Niz stupnjeva grafa

Begović, Dolores

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Dolores Begović

Niz stupnjeva grafa

Završni rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Dolores Begović

Niz stupnjeva grafa

Završni rad

Mentorica: izv.prof.dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2019.

Sažetak

Teorija grafova je od velikog značaja u različitim područjima znanosti. Jednostavni konačni grafovi predstavljaju značajnu vrstu grafova. U ovom završnom radu se razmatra niz stupnjeva konačnog jednostavnog grafa, pojam usko vezan uz osnovne elemente grafa, vrhove i bridove. Dokazana su dva najpoznatija kriterija kojima su dani nužni i dovoljni uvjeti da bi niz nenegativnih brojeva bio niz stupnjeva nekog grafa, teorem Havela i Hakima te teorem Erdősa i Gallai. Teorem Havela i Hakima je zasnovan na rezidualnom ostatku najvećeg elementa niza stupnjeva, a teoremom Erdősa i Gallai je dana najpoznatija eksplicitna karakterizacija niza stupnjeva. Na temelju teorema Havela i Hakima može se razviti algoritam kojim se utvrđuje predstavlja li niz nenegativnih brojeva niz stupnjeva nekog grafa. Razmatran je i pojam skupa stupnjeva grafa te dokazan teorem kojim se utvrđuje najmanji broj vrhova grafa među svim grafovima čiji je to skup stupnjeva. Razmatran je i niz stupnjeva grafa s predznacima te navedeni kriteriji da bi taj niz bio grafički niz.

Ključne riječi: jednostavan graf, niz stupnjeva grafa, grafički niz, skup stupnjeva grafa, Havel-Hakimi teorem

Abstract

Graph theory is of great importance in various fields of science. Simple finite graphs represent a significant type of graph. This final paper discusses the degree sequence of a finite simple graph, a concept closely related to the basic elements of a graph, i.e., vertices and edges. Two well-known criteria which give the necessary and sufficient conditions for a sequence of nonnegative numbers to be a degree sequence of a graph have been proved, the Havel-Hakimi theorem and the Erdős-Gallai theorem. The Havel-Hakimi theorem is based on the residual sequence of the largest element of a degree sequence and the Erdős-Gallai theorem gives the most known explicit characterization of a degree sequence. Based on the Havel-Hakimi theorem, an algorithm can be developed to determine whether a set of nonnegative numbers is a degree sequence. The concept of a degree set of a graph was considered and a theorem was proved to determine the smallest number of vertices of a graph among all graphs of which it is a degree set. A degree sequence of a signed graph was considered and the criteria were specified to make the degree sequence a graphical sequence.

Key words: simple graph, degree sequence, graphical sequence, degree set, Havel-Hakimi theorem

Sadržaj

Uvod

Temelji teorije grafova imaju svoje početke u 18. stoljeću. U novije vrijeme teorija grafova postaje sve značajnija grana matematike jer, osim što ima primjenu u drugim područjima matematike, primjenjuje se i u elektrotehnici (komunikacijske mreže, teorija kodiranja), računalnoj znanosti, posebice u području mreža računala (razni algoritmi, traženja puteva kroz mrežu), biokemiji te u društvenim znanostima. U ovom završnom radu razmatra se pojam, usko vezan uz vrhove i bridove grafa, niza stupnjeva grafa.

Rad se sastoji od pet poglavlja. U prvom poglavlju se razmatraju osnovni pojmovi iz teorije grafova te navode osnovne tvrdnje koje će biti korištene pri uvođenju pojmova i dokazima tvrdnji.

U drugom poglavlju uvodi se pojam niza stupnjeva grafa za konačni jednostavni graf. Definira se pojam grafičkog niza kao niza nenegativnih brojeva za koji postoji graf čiji je to niz stupnjeva.

U trećem poglavlju se razmatraju kriteriji koji su nužni i dovoljni da bi niz nenegativnih brojeva bio niz stupnjeva nekog grafa. U literaturi postoji više kriterija. U ovom radu su dokazana, prema mnogim izvorima, dva najpoznatija kriterija. Dokazan je teorem Havela i Hakima kod kojeg se dokaz bazira na konstrukciji rezidualnog djela najvećeg elementa te teorem Erdősa i Gallai koji je najpoznatija eksplicitna karakterizacija niza stupnjeva. Na konkretnom primjeru je ilustrirana primjena algoritma koji se zasniva na teoremu Havela i Hakima te konstruiran graf za zadani niz stupnjeva.

U četvrtom poglavlju uveden je pojam skupa stupnjeva grafa. Dokazan je poznati teorem o najmanjem redu grafa za dani skup stupnjeva.

U petom poglavlju se razmatraju grafovi s predznacima te se razmatra niz stupnjeva za takav tip grafa.

1 Osnovni pojmovi i tvrdnje iz teorije grafova

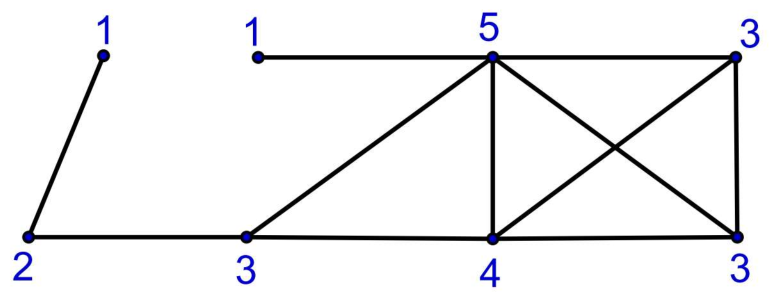
U ovom poglavlju navest ćemo osnovne definicije i tvrdnje teorije grafova koje će nam biti potrebne za razmatranje novih pojmova i dokazivanje tvrdnje.

Nek je V neprazan skup. Označimo s $V_{(2)}$ skup svih neuređenih parova različitih elemenata skupa V.

Definicija 1.1. *Jednostavan graf G je uređena trojka $G = (V, E, \psi)$ nepraznog skupa V čiji se elementi zovu vrhovi od G, skupa E čiji se elementi zovu bridovi od G te funkcije ψ koja svakom bridu u E pridružuje neki element iz $V_{(2)}$. Funkciju ψ zovemo funkcijom incidencije.*

U ovom radu ćemo razmatrati jednostavne grafove te ćemo stoga jednostavni graf zvati kratko graf.
Kako razmatramo konačne grafove, pišemo $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$.
$|V| = n$ (broj vrhova) se zove red grafa G, a $|E| = m$ (broj bridova) veličina grafa G. Takav se graf naziva (n, m) grafom.
Ako je G (n, m) graf tada je $n \geq 1$ i $0 \leq m \leq \binom{n}{2}$.
Ako između vrhova u i v postoji brid e, pišemo $e = uv$ ili $e = vu$ i kažemo da su vrhovi u i v spojeni bridom e.
U grafu G stupanj vrha v je broj bridova grafa G koji su incidentni s vrhom v i označava se s $d(v)$ ili $d(v|G)$, dakle $d(v) = |\{e \in E : e = uv, \text{ za } u \in V\}|$.
Broj $\delta(G) = \min\{d(v) \,|\, v \in V\}$ se zove najmanji stupanj grafa G .
Broj $\Delta(G) = \max\{d(v) \,|\, v \in V\}$ se zove najveći stupanj grafa G.
Ako su svi vrhovi grafa G istog stupnja k, tada se G zove k–regularan ili jednostavno regularan graf.

Primjer 1.1. *Graf G na slici 1 je primjer jednostavnog grafa. Za G vrijedi $n = 8$, $m = 11$, $\delta(G) = 1$, $\Delta(G) = 5$, a suma stupnjeva svih njegovih vrhova je 22.*



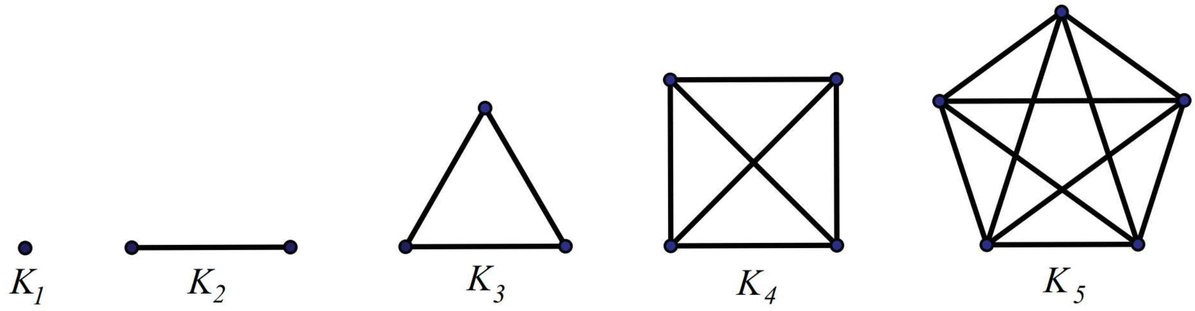
Slika 1: Primjer jednostavnog grafa s navedenim stupnjevima vrhova

Jedan od najvažnijih elementarnih rezultata u teoriji grafova je sljedeća tvrdnja.

Teorem 1.1. *Suma stupnjeva grafa je paran broj koji je jednak dvostrukom broju bridova.*

Teorem 1.2. *Za bilo koji graf reda n je $\Delta(G) \leq n-1$.*

Za graf kažemo da je potpun ako su svaka dva njegova vrha susjedna. Potpun (n,m) graf je prema tome regularan graf stupnja $(n-1)$ i za koji je $m = \dfrac{n(n-1)}{2}$. Takav graf ćemo označavati K_n. Neki primjeri potpunog grafa prikazani su na slici 2.



Slika 2: Potpuni grafovi

Komplement grafa G je graf $\overline{G}$ čiji je skup vrhova $V(G)$ i takav da je za svaki par u, v različitih vrhova G, uv brid u $E(\overline{G})$ ako i samo ako uv nije brid u $E(G)$. Može se pokazati ako je graf G tipa (n,m), onda je graf $\overline{G}$ reda n i veličine $\dbinom{n}{2} - m$.

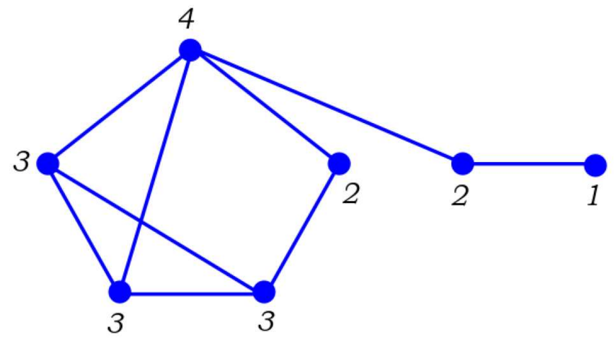
Neka je $G = (V, E, \psi)$ graf i neka je $F \subseteq E$. Za graf H sa skupom vrhova V i skupom bridova $E - F$ kažemo se da se dobiva iz G uklanjanjem bridova iz F. Taj graf se označava s $G - F$. Ako se F sastoji od jednog brida e od G, tada se graf dobiven uklanjanjem brida e označava s $G - e$.

2 Niz stupnjeva grafa

U ovom poglavlju definirat ćemo niz stupnjeva grafa te razmotriti kriterije za postojanje grafa čiji je to niz stupnjeva.

Definicija 2.1. *Neka su d_i, $0 \leq i \leq n-1$, stupnjevi vrhova v_i grafa G u bilo kojem poretku. Niz $[d_i]_1^n$ se zove **niz stupnjeva grafa** G.*
*Nenegativan niz $[d_i]_1^n$ cijelih brojeva se zove **grafički** niz ako postoji graf čiji je to niz stupnjeva, a za graf se kaže da realizira niz.*

Primjer 2.1. *Na slici 3 niz stupnjeva je $D = [1, 2, 2, 3, 3, 3, 4]$.*



Slika 3

Definicija 2.2. *Za dva grafa s istim nizom stupnjeva kažemo da su **ekvivalentni po stupnjevima**.*

Definicija 2.3. *Ako je niz stupnjeva zapisan kao nepadajući niz pozitivnih brojeva $d_1^{n_1}, d_2^{n_2}, \ldots, d_k^{n_k}$, $(d_1 < d_2 < \ldots < d_k)$ niz $n_1, n_2, \ldots, n_k$ se zove **niz frekvencija** grafa.*

Definicija 2.4. *Niz stupnjeva je **savršen** ako nikoja dva njegova elementa nisu jednaka, tj. ako je niz frekvencija $1, 1, \ldots, 1$.*
*Niz stupnjeva je **kvazisavršen** ako su točno dva njegova elementa jednaka.*

Za dani graf niz stupnjeva grafa je lako odrediti. S druge strane, za zadani niz $d_1, d_2, \ldots, d_k$ potrebno je odrediti pod kojim je uvjetima to niz stupnjeva nekog grafa, odnosno grafički niz. Npr. niz $4, 3, 2, 2, 1$ je grafički niz.

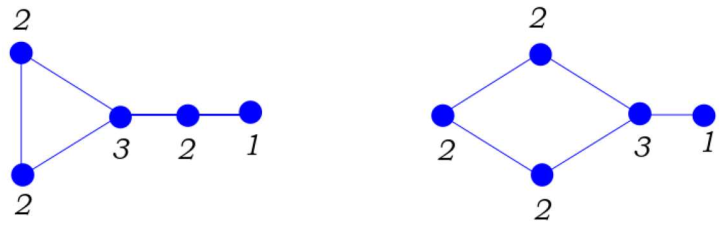
Postoje neki očiti nužni uvjeti za niz $[d_i]_1^n$ nenegativnih brojeva da bi bio grafički. Dva uvjeta koja impliciraju teoremi 1.1 i 1.2

- $d_i \leq n-1$ za svaki i, $(1 \leq i \leq n)$
- $\sum_{i=1}^{n} d_i$ je paran broj

su nužni da bi D bio niz stupnjeva grafa, ali oni nisu dovoljni da se utvrdi da je niz nenegativnih brojeva niz stupnjeva grafa kako i pokazuje Primjer 2.2.

Primjer 2.2. *Neka je dan niz* $[1, 2, 3, 4, \ldots, 4, n-1, n-1]$. *Suma stupnjeva je očito paran broj i* $\Delta = n - 1$. *Međutim, to nije niz stupnjeva grafa jer su dva vrha stupnja* $n - 1$ *pa je prema tome svaki od ta dva vrha spojen sa svim ostalim vrhovima grafa i prema tome je* $\delta \geq 2$. *No, najmanji element u danom nizu je 1.*

Nije neobično da grafički niz bude niz stupnjeva više različitih grafova. Npr. niz $1, 2, 2, 2, 3$ je niz stupnjeva dva grafa prikazana na slici 4.

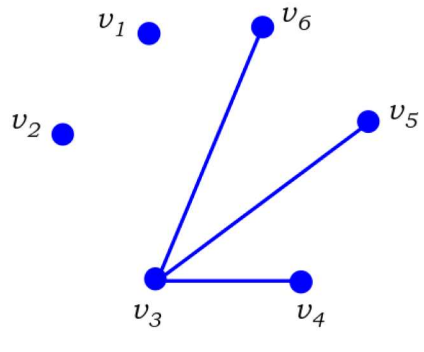


Slika 4: Grafovi s istim nizom stupnjeva

Definirajmo sada rezidualni ostatak.

Definicija 2.5. *Neka je* $D = [d_i]_1^n$ *nenegativan niz i neka je* $1 \leq k \leq n$. *Neka je* $D' = [d_i']_1^n$ *niz dobiven iz* D *stavljenjem* $d_k = 0$ *i* $d_i' = d_i - 1$ *za* d_k *najvećih elemenata od* D *različitih od* d_k. *Neka je* H_k *graf dobiven od skupa vrhova* $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *spajanjem* v_k *s* d_k *vrhovima koji su odgovarajući* d_k *elementima korištenim za dobivanje* D'. *Ova operacija dobivanja* D' *i* H_k *se zove* ***otpuštanje*** d_k, *a* D' *se zove* ***rezidualni ostatak****, a* H_k *podgraf dobiven ispuštanjem* d_k.

Primjer 2.3. *Neka je* $D = [2, 2, 3, 3, 4, 4]$. *Uzmimo* $d_3 = 0$. *Tada je* $D' = [2, 2, 0, 2, 3, 3]$. *Podgraf* H_3 *za ovaj slučaj je prikazan na slici 5.*



Slika 5: Podgraf H_3 dobiven ispuštanjem $d_3 = 3$

3 Kriteriji za niz stupnjeva grafa

U ovom poglavlju razmatrat ćemo kriterije prema kojima dani niz nenegativnih brojeva predstavlja niz stupnjeva nekog grafa. U literaturi postoji više kriterija, u [6] je dokazana ekvivalencija sedam kriterija kojima se utvrđuje je li neki niz grafički niz.

Među najpoznatije kriterije ubrajaju se dva koja daju nužne i dovoljne uvjete. Prvi su neovisno otkrili V. Havel i S. L. Hakimi, a drugi su otkrili P. Erdős i T. Gallai. Unatoč činjenici da su Havel i Hakimi neovisno dali dokaze šezdesetih godina prošlog stoljeća i objavili zasebno članke, ovaj teorem je u literaturi poznat kao Havel-Hakimi teorem. Oni su dali nužne i dovoljne uvjete za niz stupnjeva u terminima otpuštanja najvećeg broja u nizu. D. L. Wang i D. J. Kleitman su 1973. godine dokazali nužne i dovoljne uvjete za proizvoljno otpuštanje.

3.1 Havel-Hakimi teorem

Dokažimo sada poznati teorem Havela i Hakima pomoću kojeg se može efikasno odrediti je li dani niz grafički, odnosno je li to niz stupnjeva nekog grafa.([1]).

Teorem 3.1. **(Havel-Hakimi)** *Nenegativan niz brojeva* $s : [d_i]_1^n$ *takav da je* $d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$, $n \geq 2$, $d_1 \geq 1$ *je grafički ako i samo ako je niz*

$$s_1 : d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n$$

grafički.

Dokaz. Pretpostavimo da je niz s_1 grafički. Tada postoji graf G_1 reda $n-1$ takav da je s_1 niz stupnjeva grafa G_1. Dakle, vrhovi grafa G_1 se mogu označiti kao $v_2, v_3, \ldots, v_n$ tako da je

$$d(v_i) = \begin{cases} d_i - 1, & 2 \leq i \leq d_1 + 1 \\ d_i, & d_1 + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Sada se može konstruirati novi graf G dodavanjem vrha v_1 i d_1 bridova $v_1 v_i$, $2 \leq i \leq d_1 + 1$. Tada za G vrijedi, $d(v_i) = d_i$ za $1 \leq i \leq n$ i niz $s : d_1, d_2, \ldots, d_n$ je grafički.

Obratno, neka je niz s grafički. Tada postoje grafovi reda n čiji je niz stupnjeva s. Od svih takvih grafova neka je G takav da je $G = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $d(v_i) = d_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ i suma stupnjeva vrhova incidentnih s vrhom v_1 maksimalna. Pokazat ćemo najprije da je v_1 susjedan vrhovima čiji su stupnjevi $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$.

Pretpostavimo suprotno, neka v_1 nije susjedan vrhovima sa stupnjevima $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$. Tada postoje vrhovi d_r i d_s takvi da je $d_r > d_s$ i v_1 je susjedan vrhu v_s, a nije susjedan vrhu v_r. Kako je stupanj vrha v_r veći od stupnja vrha v_s to postoji vrh v_t tako da je v_t susjedan vrhu v_r, ali nije susjedan vrhu v_s. Uklanjanjem bridova $v_1 v_s$, $v_r v_t$ i dodavanjem bridova $v_1 v_r$, $v_s v_t$ dobit ćemo graf G' koji ima isti niz stupnjeva kao graf G. Međutim, za G' suma stupnjeva vrhova incidentnih s v_1 bit će veća nego za graf G, što je u kontradikciji s izborom grafa G.

Dakle, v_1 je susjedan vrhovima čiji su stupnjevi $d_2, d_3, \ldots, d_{d_1+1}$ i graf $G - v_1$ ima niz stupnjeva s_1, pa je s_1 grafički. □

Teorem 3.1 daje algoritam za utvrđivanje je li dani konačni niz nenegativnih brojeva niz stupnjeva nekog grafa. Ako nakon ponovljene primjene teorema 3.1 dolazimo da niza čiji su svi elementi jednaki 0, tada je taj niz grafički. Ako na kraju dobijemo niz čiji su neki elementi negativni brojevi, tada taj niz nije grafički.

Primjena teorema 3.1 ilustrirana je na primjeru 3.1

Primjer 3.1. *Je li dani niz brojeva*

$$s : 7, 5, 5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1 \tag{3.1}$$

niz stupnjeva grafa?

Rješenje. Nakon primjene teorema 3.1 dobivamo niz

$$s_1' : 4, 4, 3, 2, 2, 1, 1, 2, 1.$$

Preslagivanjem članova dobivamo

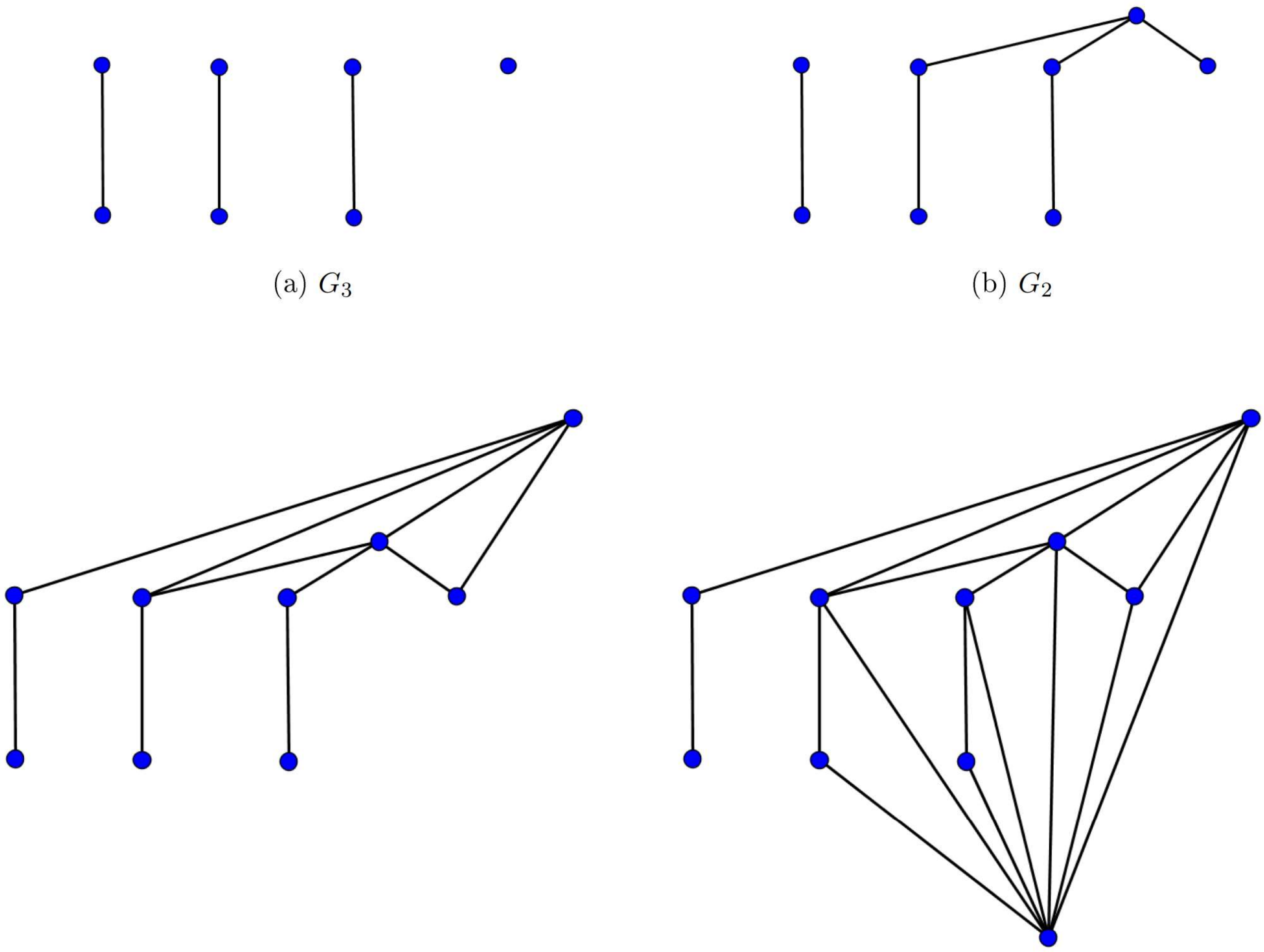
$$s_1 : 4, 4, 3, 2, 2, 2, 1, 1, 1.$$

Nastavljajući dalje imamo

$$\begin{aligned} s_2' &: 3, 2, 1, 1, 2, 1, 1, 1 \\ s_2 &: 3, 2, 2, 1, 1, 1, 1, 1 \\ s_3' &: 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1 \\ s_3 &: 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0 \\ s_4' &: 0, 1, 1, 1, 1, 0 \\ s_4 &: 1, 1, 1, 1, 0, 0 \\ s_5' &: 0, 1, 1, 0, 0 \\ s_5 &: 1, 1, 0, 0, 0 \\ s_6' = s_6 &: 0, 0, 0, 0. \end{aligned}$$

Prema teoremu 3.1 niz s je grafički niz. ♦

U primjeru 3.1 niz s (3.1) je grafički. Ustanovi li se prije s_6 da je neki niz grafički, može se, prema teoremu 3.1 tvrditi da je niz s grafički. Npr. očito je da je niz s_3 grafički jer je to niz grafa prikazanog na slici 6a. Prema teoremu 3.1 i nizovi s_2 i s_1 bit će grafički. Konstruiramo graf G_3 koji realizira niz stupnjeva s_3 ili s_3' (slika 6a). Dodajući novi vrh i bridove dobivamo graf G_2 s nizom stupnjeva s_2 (ili s_2') (slika 6b). Nastavljajući dalje od G_2 dodavanjem novih vrhova i bridova da dobijemo graf G_1 čiji je niz stupnjeva s_1 (ili s_1') (slika 6c) . Konačno, dodavanjem vrhova i bridova grafu G_1 dobivamo graf G, prikazan na slici 6d.



(a) G_3 (b) G_2

(c) G_1 (d) G

Slika 6: Konstrukcija grafa G s danim nizom stupnjeva

Napomenimo da graf na slici 6d nije jedini graf s nizom stupnjeva (3.1). Postoje grafovi koji ne mogu biti konstruirani metodom korištenom za konstrukciju grafa G na slici 6d.

Primjer 3.2. *Je li dani niz brojeva* $s : 7, 5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2, 2, 1$ *niz stupnjeva grafa?*

Rješenje. Nakon primjene teorema 3.1 dobivamo niz

$$s_1' : 4, 3, 3, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1$$

Preslagivanjem članova dobivamo

$$s_1 : 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 2, 1.$$

Nastavljajući dalje imamo

$$
\begin{aligned}
s_2' &: 2,2,1,1,2,2,2,1\\
s_2 &: 2,2,2,2,2,1,1,1\\
s_3' &: 1,1,2,2,1,1,1\\
s_3 &: 2,2,1,1,1,1,1\\
s_4' &: 1,0,1,1,1,1\\
s_4 &: 1,1,1,1,1,0\\
s_5' &: 0,1,1,1,0\\
s_5 &: 1,1,1,0,0\\
s_6' &: 0,1,0,0\\
s_6 &: 1,0,0,0\\
s_7' &: -1,0,0.
\end{aligned}
$$

Dakle, niz s nije grafički niz. ♦

Primjer 3.3. *Ako je niz $x, 7, 7, 5, 5, 4, 3, 2$ grafički, koje su moguće vrijednosti za x, $(0 \leq x \leq 7)$?*

Rješenje. Ako postoji graf G s nizom stupnjeva $x, 7, 7, 5, 5, 4, 3, 2$, tada $\delta(G) \geq 2$. Budući da svaki graf ima parni broj vrhova neparnog stupnja, x mora biti neparan i stoga su jedine moguće vrijednosti $x \in \{3, 5, 7\}$. Primjenom Havel-Hakimijevog teorema se pokaže da je $x = 5$ ili $x = 3$. ♦

Dok su Havel i Hakimi neovisno otkrili nužne i dovoljne uvjete za niz stupnjeva u terminima otpuštanja najvećeg broja u nizu, Wang i Kleitman su dokazali nužne i dovoljne uvjete za proizvoljno otpuštanje. U [11] se može naći dokaz sljedeće tvrdnje.

Teorem 3.2. *Nenegativan niz je grafički ako i samo ako je rezidualni dio, dobiven otpuštanjem bilo kojeg nenul elementa niza, grafički.*

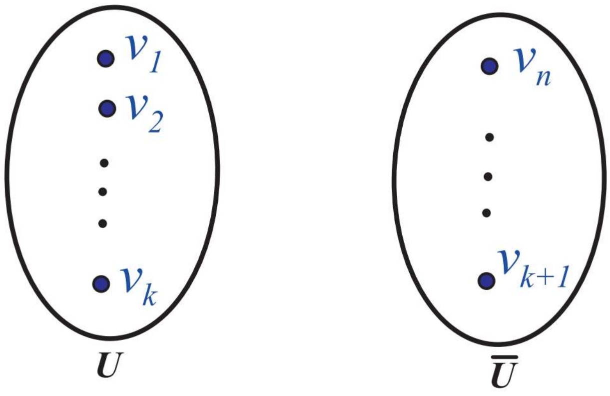
3.2 Teorem Erdősa i Gallaia

Sljedeći rezultat je kombinatorno karakteriziranje niza stupnjeva. Taj rezultat Erdősa i Gallaia je najpoznatija eksplicitna karakterizacija niza stupnjeva. U literaturi postoji više dokaza ove tvrdnje. U [8] je dan direktan dokaz koji daje konstrukciju niza koji realizira dani niz stupnjeva.

Teorem 3.3. (Erdős–Gallai) *Niz nerastućih nenegativnih brojeva $D = [d_i]_1^n$ je grafički ako i samo ako je njegova suma paran broj i ako za svaki k, $1 \leq k \leq n$, vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(k, d_i). \tag{3.2}$$

Dokaz. Dokažimo najprije nužnost. Očito je $\sum_{i=1}^{n} d_i$ paran broj. Neka U označava skup vrhova s k najviših stupnjeva u D. Tada se suma $S = \sum_{i=1}^{k} d_i$ može napisati kao $S_1 + S_2$, gdje je S_1 doprinos sumi S od bridova koji spajaju vrhove u U, svaki brid daje doprinos 2 toj sumi, a S_2 je doprinos sumi S od bridova između U i $\overline{U}$ gdje je $\overline{U} = V - U$. Svaki takav brid daje doprinos 1 sumi (slika 7).



Slika 7

S_1 je očito ograničena odozgo sumom stupnjeva potpunog grafa od k vrhova, tj. s $k(k-1)$. Također, svaki vrh v_i od $\overline{U}$ može biti spojen s najviše min (d_i, k) vrhova od U, tako da je S_2 ograničen odozgo s $\sum_{i=k+1}^{n} min(k, d_i)$ odakle slijedi (3.2).

Dokažimo sada dovoljnost. Neka je graf s vrhovima $(v_1, \ldots, v_n)$ podrealizacija nepadajućeg niza $(d_1, \ldots, d_n)$ tako da je $d(v_i) \leq d_i$ za $1 \leq i \leq n$. Za dani niz stupnjeva $(d_1, \ldots, d_n)$ s parnom sumom koji zadovoljava (3.2) konstruiramo realizaciju kroz uzastopne podrealizacije. Početna podrealizacija ima n vrhova i nema bridova.

Za podrealizaciju, kritički indeks r je najveći indeks takav da je $d(v_i) = d_i$ za $1 \leq i < r$. Na početku, $r = 1$ osim ako imamo nul niz, u tom slučaju proces je završen. Dok je $r \leq n$, mi imamo novu podrealizaciju s manjom razlikom $d_r - d(v_r)$ za vrh v_r, dok se ne mijenjaju stupnjevi bilo kojeg vrha v_i, $i < r$ (niz stupnjeva raste leksikografski). Ovaj postupak prestaje samo kada je podrealizacija baš realizacija niza stupnjeva D.

Neka je $T = \{v_{r+1}, \ldots, v_n\}$. Mi zadržavamo uvjet da je skup T nezavisan, koji je sigurno vrijedio na početku (za skup T kažemo da je nezavisan ako niti jedan par vrhova iz T nisu spojeni bridom). Koristit ćemo oznaku $v_i \leftrightarrow v_j$ kada je $v_i v_j \in E(G)$, inače ćemo označavati $v_i \not\leftrightarrow v_j$.

Slučaj (0) $v_r \not\leftrightarrow v_i$ za neki vrh v_i tako da je $d(v_i) < d_i$. Dodajmo brid $v_r v_i$.

Slučaj (1) $v_r \not\leftrightarrow v_i$ za neki i, uz $i < r$. Kako je $d(v_i) = d_i \geq d_r > d(v_r)$, postoji $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup v_r)$, gdje je $N(x) = \{y : x \leftrightarrow y\}$.
Ako je $d_r - d(v_r) \geq 2$, zamijenimo uv_i s $\{uv_r, v_i v_r\}$.
Ako je $d_r - d(v_r) = 1$ tada, jer je $\sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} d(v_i)$ paran broj, postoji indeks k, $k > r$ takav da $d(v_k) < d_k$. Slučaj (0) se primjenjuje osim ako je $v_r \leftrightarrow v_k$; zamijenimo $\{v_r v_k, uv_i\}$ s $\{uv_r, v_i v_r\}$.

Slučaj (2) $v_1, \ldots, v_{r-1} \in N(v_r)$ i $d(v_k) \neq \min\{r, d_k\}$ za neki k, $k > r$. U podrealizaciji $d(v_k) \leq d_k$. Kako je T nezavisan skup, $d(v_k) \leq r$. Odavde $d(v_k) < \min\{r, d_k\}$, i primijenimo slučaj (0) osim ako je $v_k \leftrightarrow v_r$. Kako je $d(v_k) < r$, postoji i, $i < r$ takav da je $v_k \nleftrightarrow v_i$. Kako je $d(v_i) > d(v_r)$, postoji $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup v_r)$. Zamijenimo uv_i s $\{uv_r, v_iv_k\}$.

Slučaj (3) Ako je $v_1, \ldots, v_{r-1} \in N(v_r)$ i $v_i \nleftrightarrow v_j$ za neki i i j, $i < j < r$. Slučaj (1) primijenimo osim ako $v_i, v_j \in N(v_r)$. Kako je $d(v_i) \geq d(v_j) > d(v_r)$, postoji $u \in N(v_i) - (N(v_r) \cup v_r)$ i $w \in N(v_j) - (N(v_r) \cup v_r)$ (moguće $u = w$). Kako je $u, w \notin N(v_r)$, primijenimo slučaj (1) osim ako je $u, w \in S$. Zamijenimo $\{uv_i, wv_j\}$ s $\{v_iv_j, uv_r\}$.

Ako se nijedan od slučajeva ne može primijeniti, tada su $v_1, \ldots, v_r$ u parovima susjedni, i $d(v_k) = \min\{r, d_k\}$, $k > r$. Kako je T nezavisan, $\sum_{i=1}^n d_i = r(r-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{r, d_k\}$. $\sum_{i=1}^n d_i$ je ograničena odozgo prema (3.2). Odavde slijedi da smo već eliminirali deficit od r. Povećamo r za 1 i nastavimo. $\square$

Dokaz se može primijeniti kao algoritam za konstrukciju realizacije niza stupnjeva. Kako se podrealizacija poboljšava leksikografski sa svakim korakom, broj koraka je najviše $\sum_{i=1}^n d_i$. Da ograničimo vrijeme za svaki korak, nastojimo sačuvati niz stupnjeva za svaki susjedni i nesusjedni vrh. Pomoću nesusjednih vrhova od v_r promatra se primjena slučaja (0) ili slučaja (1). Za primjenu slučaja 1 pristupamo nizu dvaput kako bismo pronašli u i provjerili stupnjeve najviše indeksiranih vrhova kako bismo pronašli k. Primjena slučaja (2) i (3) uključuje slične operacije.

4 Skup stupnjeva grafa

Kada razmatramo niz stupnjeva grafa, nas ne zanimaju samo stupnjevi, već i frekvencije. Izostavimo li frekvencije, dolazimo do pojma skupa stupnjeva grafa koji će biti uveden sljedećom definicijom.

Definicija 4.1. *Skup različitih nenegativnih cijelih brojeva naziva se skup stupnjeva ako postoji graf čiji je to skup stupnjeva, a za graf kaže da* ***realizira*** *zadani skup.*

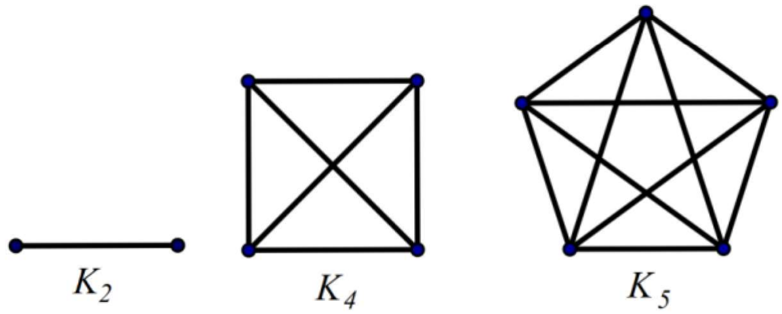
Za dani graf G skup stupnjeva ćemo označavati s $\mathcal{D}(G)$.

Primjer 4.1. *Za zadani niz stupnjeva* $D = [2, 2, 3, 3, 4, 4]$*, skup stupnjeva je* $\mathcal{D}(G) = \{2, 3, 4\}$.

Neka je $S = \{d_1, d_2, ., ., d_k\}$ skup različitih nenegativnih cijelih brojeva. Jasno je da je S skup stupnjeva grafa G

$$G = K_{d_1+1} \cup K_{d_2+1} \cup \ldots \cup K_{d_k+1},$$

koji realizira skup S. Graf G ima $d_1 + d_2 + \ldots + d_k + k$ vrhova.



Slika 8

Primjer 4.2. *Neka je* $S = \{1, 3, 4\}$*. Tada je* $G = K_2 \cup K_4 \cup K_5$ *(slika 8).*

Dokažimo tvrdnju o najmanjem redu grafa za dani skup stupnjeva. Taj rezultat su dokazali Kapoor, Polimeni i Wall [KPWl] koji su odredili najmanji broj vrhova grafova za zadani skup stupnjeva. Navest ćemo i dokazati tu tvrdnju ([7]).

Teorem 4.1. *(***KPW***) Za svaki konačni skup pozitivnih cijelih brojeva S s najvećim elementom M, postoji graf G za koji je $\mathcal{D}(G) = S$. Najmanji red takvog grafa G čiji je skup stupnjeva S je $M + 1$.*

Dokaz. Ako je S skup stupnjeva grafa G s p vrhova, tada za postojanje vrha sa stupnjem M mora vrijediti $p \geq M + 1$. Da bismo dovršili dokaz, dokazat ćemo egzistenciju grafa s $M + 1$ vrhova čiji je skup stupnjeva skup S. Neka G_S označava bilo koji graf čiji je skup stupnjeva S. Dokaz ćemo provesti indukcijom po broju elemenata skupa S.
Ako je $S = \{a_1\}$, tada je $G_S = K_{a_1+1}$, potpun graf s $a_1 + 1$ vrhova, jedina mogućnost.

Pretpostavimo da rezultat vrijedi za sve skupove čiji je broj elemenata manji od n. Promotrimo skup $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$, $a_1 > a_2 > \ldots > a_{n+1}$. Za $T = \{a_1 - a_{n+1}, a_1 - a_n, \ldots, a_1 - a_2\}$, prema pretpostavci indukcije, postoji graf G_T s $a_1 - a_{n+1} + 1$ vrhova čiji je skup stupnjeva skup T. Dodajmo a_{n+1} izoliranih vrhova ovom grafu. Komplement dobivenog grafa ima $M + 1$ vrhova i skup S je njegov skup stupnjeva. $\square$

5 Niz stupnjeva grafa s predznacima

Pojam grafa s predznacima uveo ja Harary 1953. godine kod modeliranja društvenih odnosa.

Definicija 5.1. ***Graf s predznacima*** *se sastoji od grafa G i bridova grafa koji su označeni kao pozitivni ili negativni. Graf s predznacima ćemo označavati s-graf.*

S-graf je graf u kojem je svaki brid označen s "+" ili "—". Brid uv označen s "+" naziva se pozitivnim bridom, i označava se uv^+. Brid uv označen s "—" naziva se negativnim bridom, i označava se uv^-.

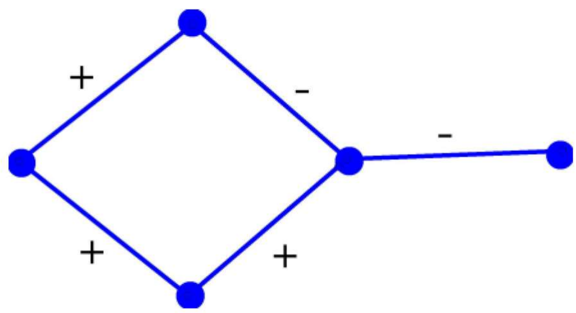
Za s-graf $G(V, E)$ definira se

- pozitivni stupanj vrha u, $d^+(u) = |\{uv : uv^+ \in E\}|$,
- negativni stupanj vrha u, $d^-(u) = |\{uv : uv^- \in E\}|$,
- signed stupanj vrha u, $sd(u) = d^+(u) - d^-(u)$,
- stupanj vrha u, $d(u) = d^+(u) + d^-(u)$.

Definicija 5.2. *Niz cijelih brojeva $\sigma = (d_1, d_2, \dots d_n)$ je* ***s-niz stupnjeva*** *s-grafa S ako je $sd(v_i) = d_i$, za $1 \leq i \leq n$.*

Definicija 5.3. *Niz cijelih brojeva je* ***s-grafički*** *ako je to s-niz stupnjeva s-grafa. Niz cijelih brojeva $\sigma = [d_i]_1^n$ je* ***standardni*** *ako vrijedi $n - 1 \geq d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_n$ i $d_1 \geq |d_n|$.*

Primjer 5.1. *s-graf na slici 9 ima dva vrha stupnja 2, jedan vrh stupnja 0 i dva vrha stupnja -1. Niz stupnjeva s-grafa S je $2, 2, 0, -1, -1$. Dakle, niz $2, 2, 0, -1, -1$ je s-grafički niz.*



Slika 9: Graf s predznacima

Može se dokazati da za s-graf vrijedi ([3]).

Teorem 5.1. *Ako je S s-graf reda p i veličine q, tada vrijedi*

$$k = \sum_{i=1}^{p} sd_i = 2q \,(\mathrm{mod}\, 4),$$

a broj pozitivnih bridova grafa S je $\frac{1}{4}(2q + k)$, dok je broj negativnih bridova od S jednak $\frac{1}{4}(2q - k)$.

Ako je svaki brid s-grafa S označen kao pozitivan, tada je S zapravo graf i s-stupanj svakog vrha je jednak baš stupnju vrha. Za ispitivanje je li takav niz stupnjeva grafički može se primijeniti Havel-Hakimi teorem.

Može se pokazati da postoji analogon teorema Havela i Hakima za s-grafički niz. Važan rezultat dokazan u [3] je sljedeća tvrdnja kojom su dani nužni i dovoljni uvjeti da bi niz cijelih brojeva bio s-grafički.

Teorem 5.2. *Standardni niz cijelih brojeva $\sigma : d_1, d_2, \ldots d_p$ je s-grafički ako i samo ako je niz*

$$\sigma' : d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+s+1} - 1, d_{d_1+s+2}, \ldots, d_{p-s}, d_{p-s+1} + 1, \ldots, d_p + 1 \tag{5.1}$$

je s-grafički za neki s, $0 \leq s \leq \dfrac{p-1-d_1}{2}$.

Teorem Havela i Hakima je poseban slučaj teorema 5.2 za $s = 0$.

Sljedeća tvrdnja dokazana u [10] vodi do algoritma koji je izvodiv u polinomnom vremenu.

Teorem 5.3. *Standardni niz cijelih brojeva $\sigma : d_1, d_2, \ldots d_p$ je s-grafički ako i samo ako je niz*

$$\sigma'_m : d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+m+1} - 1, d_{d_1+m+2}, \ldots, d_{p-m}, d_{p-m+1} + 1, \ldots, d_p + 1 \tag{5.2}$$

s-grafički gdje je m maksimalan nenegativan broj takav da je $d_{d_1+m+1} > d_{p-m+1}$.

U [10] su također dokazani kriteriji kojima se može utvrditi je li niz cijelih brojeva s-grafički niz za s-grafove s petljama i s-grafove s višestrukim bridovima.

Teorem 5.4. *Niz cijelih brojeva $d_1, d_2, \ldots, d_p$ je s-niz stupnjeva s-grafa s petljama ako i samo ako je $\sum_{i=1}^{p} d_i$ paran broj.*

Teorem 5.5. *Za $p \geq 3$ niz cijelih brojeva $d_1, d_2, \ldots, d_p$ je s-niz stupnjeva s-grafa s višestrukim bridovima ako i samo ako je $\sum_{i=1}^{p} d_i$ paran broj.*

Literatura

[1] C. Chartrand & L. Lesniak, Graphs & Digraphs, Chapman, Hall, 1996.

[2] C. Chartrand, P. Zhang, A First Course in Graph Theory, Dover Publications, 2012.

[3] G. Chartrand, H. Gavlas, F. Harary, and M. Schultz, On signed degrees in signed graphs, Czech. Math. J. 44 (1994), 677–690.

[4] O. Favaron, M. Mahéo and J. Saclé, On the residue of a graph, J. Graph Theory, 15(1991), 39–64.

[5] A. Dharwadker, S. Pirzada, Graph theory, Institute of Mathematics, India, 2011.

[6] G. Sierksma , H. Hoogeveen, Seven Criteria for lnteger Sequences Being Graphic, Journal of Graph Theory, Vol. 15(2) (1991), 223–231.

[7] A. Tripathi & S. Vijay, A short proof of a theorem on degree sets of graphs. Discrete Applied Mathematics, 155(2007), 670–671.

[8] A. Tripathi, S. Venugopalan, D. B. West, A short constructive proof of the Erdős–Gallai characterization of graphic lists, Discrete Mathematics 310(2010), 843–844.

[9] D. Veljan, Kombinatorna i diskretna matematika, Algoritam, Zagreb 2001.

[10] J. H. Yan, K.W. Lih, D. Kuo and G. J. Chang, Signed degree sequences of signed graphs, J. Graph Theory 26(1997), 111–117.

[11] `http://compalg.inf.elte.hu/~tony/Oktatas/TDK/FINAL/Chap%202.PDF`