Primjeri problemskih zadataka i mogućih strategija za učenike različite školske dobi

Borojević, Dajana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Dajana Borojević

Primjeri problemskih zadataka i mogućih strategija za učenike različite školske dobi

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Dajana Borojević

Primjeri problemskih zadataka i mogućih strategija za učenike različite školske dobi

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Rješavanje problema je posebna vještina koja je potrebna u bilo kojem području života. Put do uspjeha prema nekom cilju vezan je uz zamke i izazove. Sposobnost da ustrajemo i onda kada se suočimo s novim, nepoznatim situacijama i problemima, utjecat će na konačan ishod. Vještina rješavanja problema je svakako nešto što će u tome pomoći, a kroz praksu i vježbanje to je vještina koja se može razviti.

Problemske situacije sastavni su dio nastave matematike i kod učenika potiču razvoj stvaralačkih aktivnosti. Sama ideja problemske nastave nije nova, ali je u praksi često zapostavljena. Trebamo težiti tome da na nastavnom satu učenici samostalno i aktivno rade, istražuju i rješavaju probleme koristeći svoja matematička znanja. Zbog svoje složenosti problemska nastava više dolazi do izražaja u višim razredima osnovne škole te u srednjoj školi. U radu su prikazani primjeri problemski zadataka upravo za učenike te školske dobi koji se tada nalaze u fazi života zvanoj adolescencija. Adolescencija je razdoblje velikih promjena u životu, od fizičkih, emocionalnih, socijalnih, fizičkih do kognitivnih. Novonastale kognitivne vještine adolescenti primjenjuju u razumijevanju i rješavanju problema značajno više nego djeca. Napuštaju fazu konkretnih operacija i ulaze u fazu formalnih operacija gdje razvijaju sposobnost apstraktnog mišljenja. Stoga je s njima lakše provoditi problemsku nastavu nego s djecom. Ukoliko problemsku nastavu zbog složenosti nastavnih sadržaja nije moguće koristiti pri obradi novog gradiva, poželjno ju je s učenicima provoditi kroz problemske zadatke. Problemske zadatke karakteriziraju dvije ili više nepoznatih sastavnica, a metode za njihovo rješavanje nisu unaprijed poznate. U radu su opisana četiri koraka koja vode prema rješenju problemskog zadataka koje je opisao poznati matematičar George Polya, a to su: razumijevanje problema, osmišljavanje plana rješavanja, realizacija plana i osvrt. Prilikom rješavanja problemskog zadataka moguće je koristiti jednu ili više strategija. U primjerima problemskih zadataka, koji su u radu podijeljeni na zadatke za učenike viših razreda osnovne škole i učenike srednje škole, ponuđena su moguća rješenja koristeći neke od navedenih strategija. Za svaku školsku dob opisani su ukratko sadržaji iz matematike s kojima se učenici susreću, a nakon problemskih zadataka slijede primjeri iz svakodnevnog života.

Suvremena nastava matematike potiče rješavanje problema, a to možemo vidjeti i u Kurikulumu nastavnog predmeta Matematike za osnovne škole i gimnazije, čija provedba zapičinje školske godine 2019./2020. Među odgojno-obrazovnim ciljevima stoji da će učenici temeljem usvojenih znanja, vještina i procesa rješavati problemske situacije.

1 Kurikulum nastavnog predmeta matematika

"Kurikulum je osmišljen, sustavan i skladno uređen način reguliranja, planiranja, izvedbe i vrednovanja odgojno-obrazovnoga procesa, koji može biti određen na različitim razinama, na razini cjelokupnoga sustava odgoja i obrazovanja, na razini pojedinih njegovih dijelova, na razini odgojno-obrazovne ustanove i na razini pojedinca." (ONK, 2017. [10])

U Republici Hrvatskoj Cjelovita kurikularna reforma počela se provoditi kao odgovor na plan provedbe Strategije obrazovanja, znanosti i tehnologije, koje je Hrvatski sabor usvojio u listopadu 2014. Reforma obuhvaća sustavne, smislene i korjenite promjene u sustavu odgoja i obrazovanja koje uključuju načine poučavanja i učenja. Umjesto da fokus bude na sadržajima propisanim nastavnim planom i programom, uvode se promjene koje su više usmjerene na ishode učenja i razvoj kompetencija. Reforma se odnosi na sve razine i vrste odgoja i obrazovanja. Kurikulum u centar stavlja dijete ili mladu osobu pred koju postavljamo svrhu, ciljeve, očekivanja i ishode u odgojno-obrazovnom procesu koje usklađujemo s njihovim iskustvima i naposljetku ih vrednujemo.

U svakoj zemlji, važnu ulogu u sustavu odgoja i obrazovanja ima Nacionalni kurikulum koji "predstavlja sustav koji služi ujednačavanju i podizanju kvalitete odgojno-obrazovnoga procesa te ispunjavanju zajednički određenih odgojno-obrazovnih ciljeva, očekivanja i ishoda neovisno o odgojno-obrazovnoj ustanovi koju djeca i mlade osobe pohađaju." (ONK, 2017. [10]) Tri su glavne sastavnice Nacionalnog kurikuluma Republike Hrvatske:

1. Sustav nacionalnih kurikulumskih dokumenata koji su hijerarhijski organizirani. Neki od njih su: Okvir nacionalnog kurikuluma koji se odnosi na sveukupni sustav odgoja i obrazovanja, kurikulumi koji se odnose na različite razine i vrste odgoja i obrazovanja, kao što je na primjer Nacionalni kurikulum za gimnazijsko obrazovanje, predmetni kurikulumi, kurikulumi za određenu skupinu djece, kao na primjer Nacionalni kurikulumi na jeziku i pismu nacionalnih manjina.

2. Primjena nacionalnih kurikulumskih dokumenata.

3. Vrednovanje.

U sve tri sastavnice Nacionalni kurikulum se oslanja na obilježja određena Zakonom o odgoju i obrazovanju u osnovnoj i srednjoj školi (2010.), Nacionalnim okvirnim kurikulumom (NOK, 2011.) i Strategijom obrazovanja, znanosti i tehnologije (2014.). NOK je jedan od glavnih uporišta svim kurikulumskim dokumentima, a također služi kao temelj za izradu predmetnih kurikuluma.

Ministarstvo znanosti i obrazovanja u siječnju 2019. donijelo je Odluku o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimazije u Republici Hrvatskoj [9]. Ova se odluka primjenjuje od školske godine 2019./2020. za učenike 1. i 5. razreda osnovne škole i 1. razreda gimnazije, od školske godine 2020./2021. za učenike 2.,3.,6. i 7. razreda osnovne škole te za učenike 2. i 3. razreda gimnazije, a od školske godine 2021./2022. za učenike 4. i 8. razreda osnovne škole i 4. razreda gimnazije. Ovaj kurikulum uključuje svrhu i opis predmeta, odgojno-obrazovne ciljeve učenja i poučavanja predmeta, matematičke procese i domene kurikuluma nastavnog predmeta, odgojno-obrazovne ishode, sadržaje i razinu usvojenosti po razredima i organizacijskim područjima, učenje i poučavanje predmeta, vrednovanje ostvarenosti odgojno-obrazovnih ishoda. Da on potiče rješavanje problema možemo vidjeti proučimo li odgojno-obrazovne ciljeve učenja i poučavanja predmeta te matematičke procese.

1.1 Odgojno-obrazovni ciljevi učenja i podučavanja predmeta

U Kurikulumu nastavnog predmeta Matematike za osnovne škole i gimnazije stoji sljedeće: "Učenici će temeljem usvojenih znanja, vještina i procesa:

- primijeniti matematički jezik u usmenome i pisanome izražavanju, strukturiranju, analizi, razumijevanju i procjeni informacija upotrebljavajući različite načine prikazivanja matematičkih ideja, procesa i rezultata u matematičkome kontekstu i stvarnome životu
- samostalno i u suradničkome okružju matematički rasuđivati logičkim, kreativnim i kritičkim promišljanjem i povezivanjem, argumentiranim raspravama, zaključivanjem, provjeravanjem pretpostavki i postupaka te dokazivanjem tvrdnji
- rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije te preispitivanjem procesa i rezultata, po potrebi uz učinkovitu uporabu odgovarajućih alata i tehnologije
- razviti samopouzdanje i svijest o vlastitim matematičkim sposobnostima, upornost, poduzetnost, odgovornost, uvažavanje i pozitivan odnos prema matematici i radu općenito
- repoznati povijesnu, kulturnu i estetsku vrijednost matematike njezinom primjenom u različitim disciplinama i djelatnostima kao i neizostavnu ulogu matematike u razvoju i dobrobiti društva." [9]

1.2 Matematički procesi

Matematički procesi su važni za sve razine obrazovanja i obuhvaćaju sve domene kurikuluma. Oni su u Kurikulumu nastavnog predmeta Matematike za osnovne škole i gimnazije organizirani u pet skupina:

1. Prikazivanje i komunikacija

    - Koristeći različite prikaze (riječi, brojevi, simboli, crteži, tablice, liste, dijagrami, grafovi) učenici promišljeno prikazuju matematičke objekte, objašnjavaju ideje i zapisuju postupke koje koriste. Odabiru na koji će način prikazati danu situaciju te povezuju različite prikaze. Uspješna komunikacija postiže se korištenjem matematičkog jezika kojeg učenici koriste u kombinaciji s govornim jezikom te na taj način bolje razumiju matematička objašnjenja i opise. Razumijevanje matematičkog jezika pomaže lakšem i bržem usvajanju novih sadržaja.

2. Povezivanje

    - Važno je da učenici mogu s razumijevanjem uspostavljati veze između matematičkih objekata, pojmova, ideja, postupaka i prikaza. Povezivanje s vlastitim iskustvom i primjerima iz stvarnog života utječe na bolje razumijevanje te pozitivan stav prema matematici.

3. Logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje

    - Postupak razmišljanja razvijen nastavom matematike učinkovito se primjenjuje u svakodnevnom životu. Samo učenje matematike potiče razvoj i održavanje logičkog i apstraknog mišljenja. Suočavanjem s problemima u matematici, učenici promišljaju, argumentiraju, dokazuju i donose zaključke, koristeći dedukciju, indukciju, analogiju, generalizaciju i specijalizaciju.

4. Rješavanje problema i matematičko modeliranje

    - Prilikom susreta s problemskom situacijom, učenici ju na početku analiziraju, prepoznaju elemente koje mogu matematički prikazati te planiraju pristup za rješavanje problema, osmišljavaju i koriste odabrane strategije. U konačnici vrednuju rješenje i prikazuju ga na prikladan način. Osim primjene matematičkih znanja, učenici na ovaj način razvijaju upornost, hrabrost i otvorenost prilikom susreta s novim, nepoznatim situacijama.

5. Primjena tehnologije

    - Tehnologija i razni alati pomažu učenicima u matematičkim aktivnostima kao što su provjeravanje pretpostavki, obrada i prikaz podataka i informacija, rješavanje problema i modeliranje. Korištenje tehnologije može dovesti do dubljih i drugačijih matematičkih promišljanja te do novih oblika učenja i poučavanja.

Sastavni dio procesa učenja i poučavanja matematike je i vrednovanje. Elementi vrednovanja prema Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimazije u Republici Hrvatskoj su sljedeći:

- Usvojenost znanja i vještina
- Matematička komunikacija
- Rješavanje problema

2 Problemska nastava

2.1 Problem, problemska situacija i načelo problemnosti

Rješavanje problema smatramo najvišim oblikom učenja. Ono učenicima omogućava razvoj stvaralačkog mišljena i stvaralačkih sposobnosti, čemu i teži suvremena metodika nastave matematike. Nastava se općenito izvodi na osnovu polaznih postavki i temeljnih ideja koje nazivamo didaktičkim načelima. Ta načela predstavljaju opće smjernice odgojno-obrazovnog rada, nastavnicima daju upute kako što uspješnije, smisleno i strukturirano organizirati nastavni sat. Sva didaktička načela su međusobno povezana i čine sustav. Vrlo često se ostvarivanjem jednog, ostvaruje i neko drugo načelo. Postoje različiti sustavi koji mogu sadržavati različit broj načela, a jedan od sustava tvore sljedeća načela: načelo primjerenosti, načelo zornosti, načelo interesa, svjesnosti i aktivnosti, načelo sistematičnosti i postupnosti, načelo trajnosti znanja, vještina i navika, načeo individualizacije, načelo odgojnosti nastave. Ova načela je poželjno koristiti, kako u svim nastavnim predmetima, tako i u nastavi matematike. Ako usporedimo matematiku s drugim predmetima, ona ima neke specifičnosti zbog kojih navedeni sustav dopunjujemo s dva načela, a to su načelo znanstvenosti i načelo problemnosti. Načelo problemnosti osobito veliku ulogu ima u nastavnom sustavu koji nazivamo problemska nastava. Uz pojam načela problemnosti, osnovu za primjenu problemske nastave čine još i ova dva pojma: problem i problemska situacija.

Problem je pojam s kojim se često susrećemo u svakodnevnom životu. Sama riječ *problem* je grčkog porijekla i znači "teorijsko ili praktično pitanje koje treba riješiti, sporno pitanje, teškoća, težak zadatak, zagonetka". [4] Problemske situacije koje treba znati razriješiti također su dio svakodnevnice, no nama su ipak najzanimljivije one problemske situacije koje se pojavljuju u nastavnom procesu matematike. Njih stvara nastavnik s ciljem povećanja efikasnosti nastave i razine matematičkog obrazovanja kod učenika. Ako je u pitanju obrada novog gradiva, nastavnik može učenicima postaviti problemsku situaciju, koja je primjerena njihovom predznanju i sposobnostima, te na taj način probuditi zanimanje za gradivo. Jedan od načina na koji to može napraviti je da jasno i precizno postavlja problem učenicima, što je ujedno i najjednostavniji način. Drugi način bi bio da stvori situaciju u kojoj učenici moraju sami shvatiti i formulirati problem. Treći način je da nastavnik stvara situaciju u kojoj je manje ili više naznačen problem, a koji onda učenike tijekom analize dovodi do novog problema koji je nastavnik predvidio. I posljednji, ujedno i najvrijedniji način, je da nastavnik stvara situaciju u kojoj je manje ili više naznačen problem koji učenike tijekom analize također dovodi do novog problema, ali u ovom slučaju problema kojeg nastavnik nije predvidio. Tu dolazi do izražaja učenikova kreativnost i stvaralačko mišljenje.

2.2 Problemski zadatak

Ponekad se zbog složenosti i težine nastavnih sadržaja problemska nastava ne može primjeniti prilikom obrade novog gradiva. U tom slučaju poželjno je učenicima postavljati problemske zadatke. U ovom radu upravo je naglasak na problemskim zadacima i ilustraciji strategija koje se mogu koristiti prilikom rješavanja takvih zadataka. Kako je problemska nastava zahtjevan nastavni sustav te za njezinu primjenu treba više vremena, rješavanje problemskih zadataka je dobar način za uvođenje problemske nastave u nastavu matematike. Kod standardnih zadataka metoda rješavanja je uglavnom unaprijed poznata, nema nepoznatih sastavnica, uvjeti su jasno postavljeni, cilj je očit te rješavanje teče prema očekivanjima. Za razliku od njih, problemski zadaci, u kojima je riječima opisana nepoznata situacija koju treba riješiti, imaju dvije ili više nepoznatih sastavnica. Metoda rješavanja problemskih zadataka nije unaprijed poznata te se od učenika zahtijeva pojačan umni napor i koncentracija, kreativnost, samostalnost, ustrajnost i dosjetljivost. Zadaci često mogu imati i više točnih rješenja kao i ispravnih načina dolaženja do njih.

Poznati mađarski matematičar George Polya u svom radu "Kako to riješiti" ("How to Solve it", 1945.) iznio je korake koji vode prema rješenju problema:

1. Razumjeti problem

    - Potrebno je shvatiti o čemu se u problemu radi te identificirati pitanje koje se u njemu nameće. Učenik bi trebao znati ukazati na zadane podatke, uvjete, nepoznanice u zadatku. Nastavnik ga može poticati i usmjeravati postavljajući pitanja poput: "Što je zadano?, Što je nepoznato?, Kako glasi uvjet?, Kada je uvjet ispunjen?" i slično. Ako je potrebno učenik može nacrtati skicu, imenovati objekte ili uvesti prikladne oznake.

2. Osmisliti plan rješavanja

    - U ovom koraku razmišljamo o tome kako riješiti problem. Polya navodi: "Put od razumijevanja zadatka do postavljanja plana može biti dug i krivudav. Ta se ideja može pojavljivati postepeno. No, ona može, nakon prividno bezuspješnih pokušaja i perioda krzmanja, i iznenada sinuti kao 'sjajna ideja'. Najbolje što nastavnik može za svoje učenike učiniti jest: nenametljivo im pomoći da do takve 'sjajne ideje' dođu." [8] Da bi se došlo do dobre ideje i stvaranje plana, potrebno je koristiti prethodno stečena matematička znanja. Pitanja koja učeniku u ovoj fazi mogu moći su: "Znaš li neki srodni zadatak ili rezultat koji može pomoći?, Možeš li ga iskoristiti?, Može li se zadatak drugačije izraziti?, Jesi li iskoristio sve što je zadano?". Kada učenik u glavnim crtama ima račune i konstrukcije koje treba izvesti da bi dobio nepoznanicu, možemo reći da ima plan.

3. Realizirati plan

    - Nakon što imamo plan potrebno ga je i izvršiti. U ovom koraku se provodi odabrana strategija. Ideju koju učenik provodi iz plana koji je sam izradio neće lako zaboraviti. Prilikom provedbe nastavnik treba kontrolirati da je učenik uvjeren u ispravnost svakog koraka.

4. Osvrt (analiza dobivenog rješenja)

   - Ovo je faza koju učenici često izostave, a važna je kako bi analiziranjem rješenja dodatno ojačali znanje i povećali sposobnost u rješavanju problema. Potrebno je analizirati odgovara li odgovor iz trećeg koraka na postavljen problem u prvom koraku i ima li taj odgovor smisla. Ako nema smisla, treba se vratiti na drugi korak i odabrati drugu strategiju za rješavanje ili na treći korak ako unutar odabrane strategije treba nešto ispraviti. Promišljanjem i komentiranjem o zadatku i njegovom rješenju učenici povezuju različite dijelove matematike i stvarnog života, osobito ako su prilikom rješavanja uložili veliki trud. Nastavnik učenike može potaknuti na razmišljanje postavljajući pitanja poput: "Može li se rezultat provjeriti?, Je li rezultat očekivan i smislen?, Može li se rezultat kontrolirati?".

Opisani koraci mogu se primijeniti na različite vrste problema, od jednostavnijih računskih zadataka do složenijih problema. Oni daju smjernice kako riješiti postavljeni problem, a korisne su i nastavnicima i učenicima koji razvijaju svoje vještine i sposobnosti. Sam način na koji se pristupa problemu može biti vrlo utjecajan na ishod.

2.3 Strategije rješavanja problemskih zadataka

Postoje različite strategije kojima se problem može riješiti primjenjujući naveden pristup rješavanju problema prema Polyau. Slijedi popis strategija za rješavanje problema:

(a) Odglumiti

(b) Analizirati jedinice

(c) Algebarska metoda

(d) Stvoriti fizičku reprezentaciju

(e) Koristiti deduktivno zaključivanje

(f) Nacrtati sliku ili dijagram

(g) Nacrtati Vennov dijagram

(h) Metoda eliminacije

(i) Procijeniti ključne razlike

(j) Metoda pokušaja i promašaja

(k) Identificirati podprobleme

(l) Pronaći uzorak

(m) Ispisivanje sustavnih listi

(n) Izraditi model

(o) Organizirati informacije

(p) Riješiti srodni jednostavniji problem

(q) Koristiti matrice

(r) Vizualizirati prostorne odnose

(s) Metoda rješavanja unatrag

Prema rješenju problema može voditi jedna strategija, ali nije neobično da se strategije kombiniraju. Također, do istog rješenja se može doći korištenjem različitih strategija. Dalje u radu, u četvrtom i petom poglavlju, pojavljuju se problemi za koje su prikazana moguća rješenja pomoću nekih od navedenih strategija. O samim strategijama i njihovom opisu više se može vidjeti u [6].

3 Razvoj u adolescenciji

Adolescencija je razdoblje sazrijevanja kroz koje se dijete priprema za odraslu dob. To je faza života koja započinje ulaskom u pubertet, približno između 10. i 12. godine života, i traje do 22. (ili čak do 25.) godine. Najčešće se dijeli u podfaze, to su rana (dob između 10 i 14 godina), srednja (dob između 15 i 18 godina) i kasna adolescencija (dob između 19. i 22. godine). Kronološka dob podfaza je gruba ocjena, točnije se mogu odrediti prema karakteristikama određene faze. Početak je za oba spola prilično uočljiv i karakteriziran fizičkim promjenama koje utječu na sva područja adolescentnog ponašanja. Kraj adolescencije varira od pojedinca do pojednica jer je više spoj psiholoških i socioloških faktora nego što je vezan uz fizičke i biološke promjene. Sama riječ adolescencija dolazi od latinske riječi *adolescentia* što znači mladost, mladenačko doba. Često se to doba opisuje kao doba "bure i oluje", a poznati pisac Charles Dickens ju je slikovito opisao: "Ona je najbolje razdoblje života, ona je najgore razdoblje života, ona je doba mudrosti, ona je doba ludosti." [7]

Adolescencija je zasigurno razdoblje velikih promjena u životu, od fizičkih, emocionalnih, psihičkih, socijalnih do kognitivnih. Sve te promjene uzrokuju nestabilnost i oscilacije u ponašanju i raspoloženju adolescenata, a ovo razdoblje čine razdobljem zbunjenosti, ali i otkrića. Adolescentski duh i mladenačko uzbuđenje se često izmjenjuje s trenucima ljutnje, svadljivosti, zlovolje i pojačane osjetljivosti. Na socijalnom planu adolescencija se očituje pojačanom druželjubivosti, ali i povremenom svojevoljnom izboru samoće. Iako su još uvijek dosta ovisini o odraslima, odnos adolescenata s roditeljima, učiteljima i drugim značajnim odraslim osobama u njihovim životima može biti ispunjen sukobima i nerazumijevanjem. Adolescenti, u potrazi za svojim identitetom i samostalnošću, često mogu biti skloni pobunama. Ipak, ovo razdoblje ne treba gledati kao stresno razdoblje ispunjeno poteškoćama. Treba naglasiti važnost razumijevanja razvojnih specifičnosti u obliku fizičkih, mentalnih, socijalnih i emocionalnih sposobnosti.

3.1 Kognitivni razvoj adolescenata

Usporedimo li kognitivno funkcioniranje djece i adolescenata, psihologija kaže da je mišljenje adolescenata puno nadahnutije, racionalnije i maštovitije u usporedbi s dječjim mišljenjem. Prema psihologu Piagetu djeca se do oko 11. godine nalaze u stadiju konkretnih operacija, a nakon toga ulaze u stadij formalnih operacija u kojem razvijaju sposobnost apstraktnog, znanstvenog mišljenja. Adolescenti više ne trebaju konkretne stvari i događaje kao objekt svog mišljenja, a razmišljanjem dolaze do novih, općenitijih i logičkih pravila. Kognitivni razvoj omogućuje adolescentima drugačiju percepciju fizičkog i socijalnog svijeta. Urastanjem u svijet odraslih počinju mijenjati svoj odnos prema društvenim autoritetima, počinju planirati svoju budućnost i kritički evaluirati svijet u kojem žive. Novonastale kognitivne vještine primjenjuju u razumijevanju i rješavanju problema značajno više nego djeca.

Dvije su glavne značajke stadija formalnih operacija:

- Hipotetičko-deduktivno rasuđivanje: kada naiđu na problem, adolescenti ga započinju rješavati stvarajući opću teoriju o svim mogućim čimbenicima koji mogu utjecati na ishod te dedukcijom dolaze do specifičnih hipoteza. Na određene načine te hipoteze testiraju kako bi vidjeli koja funkcionira u stvarnosti. Tu uočavamo razliku u odnosu na stadij konkretnih operacija gdje djeca započinju s realnim i najočiglednijim predviđanjima za koje, ako se ne potvrde u realnosti, nemaju drugih opcija i ne uspijevaju riješiti problem.

- Propozicijsko mišljenje: Adolescenti su sposobni procjenjivati logiku propozicija, a da se pri tome ne oslanjaju na situacije u stvarnom svijetu. Za razliku od njih, djeca procjenjuju logiku propozicija pozivajući se na konkretne dokaze u stvarnom svijetu. U jednom istraživanju propozicijskog mišljenja (Osherson i Markman, 1975.) sudjelovala su djeca i adolescenti. Istraživači su imali hrpicu žetona za poker te su iznijeli neke tvrdnje za koje su ispitivači trebali odrediti jesu li točne, netočne ili se to ne može sa sigurnošću reći. U prvoj situaciji žena je pred djecom i adolescentima sakrila žeton u ruku i rekla tvrdnje:

  "Žeton u mojoj ruci je zelen *ili* nije zelen."
  "Žeton u mojoj ruci je zelen *i* nije zelen."

  U drugoj situaciji muškarac je u ruci držao crveni ili zeleni žeton tako da ih ispitivači vide te je iznio iste tvrdnje kao i žena u prvoj situaciji. Djeca su se usredotočila na konkretna svojstva žetona. U prvoj situaciji su za obje tvrdnje rekli da ne mogu sa sigurnošću odgovoriti jer je žeton skriven od pogleda. Kada su žetoni bili vidljivi, procjenili su da su obje tvrdnje točne ako je žeton zelene boje, a netočne ako je žeton bio crvene boje. Adolescenti su, za razliku od djece, analizirali logiku tvrdnji. Shvatili su da tvrdnja koja sadrži "ili je ili nije" mora biti uvijek točna, a da su tvrdnje sa "i" uvijek netočne, bez obzira na boju žetona.

Prema Piagetovoj teoriji adolescenti su puno sposobniji u shvaćanju znanstvenih načela nego što su to djeca mlađa od 10 godina. Mlađa djeca teže razlučuju dokaze koji se istodobno odnose na tri ili više varijabli, a kapacitet za propozicijsko mišljenje im je također ograničen. Tijekom adolescencije te se sposobnosti poboljšavaju. No dostižu li svi ljudi stadij formalnih operacija? Ponekad možemo vidjeti da i odrasli ljudi nemaju u potpunosti razvijeno formalno-operacijsko mišljenje. Razlog toga može biti u tome što odrasli misle apstraktno samo u situacijama u kojima imaju dosta iskustva. Također, u mnogim ruralnim u plemenskim kulturama osobe bez prilike za rješavanje hipotetičkih problema ne moraju razvijati formalno-operacijsko mišljenje. Najviši stadij kognitivnog razvoja može biti pod utjecajem specifičnih prilika za školsko učenje.

Opći prikaz kognicije adolescenata upućuje na to da apstraktno mišljenje potiče niz specifičnih kognitivnih promjena, prema [1] te promjene su:

- Pažnja - postaje usmjerena na važne informacije i bolje prilagođena na promjenjive zahtjeve zadataka.
- Strategije - djelotvornije su i poboljšavaju pohranu, reprezentaciju i prisjećanje informacija.
- Znanje - povećava se i time olakšava upotrebu strategija.
- Metakognicija (svjesnost o mišljenju) - se proširuje što vodi prema novim strategijama za stjecanje informacija i rješavanju problema.
- Kognitivna samoregulacija - pospješuje se i time dovodi do boljeg nadzora mišljenja.
- Kapacitet obrade - povećava se što vodi povećanju prostora memorije u kojoj se može zadržavati više informacija i koristiti apstrakne informacije.

Istraživanja također pokazuju kako se kod adolescenata poboljšava sposobnost usklađivanja teorije s dokazima pri rješavanju sve složenijih problema. Na različitim vrstama zadataka razvijaju formalno-operacijsko mišljenje tako da konstruiraju opće modele koje onda primjenjuju na druge slučajeve problema određene vrste.

Postizanjem svojih novih kognitivnih sposobnosti, adolescenti mogu u početku biti nespretni u korištenju istih. Stoga roditelji i nastavnici trebaju biti pažljivi u tome da neke tipične tinejdžerske reakcije (kao što su svadljivost, neodlučnost, usmjerenost na sebe) ne pripisuju ničem drugom nego neiskustvu s novim mogućnostima.

Osim kvalitativnih promjena mišljenja, u adolescenciji se događaju i kvantitativne promjene koje se izražavaju pomoću kvocjenta inteligencije IQ. Intelektualne sposobnosti rastu, neke brže, neke sporije. Fluidna inteligencija (sposobnost logičkog razmišljanja i rješavanja problema u novim situacijama, ne ovisi o stečenom znanju i informacijama koje imamo otprije) u adolescenciji raste brže od kristalizirane inteligencije (znanja, vještine i sposobnosti koje ovise o iskustvu). Kada je u pitanju opći faktor inteligencije tu se događa posljednja brza promjena poznata pod pojmom intelektualni skok, a pojavljuje se između 11. i 14. godine.

> "Conger (1991.) navodi da brzina rješavanja problema već s 12 godina života dostiže blizu 80 posto maksimalne individualne brzine kojom će osoba probleme rješavati u mlađoj odrasloj dobi. Na području razumijevanja riječi kao i fluentne upotrebe riječi, mladi tek s 20 godina dostižu četiri petine one razine koju će imati u odrasloj dobi." [5]

3.2 Školski uspjeh

Odnos inteligencije i školskog uspjeha se ispituje dugi niz godina kod djece sve dobi, pa tako i kod adolescenata. Prema različitim autorima različiti su koeficijenti korelacije između inteligencije i školskog uspjeha, no svi se slažu u jednom, ta povezanost je značajna, umjerena i pozitivna. Te korelacije su ipak veće na početku školovanja nego u kasnijim stupnjevima školovanja. To se može objasniti činjenicom da viši stupnjevi školovanja postaju selektivni.

> "Školski uspjeh ovisi o inteligenciji, ali i školovanje ima utjecaj na intelektualni razvoj iz više razloga. Ceci (1991.) navodi sljedeće razloge:
>
> 1. U školi se sustavno stječu faktografska znanja koja su relevantna pri rješavanju problema.
> 2. Školovanje utječe na razvoj vještina obrade podataka, na analiziranje, razvrstavanje i sl.
> 3. Školovanje potiče usvajanje vrijednosti koje pozitivno utječu na ishode pri rješavanju problema (točnost, pažljivost, upornost, brzinu i sl.)" [5]

Kako mišljenje adolescenata postaje više analitičko, učinkovitije mogu rješavati zadatke nego prije kada su bili u mlađoj dobi. Zato kada dobiju domaću zadaću puno uspješnije uspijevaju u samoregulaciji, od toga da planiraju tijek pisanja, prate napredak prema cillju i preusmjeravaju neuspjele akcije. Općenito se poboljšavaju vještine učenja za razliku od dječje dobi. Za razliku od toga, prilikom planiranja i donešenja odluka u svakodnevnom životu često su nesigurni i neodlučni, poput situacije "Što da obučem?" i slično.

U adolescenciji učenici se susreću s prijelazom iz osnovne u srednju školu. To razdoblje za njih može biti stresno i popraćeno slabijim ocjenama. Često imaju osjećaj da im se pridodaje manje osobne pažnje od strane nastavnika, da je nastavnicima manje stalo, da su stroži i manje prijateljski nastrojeni prema njima. Posljedica toga može biti da se počnu osjećati manje školski kompetentnima. Istraživanja su pokazala da se djevojčice teže prilagođavaju prelasku u srednju školu jer se u to vrijeme događaju puno drugih promjena kao što je pubertet, početak hodanja s dečkima. Težim prilagodbama su posebno izloženi oni s problemima u obitelji i problemima mentalnog zdravlja. Nagli pad školskog uspjeha može kod mladih uzrokovati nisko samopoštovanje, slabu motivaciju i manji angažman u školi. Autoritativno roditeljstvo koje uključuje angažman i praćenje rada svog djeteta, povećana podrška, kako roditelja tako i nastavnika, pomažu pri ublažavanju stresa i promiču bolji uspjeh u školi. Adolescenti, kao i djeca, treže svoje uzore koji sada više ne moraju biti samo njihovi roditelji. Zbog toga trebaju stvoriti bliske odnose sa svojim nastavnicima koji će svojim podučavanjem poticati mišljenje višeg stupnja.

> "Adolescentima je potrebna razredna okolina koja je osjetljiva na njihove sve veće sposobnosti rezoniranja i njihove emocionalne i socijalne potrebe. Ako adolescent nema odgovarajuća iskustva u učenju, malo je vjerojatno da će realizirati svoj potencijal za apstraktno mišljenje." [1]

Sve promjene kod adolescenata navedene u ovom poglavlju utječu na njihovu ličnost, moralno rasuđivanje, ponašanje, odnos prema školi te njihove radne navike.

4 Učenici viših razreda osnovne škole

Učenici viših razreda osnovne škole suočeni su s ulaskom u doba adolescencije. Oni se nalaze u prvoj od tri podfaze, a to je rana adolecencija. Napuštaju fazu konkretnih operacija te ulaze u fazu formalnih operacija. Razvoj kognitivnih sposobnosti omogućava učenicima da razmišljaju na sistematičan i logičan način uz stvaranje pretpostavki i razumijevanje apstraktnih koncepata. Počinju bolje razumijevati svijet oko sebe, sposobni su razmatrati više mogućnosti, umjesto da se, kao u djetinstvu, ograničavaju na ono stvarno. Postaju sve više samosvjesni i zaokpljeni sami sobom. Od sve veće važnosti su odnosi s vršnjacima i stvaranje vršnjačkih grupa, čije norme adolescente u ovoj dobi čini podložnima pritisku vršnjaka. Taj pritisak doseže vrhunac u ranoj adolescenciji i smanjuje se nakon 14. godine. U ovom se razdoblju života adolescenti najviše prilagođavaju velikim fizičkim promjenama, a vrijeme sazrijevanja postaje važan faktor u izboru prijatelja. Tako se uglavnom udružuju oni koji ranije sazrijevaju te su posebno zaokupljeni istovjetnošću i na temelju toga biraju prijatelje.

4.1 Matematika za učenike viših razreda osnovne škole

U višim razredima osnovne škole učenici se upoznaju sa skupovima brojeva. Prikazuju na brojevnom pravcu, uspoređuju i računaju s prirodnim, cijelim, racionalnim i iracionalnim brojevima te određuju odnose između skupova brojeva. Kada su upoznati s skupovima brojeva, u osmom razredu se radi račun s korijenima i potencijama racionalne baze i nenegativnoga cjelobrojnog eksponenta. Također računaju s algebarskim izrazima u $\mathbf{R}$. Već u šestom razredu se upoznaju s linearnom jednadžbom, a kasnije sa sustavom dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama te metodama za njihovo rješavanje i kvadratnom jednadžbom oblika $x^2 = k$. Rješavaju i primjenjuju jednadžbe i sustave jednadžbi u problemskim zadacima. Uvodi se koordinatni sustav na pravcu i pravokutni koordinatni sustav u ravnini. Učenici se susreću i s vektorima, crtaju ih, zbrajaju i oduzimaju. Nastavni plan i program za učenike viših razreda osnovne škole predstavlja linearne funkcije i uporabu funkcija za modeliranje situacija. Razumijevanje i crtanje funkcija je neophodno i osnova za daljnje poučavanje. U ovom periodu učenici računaju postotke i primjenjuju postotni račun, proprcionalne i obrnuto proporcionalne veličine. Uče se osnove vjerojatnosti i statistike te prikazivanje, organizacija i analiza podataka. Na području gemetrije upoznaju se sa skupovima točaka u ravnini i u prostoru te s preslikavanjem ravnine. S nekim od likova su upoznati još u nižim razredima, a sada se to znanje proširuje, proučavaju se svojstva trokuta i četverokuta, uključuje se krug, kružnica i mnogokuti, izvode se neke od konstrukcija, a ručuna se i njihov opseg i površina. Jedno od glavnih područja proučavanja uključuje prepoznavanje sukladnosti i sličnosti, kao i obavljanje izračuna na temelju teorije. Proučavaju se geometrijska tijela (piramida, prizma, stožac, valjak, kugla) te se računa i primjenjuje njihovo oplošje i volumen.

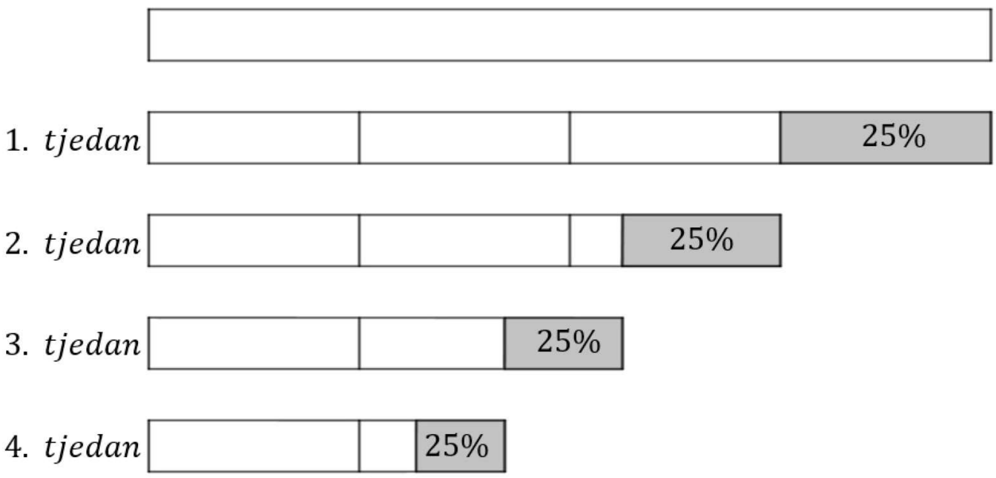
4.2 Problemi za učenike viših razreda osnovne škole

Problem 4.1. Trgovina ima završnu rasprodaju u sezoni. Svi proizvodi su na početku sniženi za 25%. Svakog sljedećeg tjedna proizvodi će biti sniženi dodatnih 25%. Tvoj prijatelj misli da biste trebali ići u kupovinu poslije četvrtog tjedna jer će tada proizvodi biti besplatni. Po njegovom razmišljanju četiri popusta od 25% bi značilo 100% popusta. Slažeš li se s njim? Objasni zašto da ili zašto ne?

Moguća rješenja:

Strategija: Izraditi model

Pogledajmo Sliku 1. Neka prva, prazna traka predstavlja punu cijenu nekog proizvoda. Nakon prvog sniženja cijena prozvoda će biti snižena za 25% i iznosit će $\frac{3}{4}$ početne trake, što nam predstavlja bijeli dio druge trake. Sljedeći tjedan proizvod će biti snižen dodatnih 25%, tj. preostali dio trake će biti smanjen za 25% i iznosit će onoliko koliko je bijeli dio treće trake. Nakon trećeg tjedna i dodatnog sniženja od 25% preostali dio trake smanjit će se za 25% i iznosit će onoliko koliko je bijeli dio četvrte trake. I konačno, nakon četvrtog tjedna i dodatnog sniženja od 25% preostali dio trake smanjit će se za 25%, a cijena proizvoda će iznositi onoliko koliko je bijeli dio posljednje trake. To znači da prijatelj nije bio u pravu, vidimo da je preostala cijena nešto više od $\frac{1}{4}$ početne cijene.



Slika 1: Sniženja

Strategija: Identificirati podproblem

U ovoj strategiji uzet ćemo konkretan primjer na proizvodu čija je cijena bila 100 kuna. Za svaki tjedan izračunat ćemo iznos popusta i cijenu nakon sniženja.

	Trenutna cijena	Iznos popusta od 25%	Cijena nakon sniženja
1. tjedan	100 kn	25 kn	75 kn
2. tjedan	75 kn	18.75 kn	56.25 kn
3. tjedan	56.25 kn	14.06 kn	42.19 kn
4. tjedan	42.19 kn	10.55 kn	31.64 kn

Strategija: Algebarska metoda

Neka je x cijena nekog proizvoda prije sniženja. Želimo li odrediti cijenu nakon prvog sniženja od 25% imamo sljedeće:

$$x - 0.25x = 0.75x$$

To znači da je nova cijena proizvoda $0.75x$, tj. 75% od početne cijene. Sljedeći tjedan proizvod će biti snižen dodatnih 25%, što znači da računamo 25% od nove cijene:

$$0.75x - 0.25(0.75x) = 0.75x - 0.1875x = 0.5625x$$

Vidimo da je cijena u drugom tjednu nešto malo više od 56% orginalne cijene. U trećem tjednu, nakon dodatnog sniženja od 25%, sniženje opet gledamo u odnosu na trenutnu cijenu, pa imamo:

$$0.5625x - 0.25(0.5625x) = 0.5625x - 0.140625x = 0.421875x$$

Cijena proizvoda u trećem tjednu je malo veća od 42% od orginalne cijene. I na kraju, u četvrtom tjednu sniženja, još jednom gledamo koliki je popust u odnosu na trenutnu cijenu.

$$0.421875x - 0.25(0.421875x) = 0.421875x - 0.10546875x = 0.31640625x$$

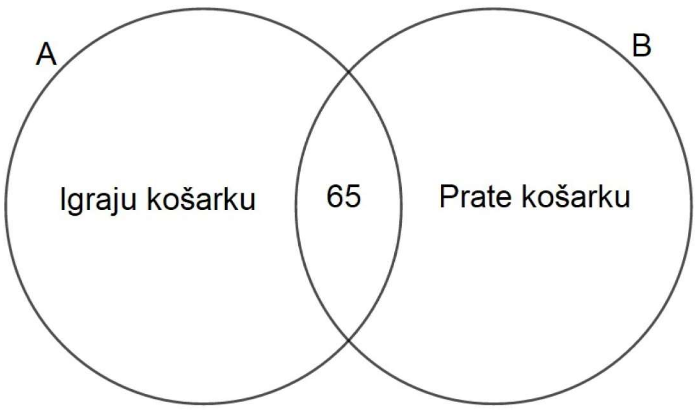
Nakon četiri tjedna cijena proizvoda će biti oko 31.6% početne cijene, što znači da prijatelj nije u pravu.

Problem 4.2. U grupi od 320 osoba, ljubitelja sporta, košarku igra njih 85, a 200 ju prati. Njih 65 i igra i prati košarku. Koliko osoba ima da niti igraju niti prate košarku?

Moguće rješenje:

Strategija: Nacrtati Vennov dijagram

Prikažimo zadane podatke pomoću Vennovog dijagrama (Slika 2). Neka skup A predstavlja skup osoba koje igraju košarku, njih ima 85. Neka je skup B skup svih osoba koje samo prate košarku, ali ju ne igraju. Takvih osoba je 200. Znamo da njih 65 i igra i prati košarku pa se oni nalaze u presjeku skupova A i B. Ako zbrojimo sve one koji igraju i koji prate košarku imamo $200 + 85 = 285$. Obzirom da postoji 65 osoba koje i igraju i prate košarku, tj. presjek skupova A i B nije prazan skup, od 285 moramo oduzeti 65 da bismo dobili broj osoba koje ili igraju ili prate košarku. Takvih osoba je onda $285 - 65 = 220$. Sada od



Slika 2: Vennov dijagram

ukupnog broja svih osoba, ljubitelja sporta, njih 320, oduzmemo one koje ili igraju ili prate košarku. Dobivamo da $320 - 220 = 100$ osoba niti igraju niti prate košarku.

Problem 4.3. Omjer duljina stranica dvaju kvadrata jednak je $3 : 5$. Koliki je omjer njihovih površina?

Moguće rješenje:

Strategija: Pronaći uzorak

Izračunajmo i ispišimo u tablicu površine za nekoliko konkretnih primjera kvadrata čiji je omjer duljina stranica jednak $3 : 5$.

Duljina stranice prvog kvadrata (cm)	Površina prvog kvadrata (cm^2)	Duljina stranice drugog kvadrata (cm)	Površina drugog kvadrata (cm^2)
3	9	5	25
6	36	10	100
9	81	15	225
12	144	20	400
15	225	25	625

Dobiveni rezultati daju naslutiti rješenje. Usporedimo duljine stranica i površine dvaju kvadrata zadanog omjera. Ako je omjer duljina stranica dvaju kvadrata jednak $3 : 5$, onda je omjer njihovih površina jednak $9 : 25$, tj. $3^2 : 5^2$. Općenito, ako je omjer duljina stranica dvaju kvadrata jednak $a : b$, tada je omjer njihovih površina jednak $a^2 : b^2$.

Problem 4.4. U trgovini s odjećom je velika rasprodaja majica i hlača, takozvana rasprodaja po jednoj cijeni (sve majice koštaju isto i sve hlače koštaju isto). Sestre Petra i Maja su zajedno otišle u kupovinu, a kada su došle kući pohvalile su se roditeljima što su kupile. Umjesto da kažu koliko su što platile, Petra je rekla da je kupila 7 majica i 4 hlača za 474 kn, a Maja 5 majica i 8 hlača za 678 kn. Pomozite roditeljima otkriti koliko košta jedna majica, a koliko jedne hlače?

Moguća rješenja:

Strategija: Algebarska metoda

Jedan od načina na koji ovaj problem možemo riješiti je pomoću sustava dviju jednadžbi s dvije nepoznanice. Označimo li cijenu majice s x, a cijenu hlača s y imamo sljedeći sustav:

$$7x + 4y = 474$$
$$5x + 8y = 678$$

Postoji nekoliko načina na koje se može riješiti ovaj sustav jednadžbi, mi ćemo ga riješiti metodom suprotnih koeficijenata. Pomnožimo li prvu jednadžbu s -2 imamo:

$$\begin{aligned} -14x - 8y &= -948 \\ 5x + 8y &= 678 \end{aligned}$$

Sada zbrajenjem ovih dviju jednadžbi dobijemo:

$$\begin{aligned} -9x &= -270 / : (-9) \\ x &= 30 \end{aligned}$$

Vidimo da je $x = 30$, tj. cijena jedne majice je 30 kn. Sada uvrstimo x u jednu od početne dvije jednadžbe i dobijemo da je $y = 66$, tj. cijena jednih hlača je 66 kn.

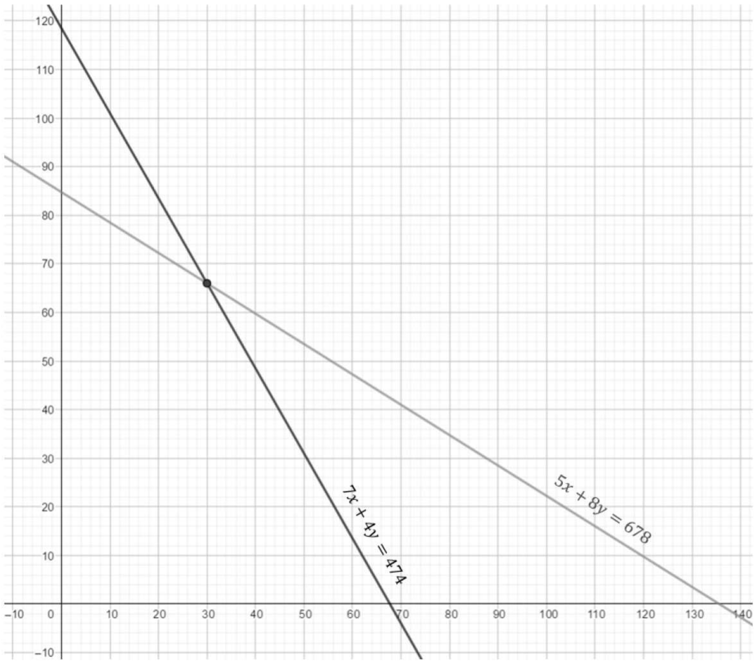
Strategija: Izraditi model

Sljedeći sustav jednadžbi riješimo grafički:

$$7x + 4y = 474$$
$$5x + 8y = 678$$

Svaka od jednadžbi predstavlja jednadžbu pravca, pa ih nacrtajmo u koordinatnom sustavu u ravnini.

Koordinate točke u kojoj se sijeku pravci zadovoljavaju obje jednadžbe. Vidimo da se pravci sijeku u točki $(30, 66)$ i za nju kažemo da je grafičko rješenje našeg sustava. Stoga je $x = 30$, tj. cijena majice je 30 kn, a $y = 66$, tj. cijena hlača je 66 kn.



Slika 3: Grafičko rješenje sustava

Problem 4.5. Kakav je odnos između kateta i hipotenuze u jednakokračnom pravokutnom trokutu?

Moguća rješenja:

Strategija: Pronaći uzorak

U ovoj strategiji odaberimo niz mogućih duljina stranica kateta pravokutnog trokuta. Kako je trokut jednakokračan, katete su jednake duljine. Izaberimo da su duljine stranica kateta jednakokračnih pravokutnih trokuta 3 cm, 17 cm, 21.5 cm, 39 cm, 526 cm i 9999 cm. Za svaki od tih trokuta odredimo duljinu hipotenuze pomoću Pitagorinog poučka. Rezultate možemo prikazati pomoću tablice.

Duljine jedne katete (cm)	Duljina druge katete (cm)	Duljina hipotenuze(cm)
3	3	$3\sqrt{2}$
17	17	$17\sqrt{2}$
21.5	21.5	$21.5\sqrt{2}$
39	39	$39\sqrt{2}$
526	526	$526\sqrt{2}$
9999	9999	$9999\sqrt{2}$

Za svaki odabrani primjer vidimo da je duljina hipotenuze jednaka duljini katete pomnožene s $\sqrt{2}$.

Strategija: Algebarska metoda

Neka je a duljina kateta jednakokračnog pravokutnog trokuta, a c duljina hipotenuze. Primjenom Pitagorinog teorema imamo sljedeći algebarski zapis:

$$\begin{aligned} a^2 + a^2 &= c^2 \\ 2a^2 &= c^2 \\ \sqrt{2}a &= c \end{aligned}$$

Vidimo da je u jednakokračnom pravokutnom trokutu s katetama duljine a, hipotenuza duljine $a\sqrt{2}$.

Problem 4.6. Petar je u jednom danu prošlog tjedan imao zakazan posjet liječniku, posjetio izložbu u muzeju, kupio namirnice na lokalnoj tržnici i ručao u restoranu "Kod Ruže". Toga dana je trebao pokupiti odjeću u kemijskoj čistionici, ali nije stigao. Pokušava se sjetiti koji je to bio dan u tjednu jer sljedeći puta kada može otići po odjeću je za točno tjedan dana. Liječnička ordinacija je zatvorena vikendom, a "Kod Ruže" je zatvoren ponedjeljkom. Tržnica radi samo ponedjeljkom, srijedom i petkom, a izložba u muzeju je otvorena za javnost utorkom, petkom i nedjeljom. Kojeg dana će Petar moći pokupiti odjeću u kemijskoj čistionici?

Moguće rješenje:

Strategija: Metoda eliminacije

Napravimo tablicu koja prikazuje dane u tjednu i lokacije koje je Petar posjetio u tom danu kojeg tražimo.

	Pon	Uto	Sri	Čet	Pet	Sub	Ned
Liječnik							
Muzej							
Tržnica							
"Kod Ruže"							
Kemijska čistionica							

Posjet liječniku nije mogao biti subotom ni nedjeljom, pa te dane možemo označiti s X da nisu mogući. Izložba je zatvorena ponedjeljkom, srijedom, četvrtkom i subotom, pa te dane možemo označiti da nisu mogući. Tržnica ne radi utorkom, četvrtkom, subotom i nedjeljom, pa i te dane možemo izbaciti. Restoran "Kod Ruže" ne radi samo ponedjeljkom, pa taj dan označimo s X.

	Pon	Uto	Sri	Čet	Pet	Sub	Ned
Liječnik						X	X
Muzej	X		X	X		X	
Tržnica		X		X		X	X
"Kod Ruže"	X						
Kemijska čistionica							

Nakon popunjavanja vidimo da je jedini dan kada je bilo moguće posjetiti sve lokacije bio petak. Ako u čistionicu može tek za tjedan dana, to znači da će Petar u petak otići po odjeću.

Problem 4.7. Tri majke imaju ukupno 15 djece od kojih je 9 dječaka. Katja ima tri djevojčice, a Jana ima isto toliko dječaka. Jana ima jedno dijete više od Katje, koja ima četvero djece. Nera ima četiri dječaka više nego djevojčica, a djevojčica ima onoliko koliko Katja ima dječaka. Koliko dječaka imaju Nera i Katja?

Moguće rješenje:

Strategija: Ispisivanje sustavnih listi

Jedine poznate informacije u tekstu su te da imamo 3 majke i 15 djece od kojih je 9 dječaka. Sljedeća tablica to prikazuje:

	Djevojčice	Dječaci	Ukupno
Katja			
Jana			
Nera			
Ukupno		9	15

Tablicu trebamo popuniti koristeći ostale informacije koje su nam poznate. U prvom koraku od ukupnog broja djece oduzmimo broj dječaka da bi dobili koliko je djevojčica, $15 - 9 = 6$, i upišimo u tablicu. Nakon toga upišimo da Katja ima tri djevojčice, a Jana tri dječaka. Iz treće rečenice vidimo da Katja ima četvero djece, a Jana jedno više, znači petero djece, pa upišimo i te podatke u tablicu. U sljedećem koraku, iz do sada upisanih brojeva u tablicu, možemo zaključiti da Nera ima ukupno šestero djece, jer u posljednjem stupcu tablice zbroj prva tri broja mora biti 15. Nadalje, pošto Katja ima ukupno četvero djece, od kojih su tri djevojčice, slijedi da ima jednog dječaka. Jana ima ukupno petero djece, od kojih su tri dječaka, pa slijedi da ima 2 djevojčice. Sada još iskoristimo predzadnju rečenicu iz zadatka koja kaže da Nera ima djevojčica onoliko koliko Katja ima dječaka, to je jedna djevojčica, a dječaka ima četiri više nego djevojčica pa je to $1 + 4 = 5$. Kada to sve upišemo u tablicu imamo sljedeće:

	Djevojčice	Dječaci	Ukupno
Katja	3	1	4
Jana	2	3	5
Nera	1	5	6
Ukupno	6	9	15

Problem 4.8. U sklopu jednog centra za kućne ljubimce postoji grupa ljudi koji dresiraju pse. Jakov je zadužen za dresuru pudlica i njemačkog ovčara, Sandra za mopse i labradore, Kruno za hrvatske ovčare i pudlice, a Gabi za njemačke ovčare i mopse. Ako je pudlice lakše trenirati nego njemačke ovčare, labradore je teže nego mopse, njemačke ovčare lakše nego mopse, a hrvatske ovčare lakše nego pudlice, tko od osoba ima najteži posao?

Moguća rješenja:

Strategija: Metoda eliminacije

Svaki puta kada se problemu pojavi da je psa "lakše trenirati" eliminiramo tog psa kojeg je "lakše trenirat"i. Nastavimo li redom tako na kraju će ostati samo jedan pas kojeg je najteže trenirati.

Strategija: Organizirati informacije

Do rješenja bismo mogli doći ispisivanjem imena svakog psa i pored njega osobe koja ga dresira i to tako da pišemo redom od onih koje je lakše dresirati prema onima koje je teže dresirati.

Korak 1: Pudlice je lakše dresirati nego njemačke ovčare.

Lakše

- Pudlice (Jakov i Kruno)
- Njemački ovčari (Jakov i Gabi)

Teže

Korak 2: Labradore je teže dresirati nego mopse.

Lakše

- Mopsi (Sandra i Gabi)
- Labradori (Sandra)

Teže

Korak 3: Njemačke ovčare je lakše dresirati nego mopse.

Lakše

- Pudlice (Jakov i Kruno)
- Njemački ovčari (Jakov i Gabi)
- Mopsi (Sandra i Gabi)
- Labradori (Sandra)

Teže

Korak 4: Hrvatske ovčare je lakše dresirati nego pudlice.

Lakše

- Hrvatski ovčari (Kruno)
- Pudlice (Jakov i Kruno)
- Njemački ovčari (Jakov i Gabi)
- Mopsi (Sandra i Gabi)
- Labradori (Sandra)

Teže

Korak 5: Kako je lista poredana od lakših prema težima, vidimo da je nateže trenirati labradore, a osoba koja ih dresira je Sandra.

4.2.1 Primjeri iz svakodnevnog života

Aktivnost 4.1 (Poslovanje). Odredite tvrtku koju želite posjedovati te istražite troškove kupnje te tvrtke. Ukoliko su dostupni, istražite koliki su prihodi i rashodi te ukupna dobit koja predstavlja pozitivnu razliku između prihoda i rashoda. Osmislite plan za kupnju i poboljšanje poslovanja. Koji su sve troškovi uključeni? Koji su mogući izvori novca (nepovratna sredstva, ulagači, pozajmice itd.)?

Aktivnost 4.2 (GPS). Kako se nebi izgubili, ljudi su prije koristili znakove u prirodi, zemljopisne karte i slično. Danas je ipak najjednostavniji način da saznate svoju lokaciju GPS (globalni pozicijski sustav). Istražite kako radi GPS. Na koji način uređaj s GPS prijemnikom može prepoznati vašu točnu lokaciju na Zemlji?

5 Učenici u srednjoj školi

Učenici srednje škole se nalaze u drugoj od tri podfaze adolescencije, a to je srednja adolescencija. Ovdje je glavna preokupacija adolescenta da se uklopi među vršnjake, školu i određena društvena okruženja te traženje neovisnosti i odgovornosti. Vidi se očit pomak od obitelji prema svijetu vršnjaka. Sve više su privrženi grupama s istim interesima poput slušanja određene vrste glazbe, uključivanja u određene sportske i društvene aktivnosti, nošenje iste vrste odjeće i slično. Razdoblje usmjerenosti na sebe, koje počinje u ranoj, zadržava se i u srednjoj adolescenciji, iako pomalo počinje opadati i adolecsenti sve više razmišljaju o drugima i o načinima na koji ljudi i događaji međusobno djeluju kako bi stvorili svijet. Polako se odvajaju od roditelja i okreću pozornost najsličnijima sebi, tragaju za osobama s kojima se mogu poistovjetiti pa tako sve veću pozornost daju prijateljima, trenerima, nastavnicima. U ovoj dobi mnogi adolescenti se zaljubljuju i maštaju o vezi, bilo to s osobom iz škole ili nekoj filmskoj ili glazbenoj zvijezdi. Imati djevojku ili momka poprima veliku osobnu i društvenu važnost. Kroz svoje fantazije i sanjarenja također pokušavaju upoznati sebe, stoga je ovo razdoblje često razdoblje velike kreativnosti. Sve kognitivne sposobnosti koje su stekli u ranijoj fazi i dalje se nastavljaju povećavati. Analitičke i argumentacijske vještine se sve više razvijaju, dovodeći do novih i dubljih propitivanja. Postaju sve više svjesni što misle oni oko njih i počinju rješavati sve složenije probleme.

5.1 Matematika za učenike u srednjoj školi

Nakon završene osnovne škole učenici se opredjeljuju za srednju školu, bila to gimnazija, stukovna ili umjetnička škola. Ovisno o školi koju izaberu programi i broj sati matematike se nešto razlikuju. Mi ćemo se bazirati na gimnazijski program. Učenici produbljuju svoje razumijevanje algebre i geometrije. Svladavaju osnovna znanja vezana uz realne brojeve pazeći da razlikuju svojstava prirodnih, cijelih, racionalnih i iracionalnih brojeva. Računske operacije s realnim brojevima svladavaju do razine vještine gdje su uglavnom bazirani na operacije s razlomcima i potencijama. Uče operacije s korijenima i potencijama s racionalnim eksponentima, a računaju također s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima. Znaju obrazložiti potrebu proširivanja skupa relanih brojeva te svladavaju računske operacije s kompleksnim brojevima. Proširuje se znanje i primjenjuje proporcionalnost, postotci, linearne jednadžbe i sustavi jednadžbi, a također se uvode linearne nejednadžbe kao i kvadratne, eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe. Izvode se operacije nad skupovima i rješenja nejednadžbi se prikazuju pomoću intervala. U ovom razdoblju se uvodi trigonomerija te se primjenjuju trigonometrijski omjeri u planimetriji. Proučavaju se polinomi i funkcije, a uz linernu tu se sada spominju kvadratna, logaritamska, eksponencijalna i trigonometrijska funkcija. Funkcije se analiziraju, određuje domena, kodomena, proučavaju svojstva, crta graf te se primjenjuju pri rješavanju problema. Proširuje se znanje iz geometrije. I dalje se proučavaju geometrijski likovi, kao i njihovi opsezi i površine, i geometrijska tijela zajedno s njihovim oplošjem i volumenom. Uz kružnicu, ovdje se učenici upoznaju s elisom, hiperbolom, parabolom, opisuju ih i skiciraju te primjenjuju njihove jednadžbe.

Učenici barataju podacima prikazanim na različite načine, a u završnoj fazi školovanja, 4. razredu srednje škole, proučavaju se i naprednije ideje iz vjerojatnosti i statistike. Također se istražuju nizovi, s naglaskom na artimetički i geometrijski niz, limesi i derivacije koje onda primjenjuju prilikom ispitivanja tijeka funkcije.

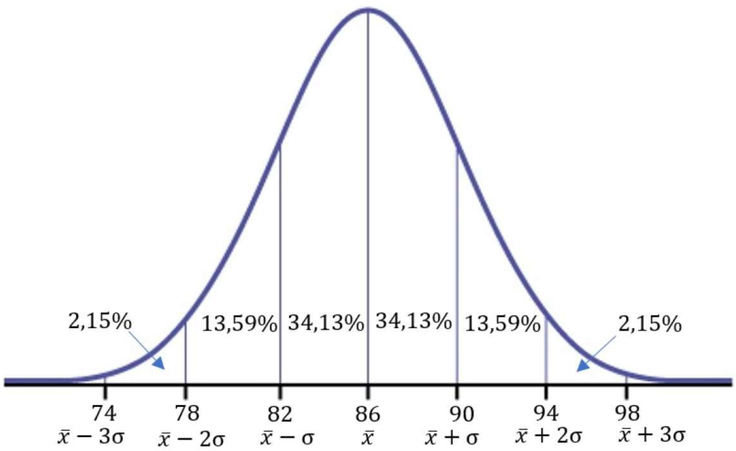
5.2 Problemi za učenike u srednjoj školi

Problem 5.1. Učiteljica je procjenila da će na ispitu iz matematike 3 od 30 učenika postići više od 95 bodova. Rezultati ispita pokazali su da su učenici u prosjeku postigli 86 bodova. Ako je standardna devijacija jednaka 4, je li njezina procjena bila točna?

Moguće rješenje:

Strategija: Organizirati informacije

Rješenje ovog problema zahtijeva razmijevanje normalne distribucije. Prosjek ili artmetička sredina iznosi 86 bodova, $\bar{x} = 86$, i to je vrijednost kojoj je većina podataka bliska, tj. najviše učenika je postiglo broj bodova koji je blizu 86. Važnost standardne devijacije je u tome što nam ona govori u kojem rasponu očekujemo će se kretati broj bodova i ona iznosi 4, $\sigma = 4$. Za dani primjer prikažimo graf funkcije gustoće koji ima oblik zvonolike krivulje.



Slika 4: Graf funkcije gustoće normalne distribucije

Kod ovako distribuiranih podataka unutar intervala $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ nalazi se približno 68% učenika, odnosno njih približno 68% ima broj bodova između 82 i 90. Unutar intervala $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$ nalazi se približno 95% učenika, a unutar intervala $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ nalazi se približno 99% učenika. Ono što nas zanima je koliko učenika je postiglo više od 95 bodova. Na grafu možemo vidjeti da je samo 2.15% učenika postiglo više od 94 boda, što je od ukupno 30 učenika manje od jednog učenika, a to nije moguće. Možemo reći da procjena učiteljice nije bila točna.

Problem 5.2. Ako je vjerojatnost da neće padati kiša jednaka kvadratu vjerojatnosti da će padati kiša, izračunajte vjerojatnost da će padati kiša.

Moguće rješenje:

Strategija: Algebarska metoda

Neka je p vjerojatnost da će padati kiša. Tada je p^2 vjerojatnost da neće padati kiša. Kako u danu može ili padati kiša ili ne padati, to su jedina dva elementarna događaja, a znamo da je zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja jednak 1. Stoga je $p^2+p=1$ tj. $p^2+p-1=0$. Rješavanjem ove kvadratne jednadžbe dobijemo dva rješenja od kojeg uzimamo ono pozitivno, $p=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Približna vrijednost za p je 0.62, što znači da je vjerojatnost da će padati kiša 62%.

Problem 5.3. Prouči sljedeće uzorke pa odgvori:

1. Koje je posljednje slovo u ovom nizu: **A Z C X E V G**?
2. Koja su sljedeća tri broja u ovom nizu: 2 7 4 9 6 11 8?
3. Koji broj nedostaje: 120 ____ 109 102 94?

Moguće rješenje:

Strategija: Pronaći uzorak

1. Napomena: za ovaj zadatak je korištena engleska abeceda.

   Vidimo da su u nizu slova abecede pomješana. Činjenica da su prva dva slova **A** i **Z** može nam dati trag. Treće slovo je **C**, što znači da je slovo **B** preskočeno. Nadalje, preskočeno je slovo **D**, a peto slovo je slovo **E**. Možemo zaključiti da je svako drugo slovo preskočeno na isti način. Svako preskočeno slovo zamjenjeno je nekim drugim slovom i to na način da je prvo preskočeno slovo **Z**, što je i zadnje slovo abecede. Ako čitamo abecedu unatrag, nakon **Z** dolazi **Y**, njega preskačemo i uzimamo slovo **X** koje dolazi na mjesto drugog preskočenog slova. Kada popunjavamo svako drugo preskočeno slovo, popunjavamo ga svakim drugim slovom čitajući abecedu unazad.
   Niz izgleda ovako:
   A Z C X E V G T I R K P M N O L Q J S H U F W D Y B

2. U zadanom nizu možemo uočiti da je svaki drugi broj dobiven dodavanjem broja dva broju koji je ispred njegovog prethodnika. Vidimo da se brojevi $2, 4, 6, 8$ izmjenjuju s brojevima $7, 9, 11$. Sljedeća tri broja u zadanom nizu bit će $13, 10$ i 15.

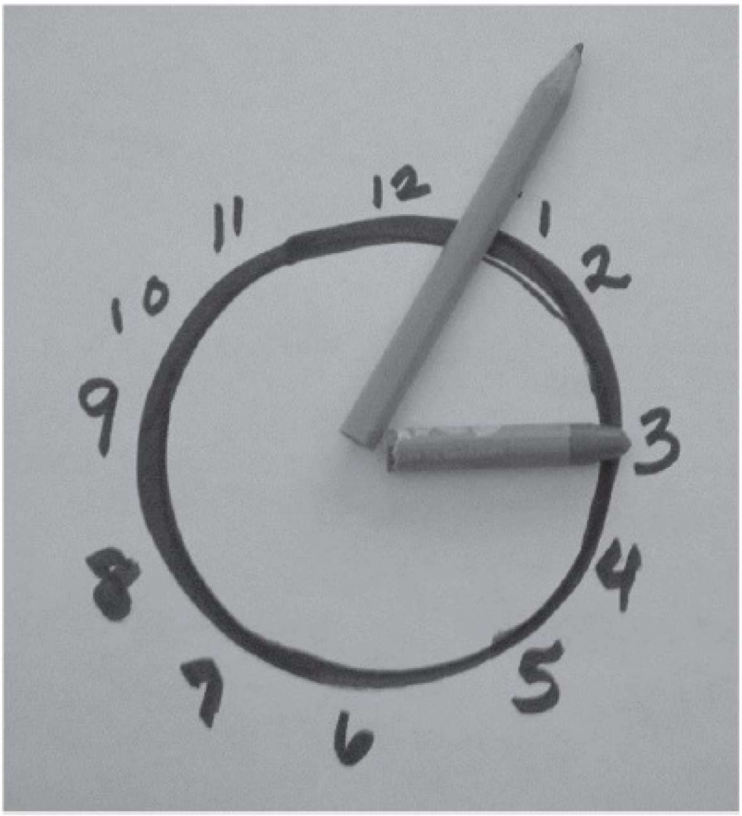
3. U zadanom nizu možemo uočiti da se razlike između susjednih brojeva povećavaju. Ako krenemo od broja 109, moramo mu oduzeti 7 da bi dobili 102. Zatim od 102 moramo oduzeti 8 da bi dobili 94. Po toj logici broj koji nedostaje je 115 jer je on za 5 manji od 120, a 109 je za 6 manji od 115.

Problem 5.4. Učenici su otkrili da sat u učionici radi brže nego što bi trebao, dodajući 6 minuta svakom satu. U 14:00 učenici su namjestili kazaljke na satu i promatrali što se događa. Koje će biti stvarno vrijeme kada taj dan sat bude pokazivao 20:00? Koje vrijeme će prikazivati sat kada stvarno vrijeme taj dan bude 23:00? *Razmislite*: Hoće li sat ikada prikazati točno vrijeme? Ako da, kada? Ako ne, objasnite zašto?

Moguća rješenja:

Strategija: Stvoriti fizičku reprezentaciju

Možemo iskoristiti model sata kako bi na njemu odredili stvarno vrijeme u odnosu na ono koje pokazuje. To može biti neka igračka sata, stari sat koji ne radi, možemo nekom satu izvaditi baterije ili možemo jednostavno pomoću pribora kojeg imamo izraditi sat (Slika 5). Okretanjem kazaljki i računanjem lako možemo odrediti traženo.



Slika 5: Model sata [2]

Strategija: Ispisivanje sustavnih listi

Usporedimo u tablici vrijeme pokvarenog sata, koji dodaje svakom satu 6 minuta, sa stvarnim vremenom.

Vrijeme sata koji žuri	Stvarno vrijeme
14:00	14:00
15:00	14:54
16:00	15:48
17:00	16:42
18:00	17:36
19:00	18:30
20:00	19:24

Iz tablice vidimo da kada sat prikazuje 20:00, stvarno vrijeme je 19:24 Na isti način ispisivanjem u tablicu možemo vidjeti da kada je stvarno vrijeme 23:00, sat će prikazivati 23:54.

Problem 5.5. Jedan mobilni operater naplaćuje 200 kuna mjesečno tarfiu koja sadrži neograničen broj minuta za razgovore i sms poruka, a podatkovni promet se naplaćuje 14 lipa po megabajtu. Drugi mobilni operater naplaćuje 400 kuna mjesečno za tarifu koja također sadrži neograničen broj minuta i sms poruka, ali podatkovni promet se naplaćuje 7 lipa po megabajtu. Kojeg operatera biste radije odabrali i zašto? Koliki bi iznos povećanja naknade za podatkovni promet donio odluku o promjeni?

Moguća rješenja:

Strategija: Metoda pokušaja i promašaja

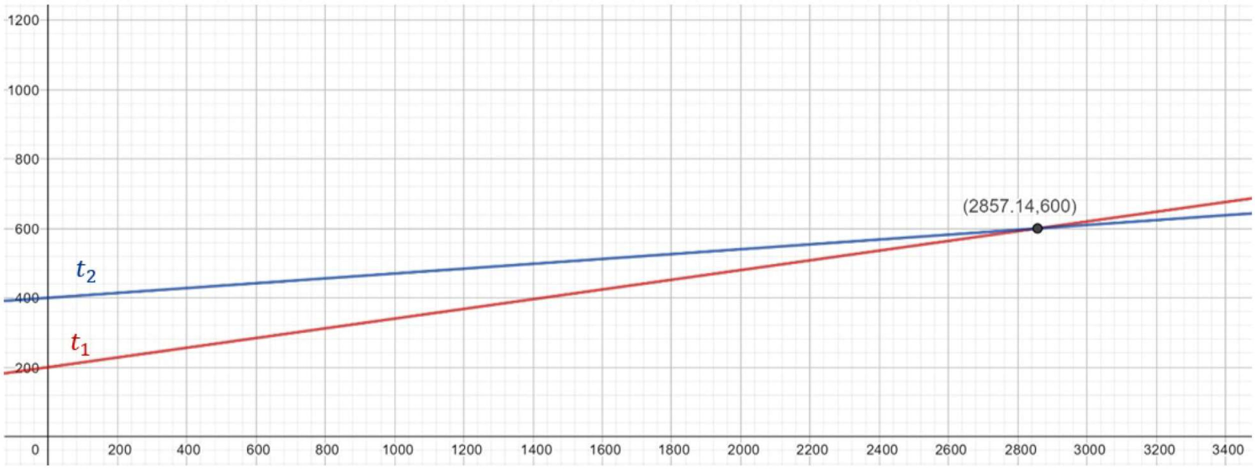
Ako je ovo doista situacija s kojom smo se susreli u životu, problem bi se mogao riješiti metodom pokušaja i promašaja. Možda ova metoda i ne zvuči baš matematički, ali ju često koristimo u svakodnevnom životu, a da toga nismo ni svjesni. U mobitelu kojeg koristimo možemo pogledati informaciju o tome koliko podatkovnog prometa u prosjeku koristimo pa na temelju toga odlučiti kojeg operatera želimo.

Strategija: Alebarska metoda

Prikazivanje ove situacije na grafu može biti od koristi pri odlučivanju kojeg operatera želimo. Prikažimo grafički sljedeće linarne funkcije:

$$\begin{aligned} t_1 &= 200 + 0.14mb \\ t_2 &= 400 + 0.07mb, \end{aligned}$$

gdje t_1 predstavlja mjesečni trošak prilikom odabira prvog operatera, t_2 mjesečni trošak prilikom odabira drugog operatera, a mb količina potrošenog podatkovnog prometa u megabajtima.



Slika 6: Graf funkcija t_1 i t_2

Funkcije t_1 i t_2 se sijeku u točki $(2857.14, 600)$. To znači da za 600 kuna mjesečno kod oba operatera možemo koristiti 2857.14 megabajta podatkovnog prometa i u tom slučaju nam je svejedno kojeg bi operatera izabrali. Iz grafa vidimo da ukoliko mjesečno koristimo manje od 2857.14 megabajta podatkovnog prometa više se isplati prvi mobilni operater (crveni pravac), a ukoliko mjesečno koristimo više od toga onda se više isplati drugi operater (plavi pravac).
Ukoliko bi neki od operatera povećao naknadu za korištenje podatkovnog prometa, točka presjeka funkcija t_1 i t_2 bi bi bila drugačija i opet bi na temelju potrošnje podatkovnog prometa mogli izabrati koji nam se više isplati. Ako bi npr. drugi operater povećao cijenu podatkovnog prometa na 14 lipa ili više, prvi operater bi svakako bio isplativiji jer bi u svim slučajevima potrošnje podatkovnog prometa mjesečni račun bio manji.

Problem 5.6. Kćer je roditeljima poklonila poklon bon od 300 kuna za večeru u lokalnom restoranu. Njih troje su otišli na večeru i svatko od njih je jeo neki od specijaliteta restorana, s tim da kćerka ne jede crveno meso. Na meniju je od specijaliteta bilo: škampi na žaru čija je cijena 136 kuna, piletina u umaku od vrganja po cijeni od 105 kuna i goveđi odrezak u umaku od sira po cijeni od 90 kuna. Koje su moguće narudžbe koje je obitelj mogla naručiti bez da prekorače iznos na poklon kartici?

Moguća rješenja:

Strategija: Ispisivanje sustavnih listi

Napravimo tablicu u kojoj će biti ispisane sve mogućnosti narudžbe. Za svaku od mogućnosti izračunamo koliki bi bio trošak.

Jelo	**Broj narudžbi**									
Škampi	3	0	0	2	2	1	1	0	0	1
Piletina	0	3	0	1	0	0	2	2	1	1
Odrezak	0	0	3	0	1	2	0	1	2	1
Trošak (kn)	408	315	270	377	362	316	346	300	285	331

Obzirom da ne smiju prekoračiti iznos na kartici, iz tablice vidimo da su moguće tri kombinacije koje ne prelaze 300 kuna. No moramo u obzir uzeti da kćerka ne jede crveno meso. Tada slučaj kada su u narudžbi sva tri goveđa odreska ne može biti rješenje. Preostaju dvije moguće kombinacije narudžbe, a to su dvije piletine i jedan odrezak te jedna piletina i dva odreska.

Strategija: Identificirati podprobleme

Odredimo jela ili kombinacije jela koje bi mogle biti problematične, tj. kombinacije jela koje nisu dopuštene da bi ostali unutar budžeta od 300 kn. Očigledno je da sva tri člana obitelji ne mogu odabrati škampe na žaru jer bi račun iznosio 408 kn. Štoviše, možemo zaključiti da bi svaka narudžba koja uključuje škampe bila izvan bužeta. Narudžba od tri piletine u umaku od vrganja, 315 kn, bi također premašila bužet. Narudžbu od sva tri odreska također možemo izbaciti jer znamo da kćerka ne jede crveno meso. Jedine mogućnosti koje preostaju su kombinacije piletine i odreska.

Strategija: Odglumiti

Tri osobe mogu preuzeti uloge roditelja i kćerke. Neka biraju obroke tako da ukupni iznos ne prelazi 300 kuna. Mogu odglumiti više puta kako bi vidjeli na koliko različitih načina se može naručiti. Ako je narudžba preskupa, isključiti ju i pokušati ponovno.

5.2.1 Primjeri iz svakodnevnog života

U ovoj dobi se matematika što više treba povezati sa stvarnim životom. Primjene u znanosti i financijama su dobri primjeri za tinejdžere da istraže koliko se matematika koristi u njihovom svijetu.

Aktivnost 5.1 (Tržište dionica). Zamislite da imate određenu količinu novca. Pročitajte trenutne trendove i novosti na burzi. Na temelju vrijednosti i kretanja dionica tijekom zadnje dvije godine odaberite dionice u koje želite investirati vaš novac. Proučavajte što se događa s dionicama nakon kupovine, kolika je zarada ili gubitak nakon određenog vremena, koji su izvori bili najpouzdaniji?

Aktivnost 5.2 (Fraktali). Istražite što su to fraktali. Proučite kako nastaje "snježna pahuljica", tj. Knochova krivulja nad jednakostraničnim trokutom. Što možete reći o površini i opsegu "snježne pahuljice"? Napravite vlastiti fraktal koristeći papir ili neki računalni program.

Aktivnost 5.3 (Porez). Istražite porezne zakone. Na internetskim stranicama Ministarstva financija izaberite i ispunite neki od poreznih obrazaca. Proučite kako na porez utječe ako ste samac, u braku ili ako imate djecu?

Aktivnost 5.4 (Loto). Loto 6/45 je igra na sreću u kojoj je cilj pogoditi kojih šest brojeva će biti izvučeno iz grupe brojeva od 1 do 45. Proučite koliko kombinacija je moguće uplatiti? Istražite vjerojatnost dobitka za uplaćen određen broj kombinacija. Ako je cijena jedne kombinacije 3 kune, koliko biste novaca trebali uplatiti ako želite biti sigurni da će biti izvučeni baš vaših 6 brojeva?

Aktivnost 5.5 (Osiguranje). Odaberite marku i model automobila kojeg želite osigurati. Istražite cijene obaveznog osiguranja za odabrani automobil kod različitih osiguravajućih društva. Kako možete ostvariti popuste na osiguranje? Izaberite najoptimalnije osiguranje za vaše potrebe. Osim automobilskog osiguranja, postoji mnogo drugih vrsta osiguranja koje bi mogli istražiti (zdravstveno osiguranje, životno osiguranje, osiguranje imovine, putno osiguranje ...).

Aktivnost 5.6 (Upravljanje vremenom). Ljudi se često žale kako nemaju dovoljno vremena za određene aktivnosti ili događaje. Svaki tjedan ima 168 sati. Ispišite u tablicu što radite svaki sat u trajanju od jednog tjedna. Kategorizirajte aktivnosti poput spavanja (uključujući popodnevni odmor), jedenja (svi obroci uključujući međuobroke), učenja, treninga, itd. Napravite kružni dijagram, ili kako ga popularno nazivamo "pitu", kako biste prikazali koliko vam vremena odlazi na koje aktivnosti. Analizirajte kako provodite svoje vrijeme i želite li nešto u tome promijeniti. Želite li dodati svojim aktivnostima nešto poput meditacije, čitanja, trčanja, provođenja vremena s voljenim osobama i slično? Napravite plan kako biste to mogli ostvariti.

Aktivnost 5.7 (Veliki planovi). Razmislite o nekom većem pothvatu kojeg biste željeli napraviti u budućnosti. To može biti nešto poput kupovine automobila ili broda, izgradnje bazena, renovacije stana, daleko putovanje i slično. Prije nego što napravite bilo kakvo istraživanje probajte predvidjeti koliki će biti trošak i koliko će vam vremena trebati da biste ostvarili svoju želju. Nakon toga istražite i usporedite sa svojim predviđanjima. Razmislite o tome jesu li troškovi realni za vašu sitaciju i koliko bi vam vremena trebalo da uštedite dovoljno novaca.

Literatura

[1] L. E. Berk , *Psihologija cjeloživotnog razvoja*, Naklada Slap, Jastrebarsko, 2008.

[2] T. Germain-Williams, *Teaching Children to Love Problem Solving, A Reference from Birth to Adulthood*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2017.

[3] Z. Kurnik, *Načelo problemnosti*, Matematika i škola, **14** (2002), 148–152.

[4] Z. Kurnik, *Problemska nastava*, Matematika i škola, **15** (2002), 196–202.

[5] K. Lacković-Grgin, *Psihologija adolescencije*, Naklada Slap, Jastrebarsko, 2006.

[6] I. Paponja, *Metode rješavanja problemskih zadataka*, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, Diplomski rad, 2016.

[7] V. Rudan, *Normalni adolescentni razvoj*, Medix-specijalizirani medicinski dvomjesečnik, **52** (2004), 36–39.

[8] M. Sedlaček, *Strategija rješavanja problema prema Georgeu Polyau*, Učiteljski fakultet, Odsjek za učiteljske studije Petrinja, Sveučilište u Zagrebu, Diplomski rad, 2018.

[9] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html`

[10] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Okvir Nacionalnog kurikuluma, Prijedlog nakon javne rasprave* `https://mzo.gov.hr/UserDocsImages//dokumenti/Obrazovanje/NacionalniKurikulum/NacionalniKurikulumi//Okvir\%20nacionalnoga\%20kurikuluma.pdf`

Sažetak

Problemski zadaci sastavani su dio matematike i pojavljuju se s ciljem poboljšanja nastave i matematičkog obrazovanja učenika. Kako bi se ukazala važnost stjecanja vještine rješavanja problema, rad započinje upoznavanjem s odgojno-obrazovnim ciljevima učenja i podučavanja predmeta matematike te matematičkim procesima koji su sastavni dio Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije. U drugom poglavlju upoznajemo se s osnovnim pojmovima koji se vežu uz problemsku nastavu, a to su problem, problemska situacija i načelo problemnosti. Navedena su četiri koraka za rješavanje problemskih zadataka koje je opisao poznati matematičar George Polya, nakon čega slijedi popis strategija za rješavanje problema. Neke od tih strategija korištene su u rješavanju problemskih zadataka koji su ovdje podijeljeni u ovisnosti o školskoj dobi na zadatke za učenike viših razreda osnovne škole i zadatke za učenike srednje škole. Kako se učenici u tom periodu života nalaze u fazi koju nazivamo adolescencija, opisane su promjene koje im se tada događaju, s naglaskom na kognitivni razvoj koji im omogućava uspješnije rješavanje problemskih zadataka. Za svaku školsku dob na početku poglavlja ukratko se upoznajemo sa sadržajima iz matematike s kojima se učenici susreću. Nakon toga slijede primjeri zadataka za koje su dana moguća rješenja primjenom neke od strategija, jedne ili više. Za kraj, učenicima za istraživanje, navedeni su zanimljivi primjeri iz svakodnevnog života.

Ključne riječi: problem, problemski zadaci, strategije, adolescencija

Title and summary

Problem solving at different school levels

Problem solving is an integral part of mathematics and is being used with the aim of improving the teaching and mathematical education of students. In order to demonstrate the importance of gaining problem solving skills, the thesis begins by introducing the educational goals of learning and teaching mathematics and the mathematical processes that are an integral part of the Mathematics Curriculum for elementary schools and high schools. In the second chapter we get acquainted with the basic concepts that relate to problem solving teaching, which are the problem, problem situation and problem solving principle. Listed here are the four steps for problem solving described by the famous mathematician George Polya, followed by a list of problem-solving strategies. Some of these strategies have been used in problem solving that is divided here with dependence on the school grade on problems for the students of higher grades of elementary school and problems for high school students. As students in this period of life are in their adolescence, the changes that occur to them are being described, with an emphasis on cognitive development that enables them to successfully use problem solving. For each school level, at the beginning of the chapter, we briefly familiarize ourselves with the math content that students encounter. This is followed by examples of tasks for which possible solutions are given by applying one or more strategies. Finally, everyday life examples are given to the students for research purposes.

Key words: problem, problem solving, strategies, adolescence

Životopis

Rođena sam 16. lipnja 1989. godine u Osijeku. Svoje obrazovanje započela sam u Osnovnoj školi "Retfala" u Osijeku. Nakon završene osnovne škole upisala sam se u III. gimnaziju Osijek. Po završetku srednjoškolskog obrazovanja, 2008. upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku.