Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka

Sokić, Ivana

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Sokić

Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Sokić

Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka

Završni rad

Voditeljica: prof.dr.sc. Zdenka Kolar-Begović

Osijek, 2019.

Sažetak

Tema ovog rada je algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka. U prvom dijelu rada navest ćemo temeljne pojmove vezane uz konstrukcije ravnalom i šestarom. Navest ćemo metode kojima se konstruktivni zadatak može riješiti, te posebno razmatrati algebarsku metodu. Najprije ćemo razmatrati konstrukcije osnovnih izraza čije nam poznavanje olakšava konstrukciju složenijih algebarskih izraza. Posebno ćemo promatrati metode koje se koriste pri konstruiranju složenih algebarskih izraza te navesti primjere pomoću kojih ćemo ilustrirati primjenu algebarske metode.

Ključne riječi: geometrijske konstrukcije, konstruktivni zadatak, algebarska metoda, osnovni izrazi

Abstract

The theme of this paper is the algebraic method of solving constructive tasks. In the first part of the paper we will outline the basic constructive axioms and get acquainted with the sets of points in geometry we need to construct the given figures. We will get acquainted with a constructive task and its parts. We will list the methods by which the constructive task can be solved, and as the title of this paper states, we will describe the algebraic method in more detail. We will introduce basic terms on which the algebraic method is based and describe how each of them is constructed. We will introduce the concept of complex algebraic algebraic expressions and their classification and show the application of the above methods in several tasks.

Key words: geometric constructions, constructive task, algebraic method, basic expressions

Sadržaj

1 Uvod

Konstrukcije ravnalom i šestarom zauzimaju značajno mjesto u geometriji. Zahtjev za korištenjem samo ova dva instrumenta pri izvođenju geometrijskih konstrukcija potječe još od Platona. Riješiti konstruktivni zadatak znači konstruirati figuru koja se traži, upotrebljavajući pri tome samo šestar i ravnalo. U radu se razmatra algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka. Bit algebarske metode rješavanja konstruktivnih zadataka je da se nepoznate veličine, one koje treba konstruirati, prikažu kao algebarski izrazi pomoću danih veličina. Promatrajući homogene i nehomogene izraze opisane su konstrukcije osnovnih izraza. Navedeni su zadaci na kojima je ilustrirana primjena ove metode.

2 Geometrijske konstrukcije

U ovom poglavlju razmatrat ćemo osnovne pojmove vezane uz geometrijske konstrukcije korištenjem ravnala i šestara. Navest ćemo najprije aksiome ravnala i šestara. Ravnalo i šestar su najstariji geometrijski instrumenti. Ne zna se gdje su i kada izumljeni, ali je sigurno da su nastali iz potrebe pri gradnjama. Zahtjev da se za rješavanje neke zadaće koriste samo ta dva instrumenta postavio je grčki filozof Platon (429.–437. g. prije Krista).

AKSIOMI RAVNALA

1. Konstrukcija dužine ako su dani krajevi te dužine.
2. Konstrukcija polupravca s danom početnom točkom koji prolazi kroz drugu danu točku.
3. Konstrukcija pravca kroz dvije dane točke.

AKSIOMI ŠESTARA

1. Konstrukcija kružnice ako je dano središte i njen polumjer.
2. Konstrukcija bilo kojeg od dva kružna luka, ako je dano središte kružnice i krajnje točke tog luka.

Važno je spomenuti i grčkog matematičara Euklida (3. st. prije Krista) te postulate koje je postavio, među kojima su i oni iz kojih su izvedeni upravo navedeni aksiomi.

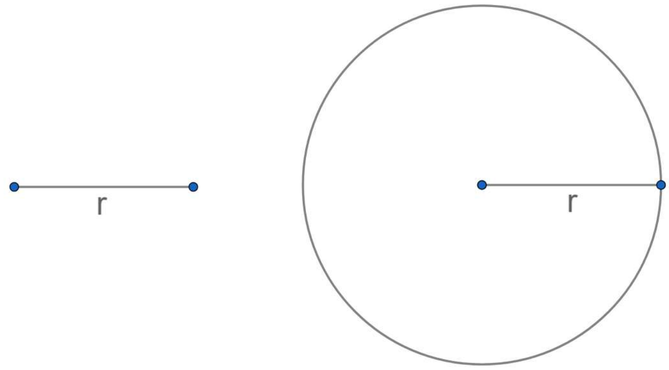
EUKLIDOVI POSTULATI

Neka se postulira:

1. Da se od svake točke do svake druge točke povlači dužina.

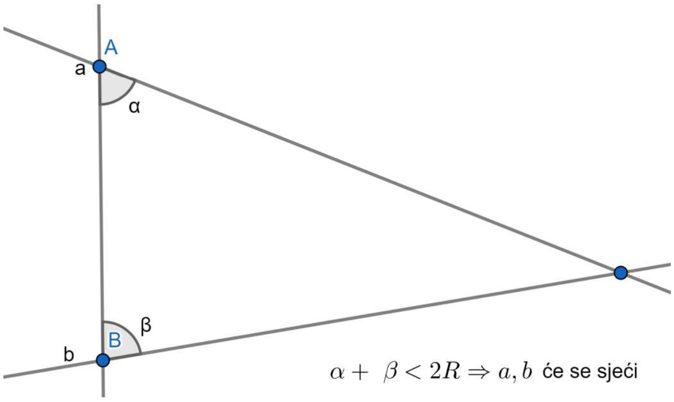
2. Da se svaka dužina može produžiti na svaku svoju stranu po volji daleko

3. Da se oko svake točke može nacrtati kružnica s danim polumjerom..



4. Da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.

5. Da će se, ako jedan pravac u presjeku s druga dva pravca tvori s njima s iste strane dva unutrašnja kuta čiji je zbroj manji od dva prava kuta ta dva pravca dovoljno produžena sjeći i to s one strane prvog pravca na kojoj se nalaze spomenuti kutovi.



Prva tri Euklidova postulata govore o konstrukcijama ravnalom i šestarom pa se konstrukcije pomoću ravnala i šestara još nazivaju "euklidske konstrukcije".

3 Konstruktivni zadatak

Svaki problem u kojem se traži da izvedemo konstrukciju uz zadane uvjete naziva se konstruktivni zadatak. Rješenjem konstruktivnog zadatka smatramo svaku figuru koja zadovoljava zadane uvjete. Rješenje konstruktivnog zadataka ne mora biti jedinstveno, pa prema rješenju konstruktivni zadatak može biti:

- **određen** - smatramo da je zadatak određen ako postoji konačan broj rješenja
- **neodređen** - smatramo da je zadatak neodređen ako postoji beskonačno mnogo rješenja
- **preodređen** - u ovom slučaju je dano više uvjeta nego što je potrebno, tako da ne postoji figura koja zadovoljava sve uvjete

Pri rješavanju konstruktivnih zadataka imamo četiri koraka, a to su:

1) **ANALIZA**
Tražimo način rješavanja zadatka, izrađujemo pomoćni crtež (skicu) s danim i traženim figurama i istražuje se veza danih i traženih figura uz pomoć eventualnih pomoćnih likova. U analizi se koriste ranije izvedene konstrukcije.

2) **KONSTRUKCIJA**
Izvodi se na osnovu izvršene analize. Navodi se niz temeljnih konstrukcija ili ranije riješenih zadataka koji dovode do tražene figure.

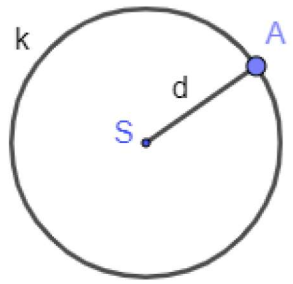
3) **DOKAZ**
Dokazuje se da dobivena figura zadovoljava sve uvjete postavljene u zadatku te da je svaki korak u konstrukciji moguć.

4) **RASPRAVA**
U raspravi se odgovara na pitanje o mogućnosti izvršenja konstrukcije na promatrani način, o broju rješenja uz svaki mogući odabir danih elemenata.

3.1 Geometrijska mjesta točaka ravnine

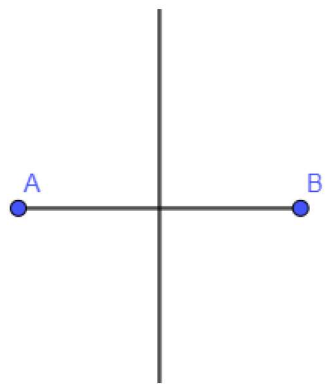
Skup svih točaka ravnine koje zadovoljavaju izvjestan uvjet nazivamo geometrijskim mjestima točaka ravnine. Pri rješavanju konstruktivnih zadataka potrebno je poznavati neka geometrijska mjesta točaka ravnine. U nastavku navodim ona geometrijska mjesta točaka ravnine koja se često pojavljuju.

1) Geometrijsko mjesto točaka ravnine koje su udaljene od neke čvrste točke S za konstantnu duljinu d je kružnica sa središtem u S i polumjerom d (Slika 1).



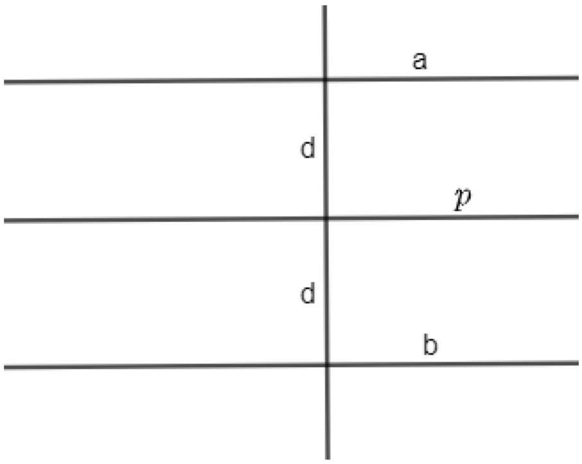
Slika 1

2) Geometrijsko mjesto točaka ravnine koje su jednako udaljene od dviju čvrstih točaka A i B je simetrala dužine $\overline{AB}$ (Slika 2).



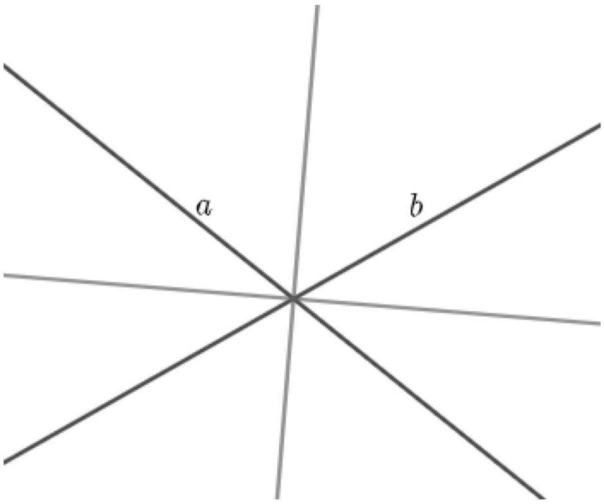
Slika 2

3) Geometrijsko točaka ravnine koje su jednako udaljene od nekog pravca p za d jesu dva pravca a i b koji su paralelni s p i od njega na obje strane udaljeni za d (Slika 3).



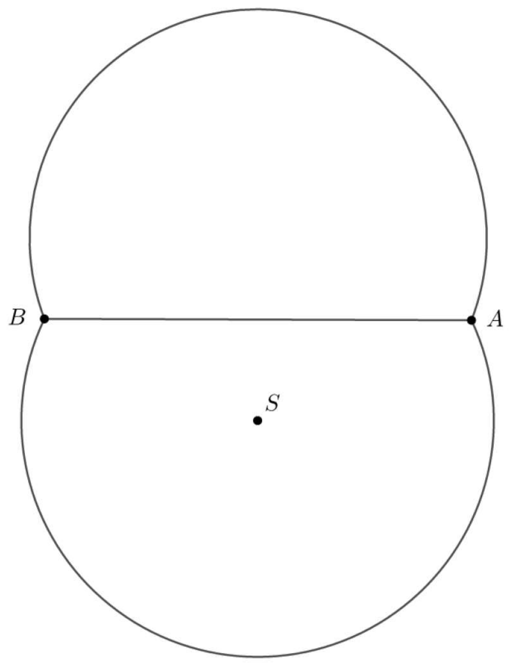
Slika 3

4) Geometrijsko mjesto točaka ravnine koje su jednako udaljene od dva neparalelna pravca su dva međusobno okomita pravca koja raspolavljaju kutove što ga čine dva dana pravca (Slika 4).



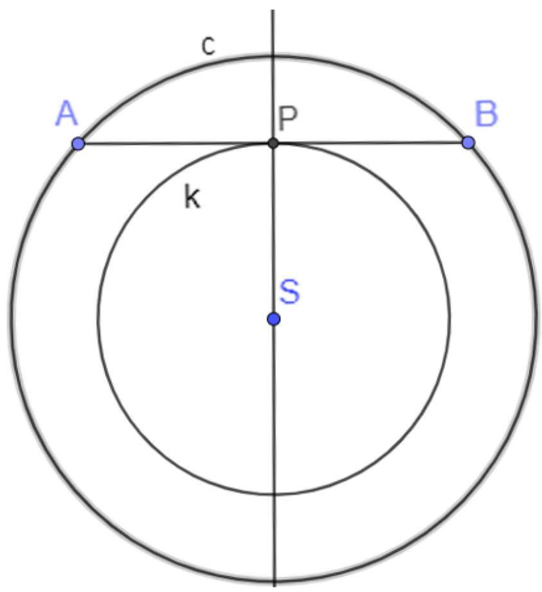
Slika 4

5) Geometrijsko mjesto točaka ravnine iz kojih se dana dužina vidi pod danim kutom dva su kružna luka nad danom dužinom tako da je obodni kut nad danom dužinom jednak danom kutu (Slika 5).



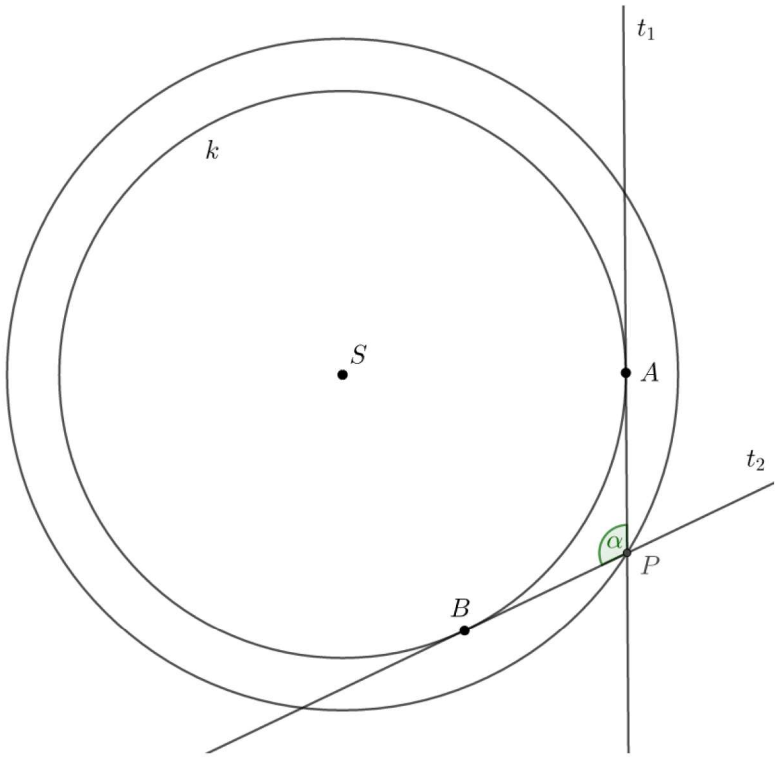
Slika 5

6) Geometrijsko mjesto polovišta svih međusobno jednakih tetiva dane kružnice je kružnica koja je koncentrična s danom kružnicom i koja dira neku od tetiva (Slika 6).



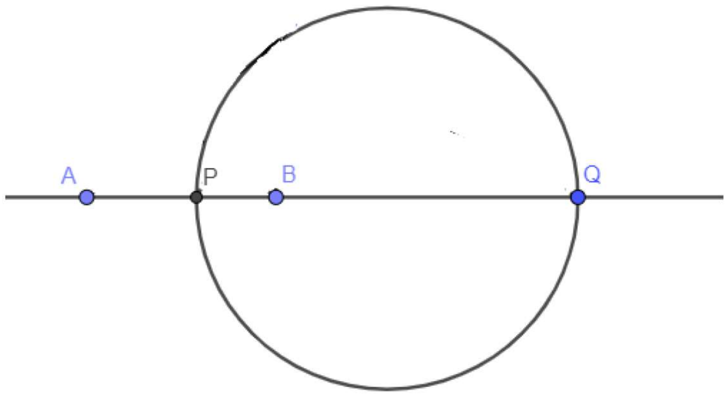
Slika 6

7) Geometrijsko mjesto točaka ravnine iz kojih se dana kružnica k vidi pod danim kutom je kružnica koncentrična sa zadanom kružnicom. Ako se kružnica iz neke točke vidi pod kutom α, onda je kut između tangenti iz te točke na kružnicu jednak α (Slika 7).



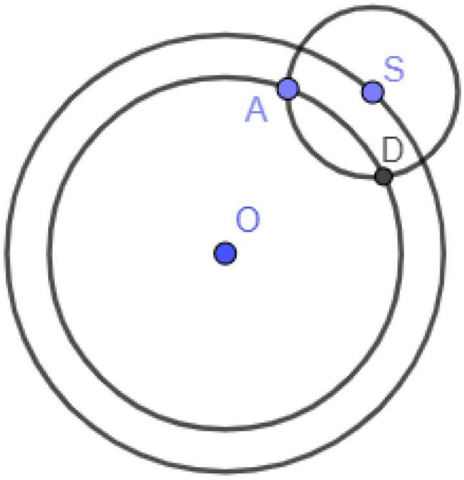
Slika 7

8) Geometrijsko mjesto točaka ravnine za koje udaljenosti od dvije čvrste točke stoje u omjeru $m : n \neq 1$ je kružnica promjera $\overline{PQ}$, gdje P dijeli dužinu $\overline{AB}$ iznutra u omjeru $m : n$, a točka Q dijeli dužinu $\overline{AB}$ izvana u omjeru $m : n$ (Slika 8).



Slika 8

9) Geometrijsko mjesto točaka kružnica koje imaju jednake polumjere r i koje presijecaju danu kružnicu k u sukladnim tetivama je kružnica koncentrična danoj kružnici (Slika 9). Tu kružnicu lako konstruiramo ako konstruiramo jednu kružnicu koja zadovoljava uvjet. Njezino središte tada opisuje traženu kružnicu (polumjer $\overline{OS}$).



Slika 9

4 Rješavanje konstruktivnih zadataka

Pri rješavanju konstruktivnih zadataka koristimo se sljedećim metodama.

- Algebarska metoda
- Metoda pomoćnih likova
- Metoda osne simetrije
- Metoda rotacije
- Metoda centralne simetrije
- Metoda translacije
- Metoda homotetije
- Metoda sličnosti
- Metoda inverzije
- Metoda afinosti
- Metoda kolineacije

U ovom radu ćemo proučiti primjenu algebarske metode.

4.1 Algebarska metoda

Znamo da se svaki matematički zadatak pa tako i konstruktivni, sastoji od danih ili poznatih i traženih ili nepoznatih veličina, te od uvjeta koji opisuju odnose među danim i traženim veličinama. Traženu ili nepoznatu veličinu u konstruktivnim zadacima treba konstruirati. Bit ove metode je u tome da se nepoznate veličine izraze algebarskim izrazom, odnosno formulama pomoću danih veličina $\mathrm{d}_1, \ldots, d_m$. Tada dobivamo izraz oblika

$$x = \mathrm{I}(d_1, d_2, \ldots, d_m)$$

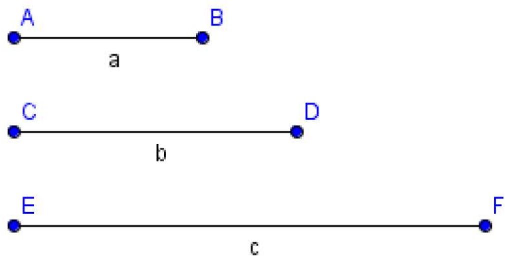
Sve varijable su duljine dužina pa poprimaju pozitivne vrijednosti. Izraz x je rješenje konstruktivnog zadatka te njega konstruiramo. Odgovor na pitanje kada se neki izraz I može konstruirati pomoću ravnala i šestara daje sljedeći teorem.

Teorem 1. *Svaki pozitivni izraz $I(d_1, d_2, \ldots, d_m)$, koji se iz danih veličina $d_1, d_2, \ldots, d_m$ dobiva konačnim brojem racionalnih operacija (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje) i vađenjem drugih korijena, može se konstruirati pomoću ravnala i šestara.*

4.2 Osnovni izrazi

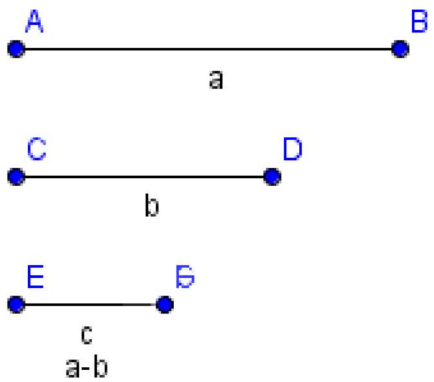
Često će dobiveni izraz biti složenog oblika. Zbog toga je potrebno navesti konstrukcije osnovnih izraza pomoću kojih ćemo lakše konstruirati složene izraze. Navest ćemo konstrukcije osnovnih izraza koje je dobro poznavati prilikom primjene algebarske metode. U svim daljnjim izrazima a, b, c su dane duljine dužina, m, n su prirodni brojevi, a x je duljina dužine koju treba konstruirati.

1) $c = a + b$ (Slika 10)



Slika 10

2) $c = a - b \quad (a > b)$ (Slika 11)



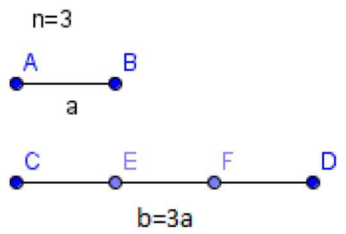
Slika 11

3) $x = n \cdot a$ (Slika 12)

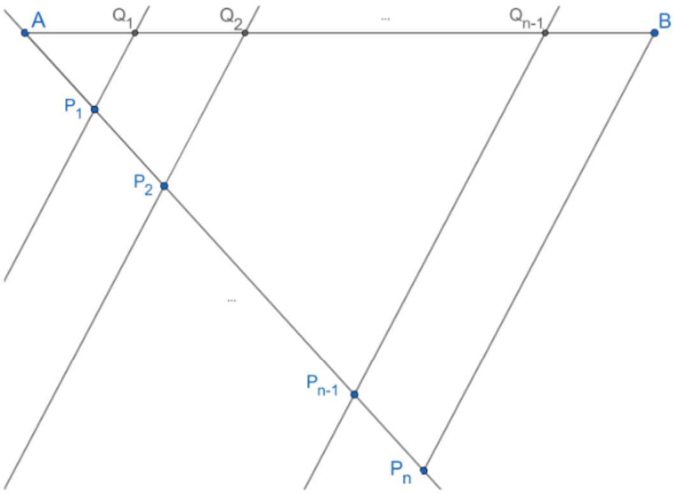
4) $x = \dfrac{a}{n}$ (dijeljenje dužine na n dijelova) (Slika 13)

5) $x = \dfrac{m}{n} \cdot a$

Konstrukcija se svodi na 3) i 4). (Najprije se konstruira $x_1 = \dfrac{a}{n}$, te onda $x_2 = x = mx_1$)



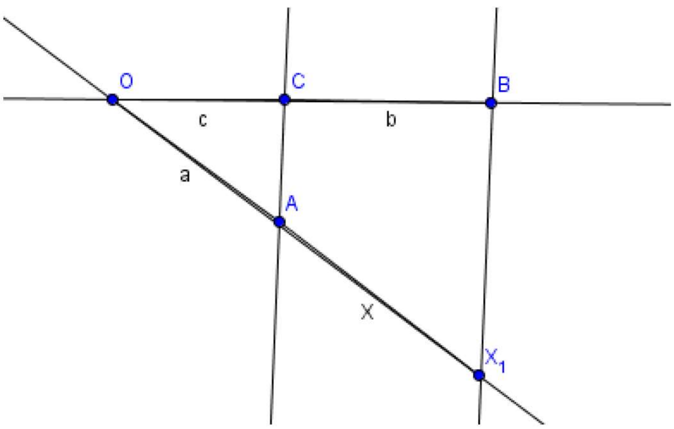
Slika 12



Slika 13: $x = \dfrac{a}{n}$

6) $x = \frac{ab}{c}$

Zapišemo li danu jednakost u obliku $a : c = x : b$ vidimo da se konstrukcija može izvesti primjenom sličnosti (Slika 14).

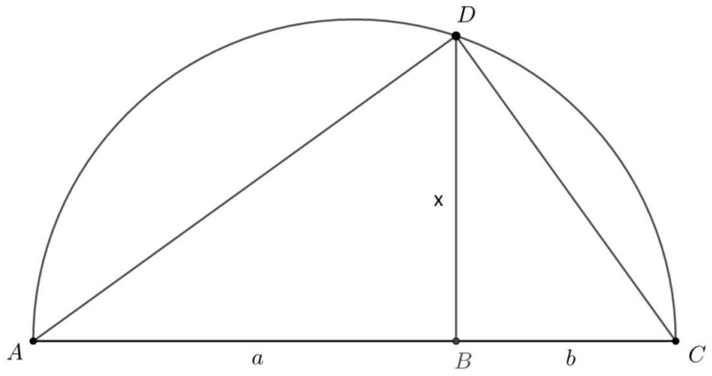


Slika 14

Neka su dane $|OA| = a$, $|CB| = b$ i $|OC| = c$. Konstruirajmo dužinu $\overline{OB}$ duljine $c+b$. Konstruiramo polupravac točkom O i na njega nanesemo $\overline{OA}$ duljine a. Kroz točku B

povučemo paralelu sa spojnicom CA. Ta paralela siječe pravac OA u točki X, te je $\overline{AX}$ tražena dužina duljine x.
Da bi izračunali duljinu dužine x koristimo Talesov teorem o proporcionalnosti. Vrijedi $x : b = a : c$ te odavde imamo osnovni izraz $x = \frac{ab}{c}$.

7) $x = \sqrt{ab}$ (geometrijska sredina brojeva a i b (Slika 15))



Slika 15: $x = \sqrt{ab}$

Konstruirajmo dužinu $\overline{AC}$ čija je duljina zbroj duljina dužine $\overline{AB}$ duljine a i $\overline{BC}$ duljine b. Konstruirajmo polukružnicu k sa središtem u polovištu dužine $\overline{AC}$ promjera $\overline{AC}$. U točki B konstruiramo okomicu na $\overline{AC}$ koja siječe polukružnicu u točki D. Duljina dužine $\overline{BD}$ je $x = \sqrt{ab}$.

8) $x = \sqrt{nab}$
Konstrukcija se svodi na 3) i 7). (Najprije se konstruira $x_1 = na$, te onda izraz $x_2 = x = \sqrt{x_1 b}$).

9) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$
Traži se hipotenuza pravokutnog trokuta kojemu su a i b duljine katete.

10) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$ $(a > b)$
Tražena dužina je kateta pravokutnog trokuta kojemu je a duljina hipotenuze, a b duljina druge katete.

11) $x = a\sqrt{n}$
Ovaj izraz možemo zapisati na dva načina:

- $x = \sqrt{naa}$, pa je to izraz pod brojem 8) gdje je $b = a$

- $x = \underbrace{\sqrt{a^2 + \cdots + a^2}}_{n \text{puta}}$, pa je to izraz pod brojem 9) koji rješavamo pomoću $n-1$ konstrukcija:

$$x_1 = \sqrt{a^2 + a^2},\ x_2 = \sqrt{x_1^2 + a^2},\ \ldots,\ x_{n-1} = \sqrt{x_{n-2}^2 + a^2}$$

Svaki složeni izraz u konstruktivnom zadatku možemo zapisati pomoću ovih osnovnih izraza koje znamo konstruirati te tako dolazimo do rješenja.

Primjer. Posebni rastavi:

1) $x = \sqrt{7}a = \sqrt{(4a)^2 - (3a)^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2 - a^2}$

2) $x = \sqrt{11}a = \sqrt{(3a)^2 + a^2 + a^2} = \sqrt{(6a)^2 - (5a)^2}$

3) $x = \sqrt{23}a = \sqrt{(5a)^2 - a^2 - a^2}$

4) $x = \sqrt{26}a = \sqrt{(5a)^2 + a^2} = \sqrt{(4a)^2 + (3a)^2 + a^2}$

5) $x = \sqrt{35}a = \sqrt{(6a)^2 - a^2} = \sqrt{(5a)(7a)}$

6) $x = \sqrt{44}a = \sqrt{(4a)(11a)} = \sqrt{(12a)^2 - (10a)^2} = \sqrt{(7a)^2 - (2a)^2 - a^2}$

7) $x = \sqrt{65}a = \sqrt{(5a)(13a)} = \sqrt{(4a)^2 + (7a)^2} = \sqrt{(9a)^2 - (4a)^2}$

4.3 Složeni algebarski izrazi

Sve izraze možemo podijeliti u dvije skupine:

I) Homogeni izrazi

II) Nehomogeni izrazi

4.3.1 Homogeni izrazi

Definicija 1. Za izraz $\mathrm{I}(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ kažemo da je homogen izraz dimenzije n ako za sve pozitivne brojeve k vrijedi:

$$\mathrm{I}(kd_1, kd_2, \ldots, kd_m) = k^n \cdot \mathrm{I}(d_1, d_2, \ldots, d_m)$$

Primjer. 1) $\dfrac{a^3 - b^3}{a + b}$ je homogen izraz dimenzije 2

2) $\dfrac{ab}{c^5 + d^5}$ je homogen izraz dimenzije -3

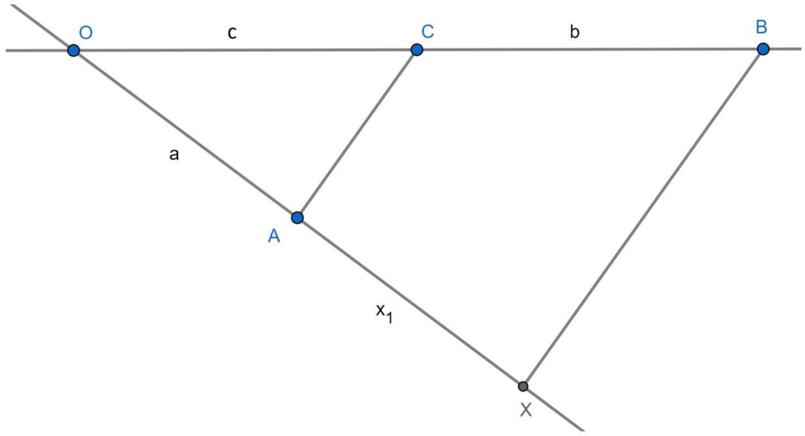
3) $\dfrac{\sqrt{ab}}{c}$ je homogen izraz dimenzije 0

Drugu skupinu čine svi oni izrazi koji nisu homogeni. Ti izrazi nazivaju se nehomogeni algebarski izrazi. Promatrat ćemo pozitivne homogene izraze dimenzije 1 jer se oni mogu promatrati kao duljine dužina, a znamo da je upravo to rezultat primjene algebarske metode. Da bismo konstruirali pozitivni homogeni izraz dimenzije 1 potrebno je taj izraz rastaviti i zapisati pomoću osnovnih izraza te ih u povezanom nizu konstruirati. Pogledajmo u sljedećim primjerima.

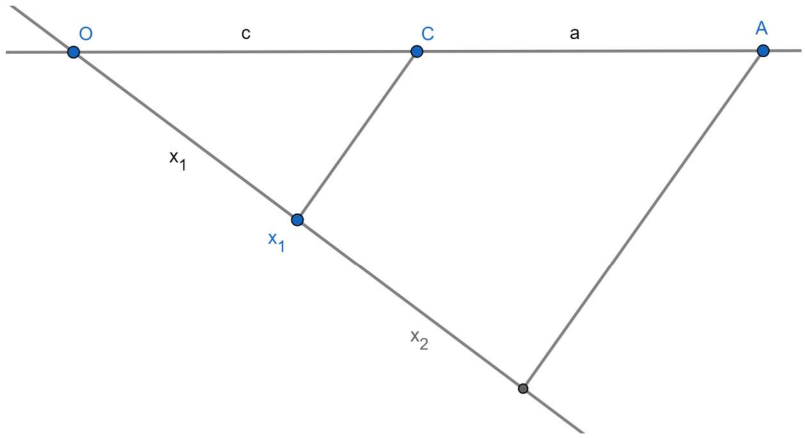
Primjer. Konstruirajmo dužinu kojoj je duljina x određena jednakošću $\dfrac{a^2 \cdot b^3}{c^2 \cdot d^2}$
Rješenje: Rastavljanjem danog izraza na osnovne izraze dobivamo:

$$x = \frac{a^2 \cdot b^3}{c^2 \cdot d^2} = \frac{ab}{c} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} \cdot \frac{b}{d} \text{ tj., imamo četiri osnovna izraza pod brojem 6)}$$
$$x_1 = \frac{ab}{c},\ x_2 = \frac{x_1 \cdot a}{c},\ x_3 = \frac{x_2 \cdot b}{d},\ x_4 = \frac{x_3 \cdot b}{d} \text{ pa redom konstruiramo}$$

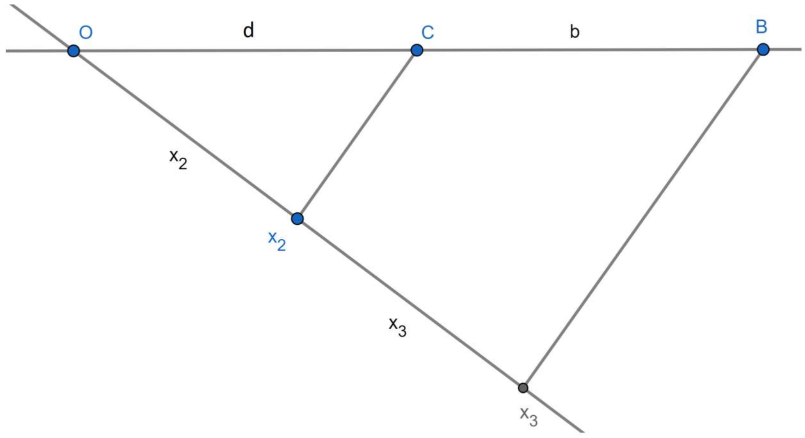
Iz $x_1 = \frac{ab}{c}$ imamo $x_1 : b = a : c$ (Slika 16) i tako redom, $x_2 : a = x_1 : c$ (Slika 17), $x_3 : b = x_2 : d$ (Slika 18), $x_4 : b = x_3 : d$ (Slika 19).
Imamo redom konstrukcije.



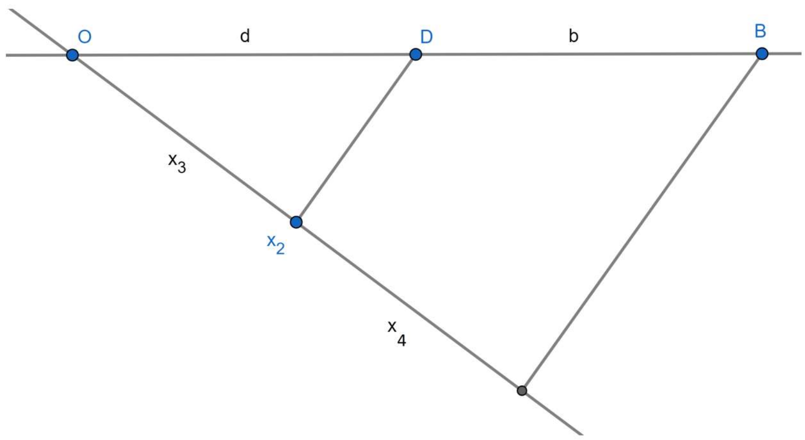
Slika 16



Slika 17



Slika 18



Slika 19

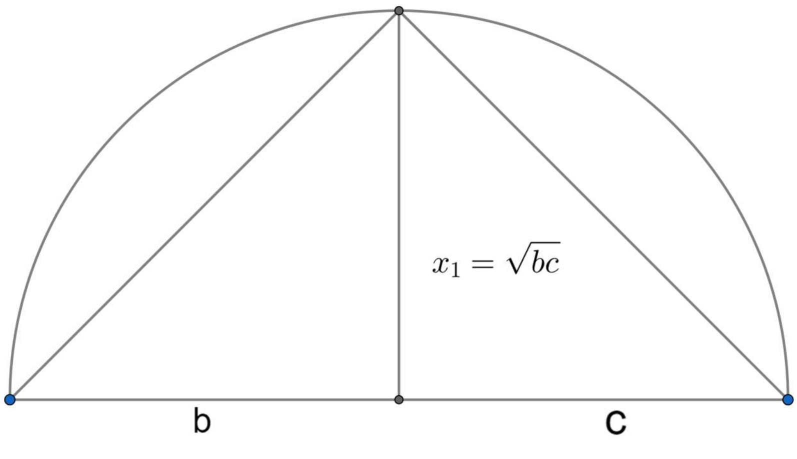
Primjer. Konstruirajmo dužinu kojoj je duljina x određena jednakošću $\dfrac{a^2 - bc}{d}$
Rješenje: Rastavimo dani izraz na osnovne izraze te imamo:

$x_1 = \sqrt{bc}$ osnovni izraz 7) (*Slika* 20)

$x_2 = \sqrt{a^2 - x_1^2}$ osnovni izraz 10) (*Slika* 21)

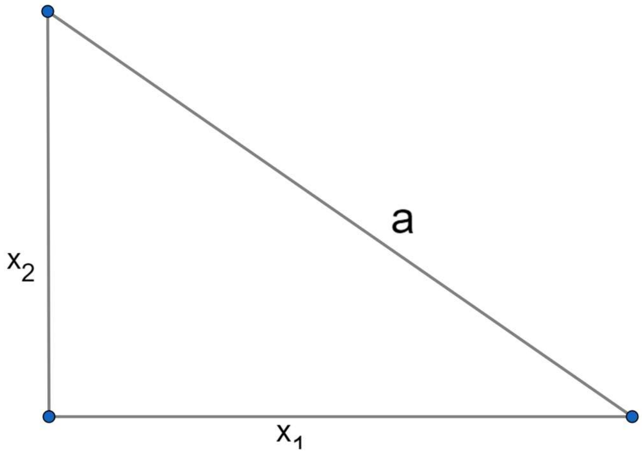
$x_3 = x = \dfrac{x_2^2}{d}$ osnovni izraz 6) zapišemo li ga kao $x = \dfrac{x_2 \cdot x_2}{d}$ (*Slika* 22)

Konstrukcija se redom izvodi na sljedeći način.

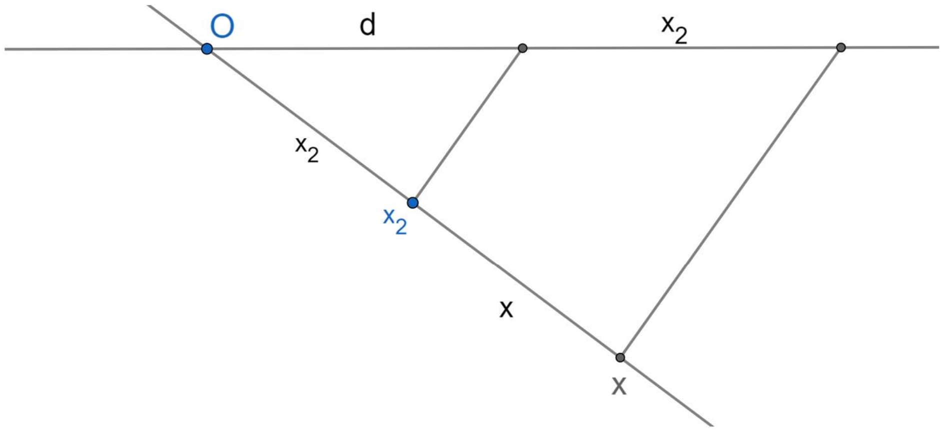


Slika 20

I konačno $x = \dfrac{x_2 \cdot x_2}{d}$ zapišemo u obliku $\dfrac{x}{x_2} = \dfrac{x_2}{d}$ pa konstruiramo.



Slika 21



Slika 22

4.3.2 Nehomogeni izrazi

U ovom dijelu ramotrit ćemo konstrukciju homogenih izraza dimenzije različite od 1 i nehomogenih izraza. Takve izraze susrećemo češće u praksi, najviše kod crtanja grafova nekih funkcija.

Primjeri takvih izraza su $\frac{1}{a}$, a^2, $\frac{a+b}{a-b}$, $2+\sqrt{2}$, $\frac{a}{a+1}$, $a^2-ab+\frac{1}{\sqrt{c}}$.

Za konstruiranje izraza tog oblika potrebno je uvesti dužinu jedinične duljine $e=1$, a onda izraz $\mathrm{I}(d_1, d_2, \ldots, d_m)$ transformirati na homogeni izraz dimenzije 1, putem jednakosti:

$$\mathrm{I}(d_1, d_2, \ldots, d_m) = e \cdot \mathrm{I}\left(\frac{d_1}{e}, \frac{d_2}{e}, \ldots, \frac{d_m}{e}\right)$$

Time smo ovu skupinu izraza sveli na problem prethodnog slučaja koji znamo riješiti.

Primjer. Homogeniziranje:

1) $x = \frac{1}{a} = \frac{e^2}{a}$

2) $x = a^2 = \frac{a^2}{e}$

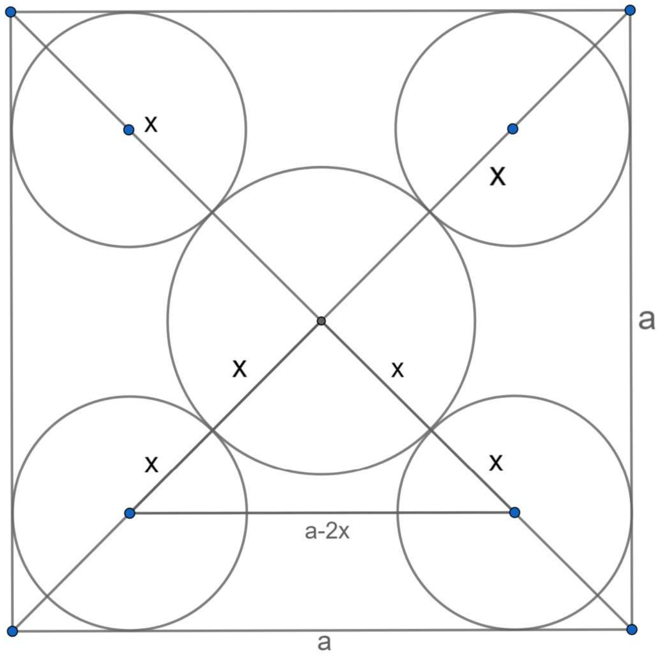
3) $x = \frac{a+b}{a-b} = \frac{ae+be}{a-b}$

4) $x = 2 + \sqrt{2} = 2e + \sqrt{2}e$

4.4 Zadatci

U ovom poglavlju navest ćemo nekoliko zadataka koji se mogu riješiti primjenom algebarske metode.

Zadatak 1. U kvadrat s duljinom stranice a upišemo pet kružnica jednakih polumjera tako da četiri od njih dodiruju po dvije stranice kvadrata, a peta dira sve četiri kružnice.
Rješenje:



Slika 23

ANALIZA: Sa slike vidimo da su središta kružnica na dijagonalama kvadrata. Trebamo odrediti polumjer x. Središta tri donje kružnice su vrhovi pravokutnog trokuta s katetama $2x,\ 2x$ i hipotenuzom duljine $a-2x$, pa primjenom Pitagorinog teorema imamo $4x^2+4x^2 = a^2-4ax+4x^2$ iz čega izrazimo x te imamo $x=\frac{\sqrt{2}-1}{2}a=\frac{\sqrt{a^2+a^2}-a}{2}$
KONSTRUKCIJA: Podijelimo li dobiveni izraz na osnovne izraze imamo:

$$x_1 = \sqrt{a^2+a^2} = \sqrt{2}a \text{ osnovni izraz 7)}$$
$$x_2 = x_1 - a \text{ osnovni izraz 2)}$$
$$x = x_3 = \frac{x_2}{a} \text{ osnovni izraz 4)}$$

Konstruiramo prvu kružnicu polumjera x sa središtem u sjecištu dijagonala kvadrata. Središta ostale četiri kružnice dobijemo kao sjecišta dijagonala kvadrata i kružnice polumjera $2x$ čije je središte sjecište dijagonala kvadrata.
DOKAZ: Slijedi iz konstrukcije.
RASPRAVA: Zadatak je uvijek određen i ima jedinstveno rješenje.

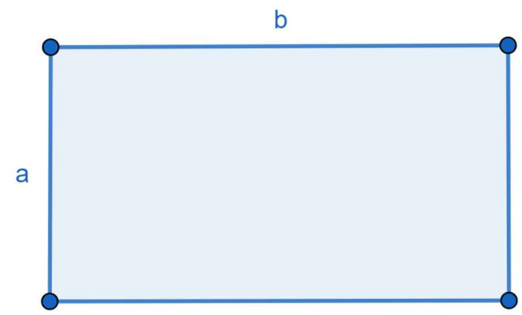
Zadatak 2. Konstruirajmo jednakostranični trokut kojemu je površina jednaka površini danog pravokutnika $ABCD$ s duljinama stranica a i b.

Rješenje:

ANALIZA: Ako je x duljina stranice traženog jednakostraničnog trokuta onda uvjet zadatka možemo zapisati kao $\frac{x^2\sqrt{3}}{4} = a \cdot b$. Odavde dobivamo da je $x = \sqrt{\frac{4\sqrt{3}}{3}ab}$. Vidimo da je x zapisan složenim izrazom pa ćemo ga pokušati rastaviti na osnovne izraze čije konstrukcije smo prethodno opisali u radu. Pa tako imamo:

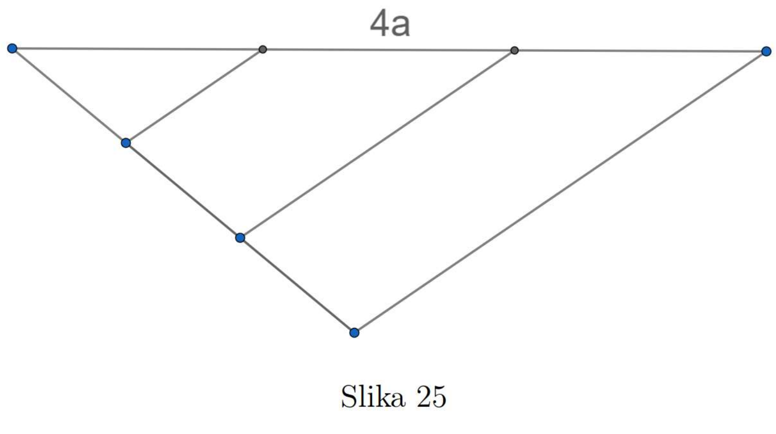
$$x_1 = \frac{4}{3}a \text{ osnovni izraz 5)}$$
$$x_2 = \sqrt{3}b \text{ osnovni izraz 11)}$$
$$x_3 = \sqrt{x_1 x_3} = x \text{ osnovni izraz 7)}$$

KONSTRUKCIJA: Dani pravokutnik s duljinama stranica a i b.



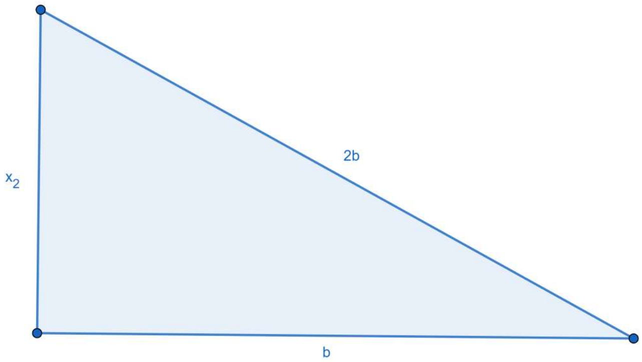
Slika 24

Konstruiramo $x_1 = \frac{4}{3}a$, prvo konstruiramo $4a$.



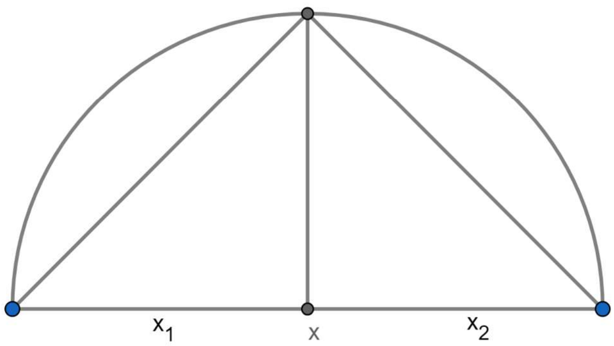
Slika 25

$$x_2 = \sqrt{3}b = \sqrt{(2b)^2 - b^2} = \sqrt{4b^2 - b^2}$$



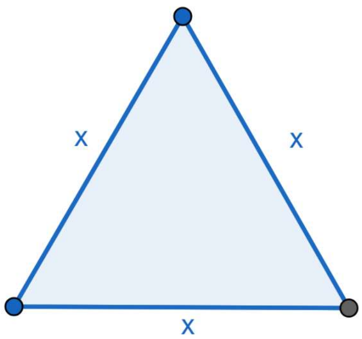
Slika 26

$$x_3 = x = \sqrt{x_1 x_3}$$



Slika 27

Time smo pronašli duljinu dužine x koja je stranica jednakokračnog trokuta u zadatku. Pa konačno konstruirajmo i jednakostraničan trokut.



Slika 28

DOKAZ: Slijedi iz konstrukcije.
RASPRAVA: Zadatak je određen i ima jedinstveno rješenje.

Jedan od poznatijih problema koji se rješava pomoću algebarske metode je konstrukcija zlatnog reza, vrlo poznatog omjera. Zlatni rez susrećemo u kiparstvu, slikarstvu te graditeljstvu, a njegova definicija nam govori o odnosu dvaju omjera.

Manji dio prema većem odnosi se jednako kao veći dio prema cjelini.

Pokažimo njegovu konstrukciju pomoću algebarske metode. Razdijelimo danu dužinu $\overline{AB}$ točkom Z u omjeru zlatnog reza. Poznata nam je duljina dužine $\overline{AB}$, a nepoznata je udaljenost točke Z od krajnjih točaka A i B. Neka su te veličine redom $a = |AB|,\ u = |AZ|,\ v = |ZB|$. Iz uvjeta definicije imamo omjere:
$a : u = u : v \Rightarrow\ av = u^2$ i uvjet da je $a = u + v$. Iz uvjeta $a = u + v$ slijedi da je $v = a - u$ te iz toga

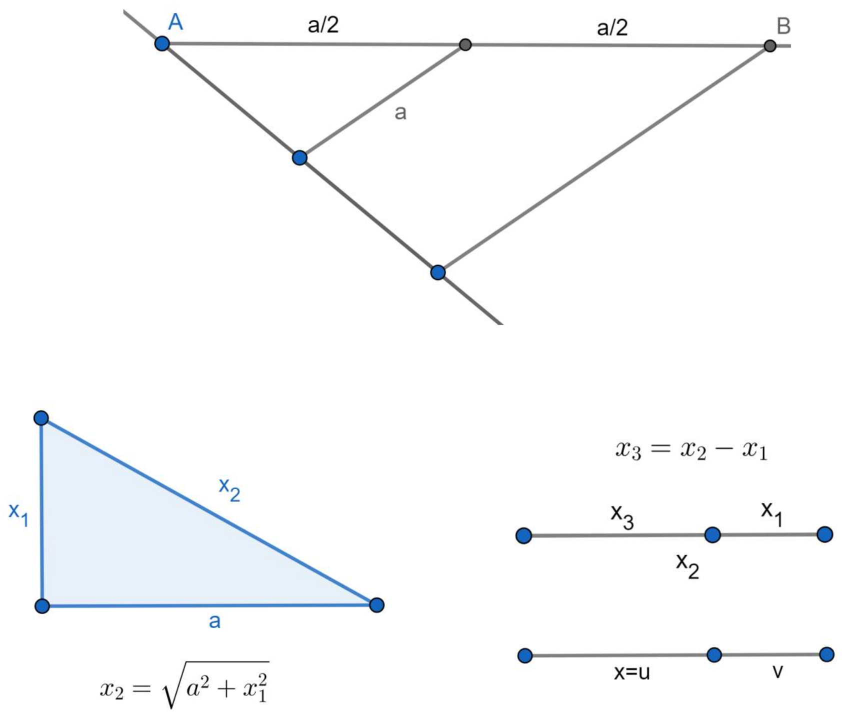
$$a(a-u) = u^2 \Rightarrow\ u^2 + au - a^2 = 0$$

Time smo dobili kvadratnu jednadžbu te uzimamo samo njeno pozitivno rješenje

$$u = -\frac{a}{2} + \sqrt{a^2 + (\frac{a}{2})^2}$$

Uvrstimo li to u uvjet dobivamo duljinu manjeg dijela dužine tj. $v = \dfrac{3a}{2} - \sqrt{a^2 + (\dfrac{a}{2})^2}$

Konstruirajmo dobiveno. No prije toga zapišimo u pomoću osnovnih izraza. Tako imamo: $x_1 = \frac{a}{2},\ x_2 = \sqrt{a^2 + x_1^2},\ x_3 = x = -x_1 + x_2 = x_2 - x_1$.
Imamo 4), 9) i 1) osnovni izraz pa konstruiramo redom.



Slika 29

Literatura

[1] Z. Kurnik, Algebarska metoda rješavanja konstruktivnih zadataka, Beli Manastir, 1990.

[2] D. Palman, Geometrijske konstrukcije, Element, Zagreb, 1996.

[3] D. Palman, Trokut i kružnica, Element, Zagreb, 2004.

[4] B. Pavković, D. Veljan, Elementarna matematika 1, Školska knjiga, Zagreb, 2003.

[5] Materijali kolegija Elementarna geometrija Zdenke Kolar-Begović

[6] https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/materijali/skripta.pdf