajanja rednih brojeva je tada

$$\gamma = t(S) = t((D(d) \times A) \sqcup \{(d, y) \mid y < \eta\}) = \alpha\beta + \eta, \quad \eta < \alpha.$$

Jedinstvenost. Pretpostavimo kako je $\gamma = \alpha\beta + \eta = \alpha\beta_1 + \eta_1$, $\eta, \eta_1 < \alpha$. U slučaju $\beta = \beta_1$, po korolaru 2.17.2 mora vrijediti $\eta = \eta_1$ pa je dovoljno pokazati kako mora vrijediti polazna jednakost što ćemo postići svođenjem na kontradikciju. Neka je stoga $\beta \neq \beta_1$. Zbog trihotomije rednih brojeva, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\beta < \beta_1$. Prema korolaru 2.19.1 je tada β_1 barem $\beta + 1$, odnosno $\beta_1 \geq \beta + 1$ pa je

$$\alpha\beta + \eta = \alpha\beta_1 + \eta_1 \geq \alpha(\beta + 1) + \eta_1 \overset{\text{dist. s lijeva}}{=} \alpha\beta + \alpha + \eta_1.$$

Kada bi η bio manji od $\alpha + \eta_1$, po teoremu 2.17 bismo imali suprotnu nejednakost, odnosno nužno je $\eta > \alpha + \eta_1 \overset{\text{tm. 2.17}}{>} \alpha$ što je suprotno pretpostavci. ■

Razmotrimo sada slučaj kada za α iz prošloga teorema uzmemo ω. Svaki se redni broj γ na jedinstven način može prikazati u obliku $\gamma = \omega\beta + \eta$, $\eta < \omega$. Kako je ω najmanji transfinitan redni broj, η je konačan redni broj koji može biti i 0. Kada je $\eta \neq 0$, redni broj γ ima neposrednog prethodnika: naime, redni broj $\omega\beta + \eta$ neposredni je sljedbenik rednog broja $\omega\beta + (\eta - 1)$ što slijedi izravno iz korolara 2.19.1. Po kontrapoziciji je tada svaki redni broj druge vrste oblika $\omega \cdot \beta$.

Limesi transfinitnih nizova rednih brojeva.

Uzmimo α-niz rednih brojeva $\{a_\xi \mid \xi < \alpha\}$, pri čemu je α granični redni broj. Razmatrat ćemo strogo rastuće α-nizove, odnosno nizove u kojih, za $\xi, \eta < \alpha$, $\xi < \eta$, vrijedi $a_\xi < a_\eta$. Najmanji redni broj β koji je veći od svakoj a_ξ, $\xi < \alpha$ naziva se limes α-niza i označava se s $\lim\limits_{\xi<\alpha} a_\xi = \beta = \lim\{a_\xi \mid \xi < \alpha\}$.

Ovako definiran redni broj β je granični redni broj, odnosno redni broj druge vrste. U suprotnom bi bilo $\beta = \gamma + 1$. Kako je β veći od svakog a_ξ te kako je $\beta > \gamma$, postojao bi u nizu barem jedan a_ξ veći od γ što je nemoguće, jer ne postoji redni broj između γ i $\gamma + 1$ po korolaru 2.19.1. Dodatno, ako je α granični redni broj, onda je $\alpha = \lim\limits_{\xi<\alpha} \xi$ što je ujedno i supremum skupa svih članova α-niza rednih brojeva.

3 Kardinalni brojevi

3.1 Definicija kardinalnog broja. Osnovna svojstva.

Neka je A proizvoljan skup. Prema Zermelovu teoremu se skup A može dobro urediti. Primjeri 2.1 i 2.2 ukazuju na činjenicu kako, iako uređenje postoji, to uređenje ne mora biti jedinstveno. Doduše, za skup A možemo imati beskonačno mnogo dobrih uređenja svaki od kojih ima različiti redni broj. Tako je u primjeru 2.1 redni broj dobro uređenog skupa $(\mathbb{N}, \prec)$ za proizvoljno odabran $n \in \mathbb{N}$ i relaciju $\prec$ opisanu u primjeru jednaka $\underbrace{\omega + \omega + \ldots + \omega}_{\text{n puta}}$. Zbog toga ima smisla razmatrati skup svih međusobno različitih rednih brojeva koji pripadaju A, u oznaci $\mathcal{A}$, skup rednih brojeva α za koje postoji dobro uređenje skupa A takvo da je $t(A) = \alpha$. Kao skup rednih brojeva, prema teoremu 2.15 skup $\mathcal{A}$ dobro je uređen pa ima najmanji element.

Definicija 3.1. ***Kardinalni broj*** skupa A, kard(A) (card(A) ili $\kappa(A)$), je najmanji element skupa $\mathcal{A}$, odnosno najmanji redni broj koji je ekvipotentan[10] skupu A.

Budući da sličnost dvaju dobro uređenih skupova zahtjeva egzistenciju bijektivnog preslikavanja koje čuva uređaj, ako se A i B mogu dobro urediti tako da budu slični, oni su ekvipotentni. Drugim riječima, ako skupovima A i B pripada barem jedan zajednički redni broj, onda su ekvipotentni.

Teorem 3.1. *Ako su skupovi A i B ekvipotentni, onda su skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ jednaki.*

Dokaz. Neka je $(A, <)$ dobro uređenje skupa A i neka je $t(A, <) = \alpha \in \mathcal{A}$. Zapišimo A u obliku transfinitnog niza $\{a_\xi \mid \xi < \alpha\}$ te neka je $f \colon \{a_\xi \mid \xi < \alpha\} \to B$ bijekcija na skup B. Skup $B = \{f(a_\xi) \mid \xi < \alpha\}$ dobro ćemo urediti stavljajući $b_0 = f(a_0)$, $b_1 = f(a_1)$, ..., $b_\xi = f(a_\xi)$, ... Prema tome za $\eta, \xi < \alpha$, $\eta < \xi$, bit će $b_\eta < b_\xi \Leftrightarrow f^{-1}(b_\eta) = a_\eta < a_\xi = f^{-1}(b_\xi)$. Zaključujemo da je i $t(B, <) = \alpha \in \mathcal{B}$. ■

Teorem 3.2. *Skupovi A i B su ekvipotentni ako i samo ako je $\kappa A = \kappa B$.*

[10] *Ekvipotentnost skupova.* Kaže se da je skup X ekvipotentan skupu Y ako postoji bijekcija $f \colon X \to Y$.

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Tvrdnja slijedi iz teorema 3.1: ako su skupovi ekvipotentni, skupovi $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$ su jednaki, pa su i njihovi najmanji elementi jednaki.
$\boxed{\Leftarrow}$ Kardinalni broj skupa A je redni broj skupa A uz neko dobro uređenje, odnosno $A \simeq \kappa A$. Analogno zaključujemo $B \simeq \kappa B$, pa je po tranzitivnosti relacije "biti sličan" skup A sličan skupu B. Tvrdnja slijedi iz pokazane činjenice kako sličnost povlači ekvipotenciju. ■

Kardinalni brojevi skupova po definiciji su redni brojevi te stoga nasljeđuju sva svojstva koja smo pokazali da vrijede za redne brojeve. Sljedeće tvrdnje su neposredne posljedice teorema o trihotomiji za redne brojeve te teorema 2.15.

Teorem 3.3. *Za dva kardinalna broja a i b uvijek vrijedi jedna i samo jedna od relacija*

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

Teorem 3.4. *Svaki skup kardinalnih brojeva dobro je uređen po veličini.*

Svaki konačan neprazan skup A ekvipotentan je segmentu skupa $\mathbb{N}$ određenom, primjerice, brojem $m+1$, odnosno $A \simeq \{1, 2, \ldots, m\}$. Dakle, skup A možemo bijektivno preslikati na skup prvih m prirodnih brojeva, postupak kojeg možemo tumačiti kao indeksaciju, odnosno prebrojavanje elemenata skupa A. Kako je $f\colon \mathbb{N} \to \omega(m) = m$, $f(n) = n - 1$ sličnost, po teoremu 3.1 je $\mathcal{A} = \{m\}$, odnosno $\kappa A = m$. Vođeni tom interpretacijom uočavamo kako kardinalni broj skupa možemo smatrati jednom mjerom njegove veličine - brojem njegovih elemenata. U slučaju beskonačnih skupova, apstraktnu ideju njihova broja elemenata označavat će transfinitni brojevi kao što su $\aleph_0 = \kappa\mathbb{N}$ ili $\mathfrak{c} = \kappa\mathbb{R}$. U ovome radu se nećemo baviti utvrđivanjem (bes)konačnosti skupova niti njihovom prebrojivošću; proučavat ćemo načine utvrđivanja kardinalnih brojeva skupova, njihova svojstva te njihovu aritmetiku.

3.2 Uspoređivanje kardinalnih brojeva

Kardinalni su brojevi u suštini redni brojevi zbog čega se operator uređaja $<$ može definirati na isti način. Međutim, koristeći teorem 3.2 možemo izvesti logički ekvivalentne definicije s kojima je znatno zahvalnije raditi.

Redni broj α manji je od rednoga broja β ako je, kada razmatramo α i β kao segmentne skupove, $\alpha \subset \beta$, odnosno prema teoremu 2.8 je α segment segmentnog skupa β. Ukoliko su skupovi A i B dobro uređeni skupovi takvi da je $t(A) = \alpha$ te $t(B) = \beta$, odnosno po definiciji rednog broja $A \simeq \alpha$ i $B \simeq \beta$, skup A sličan je segmentu skupa B. Sličnost implicira ekvipotentnost pa je skup A sličan segmentu skupa B, odnosno nekom njegovom podskupu. To razmatranje motivira definiciju:

Definicija 3.2. Neka su A i B skupovi. Kaže se da je kardinalni broj skupa A manji ili jednak kardinalnom broju skupa B, $\kappa A \leq \kappa B$, ako je A ekvipotentan nekom podskupu skupa B. Ako je $\kappa A \leq \kappa B$ i $\kappa A \neq \kappa B$, kaže se da je kardinalni broj skupa A manji od kardinalnog broja skupa B, $\kappa A < \kappa B$

Napomena. Prije daljnjih razmatranja, trebamo se uvjeriti kako je relacija uistinu dobro definirana, tj. ako uzmemo druge reprezentante čiji su kardinalni brojevi κA i κB, recimo redom skupove C i D, hoće li skup C biti ekvipotentan nekom podskupu skupa D.

Dakle: $C \sim A$, $D \sim B$ te $A \sim B_1 \subseteq B$. Po tranzitivnosti relacije ekvivalencije "*biti ekvipotentan*" na klasi svih skupova, skup C je ekvipotentan skupu B_1. Iskoristimo još činjenicu kako postoji bijekcija $f\colon B \to D$. Njezina restrikcija $f|_{B_1} : B_1 \to f(B_1) \subseteq D$ je bijektivno preslikavanje s podskupa B_1 skupa B na podskup skupa D, pa je ponovim korištenjem tranzitivnosti relacije "*biti ekvipotentan*"

$$C \sim B_1 \overset{f|_{B_1}}{\sim} f(B_1) \subseteq D,$$

čime smo pokazali željeno, odnosno uređajna relacija ne ovisi o odabiru reprezentanata.

Uzmimo kako je $A \sim B_1 \in B$ te neka je $f\colon A \to B$ bijektivno preslikavanje, odnosno injektivno i surjektivno preslikavanje. Dakle, ukoliko je A ekvipotentan nekom podskupu skupa B, postoji injekcija sa skupa A u skup B.

Pretpostavimo sada kako imamo injektivno preslikavanje $g\colon A \to B$. Ako razmotrimo njegovu korestrikciju $g\colon A \to g(A) \subseteq B$, imamo bijekciju sa skupa A na neki podskup skupa B, odnosno A je ekvipotentan nekom podskupu skupa B.
Gornje razmatranje motivira logički ekvivalentnu definiciju relacije "*biti manji ili jednak*" na klasi kardinalnih brojeva.

> *Neka su A i B skupovi. Kaže se da je kardinalni broj skupa A manji ili jednak kardinalnom broju skupa B ako postoji injekcija sa skupa A u skup B.*

Relacija "*biti manji ili jednak*" na skupu realnih brojeva i svaka njena restrikcija na neki njegov podskup, kao što je skup ω, zadovoljava svojstvo *antisimetričnosti*, odnosno za $x, y \in \mathbb{R}$, ako je $x \leq y$ i $y \leq x$ je $x = y$. Tvrdnja stoga vrijedi i za konačne kardinalne brojeve, no bilo bi poželjno da isto vrijedi i za transfinitne kardinalne brojeve što bi nam bilo moćno oružje pri utvrđivanju kardinalnosti raznih skupova. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 3.5. *(Cantor - Schröder - Bernstein)*
Ako postoje injekcije $f\colon A \to B$ i $g\colon B \to A$, onda postoji i bijekcija između A i B.

Dokaz. Gornji teorem možemo tumačiti i na sljedeći način: *ako je $\kappa A \leq \kappa B$ te $\kappa B \leq \kappa A$, onda je $\kappa A = \kappa B$.* Ukoliko skupovi A i B nisu disjunktni, razmatranje bismo proveli na disjunktnim, njima redom ekvipotentnim skupovima C i D, pa ćemo bez smanjenja općenitosti uzeti kako A i B ne dijele niti jedan zajednički element. Razmotrit ćemo sljedeću particiju skupa $A \cup B$ te u konačnici bijekciju zadati po dijelovima: počevši od proizvoljnoga $a_0 \in A$, izmjenično ćemo djelovati funkcijama f i g na elemente dobivši tako niz elemenata

$$a_0 \longrightarrow b_0 = f(a_0) \longrightarrow a_1 = g(f(a_0)) \longrightarrow b_1 = f(g(f(a_0))) \longrightarrow \ldots$$

Dodatno, lanac ćemo proširiti u lijevom smjeru na sljedeći način: ako postoji $b_{-1} \in B$ takav da je $g(b_{-1}) = a_0$, smjestit ćemo ga u niz neposredno lijevo od a_0. Ako postoji $a_{-1} \in A$ za kojega je $f(a_{-1}) = b_{-1}$, smjestit ćemo ga neposredno lijevo u odnosu na b_{-1}. Proširivanje ulijevo jednoznačno je određeno zbog injektivnosti funkcija f i g, tj. element b_{-1} jedinstveni je element pridružen elementu a_0 i sl. Čak štoviše, zbog injektivnosti preslikavanja f i g, proizvoljno odabrani elementi skupa A i B pojavit će se u jednom i samo jednom tako konstruiranom lancu. Moguća su dva oblika lanaca iz razmatranja iznad:

a) Lanac čini ciklus, odnosno neki element lanca preslikao se u drugi element istog tog lanca. Pri tome se zbog injektivnosti nužno krajnji desni član u lancu preslikava u krajnji lijevi, ili krajnji lijevi u krajnji desni član lanca.

b) Lanac se neće zatvoriti.

  i) Lanac se nastavlja u beskonačnost ulijevo.

  ii) Lanac s lijeva završava elementom iz skupa A.

  iii) Lanac s lijeva završava elementom iz skupa B.

Funkciju $h\colon A \to B$ definirat ćemo na sljedeći način: ako je x u lancu iz slučaja *a)*, *b.i)* ili *b.ii)*, uzet ćemo $h(x) = f(x)$, a ako je x u lancu iz slučaja *2.iii)*, uzet ćemo $h(x) = g^{-1}(x)$.

Injektivnost. Neka je $h(x_1) = h(x_2)$. Kako je po definiciji $h(x)$ uvijek dijelom istoga lanca kao i x, x_1 i x_2 moraju pripadati istome lancu. U jednu ruku, ako su članovi lanaca iz slučaja *a)*, *b.i)* ili *b.ii)*, po definiciji će biti $f(x_1) = h(x_1) = h(x_2) = f(x_2)$, pa će zbog injektivnosti funkcije f biti $x_1 = x_2$. U drugu ruku, ako su članovi lanca iz slučaja *b.iii)*, imamo $h(x_1) = y_1$ pri čemu je $g(y_1) = x_1$ te $h(x_2) = y_2$ pri čemu je $g(y_2) = x_2$. Kako je $h(x_1) = h(x_2)$, slijedi $y_1 = y_2$ pa je $x_1 = g(y_1) = g(y_2) = x_2$.

Surjektivnost. Neka je $y \in B$ proizvoljan. Ukoliko je y član lanca iz slučaja *a)*, *b.i)* ili *b.ii)*, znamo da postoji x u istome lancu za kojega je $y = f(x) =: h(x)$. Ako je y član lanca iz slučaja *b.iii)*, tada je i $g(y)$ u istome lancu. Tada je $h(g(y)) = y$.

Dakle, pronašli smo bijektivno preslikavanje sa skupa A na skup B. ■

Teorem 3.6. *(Cantor)*
Kardinalni broj bilo kojeg skupa manji je od kardinalnog broja njegova partitivnog skupa.

Dokaz. Preslikavanje $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$ zadano pravilom pridruživanja $f(x) = \{x\}$ je injekcija, posljedica čega je činjenica kako je $\kappa A \leq \kappa(\mathcal{P}(A))$. Potrebno je još pokazati kako je $\kappa A \neq \kappa\mathcal{P}(A)$, odnosno kako nemamo bijektivno preslikavanje sa A na $\mathcal{P}(A)$. Dokaz ćemo provesti svođenjem na kontradikciju.
Neka je $g\colon A \to \mathcal{P}(A)$ bijekcija. Za svaki x iz skupa A, $g(x)$ je podskup skupa A (*kao element partitivnog skupa* $\mathcal{P}(A)$) pa x može, ali i ne mora biti sadržan u svojoj slici. Uzmimo $X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$. Kako je X kolekcija elemenata iz A, on je element $\mathcal{P}(A)$, a kako je f bijekcija, postoji $y \in A$ takav da je $f(y) = X$, pa je $y \in X$ ili $y \in A \backslash X$. Ako je $y \in X$, po definiciji skupa X je tada $y \notin f(y) = X$; ako je $y \notin X$, tada po definiciji skupa X slijedi $y \in X$. Dakle, iz pretpostavke da postoji bijekcija f slijedi $y \in X \Leftrightarrow y \notin X$, što je nemoguće (*u pitanju je paradoks*), odnosno nema bijekcije skupa A na $\mathcal{P}(A)$. ■

3.3 Aritmetika kardinalnih brojeva

Kada govorimo o aritmetici kardinalnih brojeva, zapravo govorimo o aritmetici rednih brojeva koji imaju posebna svojstva. Ukoliko nas zanima kardinalni broj redne unije $A \sqcup B$ disjunktnih dobro uređenih skupova A i B, iz definicije redne unije će odmah slijediti kako govorimo o kardinalnom broju $A \cup B$. Laički rečeno, ako razmatramo pridruživanje kardinalnog broja skupu kao preslikavanje (što je moguće budući da je kardinalni broj skupa jedinstveno određen), samoj funkciji nije bitno koji uređaj zadan na tome skupu prosljeđujemo jer će ga ona "minimalizirati" u smislu najmanjega rednog broja. Dodatno, iz činjenice kako je za skupove A i B preslikavanje $(x, y) \mapsto (y, x)$ bijekcija te teorema 3.2 slijedi kako je $\kappa(A \times B) = \kappa(B \times A)$, odnosno kako nam poredak u Kartezijevom poretku nije bitan kada govorimo o produktu kardinalnih brojeva preko definicije produkta za redne brojeve. Ova razmatranja motiviraju sljedeće definicije:

Definicija 3.3. Neka su a i b kardinalni brojevi, a A i B skupovi za koje je $\kappa A = a$ te $\kappa B = b$.

(a) ***Zbroj (suma) kardinalnih brojeva*** a i b je kardinalni broj unije skupova A i B, pri čemu je $A \cap B = \emptyset$

(b) ***Umnožak (produkt) kardinalnih brojeva*** a i b kardinalni je broj Kartezijeva produkta skupova A i B.

(c) ***Potencija*** a^b je kardinalni broj skupa A^B svih funkcija s B u A.

Neka su A i B skupovi, ne nužno disjunktni. Ako želimo odrediti sumu $\kappa A + \kappa B$, po gornjoj definiciji ćemo ju odrediti kao $\kappa(A' \cup B')$ pri čemu su A' i B' disjunktni skupovi redom ekvipotentni skupovima A i B. Takvi skupovi uvijek postoje: čak i kada je $A = B$, skupovi $A \times \{1\}$ te $B \times \{0\}$ su disjunktni te je $A \sim (A \times \{1\})$ i $B \sim (B \times \{0\})$.

Teorem 3.7. *Za proizvoljne kardinalne brojeve a, b, p, iz $a \leq b$ slijedi*

$$a + p \leq b + p; \quad ap \leq bp; \quad a^p \leq b^p; \quad p^a \leq p^b.$$

Dokaz. Prve dvije tvrdnje slijede iz već razmotrenih svojstava rednih brojeva. Druga dva svojstva ćemo dokazati pronalazeći injekcije među odgovarajućim skupovima.
Neka su A, B, P skupovi kojima su redom kardinalni brojevi a, b, p. Jer je $a \leq b$, neka je $A \subseteq B$. Kako bismo dokazali treću tvrdnju, pokazat ćemo da postoji injekcija sa skupa A^P u skup B^P. Svakoj funkciji $f \in A^P$ može se pridružiti funkcija $g \in B^P$ takva da za svaki $x \in P$ vrijedi $f(x) = g(x)$, pri čemu se funkcije f i g razlikuju samo zato što im se kodomene razlikuju. Ako uzmemo $f_1 \neq f_2$ funkcije iz A^P, slijedi kako postoji $y \in P$ takav da je $f_1(y) \neq f_2(y)$. Međutim, ta nejednakost povlači nejednakost $g_1(y) \neq g_2(y)$ što rezultira činjenicom kako su funkcije g_1 i g_2 različite. Dakle, preslikavanje uistinu je injektivno, pa je stoga $\kappa A^P \leq \kappa B^P$.
Dokaz četvrte formule slijedit će iz postojanja injektivnog preslikavanja sa skupa P^A u skup

P^B. Naime, svakoj funkciji $f\colon A \to P$ možemo pridružiti funkciju $g\colon B \to P$ takvu da je $g|_A = f$. Ako su $f_1 \neq f_2$ funkcije iz P^A, postojat će $y \in A$ takav da je $f_1(y) \neq f_2(y)$. Međutim, tada će vrijediti $g_1|_A(y) \neq g_2|_A(y)$ te su zbog toga funkcije g_1 i g_2 različite. Time smo dokazali injektivnost iz koje slijedi kako je $\kappa P^A \leq \kappa P^B$. ■

Teorem 3.8. *Ako je kardinalni broj skupa A jednak a, onda je kardinalni broj partitivnog skupa $\mathcal{P}(A)$ jednak 2^a.*

Dokaz. Pri dokazu teorema koristit ćemo karakterističnu funkciju skupa.

> *Neka je A skup i $X \subseteq A$. Funkcija $\chi_X\colon A \to \{0,1\}$ koja svugdje na X prima vrijednost 1, a na komplementu od X vrijednost 0, naziva se karakteristična funkcija skupa X.*

Uzmimo proizvoljno preslikavanje $g\colon A \to \{0,1\}$. Ako definiramo $X \subseteq A$ kao $X = g^{-1}(\{1\})$, vrijedit će $g(x) = 1,\ \forall x \in X$ i $g(x) = 0,\ \forall x \notin X$. Ako razmotrimo karakterističnu funkciju χ_X za tako definiran X, ona će biti jednaka funkciji g. Dakle, svaka funkcija iz $\{0,1\}^A$ može se prikazati kao karakteristična funkcija te se stoga skup svih karakterističnih funkcija definiranih na skupu A podudara sa $\{0,1\}^A$.
Svakom podskupu $X \subseteq A$ možemo pridružiti jedinstvenu karakterističnu funkciju χ_X. Iz toga nam, uz definiciju funkcije $h\colon \mathcal{P}(A) \to \{0,1\}^A,\ h(B) = \chi_B$, slijedi

$$\mathcal{P}(A) \overset{\text{f-ja.}h}{\sim} \{0,1\}^A.$$

Tada je $\kappa(\{0,1\}^A) \overset{\text{def.}}{=} \kappa\{0,1\}^{\kappa A} = 2^a = \kappa(\mathcal{P}(A))$. ■

Korolar 3.8.1. *Za svaki kardinalni broj a vrijedi $a < 2^a$.*

Dokaz. Neka je A skup čiji je kardinalni broj a. Prema teoremu 3.6 je $a = \kappa A < \kappa\mathcal{P}(A)$, a prema teoremu 3.8 je $a < \kappa\mathcal{P}(A) = 2^a$. ■

Lema 3.9. *Kardinalni broj proizviljnog intervala u $\mathbb{R}$ (poluotvorenog, otvorenog i zatvorenog) jednak je $\mathfrak{c}$.*

Dokaz. $\boxed{\langle a,b\rangle \sim \langle c,d\rangle,\ \ [a,b] \sim [c,d],\ \ \langle a,b] \sim \langle c,d],\ \ [a,b\rangle \sim [c,d\rangle;\ \ a < b \wedge c < d}$ U svakom od slučaja kontruiramo istu afinu funkciju h čiji graf prolazi točkama (a,c) te (b,d). Njezin oblik je $h(x) = c + \frac{d-c}{b-a}(x-a)$. Bijektivnost slijedi trivijalno.
$\boxed{\langle 0,1] \sim \langle 0,1\rangle}$ Ideja je pronaći niz u potpunosti sadržan u $\langle 0,1]$ koji će konvergirati ka 0, a čiji ćemo n-ti član funkcijom preslikati na vrijednost $n+1$-og člana, osiguravši tako da će se sve vrijednosti iz niza, osim prve koju postavimo na 1, realizirati preslikavanjem. Ostale vrijednosti iz poluotvorenog intervala preslikamo identitetom. Takvo preslikavanje ima primjerice sljedeći oblik:

$$f\colon \langle 0,1] \to \langle 0,1\rangle, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n} \text{ za } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

Injektivnost. Ukoliko su $x_1, x_2 \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $x_1 \neq x_2$, postoje različiti $k, l \in \mathbb{N}$ za koje je $x_1 = \frac{1}{k}$, $x_2 = \frac{1}{l}$. Trivijalno će slike tih elemenata također biti različite. Ukoliko $x_1, x_2 \notin \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, injektivnost slijedi zbog injektivnosti identitete. Ako je $x_1, \in \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, $x_2, \notin \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, njihove slike ne mogu biti jednake. Kada bi slika elementa x_2 bila oblika $\frac{1}{m}$, po načinu na koje je preslikavanje definirano, x_2 bi morao biti u skupu za kojega smo pretpostavili da nije elementom.
Surjektivnost. Uz oznaku $S = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}_{\geq 2}\}$, jasno je da element kodomene može biti ili elementom skup S, ili elementom skupa $\langle 0, 1\rangle \backslash S$. Ako je y element skupa S, onda je $y = \frac{1}{m}$, pa je $f(\frac{1}{m-1}) = y$. U slučaju da y nije u S, vrijedit će $f(y) = y$.
$\boxed{[0,1] \sim [0,1\rangle}$ Potpuno analogno ćemo definirati preslikavanje $g\colon [0,1] \to [0,1\rangle$ kao u prethodnome dijelu dokaza, odnosno

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & x = \frac{1}{n} \text{ za } n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{inače} \end{cases}$$

Bijektivnost stoga odmah slijedi. Sada po simetričnosti i tranzitivnosti relacije $\sim$ imamo

$$[0,1] \overset{g(x)}{\sim} [0,1\rangle \overset{\phi(x)=1-x}{\sim} \langle 0,1] \overset{f(x)}{\sim} \langle 1,0\rangle \overset{h(x)}{\sim} \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \overset{tg(x)}{\sim} \mathbb{R}$$

iz čega slijedi tvrdnja leme.

■

Teorem 3.10. *Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ ekvipotenatan je skupu $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti koristeći se teoremom 3.5, odnosno uspostavljajući injekcije između odgovarajućih skupova. Prema lemi 3.9 i teoremu 3.8, dovoljno je pozornost usmjeriti na skupove $\langle 0,1]$ i $[0,1]$ kao reprezentante kardinalnog broja $\mathfrak{c}$ te skup $\{1,0\}^{\mathbb{N}}$ kao reprezentant kardinalnog broja $2^{\aleph_0} = \kappa(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

Svaki element skupa $\langle 0,1]$ prikazat ćemo u obliku dijadskih razlomaka, odnosno razlomaka u sustavu s bazom dva, u kojem je svaka znamenka 0 ili 1. Tako ćemo, primjerice, broj $\frac{3}{4}$ prikazati kao broj 0.11 ili $0.10\dot{1}$. Uvjerimo se kako se u oba slučaja uistinu radi o broju $\frac{3}{4}$:

$$0.11 = 2^{-1} + 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$0.1011\ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Prvi prikaz karakteriziran je time što ima konačno mnogo znamenaka jedan, dok drugi prikaz ima beskonačno mnogo jedinica. Naime, svi iracionalni brojevi imat će prikaz s beskonačno mnogo jedinica (*kada bi prikaz imao konačno mnogo jedinica, mogli bismo pronaći jedinicu nakon koje su sve znamenke nula, pa broj ne bi bio iracionalan*) isto kao i neki racionalni brojevi (*primjerice broj $\frac{1}{3}$ ima jedinstven prikaz $0.010\dot{1}$, $\frac{1}{7}$ je u sustavu s bazom dva oblika $0.\dot{0}0\dot{1}$ i sl.*). Čak štoviše, dva će prikaza imati beskonačno prebrojivo mnogo racionalnih brojeva. Mi ćemo svaki realan broj iz poluotvorenog intervala prikazati u zapisu s beskonačno mnogo jedinica kako bi zapis svakog broja imao beskonačno mnogo decimala.

Gornje razmatranje ukazuje na činjenicu kako $\forall x \in \langle 0, 1]$ postoji jedinstveni prikaz u dijadskom sustavu u obliku

$$x = 0.x_1x_2x_3 \cdots x_n \cdots$$

pri čemu je $x_i = 1$ za beskonačno mnogo indeksa $i \in \mathbb{N}$. Sada svakom takvom broju x pridružimo niz

$$f(x) = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots\}.$$

Preslikavanje $f\colon \langle 0, 1] \to \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ je zbog jedinstvenosti prikaza injekcija, pa je stoga

$$\kappa(\langle 0, 1]) = \mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0} = \kappa(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}). \tag{5}$$

Definirajmo sada $g\colon \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \to [0, 1]$ kao preslikavanje koje svakom nizu nula i jedinica $\chi = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ pridružuje broj između nula i jedan, uključujući nulu, čiji je zapis u sustavu s bazom deset $0.x_1x_2x_3\cdots$. Preslikavanje g je trivijalno injekcija: za različite nizove χ_1 i χ_2 postoji barem jedan $k \in \mathbb{N}$ takav da je $x_k^{(1)} \neq x_k^{(2)}$, pa će se stoga i pridruženi brojevi razlikovati u k-toj decimali. Jer je g injekcija, slijedi

$$\kappa(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}) = 2^{\aleph_0} \leq \mathfrak{c} = \kappa([0, 1]). \tag{6}$$

Prema teoremu 3.5, iz nejednakosti (5) i (6) slijedi $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ pa prema teoremima 3.2 i 3.8 vrijedi $\mathbb{R} \sim \mathcal{P}(\mathbb{N})$. ■

4 Hipoteza kontinuuma

Pozivajući se na teoreme dokazane u prethodnome poglavlju, posebice teorema 3.10 te teorema 3.6, zaključujemo kako je kardinalni broj skupa $\mathbb{R}$ strogo veći od kardinalnog broja skupa $\mathbb{N}$, odnosno kako je $\mathfrak{c} > \aleph_0$. Krajem dvadesetoga stoljeća, kao posljedica popularizacije Zermelo–Fraenkelove (ZF) teorije skupova i teorije skupova općenito, sve veći broj matematičara počinje proučavati skupove i njihova svojstva. Pokazalo se kako su glavninu njihova istraživanja, neovisno o samoj kompleksnosti problema kojima su se bavili, prožimali beskonačni skupovi čiji je kardinalni broj bio jednak $\aleph_0$ ili pak $\mathfrak{c}$, što je rezultiralo širenjem slutnje u matematičkome svijetu kako jednostavno ne postoji kardinalni broj između $\aleph_0$ i $2^{\aleph_0}$ ili, ekvivalentno,

Ne postoji beskonačan skup $S \subseteq \mathbb{R}$ koji nije ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$ niti skupu $\mathbb{R}$.

Formalan oblik problemu dao je G. Cantor prije navedene slutnje sročivši u logički ekvivalentnu hipotezu, poznatiju kao *hipotezu kontinuuma* (CH): **vrijedi** $2^{\aleph_0} = \aleph_1$[11]. U ovom

[11] *Brojevni razredi i* $\aleph_1$. Za beskonačan kardinalan broj m, skup $Z(m)$ kojeg čine svi redni brojevi kojima je kardinalni broj jednak m nazivamo brojevnim razredom. $\aleph_1$ kardinalni je broj brojevnog razreda $Z(\aleph_0)$ svih prebrojivih rednih brojeva, tj. $\aleph_1 := \kappa(Z(\aleph_0))$. Općenito se koristi oznaka $\aleph_\alpha := \kappa(Z(\aleph_{\alpha-1}))$, pri čemu α ide po klasi svih rednih brojeva.

Može se pokazati kako kardinalni broj $\aleph_1$ dolazi neposredno iza $\aleph_0$ (v. [5], str. 122.) iz čega proizlazi ekvivalencija Cantorovog "formalnog" oblika hipoteze kontinuuma i tvrdnje kako ne postoji kardinalni broj između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$.

poglavlju razmotrit ćemo dvije faze ključne za razmatranje hipoteze kontinuuma: konzistentnost hipoteze kontinuuma sa ZF teorijom koju je pokazao K. Gödel[12] te neovisnost hipoteze u odnosu na aksiome ZF teorije koju je pokazao P. Cohen[13]. Naposljetku ćemo razmotriti značaj same hipoteze u teoriji skupova te argumente za i protiv njezina uključenja u aksiomatsku izgradnju iste.

Konzistencija hipoteze kontinuuma.

Započnimo definirajući vezane varijable preko osnovnih logičkih pojmova. Napomenimo kako je ovo pojednostavljena definicija budući da formalna definicija zahtjeva razumijevanje više matematičke logike. Zainteresirani čitatelji mogu saznati više u [4].

> *Dobro oblikovana formula* je građena isključivo od veznika, varijabli i kvantifikatora. ***Vezane varijable*** su varijable uvedene kvantifikatorima, vezane za neku vrijednost ili skup vrijednosti. Varijable koje nisu vezane su slobodne.

Prvo razmotrimo što Gödel naziva *predikatna definicija skupa*: osnovna ideja leži u tome kako skup nije a priori postojeći objekt, već se mora zadati svojstvom $P(x)$. Kako bi kasnije predstavio svoj *aksiom izgradivosti*, Gödel dopušta da prije spomenuta svojstva ne moraju nužno biti empirijski potvrdiva za dani x, međutim, kako bi se izbjegli paradoksi, objekti moraju biti "predani" svojstvu (dakle, biti elementi nekog odabranog skupa, eksplicitno konstruirane kolekcije objekata i sl.). Primjerice, ukoliko elemente skupa $\mathbb{N}$ uzmemo za dopuštene vrijednosti te $P(n)$ svojstvo čije su vezane varijable restringirane na $\mathbb{N}$, $\{n \mid P(n)\}$ čini predikatno definiran skup u terminima prirodnih brojeva. Razmotrimo sada svojstvo

$$\begin{aligned} P(n) = &\text{"postoji particija skupa } \omega \text{ na } n \text{ disjunktnih skupova od kojih niti jedan ne sadrži} \\ &\text{aritmetički niz unaprijed zadane duljine"} \end{aligned}$$

te definirajmo $S = \{n \mid P(n)\}$. Uz dane uvjete, definicija skupa S je *nepredikatne definicije*. Naime, ako želimo provjeriti je li $m \in S$, moramo razmotriti sve particije skupa ω, uključujući i one u kojima je sam skup S, upadajući tako u svojevrsnu petlju. Iako definiran u skladu sa ZF teorijom, u ovom slučaju za skup S domena izbora elemenata jednostavno nije dovoljno specifična.

Skup koji se može dobiti kao rezultat transfinitnog niza predikatnih definicija nazivamo *izgradivim*. Sa L označimo klasu izgradivih skupova te za svaku formulu A s A_L označimo istu formulu čije su varijable restringirane kako bi bile izgradive. Gödel prvenstveno dokazuje kako je za svaku formulu A, ukoliko je ona aksiom ZF teorije, A_L dokaziva u ZF, intuitivno pokazujući kako izgradivi skupovi čine model za ZF (nešto više o modelima u sljedećem odjeljku).

Nakon toga se uvodi ideja *aksioma izgradivosti*, odnosno ideje kako je svaki skup izgradiv

[12] *Kurt Gödel*, 1906. - 1978. Austrijsko-Američki matematičar, logičar i filozof zaslužan za jedan od ključnih rezultata 20. stoljeća - *teorem nepotpunosti*, v. [9].

[13] *Paul Joseph Cohen*, 1934.-2007. Američki matematičar, dobitnik Fieldsove medalje za svoje doprinose na području teorije skupova, v. [8].

(oznaka $V = L$, pri čemu je V jedna od standardnih oznaka za klasu svih skupova). Aksiom izgradivosti jedan je od primjera tvrdnji u teoriji skupova koja je dokazano nedokaziva. Treba napomenuti kako Gödel ne uzima da aksiom izgradivosti vrijedi niti da ne vrijedi, već ga koristi isključivo kao oružje pri dokazu hipoteze kontinuuma i aksioma izbora.

Drugi teorem kojega Gödel dokazuje rezultira činjenicom kako je $(V = L)_L$ dokaziv u ZF, tj. izgradiv skup je izgradiv i kada se cijela njegova izgradnja relativizira na skup L.

Posljednji u nizu dokazanih teorema pokazuje kako aksiom izgradivosti implicira dokazivost aksioma izbora i CH u ZF teoriji. Posljedica ova tri teorema činjenica je kako su aksiom izbora i hipoteza kontinuuma neosporivi u ZF teoriji, odnosno iz aksiomatike teorije skupova ne može se izvesti njihova negacija. Dakle, dodavanje hipoteze kontinuuma kao novog aksioma neće rezultirati proturječjem u samoj teoriji, ako to proturječje nije već postojalo.

Neovisnost hipoteze kontinuuma.

Budući da se do tada korištene metode analize u teoriji skupova i matematičkoj logici nisu pokazale dovoljno moćnim alatom za dokaz neovisnosti CH i aksioma izbora od ZF teorije skupova, Cohen 1963. godine razvija novu tehniku za dokazivanje rezultata neovisnosti - *forsiranje*. Metoda se mijenjala i pojednostavljala kroz nadolazeće godine postajući gotovo pa standardnim alatom u svijetu matematičke logike kao posljedica pojave skepticizma spram aksiomatskih sustava nakon objave Gödelova teorema o nepotpunosti. U ovome ću odjeljku pojasniti intuiciju Cantorova rada, postupno prateći pojednostavljenja Cohenovih teza kako bi si čitatelj mogao, bez razumijevanja više matematičke logike, predočiti početak njegova razmatranja i osnovnu iza samog forsiranja. Predznanje potrebno za potpuno razumijevanje dokaza nadišlo bi obujam, ali i ideju ovoga rada, stoga nećemo razmatrati sam postupak forsiranja, već dati jasnu uvertiru u njega.

Kao što je gore navedeno, Cohen je dokazao neovisnost hipoteze kontinuuma od ZFC teorije skupova (*ZF teorije kojoj je dodan aksiom izbora*); točnije, dokazao je kako hipoteza nije logička posljedica ZFC aksioma uz pretpostavku kako je ZFC konzistentan što je skupa s Gödelovim dokazom kako negacija hipoteze nije logička posljedica ZFC rezultiralo njezinom potpunom neovisnošću. Postupak je započeo nadopunjavanjem ZFC aksioma negacijom hipoteze kontinuuma te konstrukcijom matematičke strukture koja zadovoljava ZFC i $\neg$HC. Ta se struktura naziva *modelom* aksioma.

Model je pojam s kojim se ne susrećemo često izvan formalne logike, ali je kao koncept poprilično poznat. Primjerice, u teoriji grupa (*proučava algebarske strukture zvane grupama*), model za aksiome teorije grupa je skup G na kojem je zadana binarna operacija $\star$ koje zadovoljava aksiome u teoriji, kao što su: $\exists e \in G$ takav da $x \star e = e \star x = x$, $\forall x \in G$ i sl. Analogno bismo mogli uvesti pojam *univerzuma*, strukture koja je model za ZFC. Tada bismo razmatranje ZFC mogli započeti definicijom oblika

Univerzum je skup M snabdjeven binarnom relacijom R koja zadovoljava...

popraćenom listom aksioma koji grade samu ZFC teoriju.

Ova dva primjera trebala bi razjasniti čitatelju što predstavlja model. Trebalo bi dodatno napomenuti kako u teoriji skupova sa “ZFC” označavamo listu aksioma, a sa “model od ZFC” strukturu koja zadovoljava spomenute aksiome, stoga koristiti pojam univerzum kao naziv za “model od ZFC” nije standardni pristup. Cohen u svome radu razmatra tzv. *standardne modele* za ZFC. Model M za ZFC je standardni ukoliko su elementi skupa M *dobro osnovani* te ukoliko je R relacija “*biti elementom skupa koji ne sadrži sam sebe*”. Dobro osnovani skupovi su skupovi izgrađeni induktivno iz praznog skupa, koristeći unije skupova, partitivne skupove spomenutih skupova i sl. Valja istaknuti kako nije jasno postoje li standardni modeli, čak ako uzmemo kako je ZFC konzistentna. Iako se čini da je to ozbiljna limitacija u Cohenovu pristupu, kasnije se pokazuje kako upravo ta limitacija vodi ka predstavljanju raznih mogućnosti. Dodatno svojstvo koje model za ZFC može imati je *tranzitivnost*. Standardni model M za ZFC je tranzitivan ako je svaki element nekog elementa u M ujedno i element u M. Ovo je prirodan uvjet za pretpostaviti ako razmatramo M kao univerzum sačinjen od “svega što postoji”; u takvome univerzumu, skupovi bi trebali biti skupovi objekata koji već postoje u tom univerzumu. Stoga ćemo u daljnjem tumačenju razmatrati primarno standardne tranzitivne modele.

Izgradimo sada model za ZFC koji zadovoljava $\neg$CH. Počnimo s prebrojivim standardnim tranzitivnim modelom M. Po teoriji kardinalnih brojeva uvijek postoji najmanji kardinalni broj nakon nekog proizvoljno odabranog kardinalnog broja, pa neka $\aleph_1$, $\aleph_2$, $\aleph_3$... budu redom po veličini posloženi kardinalni brojevi veći od $\aleph_0$. Može se pokazati kako postoji skup u M koji obnaša ulogu skupa $\aleph_2$ (kao rednog broja) u skupu M. Neka je taj skup $\aleph_2^M$. Konstruirajmo funkciju F sa skupa $\aleph_2^M \times \aleph_0$ u skup $\{0, 1\}$. Možemo sada shvatiti F kao niz funkcija sa $\aleph_0$ u skup $\{0, 1\}$. Jer je M prebrojiv i tranzitivan, onda je to i $\aleph_2^M$ zbog čega možemo postići da spomenute funkcije budu u parovima različite. Ako je F uključen u M, tada M zadovoljava $\neg$CH. Naime, funkcije sa $\aleph_0$ u skup $\{0, 1\}$ mogu biti poistovjećene s podskupovima skupa $\aleph_0$, pa F stoga pokazuje kako partitivan skup od $\aleph_0$ u M mora biti barem $\aleph_2$ iz čega slijedi tvrdnja. Ukoliko F nije u modelu M, možemo ga dodati u njega kako bismo dobili veći model za ZFC, kojega označavamo sa $M[F]$.

Naravno, u pitanju nije puko dodavanje skupa u M: Cohen se morao pobrinuti za brojne tehničke prepreke koje bi mogle rezultirati promjenom struktura samoga M toliko da razmatranja u gornjem ulomku više nisu točna. Kompleksnost rješavanja tih prepreka nadilazi ovaj rad te ih stoga nećemo posebno razmatrati.

Stigli smo, dakle, do činjenice kako, ako želimo izgraditi model za $\neg$CH, bilo bi korisno imati metodu koja započinje s proizvoljnim standardnim tranzitivnim modelom M za ZFC te gradi novu strukturu dodavanjem podskupova koji nedostaju u M. Cohen se u ovome dijelu rada posvećuje objašnjavanju koncepta forsiranja, složenoga matematičkog postupka ukorijenjenog u kompleksnoj matematičkoj logici, matematičkoj filozofiji i, naravno, teoriji skupova.

Zaključak Cohenova rada je činjenica da će dodavanjem aksiomima teorije skupova negacije hipoteze kontinuuma teorija ostati neproturječna. Stoga, hipoteza kontinuuma neovisna je o ostalim aksiomima.

Zaključak.

Hipoteza kontinuuma pokazana je neovisnom o aksiomima ZFC teorije, a njezina točnost, jednako kao i netočnost, niti su osporive, niti neosporive. Posljedica toga je činjenica kako poznatoj teoriji skupova možemo kao aksiom dodati hipotezu kontinuuma ili njezinu negaciju, ne remeteći tako konzistentnost cijele zadane teorije. Pitanje koje se stoga prirodno nameće matematičarima je: kuda smjestiti hipotezu kontinuuma i kako pristupati pitanjima sličnim CH glede rezultata o neovisnosti.

U jednu ruku, matematičari dijele mišljenje kako ćemo daljnjim djelovanjem na području teorije skupova doći do intuitivno jasnoga aksioma koji će dokazati ili opovrgnuti CH. Čini se, međutim, kako bi jedini utjecaj na valjanost hipoteze kontinuuma imali aksiomi koji restringiraju karakter samih skupova, kao što je aksiom $V = L$, odnosno aksiom izgradivosti, no takvi aksiomi nisu prihvaćeni od strane velikog broja matematičara.

U drugu ruku, brojni matematičari opredijelili su se hoće li ili neće prihvatiti CH u aksiomatsku izgradnju nove, opširnije ZFC + CH teorije skupova. I prije no što je Cohen predstavio sam problem krajem devetnaestoga stoljeća, matematičari su uzimali kako uistinu ne postoji kardinalni broj između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$, olakšavajući si tako brojna razmatranja vezana uz teoriju skupova. Dodatno, kada bi hipoteza kontinuuma bila istinita, mogla bi se uspostaviti bijekcija između brojevnog razreda $Z(\aleph_0)$ te skupa $\mathbb{R}$. Time bi se uspostavio transfinitan proces konstrukcije skupa realnih brojeva. Ovdje nailazimo na ideju matematičkog komfora: uvažavanja tvrdnji koje pojednostavljuju postupke isključivo zbog samoga pojednostavljenja. Činjenica kako bi CH učinio brojne procese lakšima te kako bi dao određene rezultate koji su od velikog interesa matematičarima nije sama po sebi dovoljna za njezino prihvaćanje, pogotovo kada razmotrimo mogućnost osporavanja CH pomoću intuitivnijeg aksioma prezentiranu u prethodnom ulomku.

Izbjegavati ovakva razmatranja u potpunosti daleko je od rješenja problema. Nakon što je Gödel predstavio svoj teorem nepotpunosti, velik broj dokazano nedokazivih tvrdnji (poput CH) isplivao je na površinu te se svojevrsni nihilizam proširio matematičkim svijetom. Brojna filozofska razmatranja (*modernoj matematici nije strano zaploviti filozofskim vodama; Cantorov "Grundlagen", rad u kojemu je definiran dobro uređen skup i u kojem su predstavljeni transfinitni brojevi, velikim je dijelom filozofsko tumačenje beskonačnosti, v. [1]*) bave se tvrdnjama dokaze kojih generacije matematičara pokušavaju dokučiti, prezentirajući ideju kako trenutnim poimanjem matematike nismo uopće u stanju dokazati iste. Što ako Riemannova hipoteza, kao i njezina negacija, jednostavno nemaju dokaz? Što ako nisu niti istinite niti lažne? Što ako mogu biti dodane kao aksiom teorije brojeva?

Razumijevanje matematičkog univerzuma u svojem je ranom stadiju: teorija skupova, kamen temeljac razvoja samoreferentnoga sustava istinski apstraktnih matematičkih alata, nastala je tek prije stotinu godina. Stotinu godina prije Euler tek uvodi oznaku za imaginarnu jedinicu. Možda će stotinu godina biti potrebno da se ostvari ikakav pomak; no zanemariti pitanja na koja trenutno nemamo odgovor i za koja nam se čini kako nadilaze naše sposobnosti nikada nije bila opcija za matematičare. Uvijek se možemo osloniti na najvećeg saveznika matematičkog djelovanja - *vrijeme*.

Literatura

[1] G. Cantor, *On infinite, linear point-manifolds (Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre)*, Mathematische Annalen, 1883., (javno dostupno: `formandformalism.blogspot.com/2011/06/georg-cantors-1883-grundlagen\-article.html`)

[2] T. Y. Chow, *A beginner's quide to forcing*, Center for Communications Research, Princeton, 2009., (javno dostupno: `timothychow.net/forcing.pdf`)

[3] P. J. Cohen, *Set theory and the continuum hypothesis*, W. A. Benjamin, Inc., New York, 1966.

[4] R. Cori, D. Lascar, *Mathematical logic, A Course with Exercises, Part I: Propositional calculus, Boolean algebras, Predicate calculus*, Biddles Ltd., Guildford & King's Lynn, 2000.

[5] P. Papić, *Uvod u teoriju skupova*, Hrvatsko matematičko društvo, Zagreb, 2000.

[6] G. C. Young, W. H. Young, *THE THEORY OF SETS OF POINTS*, Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1972.

[7] Georg Cantor. *Encyclopædia Britannica online*, pristupljeno 01.08.2019. URL: `https://www.britannica.com/biography/Georg-Ferdinand-Ludwig-Philipp\-Cantor`

[8] Paul Joseph Cohen. *Encyclopædia Britannica online*, pristupljeno 18.08.2019. URL: `https://www.britannica.com/biography/Paul-Joseph-Cohen`

[9] Kurt Gödel. *Encyclopædia Britannica online*, pristupljeno 18.08.2019. URL: `https://www.britannica.com/biography/Kurt-Godel`