Generalizirani Cox - Ross - Rubinsteinov model

Maglić, Matej

Master's thesis / Diplomski rad

2019

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:880976

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Matej Maglić

Generalizirani Cox-Ross-Rubinsteinov model

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Matej Maglić

Generalizirani Cox-Ross-Rubinsteinov model

Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2019.

Sadržaj

Uvod

Teorija vrednovanja cijena opcija postaje jedan od najmoćnijih alata u ekonomiji i financijama. Možemo ju shvatiti kao disciplinu koja okuplja vještine matematičkog modeliranja i ekonomske interpretacije stvarnog tržišta. Proslavljena Black-Scholes-Mertonova formula ne samo da je vodila do Nobelove nagrade, već je u potpunosti redefinirala financijsku industriju. Njezin sestrinski model, binomni model vrednovanja opcija, također je privukao veliku pozornost, kako zbog određivanja cijena opcija tako i zbog njegove sposobnosti da jednostavnom matematikom ilustrira suštinske ideje iza teorije cijena opcija.

Podrijetlo binomnog modela pomalo je nejasno. U tadašnje vrijeme, matematička pozadina Black-Scholes-Mertonovog pristupa mogla se činiti previše akademskom ili čak nespretnom. To je motiviralo razne ekonomiste da traže jednostavniji okvir modeliranja koji će i dalje čuvati ekonomski relevantna svojstva Black-Scholes-Mertonovog modela, ali pod uvjetom poznavanja pozadinske teorije. Navodi se da je oko 1975. američki ekonomist William F. Sharpe, kasniji dobitnik Nobelove nagrade za ekonomiju, predložio Marku Rubinsteinu kako bi vrednovanje opcija trebalo biti izvedivo pod pretpostavkom da se temeljna cijena dionica može promijeniti samo u jedan od dva moguća ishoda. Imajući ovo u vidu, bilo je očito da treba uvesti takav model i provjeriti da su ekonomska svojstva Black-Scholes-Mertonovog pristupa sačuvana. Sharpe je zamisao potom razvio u prvom izdanju svog udžbenika. Najpoznatiji i najčešće citirani model je onaj kojeg su dali Cox, Ross i Rubinstein (1979.), ali gotovo istovremeno, Rendleman i Bartter isti model predstavljaju na malo drugačiji način. Ovo se smatra početkom razvoja binomnog modela.

Cilj ovog rada je opisati binomni model, tj. klasu binomnih modela, pokazati kako se u njima određuju cijene europskih opcija, sintetizirati različite pristupe i istražiti pretpostavke pojedine parametrizacije. U prvom dijelu navodimo osnovne ekonomske i matematičke pojmove koji služe za uspostavljanje notacije i terminologije. U drugom poglavlju proučavamo princip određivanja cijena financijskih imovina u općenitom modelu u diskretnom vremenu. Zatim, detaljno izučavamo binomni model i vrednovanje opcija na njemu. Treći dio definira temeljne pojmove modela u neprekidnom vremenu. Možda najzanimljiviji ovdje prikazani rezultat je Hsijev elegantan dokaz, kojim pokazujemo da svaki binomni model konvergira prema Black-Scholes-Mertonovom modelu. Cilj četvrtog poglavlja je sintetizirati različite pristupe i osigurati cjelovit tretman pojedinog modela te odgovoriti na pitanje koliko različitih binomnih modela može postojati i koji su zahtjevi za njihovu ispravnost. Posljednje poglavlje kroz numerički primjer ilustrira temeljnu problematiku i ukazuje na to koliko učinkovito binomni model s različitim modifikacijama vrednuje europske opcije.

1 Financijska motivacija i osnovni pojmovi

U ovome poglavlju upoznat ćemo se sa financijskim tržištem, promotriti problematiku trgovanja na njemu te objasniti potrebu uvođenja opcija. Pored toga, definirat ćemo osnovne ekonomske pojmove i uvesti matematičke koncepte koji će biti korišteni za modeliranje. Matematički modeli u financijama neophodni su za uspješno upravljanje različitim oblicima financijske imovine jer daju detaljan opis posljedica koje tržišta mogu ostaviti na gospodarstvo.

1.1 Financijsko tržište

Financijska tržišta i institucije iznimno su važni za uspješno funkcioniranje suvremene ekonomije i društva. Tržišta su institucije koje se organiziraju kako bi se pomoću njih rijetki resursi alocirali ovisno o potražnji koja za njima postoji. Riječ je o mjestima gdje se "susreću" kupci i prodavači kako bi razmjenjivali dobra i usluge, a upravo tržišta određuju u kojim količinama će se ta dobra i usluge proizvoditi. Općenito, tri su vrste tržišta: tržište čimbenika (engl. factor market), tržište proizvoda (engl. product market) i financijsko tržište (engl. financial market). Interes ovoga rada je upravo financijsko tržište koje se opisuje kao skup mjesta, osoba, instrumenata, tehnika i tokova koji omogućavaju razmjenu novca, kapitala i deviza. S obzirom na različite funkcije financijskog tržišta, postoji mnoštvo podvrsta kao što su tržište dionica, obveznica, kredita, državnih vrijednosnih papira i slično. Na financijskom tržištu trguje se osnovnim i izvedenim financijskim instrumentima. Osnovni financijski instrumenti dijele se na nerizične i rizične financijske instrumente. Nerizična financijska imovina podrazumijeva novac u domaćoj valuti, što je razumljivo zbog činjenice da novac donosi siguran i unaprijed poznat povrat. S druge strane, rizični financijski instrumenti nose sa sobom određeni rizik i njihove buduće vrijednosti nije moguće u potpunosti točno odrediti. To su primjerice zlato, nafta, novac u stranoj valuti, dionice i obveznice. Za potrebe ovoga rada, dionice su od najvećeg interesa. Dionica se definira kao vlasnički vrijednosni papir koji predstavlja pravo udjela u vlasništvu određenog dioničkog društva. Investitori koji ulažu u rizičnu imovinu očekuju veći povrat pa preuzimaju i veći rizik. Kako bi se ograničio preuzeti rizik na financijska tržišta uvedene su izvedenice ili derivativi (engl. derivatives), tj. izvedeni financijski instrumenti, čija se vrijednost izvodi iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata. U izvedenice pripadaju forward ugovori i opcije od kojih ćemo u radu koristiti europske opcije.

1.2 Cijene i povrati

Promatramo jednu nerizičnu imovinu (novac). Vrijednost nerizične imovine, u oznaci S_t^0, je u bilo kojem trenutku t unaprijed poznata. U $t = 0$ vrijednost je poznata konstanta

$$S_0^0 = C,$$

a u $t > 0$ vrijednost se računa kao

$$S_t^0 = C(1 + r')^t,$$

gdje je r' efektivna kamatna stopa. Ukoliko promatramo financijsko tržište u neprekidnom vremenu vrijedi

$$S_t^0 = Ce^{rt},$$

pri čemu je r nepromjeniva neprekidna kamatna stopa. Lako se uočava veza između efektivne i neprekidne kamatne stope

$$r' = e^r - 1 > -1.$$

Nadalje, pretpostavljamo da promatramo $d \in \mathbb{N}$ rizičnih financijskih imovina (dionica) čije su vrijednosti neizvjesne. U trenutku $t = 0$ vrijednost i-te financijske imovine je poznata konstanta

$$S_0^i, \quad i \in \{1, \ldots, d\},$$

a vrijednost u trenutku $t > 0$ modeliramo nenegativnom slučajnom varijablom

$$S_t^i, \quad i \in \{1, \ldots, d\}.$$

Neka je

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, S_t^2, \ldots, S_t^d)$$

vektor cijena financijske imovine u trenutku t. Riječ je o procesu s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ kojim modeliramo kretanje cijena financijskih imovina kroz promatrano vrijeme. Pored toga, osnovne pretpostavke su i sljedeće

- sve stranke na tržištu imaju jednak pristupi informacijama, odnosno sve informacije već su odražene u cijeni vrijednosnica,
- trgovati se može bez transakcijskih troškova,
- sva financijska imovina je beskonačno djeljiva, likvidna i može se posuđivati bez troškova,
- posjedovanjem imovine ne ostvarujemo dodatni prihod ili trošak.

Očigledno da sve pretpostavke ne vrijede u stvarnom svijetu, zato se neke od ovih pretpostavki mogu oslabiti, ali tada analiza modela postaje značajno složenija. Zbog boljih statističkih svojstava promatramo povrate, a ne cijenu financijske imovine.

Definicija 1.1. *Povrat je relativna promjena cijene financijske imovine u određenom trenutku s obzirom na neki prethodni trenutak, često izražena kao postotak.*

Ako sa S_t^i modeliramo cijenu i-te financijske imovine u trenutku t, onda definiramo dva tipa povrata.

Definicija 1.2. *Jednostavni relativni povrat ili aritmetički povrat od i-te financijske imovine u trenutku t s obzirom na njenu vrijednost u $(t-1)$ definira se kao postotna promjena njezine cijene, tj.*

$$R_t^i := \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i}, \quad i \in \{0, 1, \ldots, d\}, t \in \{1, \ldots, T\}.$$

Uočimo da je relativni povrat na nerizičnu imovinu jednak efektivnoj kamatnoj stopi,

$$R_t^0 = \frac{S_t^0 - S_{t-1}^0}{S_{t-1}^0} = \frac{(1+r')^t - (1+r')^{t-1}}{(1+r')^{t-1}} = \frac{(1+r')^{t-1}((1+r')-1)}{(1+r')^{t-1}} = r'.$$

Definicija 1.3. *Log-povrat u trenutku t s obzirom na vrijednost financijske imovine u trenutku $(t-1)$ definira se kao*

$$r_t^i := \ln(1+R_t^i) = \ln\left(\frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}\right), \quad i \in \{0,1,\dots,d\}, t \in \{1,\dots,T\}.$$

Za nerizičnu imovinu jasno je da

$$\ln\left(\frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}\right) = \ln\left(\frac{e^{rt}}{e^{r(t-1)}}\right) = \ln e^r = r,$$

odnosno da je log-povrat upravo intenzitet kamate. Pri malim promjenama cijena, primjenom Taylorovog razvoja logaritamske funkcije dobivamo

$$\ln\left(\frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}\right) \approx \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i}.$$

Drugim riječima, relativni povrati i log-povrati su približno jednaki i to je činjenica koja će biti od koristi u ostatku rada.

2 Martingalni pristup vrednovanju i binomni model

Ovo poglavlje započinje kratkim pregledom temeljnih pojmova koji služe za uspostavljanje notacije i terminologije. Nakon toga proučavamo princip određivanja cijena financijskih imovina u općenitom modelu u diskretnom vremenu. U konačnici, istražujemo binomni model i razmatramo kako se u njemu određuju cijene opcija.

2.1 Osnovne definicije

Navedeni pojmovi, definicije i tvrdnje bez dokaza mogu se u cjelosti naći u [3], [9], [14], [16] i [20].

Definicija 2.1. *Neka je Ω neprazan skup elementarnih događaja. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω jest σ-algebra skupova na Ω ako zadovoljava sljedeća svojstva*

i) $\emptyset \in \mathcal{F}$,

ii) *ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je $A^c \in \mathcal{F}$,*

iii) *ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, onda $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj.*

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}.$$

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se izmjeriv prostor.

Definicija 2.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, Funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ naziva se vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeće*

i) $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$,

ii) $P(\Omega) = 1$,

iii) *ako je dana prebrojiva familija $(A_i, i \in I) \subseteq \mathcal{F}, I \subseteq \mathbb{N}$, skupova koji su disjunktni $(A_i \cap A_j, \forall i \neq j)$, onda vrijedi*

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Tada skup Ω zovemo prostor elementarnih događaja, a uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor.

Definicija 2.3. *Neka su P i P^* dvije vjerojatnosti na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Kažemo da su P i P^* ekivalentne ako za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$P(A) = 0 \iff P^*(A) = 0.$$

Pišemo $P \approx P^*$.

Drugim riječima, vjerojatnosti P i P^* su ekvivalentne ako se podudaraju na događajima vjerojatnosti nula.

Definicija 2.4. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ *diskretan vjerojatnosni prostor i* X *slučajna varijabla na njemu. Ako red* $\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ *apsolutno konvergira, onda kažemo da slučajna varijabla* X *ima matematičko očekivanje i broj*

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

zovemo matematičko očekivanje slučajne varijable X*.*

Nadalje, prisjetimo se pojma uvjetnog očekivanja s obzirom na σ-algebru i fundamentalnog pojma martingala.

Definicija 2.5. *Neka je* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *koja ima očekivanje te neka je* $\mathcal{G}$ σ*-algebra sadržana u* $\mathcal{F}$*. Uvjetno očekivanje od* X *uz dano* $\mathcal{G}$ *je* $\mathcal{G}$*-izmjeriva slučajna varijabla* $\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}$ *takva da vrijedi*

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]\mathbb{1}_A] = \mathrm{E}[X\mathbb{1}_A], \forall A \in \mathcal{G}.$$

Uvjetno očekivanje postoji i jedinstveno je gotovo sigurno. Pored toga, može se pokazati da je uvjetno očekivanje najbolja aproksimacija u srednje kvadratnom smislu slučajne varijable X ukoliko su nam poznate informacije sadržane u σ-algebri $\mathcal{G}$. Dokazi ovih tvrdnji dostupni su u [21].

Teorem 2.1. *Neka je* X *slučajna varijabla takva da je* $\mathrm{E}[X^2] < \infty$*. Tada vrijedi*

$$\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X|\mathcal{G}])^2] = \min\{\mathrm{E}[(X - Y)^2] : \mathrm{E}[Y^2] < \infty, \sigma(Y) \subset \mathcal{G}\}.$$

Gornja tvrdnja lako se dokazuje uz pomoć osnovnih svojstava uvjetnog očekivanja:

i) Za slučajne varijable X_1, X_2 i konstante $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\mathrm{E}[(c_1X_1 + c_2X_2)|\mathcal{G}] = c_1\,\mathrm{E}[X_1|\mathcal{G}] + c_2\,\mathrm{E}[X_2|\mathcal{G}].$$

ii) $\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]] = \mathrm{E}[X]$.

iii) Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, onda je

$$\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] = X.$$

iv) Ako je slučajna varijabla X nezavisna s $\mathcal{G}$, onda je

$$\mathrm{E}[X|\mathcal{G}] = \mathrm{E}[X].$$

v) Ako je Y omeđena $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla, onda je

$$\mathrm{E}[YX|\mathcal{G}] = Y\,\mathrm{E}[X|\mathcal{G}].$$

vi) Ako je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, onda je

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}[X|\mathcal{G}]|\mathcal{H}] = \mathrm{E}[X|\mathcal{H}].$$

U nastavku definiramo slučajni proces u diskretnom vremenu i vezane pojmove.

Definicija 2.6. *Slučajni proces je familija slučajnih varijabli $(X_t, t \in T)$ na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pri čemu je $T \subseteq \mathbb{R}$. Ako je T diskretan skup, onda govorimo o slučajnom procesu u diskretnom vremenu.*

Definicija 2.7. *Familija $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ σ-algebri na skupu Ω zove se filtracija ako vrijedi da je $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}_0$.*

Drugim riječima, filtracija je svaka rastuća familija σ-algebri na Ω, koje su sve sadržane u σ-algebri $\mathcal{F}$ iz vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Pritom, ako je σ-algebra $\mathcal{F}_n$ generirana slučajnim vektorom $(X_1, X_2, \dots, X_n)$, govorimo o prirodnoj filtraciji slučajnog procesa $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ i interpretiramo ju kao rastući slijed informacija o nekom slučajnom procesu.

Definicija 2.8. *Slučajni proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ je adaptiran na filtaciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ako je za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, X_n izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_n$.*

Definicija 2.9. *Slučajni proces $(H_n, n \in \mathbb{N})$ je predvidiv u odnosu na filtaciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, H_n izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_{n-1}$.*

Preciznije, sve informacije o procesu $(H_n, n \in \mathbb{N})$ u trenutku n sadržane su u σ-algebri $\mathcal{F}_{n-1}$.

Definicija 2.10. *Slučajni proces $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ je martingal u diskretnom vremenu s obzirom na filtraciju $\mathbb{F} = (F_n, n \in \mathbb{N}_0)$ ako su zadovoljeni sljedeći zahtjevi*

i) $\mathrm{E}[|X_n|] < \infty, \forall n \in \mathbb{N}_0$,

ii) $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ *je $\mathbb{F}$-adaptiran,*

iii) $\mathrm{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$ *g.s.*, $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Uočimo da posljednji zahtjev možemo zapisati kao

$$\mathrm{E}[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] = 0,$$

pri čemu $(X_{n+1} - X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ zovemo niz martingalnih razlika.

Definicija 2.11. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor s filtracijom $\mathbb{F} = (F_n, n \in \mathbb{N}_0)$, $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathbb{F}$-martingal i $H = (H_n, n \in \mathbb{N})$ predvidiv proces u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$. Slučajni proces $(Z_n, n \in \mathbb{N}_0)$ definiran s*

$$\begin{aligned} Z_0 &= 0 \\ Z_n &= \sum_{k=1}^{n} H_k (X_k - X_{k-1}), \quad n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

naziva se martingalna transformacija procesa X procesom H.

Pokazuje se da je martingalna transformacija također martingal.

Teorem 2.2. *Ako je $X = (X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathbb{F}$-martingal i $H = (H_n, n \in \mathbb{N})$ predvidiv proces takav da je svaka H_n ograničena slučajna varijabla, onda je martigalna transformacija* (2.1) *martingal.*

Dokaz. Kako je Z_n linearna kombinacija $\mathcal{F}_n$-izmjerivih slučajnih varijabli, ona je i sama $\mathcal{F}_n$-izmjeriva. Zbog činjenice da je H_{n+1} $\mathcal{F}_n$-izmjeriva i svojstva iii) iz definicije martingala vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[(Z_{n+1} - Z_n)|\mathcal{F}_n] &= \mathrm{E}[H_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= H_{n+1}\,\mathrm{E}[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

2.2 Model tržišta u diskretnom vremenu

Pretpostavljamo da se na tržištu trguje u trenutcima $t = 0, 1, \ldots, T$ s jednom nerizičnom financijskom imovinom i d rizičnih financijskih imovina. Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdje je prostor elementarnih događaja $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$ konačan, P vjerojatnost takva da je $P(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$ i σ-algebra $\mathcal{F}$ je partitivni skup od Ω. Zadan je i niz σ-algebri $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_t$ pri čemu $\mathcal{F}_t$ sadrži informacije o stanju svijeta zaključno s trenutkom t. Nadalje, pretpostavljamo da je $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, odnosno da u trenutku $t = 0$ nemamo nikakvu informaciju o mogućem stanju tržišta. Pored toga, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$, tj. da na kraju razdoblja imamo potpunu informaciju. Cijenu i-te financijske imovine u proizvoljnom trenutku $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ označavamo sa S_t^i. Vrijednost nerizične imovine u trenutku $t = 0$ poznata je konstanta $S_0^0 > 0$, a za $t \in \{1, 2, \ldots, T\}$ računa se kao

$$S_t^0 = S_0^0(1 + r')^t,$$

pri čemu je r' efektivna kamatna stopa. Općenito su cijene rizične financijske imovine slučajne, pa pretpostavljamo da su S_t^i slučajne varijable. Prirodno je i pretpostaviti da je navedena slučajna varijabla izmjeriva u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$ jer cijena ovisi samo o događajima koji su se dogodili do trenutka t. Drugim riječima, za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\{S_t^i \leq x\} \in \mathcal{F}_t$. Vektor cijena svih imovina u trenutku t označavamo sa

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d)$$

i tada je $S_t : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ izmjeriv u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$.

Definicija 2.12. *Slučajni proces $S = (S_t, t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ je adaptiran u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ ako je za svaki $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ slučajni vektor S_t izmjeriv u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_t$.*

Općenito možemo pretpostaviti da u trenutku $(t - 1)$ znamo vrijednost nulte financijske imovine u trenutku t, tj. da je S_t^0 izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_{t-1}$. Portfelj u trenutku t označavamo sa

$$\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \ldots, \varphi_t^d).$$

Vektor $(\varphi_t^0, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d)$ govori koliko jedinica pojedine imovine investitor posjeduje u trenutku t. U nastavku objašnjavamo kako se u modelu trguje. U trenutku $t = 1$ možemo rebalansirati portfelj $\varphi_1 = (\varphi_1^0, \varphi_1^1, \dots, \varphi_1^d)$ i zamijeniti ga nekim drugim portfeljom $\varphi_2 = (\varphi_2^0, \varphi_2^1, \dots, \varphi_2^d)$. Taj novonastali portfelj ovisi o cijenama financijskih imovina u trenutku $t = 1$. Kako su cijene slučajne i to $\mathcal{F}_1$-izmjerive, onda će i portfelj φ_2 biti $\mathcal{F}_1$-izmjeriv slučajni vektor u $\mathbb{R}^{d+1}$. Postupak nastavljamo analogno dalje.

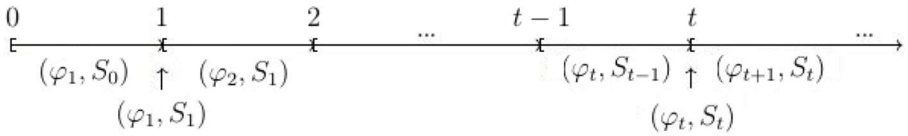
Definicija 2.13. *Slučajni proces $\varphi = (\varphi_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$ je predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$ ako je za svaki $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ slučajni vektor φ_t izmjeriv u odnosu na σ-algebru $\mathcal{F}_{t-1}$, te ako je φ izmjeriv u odnosu na $\mathcal{F}_0$.*

Definicija 2.14. *Slučajni proces $\varphi = (\varphi_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$ s vrijednostima u $\mathbb{R}^{d+1}$ i predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$ zove se strategija trgovanja ili dinamički portfelj.*

Definicija 2.15. *Vrijednost portfelja φ u trenutku t definira se kao*

$$V_t(\varphi) := (\varphi_t, S_t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^i.$$

Primijetimo da je $V_t(\varphi)$ $\mathcal{F}_t$-izmjeriva slučajna varijabla, pa je $(V_t(\varphi), t \in \{0, 1, \dots, T\})$ adaptiran slučajni proces. Cijeli proces φ određuje strategiju trgovanja u trenutcima između 0 i T. Prema definiciji je vrijednost portfelja u trenutku t jednaka vrijednosti nakon što su poznate cijene imovina u trenutku t, a prije rebalansa portfelja. Dakle, investitor odluku o investiranju u portfelj φ_t donosi unaprijed u periodu $[t-1, t)$.



Slika 1: Grafički prikaz strategije trgovanja

Definicija 2.16. *Strategija trgovanja $\varphi = (\varphi_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$ je samofinancirajuća ako $\forall t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ vrijedi*

$$(\varphi_t, S_t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^{d} \varphi_{t+1}^i S_t^i = (\varphi_{t+1}, S_t).$$

U trenutku t poznate su cijene $S_t^0, S_t^1, \dots, S_t^d$ i vrijednost portfelja iznosi (φ_t, S_t). Nakon toga, bira se novi portfelj φ_{t+1}, a njegova vrijednost u trenutku t iznosi (φ_{t+1}, S_t). Prema tome, strategija je samofinancirajuća ako sredstva potrebna za kupovinu novog portfelja dolaze iz vrijednosti starog. Zato se restrukturiranje portfelja vrši s ciljem povećanja vrijednosti naše imovine. Vrijednost samofinancirajućeg portfelja na kraju razdoblja $[t-1, t)$ i na početku razdoblja $[t, t+1)$ su jednake. Dodatno, za sve portfelje pretpostavljamo $\varphi_0 = \varphi_1$.

Vrijednost i-te rizične financijske imovine, kao i vrijednost portfelja potrebno je diskontiranjem svesti na sadašnju vrijednost. Uvodimo oznake

$$\widetilde{S}_t^i := \frac{1}{(1+r')^t} S_t^i,$$

za sve $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ i

$$\widetilde{V}_t(\varphi) := (\varphi_t, \widetilde{S}_t).$$

Očito je tada

$$\widetilde{V}_0(\varphi) = V_0(\varphi) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_0^i S_0^i.$$

Definicija 2.17. *Strategija trgovanja φ je dopustiva ako je samofinancirajuća i vrijedi*

$$V_t(\varphi) \geq 0, \quad \forall t \in \{0, 1, \dots, T\}.$$

Gornja definicija osigurava nenegativnu vrijednost portfelja te mogućnost investitora da u svakom trenutku t podmiri svoje eventualne dugove.

Definicija 2.18. *Neka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor, pri čemu je P objektivna vjerojatnost. Dopustiva strategija φ je arbitraža ako je $V_0(\varphi) = 0$ i $P(V_T(\varphi > 0) > 0$.*

Jednostavno rečeno, arbitraža je dopustiva strategija koja u početku ne vrijedi ništa, nikada ne poprima negativnu vrijednost, a s pozitivnom vjerojatnošću generira zaradu. Dakle, može se intepretirati kao mogućnost donošenja pozitivnog profita i to bez izlaganja riziku gubitka. Arbitraža je zapravo istovremena kupovina i prodaja imovine s namjerom ostvarivanja dobiti koja proističe iz razlike u ostvarenoj cijeni. No, obično je ona posljedica neučinkovitosti tržišta. S obzirom na tehnološki napredak, sve je teže pronaći tržišta s arbitražom pa ima smisla proučavati modele koji ne dopuštaju arbitražu. U tu svrhu, najprije je potrebno definirati vjerojatnost neutralnu na rizik.

Definicija 2.19. *Vjerojatnost P^* na $(\Omega, \mathcal{F})$ je neutralna na rizik ako za sve $i \in \{0, 1, \dots, d\}$ i $t \in \{0, 1, \dots, T-1\}$ vrijedi*

$$\mathrm{E}^*[\widetilde{S}_{t+1}^i | \mathcal{F}_t] = \widetilde{S}_t^i.$$

Drugim riječima, P^* je vjerojatnost neutralna na rizik ako je slučajni proces diskontiranih cijena financijskih imovina $(\widetilde{S}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\}) = ((\widetilde{S}_t^0, \widetilde{S}_t^1, \dots, \widetilde{S}_t^d), t \in \{0, 1, \dots, T\})$ s obzirom na P^*, martingal u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$, tj. ako je

$$\mathrm{E}^*[\widetilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t] = \mathrm{E}^*[(\widetilde{S}_{t+1}^0, \widetilde{S}_{t+1}^1, \dots, \widetilde{S}_{t+1}^d) | \mathcal{F}_t] = (\widetilde{S}_t^0, \widetilde{S}_t^1, \dots, \widetilde{S}_t^d) = \widetilde{S}_t.$$

Napomena 2.1. *Vjerojatnost P^* naziva se i ekvivalentna martingalna mjera.*

Financijsko tržište ne dopušta arbitražu ako niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža. Tu činjenicu nije tako jednostavno provjeriti, zato nepostojanje arbitraže karakteriziramo fundamentalnim teoremom određivanja cijena.

Teorem 2.3. *Model financijskog tržišta u diskretnom vremenu ne dopušta arbitražu ako i samo ako postoji bar jedna ekvivalentna martigalna mjera.*

Dokaz. $\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da na $(\Omega, \mathcal{F})$ postoji ekvivalentna martigalna mjera P^*. Tada je proces diskontiranih cijena

$$(\widetilde{S}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$$

$\mathbb{F}$-martingal u odnosu na P^*. Treba pokazati da nije moguće konstruirati arbitražu. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $\varphi = (\varphi_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$ dopustiva strategija takva da je $V_0(\varphi) = 0$ i $P(V_T(\varphi > 0) > 0$. Uvedimo oznaku

$$\Delta\widetilde{S}_j := \widetilde{S}_j - \widetilde{S}_{j-1}$$

za prirast diskontiranih cijena na $[j-1, j]$. Tada je slučajni proces diskontiranih vrijednosti

$$\widetilde{V}_t(\varphi) = (\varphi_t, \widetilde{S}_t) = \sum_{j=1}^{t} (\varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j) = \widetilde{V}_0(\varphi) + \sum_{j=1}^{t} (\varphi_j, \Delta\widetilde{S}_j)$$

martingalna transformacija martingala $(\widetilde{S}_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$ predvidivim procesom φ, pa i martingal obzirom na P^* jer je Ω konačan. Slijedi

$$\mathrm{E}^*[\widetilde{V}_t(\varphi)] = \mathrm{E}^*[\widetilde{V}_0(\varphi)] = 0,$$

jer je φ po pretpostavci arbitraža. Zbog dopustivosti vrijedi $\widetilde{V}_t(\varphi) \geq 0$, pa je $\widetilde{V}_t(\varphi) = 0$ g.s., tj. vrijedi

$$P^*(\widetilde{V}_t(\varphi) = 0) = 1.$$

Budući da je tada

$$P^*(\widetilde{V}_t(\varphi) > 0) = 0,$$

nije zadovoljen uvjet iz definicije arbitraže. Dakle, dopustiva strategija φ nije arbitraža.
$\boxed{\Rightarrow}$ Dokaz nužnosti zasniva se na teoremu o separaciji te izlazi iz teorijskog okvira ovoga rada. Za dokaz vidi [14, str. 6]. □

Definicija 2.20. *Slučajni zahtjev s dospijećem u T je $\mathcal{F}_T$-izmjeriva slučajna varijabla C na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ takva da za svaki $\omega \in \Omega$ vrijedi*

$$0 \leq C(\omega) < \infty.$$

Slučajni zahtjev C s dospijećem u T zove se izvedenica ili derivativ primarnih imovina s cijenama $S^0, S^1, \dots, S^d$ ako je C funkcija slučajnih vektora $S_1, S_2, \dots, S_T$.

Zapravo, slučajni zahtjev možemo interpretirati kao ugovor koji vlasniku isplaćuje C novčanih jedinica u trenutku $t = T$. Osnovni primjer slučajnog zahtjeva su europske call i put opcije. Europska opcija je varijanta vanilla opcije odnosno ugovora koji vlasniku opcije daje pravo, ali ne i obavezu da proda ili kupi neki financijski instrument do određenog budućeg datuma (vremena dospijeća) po unaprijed dogovorenoj cijeni (cijeni izvršenja).

Definicija 2.21. *Europska call opcija (ECO) je ugovor koji svom vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u unaprijed određenom trenutku T kupi neku financijsku imovinu po unaprijed određenoj cijeni K. U trenutku dospijeća svojem vlasniku vrijedi*

$$C_T^{CALL} = \max(0, S_T - K) = (S_T - K)_+.$$

Definicija 2.22. *Europska put opcija (EPO) je ugovor koji svom vlasniku daje pravo, ali ne i obavezu, da u unaprijed određenom trenutku T proda neku financijsku imovinu po unaprijed određenoj cijeni K. U trenutku dospijeća svojem vlasniku vrijedi*

$$C_T^{PUT} = \max(0, K - S_T) = (K - S_T)_+.$$

Definicija 2.23. *Slučajni zahtjev C je dostižan ako postoji dopustiva strategija φ takva da je $V_T(\varphi) = C$. Kažemo da strategija φ replicira C.*

Definicija 2.24. *Model financijskog tržišta bez arbitraže je potpun ako je na njemu svaki slučajan zahtjev dostižan.*

Za razliku od zahtjeva na nepostojanje arbitraže, zahtjev za potpunost tržišta često nema ekonomsko opravdanje. Sljedeći teorem predstavlja osnovni rezultat o potpunosti tržišta.

Teorem 2.4. *Model financijskog tržišta bez arbitraže je potpun ako i samo ako postoji jedinstvena ekvivalentna martigalna mjera.*

Dokaz. Za dokaz teorema vidi [20, str. 52, Teorem 2.27]. □

Pretpostavimo da promatramo potpuno tržište bez arbitraže i neka je P^* jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Neka je C proizvoljan slučajan zahtjev i φ dopustiva strategija koja ga replicira. Niz diskontiranih vrijednosti portfelja

$$(\widetilde{V}_t(\varphi), t \in \{0, 1, \dots, T\})$$

je martingal u odnosu na P^*, pa slijedi

$$V_0(\varphi) = \widetilde{V}_0(\varphi) = \mathrm{E}^*[\widetilde{V}_T(\varphi)] = \mathrm{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\right] = \frac{1}{(1+r')^T}\,\mathrm{E}^*[C].$$

Općenitije,

$$\widetilde{V}_t(\varphi) = \mathrm{E}^*[\widetilde{V}_T(\varphi)|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\middle|\,\mathcal{F}_t\right],$$

odakle je

$$V_t(\varphi) = S_t^0\,\mathrm{E}^*\left[\frac{C}{S_T^0}\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{(1+r')^{(T-t)}}\,\mathrm{E}^*[C|\mathcal{F}_t]$$

za sve $t \in \{0, 1, \dots, T\}$. Dakle, u trenutku t je vrijednost $V_t(\varphi)$ dopustive strategije φ koja replicira C potpuno određena s C. Prirodno je $V_t(\varphi)$ zvati cijenom slučajnog zahtjeva u trenutku t. To je bogatstvo potrebno u trenutku t za repliciranje zahtjeva C slijedeći strategiju φ. Specijalno, na potpunom tržištu za svaki slučajan zahtjev C njegova nearbitražna cijena u trenutku $t = 0$ je

$$C_0 = V_0(\varphi) = \frac{1}{(1+r')^T}\,\mathrm{E}^*[C]. \tag{2.2}$$

Ako bi u suprotnom netko ponudio zahtjev za manje ili ga bio spreman kupiti za više od C_0, lako bismo konstruirali arbitražu. Pretpostavimo da investitor u trenutku $t = 0$ proda slučajni zahtjev C za cijenu C_0 te dobiveni iznos uloži u replicirajući portfelj φ. Budući da je φ samofinancirajući, investitor može slijediti φ bez dodatnog ulaganja. Dakle, u svakom daljnjem vremenskom trenutku t rebalans dinamičkog portfelja φ je besplatan. U trenutku T, vrijednost portfelja jednaka je $V_T(\varphi)$. Međutim, $V_T(\varphi) = C$, što znači da je iznos $V_T(\varphi)$ upravo dovoljan za pokriće obveze dospijele po slučajnom zahtjevu C. Vidimo da i u situaciji u kojoj se slučajnim zahtjevom u trenutku t trguje za iznos različit od $V_t(\varphi)$ postoji mogućnost ostvarivanja povrata većeg od r bez rizika. Dakle, cijena slučajnog zahtjeva u trenutku t jednaka je vrijednosti portfelja koji replicira taj slučajni zahtjev u trenutku t. Stoga, cijenu slučajnog zahtjeva C u trenutku t računamo kao

$$C_t = \frac{1}{(1+r')^{(T-t)}}\,\mathrm{E}^*[C|\mathcal{F}_t], \quad t \in \{0, 1, \ldots, T\}.$$

U konačnici, zaključujemo da za računanje cijene slučajnog zahtjeva, odnosno opcije, moramo znati samo ekvivalentnu martingalnu mjeru. Objektivna vjerojatnost potpuno je irelevantna za računanje cijena opcija.

2.3 Binomni model

U nastavku ćemo pokazati kako teorija iz prethodnog potpoglavlja izgleda u konkretnom modelu, binomnom modelu s n perioda. Definirat ćemo vjerojatnosni prostor, konstruirati na njemu vjerojatnost neutralnu na rizik i pokazati kako pomoću nje određujemo cijenu europske call opcije. Uočimo da smo do sada promatrali vremenske trenutke $0, 1, 2, \ldots, T$, ali veličina svakog perioda općenito može biti bilo koji pozitivan broj manji od 1. Stoga uvodimo oznaku za duljinu vremenskog perioda

$$\Delta t := \frac{T}{n}$$

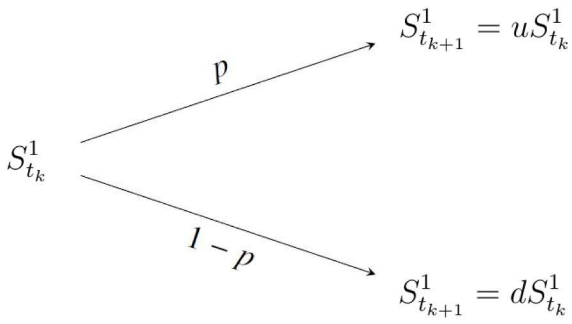
gdje je n broj perioda, a T vrijeme dospijeća. Zato u binomnom modelu s n perioda pretpostavljamo da se imovinom može trgovati u trenucima $t_k := k\Delta t$ za $k = 0, 1, \ldots, n$. Fiksirali smo vrijeme dospijeća T i pretpostavljamo da na tržištu postoji nerizična imovina čija je vrijednost u vremenskim trenutcima $t \in \{t_k, k = 0, 1, \ldots, n\}$ poznata i ima fiksni povrat r između dvaju uzastopnih trenutaka, tj.

$$S_t^0 = e^{rt},$$

gdje je r nepromjenjiva neprekidna kamatna stopa. Nadalje, pretpostavljamo da na financijskom tržištu postoji samo jedna rizična imovina čija je vrijednost u trenutku $t = 0$ poznata konstanta, u oznaci S_0^1, dok njena vrijednost između dva uzastopna trenutka ili poraste za faktor u ili padne za faktor d. Matematičkim jezikom, cijena rizične financijske imovine modelirana je slučajnom varijablom

$$S_{t_{k+1}}^1 = \begin{cases} uS_{t_k}^1 \\ dS_{t_k}^1. \end{cases}$$

Ovu promjenu kretanja reprezentiramo sljedećim dijagramom.



Slika 2: Promjena vrijednosti rizične financijske imovine u jednom periodu

Konstruirajući vjerojatnosni prostor uočavamo da se u svakom trenutku t slučajnost očituje samo u tome je li faktor promjene cijene jednak u ili d. Definiramo $\Omega' := \{u, d\}$ i neka je P' vjerojatnost na $(\Omega', \mathcal{P}(\Omega'))$ dana s

$$P'(\{u\}) = p, \quad P'(\{d\}) = 1 - p, \quad p \in (0, 1).$$

Za prostor elementarnih događaja Ω uzima se Kartezijev produkt skupa Ω' sa samim sobom. Budući da tržište promatramo kroz n perioda jednake duljine, za prostor elementarnih događaja vrijedi

$$\Omega := (\Omega')^n = \{u, d\}^n.$$

Dakle, Ω se sastoji od n-torki $(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ gdje je za $k = 1, \ldots, n$ ili $\omega_k = u$ ili $\omega_k = d$. Za vjerojatnost P na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ uzimamo produktnu vjerojatnost, tj.

$$P = (P')^n.$$

Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ definiramo niz slučajnih varijabli $(X_{t_k}, k = 1, 2, \ldots, n)$ na sljedeći način

$$X_{t_k}(\omega) = \omega_k, \quad \omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n).$$

Uočimo da su to nezavisne slučajne varijable s distribucijom

$$X_{t_k} = \begin{pmatrix} u & d \\ 1 - p & p \end{pmatrix}, \quad p \in (0, 1).$$

Neka je $S_0 > 0$ zadano. Niz slučajnih varijabli $S^1 = (S^1_{t_k}, k = 0, 1, \ldots, n)$ definiran s

$$\begin{aligned} S^1_0 &:= S_0 \\ S^1_{t_k} &:= S^1_{t_{k-1}} X_{t_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

interpretiramo kao niz cijena dionice. Cijena se u periodu između dva uzastopna trenutka t_{k-1} i t_k promjeni za faktor u ili d, a to modeliramo slučajnom varijablom X_{t_k}.

Preostaje definirati filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_{t_k}, k = 0, 1, \ldots, n)$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. S obzirom na prethodno poglavlje i ovdje pretpostavljamo $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Dostupna informacija u trenutku t_k su cijene zaključno s trenutkom t_k. Dakle, imamo informaciju o $S^1_{t_0}, S^1_{t_1}, \ldots, S^1_{t_k}$. Uočimo da je ta informacija jednaka informaciji koju možemo dobiti pomoću $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}$ (iz faktora promjena možemo rekonstruirati cijene dionice i obratno). Informaciju o $S^1_{t_1}, S^1_{t_2}, \ldots, S^1_{t_k}$ opisujemo σ-algebrom

$$\mathcal{F}_{t_k} := \sigma(S^1_{t_1}, S^1_{t_2}, \ldots, S^1_{t_k}).$$

To je najmanja σ-algebra na Ω takva da su sve slučajne varijable $S^1_{t_1}, S^1_{t_2}, \ldots, S^1_{t_k}$ izmjerive. Zbog jednake informacije sadržane u nizu $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k}$, vrijedi $\mathcal{F}_{t_k} = \sigma(X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_k})$. Diskontirane cijene rizične financijske imovine definirane su kao i u prethodnom poglavlju,

$$\widetilde{S}^1_{t_k} := \frac{S^1_{t_k}}{S^0_{t_k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

U nastavku proučavamo pod kojim uvjetima binomni model ne dopušta arbitražu i kada je on potpun te tražimo ekvivalentnu martingalnu mjeru.

Lema 2.1. *Neka je P^* vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna P.*

i) *Niz diskontiranih cijena $(\widetilde{S}^1_{t_k}, k = 0, 1, \ldots, n)$ je martingal u odnosu na P^* ako i samo ako vrijedi*

$$\mathrm{E}^*[X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

ii) *Ako je zadovoljen uvjet* i), *onda je $d < e^{r\Delta t} < u$ i slučajne varijable $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ su nezavisne i jednako distribuirane u odnosu na P^*.*

Dokaz.

i) Kako je $\widetilde{S}^1_{t_{k-1}}$ izmjeriva u odnosu na $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$, za sve $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi

$$\mathrm{E}^*[\widetilde{S}^1_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = \widetilde{S}^1_{t_{k-1}}.$$

Iz gornje tvrdnje dobiva se sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned} \mathrm{E}^*\left[\frac{\widetilde{S}^1_{t_k}}{\widetilde{S}^1_{t_{k-1}}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] = 1 &\iff \mathrm{E}^*\left[\frac{\frac{S^1_{t_k}}{S^0_{t_k}}}{\frac{S^1_{t_{k-1}}}{S^0_{t_{k-1}}}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] = 1 \\ &\iff e^{-r\Delta t}\,\mathrm{E}^*\left[\frac{S^1_{t_k}}{S^1_{t_{k-1}}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}\right] = 1 \\ &\iff \mathrm{E}^*[X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}. \end{aligned}$$

ii) Po pretpostavci je P^* ekvivalentna s P, pa kako je $X_{t_k} \in \{u, d\}$, slijedi $P^*(X_{t_k} = u) > 0$ i $P^*(X_{t_k} = d) > 0$. Pretpostavimo da ne vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$. Tada je ili $e^{r\Delta t} \leq d < u$ ili $d < u \leq e^{r\Delta t}$. U prvom slučaju je onda $P^*(X_{t_k} \geq e^{r\Delta t}) = 1$ i $P^*(X_{t_k} > e^{r\Delta t}) > 0$ otkud slijedi $\mathrm{E}^*[X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] > e^{r\Delta t}$ što je u kontradikciji s $\mathrm{E}^*[X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}$.

Slučaj $d < u \leq e^{r\Delta t}$ dokazuje se analogno. Pokažimo sada da su slučajne varijable $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ nezavisne i jednako distribuirane. Najprije, računamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
e^{r\Delta t} &= \mathrm{E}^*[X_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] \\
&= \mathrm{E}^*[\mathbb{1}_{\{X_{t_k}=d\}}X_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] + \mathrm{E}^*[\mathbb{1}_{\{X_{t_k}=u\}}X_{t_k}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] \\
&= d\,\mathrm{E}^*[\mathbb{1}_{\{X_{t_k}=d\}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] + u\,\mathrm{E}^*[\mathbb{1}_{\{X_{t_k}=u\}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}] \\
&= dP^*(X_{t_k} = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) + uP^*(X_{t_k} = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}}).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Kako je

$$P^*(X_{t_k} = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) + P^*(X_{t_k} = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1,$$

rješavanjem (2.3) dobivamo

$$P^*(X_{t_k} = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} \tag{2.4}$$

i

$$P^*(X_{t_k} = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d}. \tag{2.5}$$

Definirajmo sada

$$p^* := \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Zbog $d < e^{r\Delta t} < u$ slijedi $0 < p^* < 1$. Uz ovako definirani p^*, (2.4) postaje

$$P^*(X_{t_k} = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = p^*,$$

a (2.5) postaje

$$P^*(X_{t_k} = d|\mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1 - p^*.$$

Iz gornje dvije jednakosti prvo čitamo da je

$$\begin{aligned}
P^*(X_{t_k} = u) &= \mathrm{E}^*[\mathbb{1}_{\{X_{t_k}=u\}}] = \mathrm{E}^*\left[\mathrm{E}^*[\mathbb{1}_{\{X_{t_k}=u\}}|\mathcal{F}_{t_{k-1}}]\right] \\
&= \mathrm{E}^*\left[P^*(X_{t_k} = u|\mathcal{F}_{t_{k-1}})\right] \\
&= \mathrm{E}^*[p^*] = p^*,
\end{aligned}$$

i slično

$$P^*(X_{t_k} = d) = 1 - p^*.$$

Upravo to dokazuje jednaku distribuiranost varijabli $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$. Osim toga, vidimo da je X_{t_k} nezavisna od σ-algebre $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$, za $k = 1, 2, \ldots, n$. Budući je $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ generirana s $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_{k-1}}$, slijedi da je X_{t_k} nezavisna s $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_{k-1}}, k = 1, 2, \ldots, n$. Prema tome, slučajne varijable $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ su i nezavisne.

□

Lema 2.2. *Ako tržište ne dopušta arbitražu, onda je $d < e^{r\Delta t} < u$.*

Dokaz. Ako tržište ne dopušta arbitražu, onda postoji ekvivalentna martingalna mjera P^*. Primjenom *Leme 2.1* slijedi tvrdnja. $\square$

Gornja lema ima jednostavnu ekonomsku interpretaciju. Pretpostavimo da ne vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$. Na primjer, neka je $e^{r\Delta t} \leq d < u$. Tada je $S_T^1(\omega) \geq S_0 d^n \geq S_0 e^{rT}$ za sve $\omega \in \Omega$, te postoji bar jedan ω' za koji je $S_T^1(\omega') > S_0 e^{rT}$. Ako posudimo iz banke S_0 i uložimo to u jednu dionicu, u trenutku T ne možemo imati manje od $S_0 e^{rT}$ koliko smo dužni banci, a s pozitivnom vjerojatnošću ćemo imati strogo više od tog iznosa.

Teorem 2.5.

i) *Binomni model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $d < e^{r\Delta t} < u$.*

ii) *Ako je $d < e^{r\Delta t} < u$, onda je binomni model potpun.*

Dokaz.

i) Jedan smjer je već dokazana tvrdnja *Leme 2.2.* Pretpostavimo da je $d < e^{r\Delta t} < u$. Kako bismo dokazali da tržište ne dopušta arbitražu konstruiramo ekvivalentnu martingalnu mjeru, tj. definiramo

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Tada je po pretpostavci $0 < p^* < 1$. Neka je P_1^* vjerojatnost na $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1))$ dana s $P_1^*(\{u\}) = p^*$ i neka je $P^* := (P_1^*)^n$. Vjerojatnost P^* ekvivalentna je vjerojatnosti P. Štoviše, slučajne varijable $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ su nezavisne u odnosu na P^*. Nadalje, za sve $k = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi

$$P^*(X_{t_k} = u) = p^*$$

i

$$P^*(X_{t_k} = d) = 1 - p^*.$$

Kako su $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ nezavisne tada je posebno i X_{t_k} nezavisna od $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$, pa slijedi

$$\mathrm{E}^*[X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = \mathrm{E}^*[X_{t_k}] = (1 - p^*)d + p^* u = e^{r\Delta t}.$$

Prema *Lemi 2.1* vrijedi da je $S^1 = (S_{t_k}^1, k = 0, 1, \ldots, n)$ martingal u odnosu na P^*. Dakle, ovako konstruirana vjerojatnost P^* je ekvivalentna martingalna mjera.

ii) Neka su P^* i P' dvije ekvivalente martingalne mjere. Prema *Lemi 2.1* slučajne varijable $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ su tada nezavisne i jednako distribuirane u odnosu na P^* i na P'. Tada vrijedi

$$\mathrm{E}^*[X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = \mathrm{E}'[X_{t_k} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}] = e^{r\Delta t}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

odnosno zbog nezavisnosti

$$\mathrm{E}^*[X_{t_k}] = \mathrm{E}'[X_{t_k}] = e^{r\Delta t}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Označimo $p^* = P^*(X_{t_k} = u)$ i $p' = P'(X_{t_k} = u)$. Iz prethodne jednakosti lako se vidi da p^* i p' zadovoljavaju istu jednadžbu, tj.

$$p^* u + (1 - p^*)d = e^{r\Delta t},$$
$$p' u + (1 - p')d = e^{r\Delta t}.$$

Dakle, za sve $k = 1, 2, \dots, n$ vrijedi

$$P^*(X_{t_k} = u) = P'(X_{t_k} = u)$$

i

$$P^*(X_{t_k} = d) = P'(X_{t_k} = d).$$

Zbog

$$\begin{aligned} P^*(\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\}) &= P^*(X_{t_1} = \omega_1, X_{t_2} = \omega_2, \dots, X_{t_n} = \omega_n) \\ &= P^*(X_{t_1} = \omega_1) \cdot P^*(X_{t_2} = \omega_2) \cdots P^*(X_{t_n} = \omega_n), \end{aligned}$$

i slično

$$\begin{aligned} P'(\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\}) &= P'(X_{t_1} = \omega_1, X_{t_2} = \omega_2, \dots, X_{t_n} = \omega_n) \\ &= P'(X_{t_1} = \omega_1) \cdot P'(X_{t_2} = \omega_2) \cdots P'(X_{t_n} = \omega_n), \end{aligned}$$

slijedi

$$P^*(\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\}) = P'(\{(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)\})$$

za sve $(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n) \in \Omega$. Zato je $P^* = P'$, odnosno ekvivalentna martingalna mjera je jedinstvena pa je tržište potpuno.

□

Neka je sada $d < e^{r\Delta t} < u$ i P^* jedinstvena ekvivalentna martingalna mjera. Tada je za sve $k = 1, 2, \dots, n$

$$P^*(X_{t_k} = u) = p^*, \quad P^*(X_{t_k} = d) = 1 - p^*,$$

gdje je

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Primijetimo da su sve vrijednosti koje cijena dionice u trenutku dospijeća T može poprimiti dane s

$$S_0^1 u^j d^{n-j}, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

gdje je j broj perioda u kojima je cijena dionice porasla, a $(n - j)$ onda broj perioda u kojima je cijena pala. Vjerojatnost jedne putanje cijene koja završava u $S_0^1 u^j d^{n-j}$ jednaka je $p^{*j}(1 - p^*)^{n-j}$, a vjerojatnost da je cijena u dospijeću jednaka $S_0^1 u^j d^{n-j}$ jednaka je zbroju vjerojatnosti svih putanja koje završavaju u $S_0^1 u^j d^{n-j}$. Takvih putanja je $\binom{n}{j}$ (na koliko načina od n perioda možemo izabrati j perioda u kojima se dogodio porast) te sve imaju jednaku vjerojatnost. Dakle, distribucija od S_T^1 dana je sa

$$P^*(S_T^1 = S_0^1 u^j d^{n-j}) = \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j}, \quad j = 0, 1, \ldots, n.$$

Odredimo sada cijenu europske call opcije s vremenom dospijeća T i cijenom izvršenja K.

Propozicija 2.1. *Cijena europske call opcije s vremenom dospijeća T i cijenom izvršenja K u binomnom modelu s n perioda dana je sljedećom formulom*

$$C_0^{CALL} = S_0^1 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \hat{p}^j (1-\hat{p})^{n-j} - Ke^{-rT} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j}, \tag{2.6}$$

pri čemu je

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad \hat{p} = ue^{-r\Delta t} p^*$$

te a najmanji realan broj j takav da je

$$j \ln\left(\frac{u}{d}\right) > \ln\left(\frac{K}{S_0^1 d^n}\right).$$

Dokaz. Europska call opcija s vremenom dospijeća T i cijenom izvršenja K je slučajni zahtjev

$$C_T^{CALL} = \max(S_T^1 - K, 0).$$

Označimo njegovu cijenu u trenutku $t = 0$ sa C_0^{CALL}. Obzirom na rezultat (2.2) ta cijena jednaka je

$$e^{-rT}\,\mathrm{E}^*[C_T^{CALL}].$$

Primjenom *Leme 2.1* lako se dobije

$$C_0^{CALL} = e^{-rT} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j} \max(S_0^1 u^j d^{n-j} - K, 0). \tag{2.7}$$

Uočimo

$$\begin{aligned} S_0^1 u^j d^{n-j} - K > 0 &\iff \left(\frac{u}{d}\right)^j > \frac{K}{S_0^1 d^n} \\ &\iff j \ln\left(\frac{u}{d}\right) > \ln\left(\frac{K}{S_0^1 d^n}\right). \end{aligned}$$

Definiramo sada a kao najmanji cijeli broj j tako da je posljednja nejednakost zadovoljena. Tada je za sve $j < a$, $\max(S_0^1 u^j d^{n-j} - K, 0) = 0$. Nadalje, raspisujemo (2.7)

$$\begin{aligned} C_0^{CALL} &= e^{-rT} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j}(S_0^1 u^j d^{n-j} - K, 0) \\ &= e^{-rT} S_0^1 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j} u^j d^{n-j} - Ke^{-rT} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j} \\ &= S_0^1 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} (ue^{-r\Delta t} p^*)^j (e^{-r\Delta t}(1-p^*)d)^{n-j} - Ke^{-rT} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j}(1-p^*)^{n-j}. \end{aligned}$$

Prema tome, uz oznaku $\hat{p} := ue^{-r\Delta t}p^*$, slijedi

$$C_0^{CALL} = S_0^1 \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \hat{p}^j (1-\hat{p})^{n-j} - Ke^{-rT} \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j}.$$

□

Gore navedena tvrdnja može se pronaći u [17, str. 31]. S obzirom na prethodni rezultat moguće je izvesti eksplicitnu formulu za vrednovanje europske call opcije u bilo kojem vremenskom trenutku $t_k, k = 0, 1, \ldots, n$. Koristeći *Propoziciju 2.1* i call-put paritet, eksplicitno se može dobiti i formula za cijenu europske put opcije. Dakle, za proizvoljan t_k računamo

$$\begin{aligned} C_{t_k}^{CALL} - C_{t_k}^{PUT} &= e^{-r(T-t_k)} \mathrm{E}^*[C_T^{CALL} | \mathcal{F}_{t_k}] - e^{-r(T-t_k)} \mathrm{E}^*[C_T^{PUT} | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= e^{-r(T-t_k)} \mathrm{E}^*[C_T^{CALL} - C_T^{PUT} | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= e^{-r(T-t_k)} \mathrm{E}^*[S_T^1 - K | \mathcal{F}_{t_k}] \\ &= \mathrm{E}^*[e^{-r(T-t_k)} S_T^1 | \mathcal{F}_{t_k}] - Ke^{-r(T-t_k)} \\ &= S_{t_k}^1 - Ke^{-r(T-t_k)}. \end{aligned}$$

Ukratko, u binomnom modelu s n perioda pretpostavljamo da u svakom periodu duljine $\Delta t = \frac{T}{n}$, cijena dionice može ili porasti za faktor u ili pasti za faktor d. Pretpostavljamo da je kamatna stopa tijekom cijelog razdoblja konstantna i iznosi r (uz neprekidno ukamaćivanje). Ako vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$, onda je model bez arbitraže i potpun, a jedinstvena martingalna mjera P^* dana je s

$$P^*(X_t = u) = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}, \quad P^*(X_t = d) = \frac{u - e^{r\Delta t}}{u - d},$$

gdje je X_t faktor za koji se cijena dionice promijeni u periodu koji prethodi trenutku t.

3 Konvergencija binomnog modela

U raznim istraživanjima binomnog modela objavljeni radovi pružali su različite metode njegovog povezivanja s procesom u neprekidnom vremenu. Prije nego što istražimo ove modele, iznosimo osnovne pojmove modela u neprekidnom vremenu koji će biti potrebni za nastavak rada.

3.1 Osnovni koncepti modela u neprekidnom vremenu

Godine 1973. Black i Scholes, te Merton, u odvojenim radovima proveli su analizu matematičkog modela financijskog tržišta u neprekidnom vremenu. Jedan od osnovnih rezultata bio je i određivanje cijene europske call opcije, a model i matematička analiza zasnovani su na stohastičkim diferencijabilnim jednadžbama i Itôvim integralima (vidi [14, str. 29-61]). Osnovne pretpostavke modela koji danas zovemo Black-Scholes-Mertonov (BSM) model bile su, uz uobičajene osnovne pretpostavke, da trgovati možemo neprekidno u periodu $[0,\infty)$, a trgujemo s dvije imovine

- jednom nerizičnom imovinom (novac) čija se cijena mijenja neprekidno i iznosi e^{rt} u trenutku $t \geq 0$
- jednom rizičnom imovinom (dionica) čija je cijena modelirana geometrijskim Brownovim gibanjem $(S_t, t \geq 0)$,
$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t} \tag{3.1}$$
pri čemu je $(B_t, t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $S_0 > 0$ od njega nezavisna inicijalna vrijednost.

Izraz (3.1) predstavlja eksplicitni oblik rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t, \quad S_0 > 0,$$

koju, radi boljeg razumijevanja i lakše interpretacije parametara, diskretiziramo na sljedeći način:

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \alpha dt + \sigma(B_{t+dt} - B_t).$$

Brownovo gibanje $(B_t, t \geq 0)$ je slučajni proces sa stacionarnim prirastima, zato član $(B_{t+dt} - B_t)$ u gornjoj jednadžbi ima normalnu distribuciju $\mathcal{N}(0, dt)$.

Promotrimo sljedeću situaciju. Neka je u $t \in [0,T]$ vrijednost portfelja X_t, pri čemu u portfelju imamo D_t dionica jedinične cijene S_t. Nerizični dio portfelja tada košta

$$X_t - S_t \cdot D_t.$$

Promjena vrijednosti portfelja na $[t, t+dt)$ opisana je s dX_t i posljedica je promjene vrijednosti rizičnog dijela

$$D_t \cdot (S_{t+dt} - S_t) = D_t \cdot dS_t$$

i zarađene kamate na nerizični dio

$$r(X_t - S_t \cdot D_t)dt.$$

Tada je

$$\begin{aligned}
dX_t &= D_t dS_t + r(X_t - S_t D_t)dt \\
&= D_t\left(\alpha S_t dt + \sigma S_t dB_t\right) + r(X_t - S_t D_t)dt \\
&= rX_t dt + D_t(\alpha - r)S_t dt + \sigma D_t S_t dB_t.
\end{aligned}$$

Kao i prije, $r > 0$ označava nepromjenivu neprekidnu kamatnu stopu, konstantu $\alpha > 0$ zovemo srednja stopa povrata, a konstantu $\sigma > 0$ volatilnost. Razliku $(\alpha - r)$ zovemo premija na rizik i riječ je o dodatnom prinosu koji investitor očekuje zbog ulaganja u rizičnu imovinu. Zato očekujemo da je $\alpha > r$.

Rezultati dani u nastavku su iz Black-Scholes-Mertonovog modela. Započinjemo s pretpostavkom da je log-povrat normalno distribuiran s očekivanjem μ i varijancom σ^2. S obzirom da je $\ln\left(\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right) = \ln(S_{t+dt}) - \ln(S_t)$, kao model za cijenu dionice na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu predlaže se stohastički proces oblika

$$d\ln(S_t) = \mu dt + \sigma dB_t,$$

gdje su μ i σ^2 godišnji očekivani prinos i varijanca dani s

$$\mathrm{E}[d\ln(S_t)] = \mu dt, \quad \mathrm{Var}(d\ln(S_t)) = \sigma^2 dt,$$

a dB_t promjena Brownovog gibanja u kratkom vremenskom periodu. Razmotrimo sada relativne povrate, $\frac{dS_t}{S_t}$. Ako definiramo $G_t := \ln(S_t)$, onda je $S_t = e^{G_t}$. Derivacije prvog i drugog reda su redom

$$\frac{\delta S_t}{\delta G_t} = e^{G_t} \quad \text{i} \quad \frac{\delta^2 S_t}{\delta^2 G_t} = e^{G_t}.$$

Primijenimo li Itôvu formulu na S_t dobivamo

$$dS_t = \frac{\delta S_t}{\delta G_t} dG_t + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 S_t}{\delta^2 G_t} dG_t^2.$$

Uočimo da ako je $dG_t = \mu dt + \sigma dB_t$, onda je $dG_t^2 = \sigma^2 dt$. Koristeći te rezultate lako se dobije

$$\frac{dS_t}{S_t} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) dt + \sigma dB_t.$$

Definiramo α kao očekivanu vrijednost relativnih povrata tako da vrijedi

$$\alpha = \mu + \frac{\sigma^2}{2}.$$

U ovim oznakama je

$$\mathrm{E}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = \alpha dt \quad \text{i} \quad \mathrm{Var}\left(\frac{dS_t}{S_t}\right) = \sigma^2 dt.$$

Model jasno ne pravi razliku između volatilnosti relativnih povrata i volatilnosti log-povrata, za koju se pretpostavlja da je egzogena i konstantna. Ako bismo i dalje pretpostavljali da na tržištu nema arbitraže, nužno bi bilo $\alpha = r$.

Teorem 3.1. *Nearbitražna cijena europske call opcije s vremenom dospijeća T i cijenom izvršenja K u trenutku t dana je sa*

$$C_t^{CALL} = S_t^1 \Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2), \tag{3.2}$$

gdje je

$$d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\left(\frac{S_t^1}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right)$$

i

$$d_2 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(\ln\left(\frac{S_t^1}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right),$$

a $\Phi(\cdot)$ funkcija distribucije standardne normalne distribucije:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz.$$

Dokaz. Za dokaz vidi [20, str. 131-135]. □

Formula (3.2) zajedno sa izrazima za konstante d_1 i d_2 predstavlja slavnu Black-Scholes-Mertonovu (BSM) formulu za cijenu europske call opcije, za što su u konačnici Scholes i Merton dobili i Nobelovu nagradu. Više o njihovim doprinosima i povijesnom tijeku modela može se pročitati u [15].

3.2 Konvergencija binomnog modela procesu u neprekidnom vremenu

Najprije analiziramo promjenu vrijednosti rizične financijske imovine u jednom periodu koju ćemo opisati slučajnom varijablom

$$X_{t+1} := \frac{S_{t+1}}{S_t}.$$

U tom slučaju je očekivana vrijednost

$$\mathrm{E}[X_{t+1}] = pu + (1-p)d,$$

a varijanca

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_{t+1}) &= \mathrm{E}[X_{t+1}^2] - (\mathrm{E}[X_{t+1}])^2 \\
&= pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 \\
&= pu^2 + d^2 - pd^2 - p^2u^2 - 2p(1-p)ud - (1-p)^2d^2 \\
&= pu^2 - p^2u^2 + pd^2 - p^2d^2 - 2pud + 2p^2ud \\
&= p(1-p)(u-d)^2.
\end{aligned}$$

Sada nastavljamo s analizom log-povrata, odnosno definiramo

$$Y_{t+1} := \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right).$$

Kako bismo pronašli očekivanu vrijednost i varijancu slučajne varijable Y_{t+1}, radimo sljedeće korake. Znamo da su moguće cijene dionica u binomnom stablu u jednom koraku

$$S_{t+1} = \begin{cases} uS_t \\ dS_t. \end{cases}$$

Budući da je riječ o cijenama rizične imovine, možemo podijeliti obje strane sa S_t i uzeti prirodni logaritam. U tom slučaju je

$$Y_{t+1} = \ln\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \begin{cases} \ln u \\ \ln d. \end{cases}$$

Konačno, zaključujemo da je

$$\mathrm{E}[Y_{t+1}] = p\ln u + (1-p)\ln d$$

i

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(Y_{t+1}) &= \mathrm{E}[Y_{t+1}^2] - (\mathrm{E}[Y_{t+1}])^2 \\
&= p(\ln u)^2 + (1-p)d^2 - (p\ln u + (1-p)\ln d)^2 \\
&= p(\ln u)^2 + (\ln d)^2 - p(\ln d)^2 - p^2(\ln u)^2 - 2p(1-p)\ln u \ln d - (1-p)^2(\ln d)^2 \\
&= p(\ln u)^2 - p^2(\ln u)^2 + p(\ln d)^2 - p^2(\ln d)^2 - 2p\ln u\ln d + 2p^2\ln u\ln d \\
&= p(1-p)\left((\ln u)^2 - 2\ln u\ln d + (\ln d^2)\right) \\
&= p(1-p)(\ln u - \ln d)^2.
\end{aligned}$$

Sada imamo sustav jednadžbi i za normalnu i za log-normalnu slučajnu varijablu koje imaju nepoznate binomne parametre p, u i d. Većina radova o binomnom modelu nastoji se prilagoditi neprekidnom vremenu pronalaženjem tih parametara zahtjevajući da očekivanje i varijanca binomnog modela budu isti kao i kod neprekidnog modela. S obzirom na to, kako promatramo n perioda možemo izračunati očekivanu vrijednost i varijancu za svaki korak duljine $\Delta t = \frac{T}{n}$ u binomnom stablu. Drugim riječima, binomni sustav jednadžbi u diskretnom vremenu za

$$X_{t+1} = \frac{S_{i+1}}{S_i}$$

je oblika

$$\begin{cases} pu + (1-p)d = e^{\alpha\Delta t} \\ p(1-p)(u-d)^2 = e^{2\alpha\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right), \end{cases} \tag{3.3}$$

(vidi [13, str. 35, Korolar 3.4.1]) dok za

$$Y_{t+1} = \ln\left(\frac{S_{i+1}}{S_i}\right)$$

ima oblik

$$\begin{cases} p\ln u + (1-p)\ln d = \mu\Delta t \\ p(1-p)\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 = \sigma^2\Delta t. \end{cases} \tag{3.4}$$

Za pronalaženje vjerojatnosti neutralne na rizik potrebna je mala transformacija. Prinos α postavlja se na nepromjenjivu neprekidnu kamatnu stopu r, dok se očekivanje log-povrata μ postavlja na

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Prisjetimo se da Black-Scholes-Mertonov model zahtijeva poznavanje cijene dionice, cijene izvršenja, neprekidne kamatne stope, vremena dospijeća i volatilnosti, ali ne i očekivanog povrata. Kao što je vidljivo iz osnovne teorije cijena opcija, nearbitražna i ispravna cijena opcije izvedena je iz znanja o volatilnosti uz uvjet da je očekivani povrat jednak neprekidnoj kamatnoj stopi. Slijedi da ispravna specifikacija binomnog modela treba zahtijevati samo da su ta dva uvjeta ispunjena. Neka je p^* vjerojatnost neutralna na rizik. Tada je ispravno pisati

$$p^* u + (1 - p^*) d = e^{r\Delta t}, \tag{3.5}$$

odakle se jednostavno dobije

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Iako prethodna jednadžba predstavlja nužan uvjet za ne dopuštanje arbitraže, postoje binomni modeli koji je ne zadovoljavaju, primjerice Rendleman-Bartterov model o kojem ćemo nešto više reći u nastavku rada. Valja imati na umu da je ovaj uvjet ekvivalentan činjenici da je očekivanje binomnog relativnog povrata, a ne log-povrata, jednak nepromjenjivoj neprekidnoj kamatnoj stopi. Drugim riječima, točna vrijednost p^* treba se dobiti određivanjem jednadžbe (3.5), a ne jednadžbe

$$p^* \ln u + (1 - p^*) \ln d = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \Delta t,$$

koja se dobije za log-povrate primjenom vjerojatnosti neutralne na rizik. Začudo, mnogi binomni modeli u literaturi koriste ovo nepravilnu specifikaciju. Uvjet bez arbitraže je nužan, ali nije dovoljan uvjet da bi binomni model dao prinos ispravnoj cijeni opcije. Model se mora kalibrirati na ispravnu volatilnost, a taj uvjet ispunjen je u jednadžbi

$$p^*(1 - p^*)(u - d)^2 = e^{2r\Delta t} \left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1 \right),$$

odnosno

$$p^*(1 - p^*) \left(\ln \left(\frac{u}{d} \right) \right)^2 = \sigma^2 \Delta t.$$

3.3 Konvergencija binomnih modela Black-Scholes-Mertonovom modelu

Tri najčešće citirane verzije binomnog modela, Cox, Ross i Rubinstein (1979).; Rendleman i Bartter (1979.); i Jarrow i Rudd (1983.), koje ćemo detaljno razmotriti u sljedećem poglavlju, pružaju dokaze kojima njihovi modeli konvergiraju prema BSM modelu kada $n \to \infty$. No, svaki model karakteriziraju definicija vjerojatnosti i formule za faktore u i d, pa su i dokazi zasebni. Hsia (1983.) je pružio dokaz koji pokazuje da se konvergencija može pokazati pod manje restriktivnim pretpostavkama. Za vjerojatnost neutralnu na rizik p^*, Hsijev dokaz pokazuje da binomni model konvergira prema BSM modelu ako $np^* \to \infty$ kad $n \to \infty$. Da bi se ispunio ovaj zahtjev sve što je potrebno je $0 < p^* < 1$. Takav rezultat je iznenađujući jer sugerira da se vjerojatnost neutralna na rizik može postaviti na bilo koju proizvoljnu vrijednost, poput 0.1 ili 0.8. U literaturi neke verzije binomnog modela ograničavaju p^* na 0.5, a gotovo sve verzije modela imaju navedenu mjeru koja konvergira prema 0.5, kao što je i pokazano kasnije. No, Hsijev dokaz pokazuje da će svaka vjerojatnost koja nije 0 ili 1 dovesti do konvergencije.

Teorem 3.2. *Kada broj perioda ide u beskonačnost, formula za vrednovanje europske opcije u binomnom modelu konvergira prema formuli za vrednovanje europske opcije u Black-Scholes-Mertonovom modelu.*

Dokaz. Pokazat ćemo tvrdnju za europsku call opciju, dok za put opciju dokaz ide analogno. Najprije, uočimo da formulu (2.6) možemo napisati u obliku

$$C_0 = S_0\Psi(a; n, \hat{p}) - Ke^{-rT}\Psi(a; n, p^*), \tag{3.6}$$

pri čemu je

$$\Psi(a; n, \hat{p}) := \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} \hat{p}^j (1-\hat{p})^{n-j}$$

i

$$\Psi(a; n, p^*) := \sum_{j=a}^{n} \binom{n}{j} p^{*j} (1-p^*)^{n-j}.$$

Treba pokazati da (3.6) konvergira prema Black-Scholes-Mertonovoj formuli (3.2) za $t = 0$. Drugim riječima, želimo pokazati da $\Psi(a; n, \hat{p})$ i $\Psi(a; n, p^*)$ konvergiraju prema $\Phi(d_1)$ i $\Phi(d_2)$ redom. Kako smo zahtjevali da je

$$S_0 u^j d^{n-j} - K > 0,$$

slijedi da je

$$a > \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - n\ln d}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}.$$

Budući da želimo da je a cijeli broj, pretpostavimo da postoji ε takav da je

$$a = \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - n\ln d}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)} + \varepsilon. \tag{3.7}$$

Želimo znati točan broj koraka prema gore kako bismo mogli odrediti vrijednost opcije, zato zahtjevamo cjelobrojnost. U limesu će ε isčeznuti jer će broj koraka težiti u ∞. Nakon ove pripreme, možemo krenuti sa elegantnim Hsijevim dokazom. Koristimo poznati De Moivre-Laplaceov teorem koji kaže da binomna distribucija konvergira prema normalnoj distribuciji ako $np \to \infty$ kad $n \to \infty$. Drugim riječima, treba pokazati da

$$\Psi(a; n, \hat{p}) \to \int_a^\infty f(j)dj,$$

gdje je f funkcija gustoće normalne distribucije. Dakle, potrebno je provesti postupak standardizacije slučajnog broja promjena cijena za u, kojeg označavamo sa j. To ćemo napraviti tako da definiramo

$$z := \frac{j - \mathrm{E}[j]}{\sigma_j}.$$

Tada vrijedi

$$\Psi(a; n, \hat{p}) \to \int_a^\infty f(j)dj = \int_d^\infty f(z)dz,$$

pri čemu je

$$d := \frac{a - \mathrm{E}[j]}{\sigma_j}.$$

S obzirom na simetričnost normalne distribucije možemo koristiti

$$d = -\frac{a - \mathrm{E}[j]}{\sigma_j}, \tag{3.8}$$

pa vrijedi

$$\Psi(a; n, \hat{p}) \to \int_a^\infty f(j)dj = \int_{-\infty}^d f(z)dz = \Phi(d),$$

a $\Phi(\cdot)$ je funkcija distribucije standardne normalne distribucije. Analogno se pokaže da

$$\Psi(a; n, p^*) \to \int_a^\infty f(j)dj = \int_{-\infty}^d f(z)dz = \Phi(d).$$

Neka S_T označava cijenu dionice u trenutku dospijeća T. Znamo da je tada

$$S_T = S_0 u^j d^{n-j},$$

odnosno

$$\frac{S_T}{S_0} = u^j d^{n-j}.$$

Stoga, log-povrat dionice iznosi

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) &= j \ln u + (n-j)\ln d \\ &= j \ln\left(\frac{u}{d}\right) + n \ln d.\end{aligned}$$

Uzmemo li očekivanje

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \mathrm{E}[j]\ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\ln d$$

slijedi

$$\mathrm{E}[j] = \frac{\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] - n\ln d}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}. \tag{3.9}$$

Iz varijance log-povrata

$$\mathrm{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) = \mathrm{Var}(j)\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2$$

dobivamo

$$\mathrm{Var}(j) = \frac{\mathrm{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)}{\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2}. \tag{3.10}$$

Sada iz (3.7),(3.8),(3.9) i (3.10) slijedi

$$\begin{aligned} d &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] - \varepsilon\ln\left(\frac{u}{d}\right)}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)}} \\ &= \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)}} - \frac{\varepsilon}{\frac{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)}}{\ln\left(\frac{u}{d}\right)}}. \end{aligned}$$

Prema svojstvima binomne distribucije, znamo da je $\mathrm{Var}(j) = nq(1-q)$, gdje je q vjerojatnost uspjeha. Ovime ne uvodimo novu vjerojatnost q, već koristimo općenitu tvrdnju kako bi ilustrirali činjenicu koja se odnosi na bilo koji binomni proces. U našem specijalnom slučaju, q će postati p^* i $\hat{p}$. Stoga,

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right)}} - \frac{1}{\sqrt{q(1-q)}}\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Kada n teži u beskonačnost, posljednji izraz teži u nulu. Binomni proces u diskretnom vremenu konvergira prema log-normalnom procesu u neprekidnom vremenu, za koji je poznato da je

$$Var\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \sigma^2 T. \tag{3.11}$$

Dakle, vrijedi

$$d = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right]}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Ovaj izraz treba biti jednak izrazima d_1 i d_2 definiranim u Black-Scholes-Mertonovoj formuli kada su dane redom vjerojatnosti $\hat{p}$ i p^*. To znači da treba pokazati

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \left(r^2 + \frac{\sigma^2}{2}\right)T$$

u slučaju vjerojatnosti $\hat{p}$, odnosno

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \left(r^2 - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$$

za vjerojatnost p^*. Promatramo prvi slučaj. Iz definicije vjerojatnosti $\hat{p}$

$$\hat{p} = ue^{-r\Delta t}p^* = ue^{-r\Delta t} \cdot \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

izrazimo vrijednost za $e^{r\Delta t}$

$$e^{r\Delta t} = \left[\hat{p}u^{-1} + (1-\hat{p})d^{-1}\right]^{-1}.$$

Pored toga, vrijedi

$$e^{rT} = e^{rn\Delta t} = \left[\hat{p}u^{-1} + (1-\hat{p})d^{-1}\right]^{-n}. \tag{3.12}$$

Nadalje, raspisujemo

$$\frac{S_0}{S_T} = \frac{S_0}{S_1} \cdot \frac{S_1}{S_2} \cdots \frac{S_{n-1}}{S_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{S_{i-1}}{S_i}.$$

Zbog nezavisnosti slučajnih varijabli, očekivanje iznosi

$$\mathrm{E}\left[\frac{S_0}{S_T}\right] = \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n} \frac{S_{i-1}}{S_i}\right] = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[\frac{S_{i-1}}{S_i}\right].$$

Prisjetimo se kako je za $\Psi(a; n, \hat{p})$ potrebna vjerojatnost $\hat{p}$. U tom slučaju je $S_i = uS_{i-1}$ za vjerojatnost $\hat{p}$ i $S_i = dS_{i-1}$ za vjerojatnost $1-\hat{p}$, pa je zato

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_{i-1}}{S_i}\right)\right] = \hat{p}u^{-1} + (1-\hat{p})d^{-1}.$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\frac{S_0}{S_T}\right] &= \prod_{i=1}^{n}(\hat{p}u^{-1} + (1-\hat{p})d^{-1}) \\ &= [\hat{p}u^{-1} + (1-\hat{p})d^{-1}]^n,\end{aligned}$$

odnosno

$$\mathrm{E}\left[\frac{S_0}{S_T}\right]^{-1} = [\hat{p}u^{-1} + (1-\hat{p})d^{-1}]^{-n}. \tag{3.13}$$

Iz (3.12) i (3.13) očito vrijedi

$$\mathrm{E}\left[\frac{S_0}{S_T}\right] = e^{-rT}.$$

Budući da $\frac{S_T}{S_0}$ ima log-normalnu distribuciju i inverz će također imati istu distribuciju. Pored toga, za svaku log-normalnu slučajnu varijablu X vrijedi sljedeća tvrdnja (vidi [2, str. 580])

$$\ln \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[\ln X] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}(\ln X).$$

S obzirom na navedeno, kako je $\frac{S_0}{S_T}$ log-normalna slučajna varijabla računamo

$$\begin{aligned}
-rT &= \ln \mathrm{E}\left[\frac{S_0}{S_T}\right] \\
&= \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_0}{S_T}\right)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left(\ln\left(\frac{S_0}{S_T}\right)\right) \\
&= \mathrm{E}\left[-\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left(-\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) \\
&= -\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right).
\end{aligned}$$

U konačnici, iz ovoga i rezultata (3.11) dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] &= rT + \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) \\
&= rT + \frac{1}{2}\sigma^2 T \\
&= \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T,
\end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati. Promotrimo sada drugi slučaj. Iz definicije vjerojatnosti p^* izvodimo

$$e^{r\Delta t} = p^*u + (1-p^*)d.$$

Analogno kao i u prethodnom slučaju vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\frac{S_T}{S_0}\right] &= \prod_{i=1}^{n} \mathrm{E}\left[\frac{S_i}{S_{i-1}}\right] \\
&= \prod_{i=1}^{n} [p^*u + (1-p^*)d] \\
&= [p^*u + (1-p^*)d]^n \\
&= e^{rT}.
\end{aligned}$$

Logaritmiranjem dobivamo

$$\ln \mathrm{E}\left[\frac{S_T}{S_0}\right] = \mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] + \frac{1}{2}\operatorname{Var}\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) = rT,$$

pa slijedi

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T.$$

Dakle, pokazali smo da $\Psi(a; n, \hat{p})$ konvergira prema $\Phi(d_1)$ i $\Psi(a; n, p^*)$ konvergira prema $\Phi(d_2)$, odnosno da binomni model konvergira prema Black-Scholes-Mertonovom modelu. $\square$

Uočimo da u dokazu nismo pravili nikakve pretpostavke vezane uz vjerojatnost i nismo morali precizirati određene formule za u i d. Ovaj dokaz koristi samo De Moivre-Laplaceov teorem koji kaže da binomna distribucija konvergira prema normalnoj distribuciji ako $np \to \infty$ kad $n \to \infty$. Ovaj uvjet neće biti ispunjen samo ako se vjerojatnost po periodu približava nuli. To očito nije slučaj jer ako se vjerojatnost pomicanja prema gore približi nuli, onda bi se vjerojatnost pomicanja prema dolje približila jedinici. Model bi tada bio besmislen jer bi izgubio komponentu neizvjesnosti.

4 Klasa binomnih modela

Tijekom godina mnoga su istraživanja bila usmjerena na poboljšanje binomnog modela. Model se u literaturi pojavljuje u različitim oblicima, a mi se usredotočujemo na tok literature koji mijenja rešetku ili vrstu stabla kako bi poboljšao točnost i računsku učinkovitost cijena opcije. Svatko tko pokušava razumjeti model može biti zbunjen nizom formula koje imaju za cilj postizanje željenog rezultata - nearbitražne cijene opcije. Upravo te formule imaju mnogo sličnosti, ali i značajne razlike. No, ono što je najvažnije, očito je pitanje koliko različitih kandidata binomnog modela može postojati i koji su zahtjevi za njihovu ispravnost. Cilj ovog poglavlja je sintetizirati različite pristupe i osigurati cjelovit tretman pojedinog modela. Svaki je model predstavljen sa svojim različitim pretpostavkama. Neki od detaljnih izvoda su izostavljeni, ali su dostupni u navedenoj literaturi.

4.1 Cox-Ross-Rubinsteinov pristup

Cox-Ross-Rubinsteinov model, nadalje CRR model, nedvojbeno je osnovna podloga ovoga rada. Pretpostavimo da na jednom periodu cijena dionice može porasti za u s vjerojatnošću p ili pasti za d s vjerojatnošću $(1-p)$. Njihove jednadžbe ([8, str. 234]) pokazuju da je vjerojatnost p oblika

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Promotrimo sada tipičan niz od sedam poteza, recimo u, d, u, u, d, u, d. Tada će konačna cijena dionice biti

$$S_T = u \cdot d \cdot u \cdot u \cdot d \cdot u \cdot d \cdot S_0 = u^4 d^3 S_0,$$

odnosno

$$\frac{S_T}{S_0} = u^4 d^3.$$

Bit će lakše i jednostavnije raditi sa log-procesima, tj. $\ln u$ i $\ln d$. Ova procedura rezultira neprekidno složenim stopama prinosa na dionice tijekom svakog razdoblja. Sada razmatramo slučajnu varijablu koja će u svakom razdoblju biti jednaka $\ln u$ s vjerojatnošću p i $\ln d$ s vjerojatnošću $1-p$. S obzirom na prethodnu raspravu, promatramo

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = 4\ln u + 3\ln d.$$

Općenito, promatramo li n perioda slijedi

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = j\ln u + (n-j)\ln d = j\ln\left(\frac{u}{d}\right) + n\ln d,$$

gdje je j slučajan broj promjena cijene za u koji su se pojavili tijekom n perioda do dospijeća T. Stoga je očekivana vrijednost jednaka

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \ln\left(\frac{u}{d}\right)\mathrm{E}[j] + n\ln d,$$

a varijanca

$$\operatorname{Var}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 \cdot \operatorname{Var}(j).$$

Slučajan broj promjena cijene za u ima binomnu distribuciju s parametrima n i p. Dakle, svaki od n mogućih promjena cijene za u ima vjerojatnost p, zato je

$$\mathrm{E}[j] = np$$

i

$$\operatorname{Var}(j) = np(1-p).$$

Iz svega ovoga slijedi

$$\mathrm{E}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \left(p\ln\left(\frac{u}{d}\right) + \ln d\right) n =: \hat{\mu} n,$$

$$\operatorname{Var}\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = p(1-p)\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 n =: \hat{\sigma}^2 n.$$

Dalje nastavljamo s ispitivanjem kako se njihova formula ponaša kada $n \to \infty$. Ideja je podijeliti izvorni duži vremenski period (dan) na mnogo kraća razdoblja (minutu ili čak manje). Taj postupak zahtijeva, s obzirom na fiksnu dužinu T, sve veći i veći n. Ako bismo sve ostalo držali konstantnim dok puštamo n u beskonačnost, sigurno ne bismo došli do razumnog zaključka jer bi se ili $\hat{\mu} n$ ili $\hat{\sigma}^2 n$ približavali beskonačnosti.

Budući da je T fiksno vrijeme, potrebno je kvalitetno odabrati vrijednosti za u, d i p. Pretpostavimo da vrijednosti $\hat{\mu} n$ i $\hat{\sigma}^2 n$ označimo redom μT i $\sigma^2 T$. Tada želimo odabrati u, d i p tako da za $n \to \infty$ vrijedi

$$\left(p\ln\left(\frac{u}{d}\right) + \ln d\right) n \to \mu T,$$

$$p(1-p)\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 n \to \sigma^2 T.$$

Uočimo da navedene jednadžbe čine sustav od dvije jednadžbe i tri nepoznanice. CRR predlaže rješenje dok implicitno nameće nužni treći uvjet $ud = 1$, pretpostavku koja se često nalazi u literaturi. Dakle, vrijednost imovine koja najprije poraste za faktor u i zatim padne za faktor d bit će ista kao vrijednost imovine koja je najprije pala za d, a zatim porasla za u. Time se osigurava da je stablo rekombinirajuće, tj. dva puta se spajaju ili rekombiniraju. Ovo svojstvo smanjuje broj čvorova na stablu i na taj se način ubrzava izračun vrijednosti opcije. Rješenja gornjeg sustava specificiraju parametre modela

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{4.1}$$

s definiranom objektivnom vjerojatnošću

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t},$$

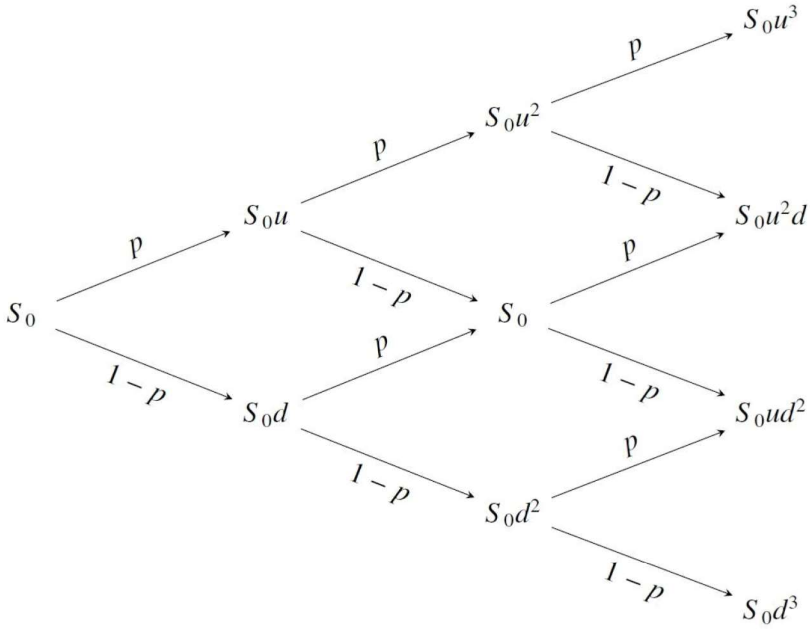
gdje je $\Delta t = \frac{T}{n}$. Uočimo da je $0 < p < 1$. U tom slučaju, za svaki n vrijedi

$$\hat{\mu} n = \mu T$$

i

$$\hat{\sigma}^2 n = \left(\sigma^2 - \mu^2 \frac{T}{n}\right) T.$$

Dakle, kad $n \to \infty$ slijedi $\hat{\sigma}^2 n \to \sigma^2 T$, dok $\hat{\mu} n = \mu T$ vrijedi za svaki n. Promjena cijena rizične imovine prikazuje se rekombinirajućim binomnim stablom zbog uvjeta $ud = 1$.



Slika 3: Dinamika promjene cijena rizične imovine u CRR modelu

Kao što smo ranije spomenuli, za evaluaciju opcija potrebno je odrediti izraz za vjerojatnost neutralnu na rizik p^*. To ćemo napraviti tako da provjerimo dopušta li ovako parametriziran model arbitražu. Najprije, uočimo sljedeće

$$\begin{aligned} d < e^{r\Delta t} < u &\iff 0 < e^{r\Delta t} - d < u - d \\ &\iff 0 < \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} < 1. \end{aligned}$$

Prema *Teoremu 2.5* znamo da je model bez arbitraže ako i samo ako vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$, pa s obzirom na prethodnu raspravu zaključujemo da je za p^* dovoljno uzeti upravo objektivnu vjerojatnost p jer vrijedi $0 < p < 1$. Ove formule su rješenja koja se temelje na sustavu jednadžbi (3.4), pa su tehnički neispravne za konačan n i ne rezultiraju točnom volatilnošću. Međutim, ispostavlja se da su njihova rješenja u graničnom smislu točna jer vjerojatnost neutralna na rizik konvergira prema 0.5. Pored toga, volatilnost log-povrata se uvijek odnosila na volatilnost dobivenu objektivnom vjerojatnošću. Sada je očito da je volatilnost log-povrata izračunata pomoću vjerojatnosti neutralne na rizik također netočna. Problem proizlazi iz jednostavne činjenice da CRR pristup izvodi binomni model određivanjem objektivne vjerojatnost p, a zatim supstituira p^* za p kako bi model bio bez arbitraže. Da je uvjet bez arbitraže nametnut izravno u rješenje, dobivene formule bile bi znatno drugačije, kao što ćemo vidjeti u ostalim modelima.

4.2 Rendleman-Bartterov pristup i Jarrow-Rudd-Turnbullov pristup

Zbog njihovih sličnosti, pristup Rendlemana i Barttera kombinira se s raspravom Jarrowa i Rudda, a kasnije se dodaje i pristup Jarrowa i Turnbulla. Ovi modeli, kao i CRR, također pristupaju binomnom modelu kroz objektivnu vjerojatnost. Rendleman-Bartterov (RB) model temelji se na log-povratima odnosno sustavu jednadžbi 3.4 s tri nepoznanice čijim se rješavanjem dobivaju sljedeće vrijednosti

$$u = e^{\mu\Delta t + \sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

$$d = e^{\mu\Delta t - \sqrt{\frac{1-p}{p}}\sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

S obzirom da je ovdje vjerojatnost p nepoznata, ove formule su preopćenite da bi bile korisne. Pored toga uočimo da je za razliku od CRR modela ovdje $ud = e^{2\mu\Delta t}$, pa stablo prati cijenu i povećava se broj čvorova. Do vjerojatnosti neutralne na rizik dolazimo zamjenom

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2},$$

i postavljanjem objektivne vjerojatnosti na iznos 0.5. Važno je napomenuti da ta vjerojatnost ne jamči odsustvo arbitraže jer je proizvoljno uspostavljena i nije izvedena uvjetovanjem jednadžbe (3.5). Treba ustanoviti jasne razlike između vjerojatnosti bez rizika koja ne dopušta arbitražu i vjerojatnosti neutralne na rizik dobivene rješavanjem bilo kojeg nametnutog uvjeta. Ova posljednja vjerojatnost je označena kao π i naziva se aproksimativna vjerojatnost neutralna na rizik. Dakle, za RB model je $\pi = 0.5$.

Pristup Jarrow-Rudd (JR) modela u osnovi započinje s tim uvjetima. U okviru ovog pristupa promatra se isti sustav, ali uz dodatnu pretpostavku da objektivna vjerojatnost p iznosi 0.5, što dovodi do sljedećeg

$$\begin{cases} (\ln u - \ln d)^2 = 4\sigma^2\Delta t \\ \ln u + \ln d = 4\mu\Delta t. \end{cases}$$

Uvedimo oznake $x := \ln u$ i $y := \ln d$. Kako je $u > d$, tada je $x > y$, pa je

$$\begin{cases} x - y = 2\sigma\sqrt{\Delta t} \\ x + y = 4\mu\Delta t. \end{cases}$$

Rješenja su oblika

$$x = \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}$$

i

$$y = \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t},$$

iz čega lako slijede formule za u i d

$$u = e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}.$$

Za cijene opcija, naravno, koristi se vjerojatnost neutralna na rizik. Kao i dosad, kako bi izrazili p^* koristimo

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Dobivene vrijednosti za u i d nisu u skladu s nepostojanjem arbitraže, jer ih se izvodi iz očekivanja log-povrata. Točnije, oni su skladu s aproksimativnom vjerojatnošću π, ali ne i vjerojatnošću neutralnom na rizik p^*. No, p^* konvergira prema 0.5 pa je u graničnom slučaju ovakav model bez arbitraže. Pored toga što za konačni n ovaj model dopušta arbitražu, postoji još jedan problem. Njihov izbor 0.5 za vjerojatnost doista rezultira točnom volatilnošću za konačni n, ali se ovaj rezultat dobiva samo korištenjem objektivne vjerojatnosti. Vjerojatnost neutralna na rizik u iznosu 0.5 ostvaruje se samo u graničnom slučaju. Dakle, točna volatilnost ne rezultira za konačni n kada se koristi vjerojatnost neutralna na rizik.

Nekoliko godina kasnije, Jarrow i Turnbull izvode isti model, uz određene izmjene. Oni fiksiraju π na njegovoj vrijednosti bez arbitraže i određuju svoje parametre za faktore u i d tako da vrijedi

$$\pi = p^* = \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{\frac{\sigma^2}{2}\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}. \tag{4.2}$$

Kao i CRR, ispravna specifikacija p^* osigurava da njihov model ne dopušta arbitražu. Budući da su njihova rješenja za u i d dobivena određivanjem očekivanja log-povrata, ta rješenja nisu tehnički ispravna za konačni n. Očekivanje je ispunjeno, pa negdje mora postojati greška, koja mora biti u varijanci. Stoga, njihov model ne rezultira točnom varijancom za konačni n koristeći vjerojatnost neutralnu na rizik. Vraća ispravnu varijancu ili kada se koristi objektivna vjerojatnost ili konvergencijom vjerojatnosti neutralne na rizik prema 0.5. Za daljnju upotrebu ovaj model nazivamo RBJRT model i odnosit će se samo na zadnju verziju modela.

4.3 Trigeorgisov pristup

Ovaj se model također temelji na log-povratima, odnosno sustavu (3.4). Kao i za CRR model, koristimo treći uvjet $ud = 1$. Zamjenom $d = u^{-1}$ dobivamo

$$\begin{cases} p\ln u + (1-p)\ln(u^{-1}))^2 = (2p-1)\ln u = \mu\Delta t \\ p(1-p)\ln\left(\dfrac{u}{u^{-1}}\right)^2 = 4p(1-p)(\ln u)^2 = \sigma^2\Delta t. \end{cases}$$

Uvedimo oznake $x := \ln u$ i $y := \ln d$. Kako je $u > d$, tada je $x > y$, pa je

$$\begin{cases} (2p-1)x = \mu\Delta t \\ 4p(1-p)x^2 = \sigma^2\Delta t. \end{cases}$$

Dobivamo sljedeće

$$x = \frac{\mu\Delta t}{2p-1}$$

i

$$p - p^2 = \frac{\sigma^2\Delta t}{4x^2}.$$

Nadalje, računamo

$$p^2 + p + \frac{\sigma^2\Delta t}{4\left(\frac{\mu\Delta t}{2p-1}\right)^2} = 0$$

$$p^2 + p + \frac{\sigma^2(2p-1)^2}{4\mu\Delta t} = 0.$$

Kako bismo eksplicitno izračunali p uvodimo zamjenu $z := \mu^2\Delta t$ pa slijedi

$$zp^2 - zp + \sigma^2p^2 - \sigma^2p + \frac{\sigma^2}{4} = 0,$$

tj. tražimo rješenja kvadratne jednadžbe

$$p^2 - p + \frac{\sigma^2}{4(z+\sigma^2)} = 0.$$

Općenitim rješavanjem kvadratne jednadžbe lako se odrede vrijednosti za stvarnu vjerojatnost

$$p_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\frac{\sigma^2}{4(z+\sigma^2)}}}{2}$$

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\frac{\sqrt{z}}{\sqrt{z+\sigma^2}}.$$

Kako p_2 ne mora biti nenegativna slijedi

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu\Delta t}{\sqrt{\sigma^2\Delta t + \mu^2\Delta t^2}}.$$

Napomena 4.1. *Ovakav izračun postavlja kontroverzno pitanje. Je li moguće dobiti dva rješenja za p koja su oba između 0 i 1? Možda je i moguće. Zato što izraz*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\mu \Delta t}{\sqrt{\sigma^2 \Delta t + \mu^2 \Delta t^2}}$$

mora biti iz intervala $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ *s obzirom da je* $p \in (0,1)$*. Stoga možda možemo reći da je rješenje za stvarnu vjerojatnost oblika*

$$p_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{\mu \Delta t}{\sqrt{\sigma^2 \Delta t + \mu^2 \Delta t^2}}.$$

Dakle, odaberemo li negativni predznak p može biti blizu nule, no ako odaberemo znak plus, onda p može biti blizu jedan, što smo i očekivali.

Za izračun x-a možemo upotrijebiti formulu varijance log-povrata koja je mnogo prikladnija i pomaže da izbjegnemo kvadratni izračun

$$\begin{aligned} p(\ln u)^2 + (1-p)(\ln d)^2 - (\mu \Delta t)^2 &= \sigma^2 \Delta t \\ p(\ln u)^2 + (1-p)(\ln(u^{-1}))^2 - (\mu \Delta t)^2 &= \sigma^2 \Delta t \\ p(\ln u)^2 + (1-p)(-\ln u)^2 - (\mu \Delta t)^2 &= \sigma^2 \Delta t \\ px^2 + (1-p)(-x)^2 - (\mu \Delta t)^2 &= \sigma^2 \Delta t \\ x^2 - (\mu \Delta t)^2 &= \sigma^2 \Delta t, \end{aligned}$$

pa slijedi

$$x = \sqrt{\sigma^2 \Delta t + (\mu \Delta t)^2}.$$

Dakle, rješenja za objektivnu vjerojatnost su

$$\begin{aligned} u &= e^{\sqrt{\sigma^2 \Delta t + \mu^2 \Delta t^2}}, \\ d &= e^{-\sqrt{\sigma^2 \Delta t + \mu^2 \Delta t^2}}. \end{aligned}$$

Kako bismo izveli izraz za vjerojatnost neutralnu na rizik uvodimo zamjenu

$$\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}.$$

Tada je

$$u = e^{\sqrt{\sigma^2 \Delta t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t^2}}, \quad d = e^{-\sqrt{\sigma^2 \Delta t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t^2}} \tag{4.3}$$

i

$$\pi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \Delta t}{\sqrt{\sigma^2 \Delta t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t^2}}.$$

Naravno, to nije vjerojatnost neutralna na rizik i nije dana u uvjetima nepostojanja arbitraže. Stoga, model dopušta arbitražu za konačan n, iako rezultira točnom volatilnošću. Za $n \to \infty$ vjerojatnost π konvergira prema 0.5, pa i vjerojatnost neutralna na rizik p^* također. Drugim riječima, model ne dopušta arbitražu u graničnom slučaju.

4.4 Chrissov pristup

Kako bi specificirali parametre ovog modela kombiniramo očekivanje povrata i varijancu log-povrata. Dakle, tražimo rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} pu + (1-p)d = e^{\alpha \Delta t} \\ p(1-p)\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 = \sigma^2 \Delta t. \end{cases}$$

Za treću pretpostavku fiksiramo stvarnu vjerojatnost p na 0.5, pa je sustav oblika

$$\begin{cases} u + d = 2e^{\alpha \Delta t} \\ \left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 = 4\sigma^2 \Delta t. \end{cases}$$

Jednostavnom algebrom dobivaju se rješenja

$$u = \frac{2e^{\alpha \Delta t + 2\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1} \tag{4.4}$$

i

$$d = \frac{2e^{\alpha \Delta t}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1}. \tag{4.5}$$

Do vjerojatnosti neutralne na rizik dolazi se zamjenom $\alpha = r$. Budući je Chriss u obzir uzeo očekivanje relativnih povrata, ovakva supstitucija ispravno vraća uvjet bez arbitraže odnosno jednadžbu (3.5). Dakle, za Chrissov model vrijedi $p^* = 0.5$, za svaki odabir n, pa model ne dopušta arbitražu i rezultira točnom volatilnošću za bilo koji broj vremenskih koraka.

4.5 Wilmottov pristup

Razlikujemo dva Wilmottova binomna modela. U prvom pristupu promatramo očekivanje i varijancu povrata uz uvjet $ud = 1$. Tražimo rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} pu + (1-p)d = e^{r\Delta t} \\ p(1-p)(u-d)^2 = e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right). \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe sustava lako se dobije izraz za stvarnu vjerojatnost

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{ue^{r\Delta t} - 1}{u^2 - 1}. \tag{4.6}$$

Uvrštavanjem izraza za p u drugu jednadžbu dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{ue^{r\Delta t} - 1}{u^2 - 1}\left(1 - \frac{ue^{r\Delta t} - 1}{u^2 - 1}\right)\left(\frac{u^2 - 1}{u}\right)^2 &= e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right) \\ \frac{u^2 e^{r\Delta t} - ue^{2r\Delta t} - u + e^{r\Delta t}}{u} &= e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right) \\ u^2 e^{r\Delta t} - ue^{2r\Delta t} - u + e^{r\Delta t} &= ue^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2 \Delta t} - 1\right). \end{aligned}$$

U konačnici, zapravo tražimo rješenja kvadratne jednadžbe

$$u^2\left(e^{r\Delta t}\right) - u\left(e^{\left(2r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t} + 1\right) + e^{r\Delta t} = 0.$$

Prema tome, parametri ovog modela su

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}\left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right)^2 - 4}, \\ d &= \frac{1}{2}\left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(e^{-r\Delta t} + e^{(r+\sigma^2)\Delta t}\right)^2 - 4}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Ovako opisani model u nastavku zovemo WIL1. Kao što možemo vidjeti, vjerojatnost p jednaka je vjerojatnosti neutralnoj na rizik u CRR modelu, ali faktori u i d su različiti. Razlog je u tome što varijanca povrata ima drugačiju vrijednost u usporedbi s CRR modelom jer je od početka model konstruiran na takav način da binomni model konvergira prema geometrijskom Brownovom gibanju. Napomenimo još jedanput, ovakav model ne dopušta arbitražu i p^* konvergira prema 0.5.

Druga verzija modela, koju ćemo radi jednostavnosti zvati WIL2, pretpostavlja da je $p = 0.5$. Dakle, tražimo rješenja za u i d iz sustava

$$\begin{cases} u + d = 2e^{r\Delta t} \\ (u-d)^2 = 4e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right). \end{cases}$$

Slijedi,

$$\begin{aligned} \left(2e^{r\Delta t} - d - d\right)^2 &= 4e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right) \\ 4e^{2r\Delta t} - 8de^{r\Delta t} + 4d^2 &= 4e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right) \\ d^2 - 2e^{r\Delta t}d - e^{2r\Delta t}\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 2\right) &= 0, \end{aligned}$$

pa su rješenja ove kvadratne jednadžbe oblika

$$d_{1,2} = e^{r\Delta t} \pm e^{r\Delta t}\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}.$$

Kako je $u > d$, tada je

$$u = e^{r\Delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right) \tag{4.8}$$

i

$$d = e^{r\Delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right). \tag{4.9}$$

Napomena 4.2. *U ovom modelu vrijedi*

$$ud = e^{2r\Delta t}\left(1^2 - \left(\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right)^2\right) = e^{2r\Delta t}\left(2 - e^{\sigma^2\Delta t}\right).$$

Drugim riječima, izračun vrijednosti opcije se usporava jer se povećava broj čvorova stabla.

Kao i u prethodnom modelu, ovdje je također objektivna vjerojatnost p jednaka vjerojatnosti neutralnoj na rizik p^*, pa model ne dopušta arbitražu jer je jednadžba (3.5) zadovoljena.

4.6 Avellaneda-Laurenceov pristup

Proučit ćemo još jedan dodatni model koji se čini jedinstven, ali zapravo nije. Avellaneda i Laurence (AL model) imaju znatno drugačiji pristup u izvođenju vjerojatnosti p i faktora u i d. Razmatramo log-povrate i vjerojatnost neutralnu na rizik definiramo kao u jednadžbi (3.5). Uvodimo novu konstantu ρ tako da je

$$\frac{u}{d} = e^{2\rho\sqrt{\Delta t}}.$$

Drugim riječima, tražimo rješenja sustava

$$\begin{cases} p^*(1-p^*)\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 = \sigma^2\Delta t \\ \frac{u}{d} = e^{2\rho\sqrt{\Delta t}}. \end{cases}$$

Uvrštavanjem druge jednadžbe u prvu, lako se dođe do izraza za vjerojatnost

$$p^* = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\frac{\sigma^2}{\rho^2}}\right).$$

Nadalje, prema jednadžbi (3.5) i tvrdnji $d = ue^{-2\rho\sqrt{\Delta t}}$ računamo

$$\begin{aligned} p^*u + (1-p^*)d &= e^{r\Delta t} \\ p^*u + (1-p^*)ue^{-2\rho\sqrt{\Delta t}} &= e^{r\Delta t} \\ p^*ue^{\rho\sqrt{\Delta t}} + (1-p^*)ue^{-\rho\sqrt{\Delta t}} &= e^{r\Delta t}e^{\rho\sqrt{\Delta t}}, \end{aligned}$$

pa su parametri modela

$$u = \frac{e^{r\Delta t+\rho\sqrt{\Delta t}}}{p^*e^{\rho\sqrt{\Delta t}} + (1-p^*)e^{-\rho\sqrt{\Delta t}}}$$

i

$$d = \frac{e^{r\Delta t-\rho\sqrt{\Delta t}}}{p^*e^{\rho\sqrt{\Delta t}} + (1-p^*)e^{-\rho\sqrt{\Delta t}}}.$$

Naravno, oni sadrže nepoznanicu ρ. Uočimo da ako se ρ postavi na σ, onda je $p^* = 0.5$ i vrijedi

$$u = \frac{e^{r\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\cosh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right)}, \quad d = \frac{e^{r\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\cosh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right)}.$$

Ove se formule povremeno pojavljuju u literaturi, primjerice u [5]. Bez obzira na to, model nije jedinstven jer prema

$$\cosh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}\right)$$

slijedi

$$u = \frac{e^{r\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\cosh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right)} = \frac{2e^{r\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{2e^{r\Delta t+2\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1}$$

i

$$d = \frac{e^{r\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{\cosh\left(\sigma\sqrt{\Delta t}\right)} = \frac{2e^{r\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} + e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{2e^{r\Delta t}}{e^{2\sigma\sqrt{\Delta t}} + 1},$$

pa je ovakav model ekvivalent Chrissovom modelu.

4.7 Jabbour-Kramin-Youngov pristup

Jabbour, Kramin i Young u [11] daju pregled nekoliko dobro poznatih binomnih modela i uvode neke nove. Već smo napomenuli, jednadžbe za očekivanje i varijancu povrata ili log-povrata tvore sustav dviju jednadžbi s tri nepoznanice. Za treću pretpostavku potrebno je odrediti rješenja za faktore u i d i/ili vjerojatnost p odnosno p^*, pa predlažu tri pristupa:

i) stablo je rekombinirajuće, tj. zadovoljen je uvjet $ud = 1$ ili ekvivalentno $\ln u = -\ln d$,

ii) stablo prati cijenu, odnosno vrijedi $ud = e^{2r\Delta t}$,

iii) stvarna vjerojatnost p postavlja se na 0.5.

Svoje modele, koje ćemo od sada pa nadalje zvati JKY modeli, klasificiraju u dvije skupine:

i) alternativni binomni modeli za neprekidno vrijeme ili ABMC modeli (ovdje se nazivaju JKYMC modeli),

ii) alternativni binomni modeli za diskretno vrijeme ili ABMD modeli (ovdje se nazivaju JKYMD modeli).

Svaka skupina identificira se specifikacijom očekivanja, varijance i uvjetnim ograničenjima. No, svi JKY modeli imaju isto rješenje za vjerojatnost

$$p = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{m}{\sqrt{4+m^2}}\right], \tag{4.10}$$

pri čemu m ovisi o modelu. U prvoj skupini, koju ćemo nazvati JKYMC modeli, promatramo promjenu cijene rizične imovine opisane relativnim povratom, tj. tražimo rješenja sustava jednadžbi 3.3. Prema prvom pristupu, zadovoljen je uvjet $ud = 1$. Tada je JKYMC1 ekvivalent WIL1 modelu. Drugi model, model JKYMC2, jedinstven je i specificira parametre

$$u = e^{r\Delta t}\left(1 + \frac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right), \tag{4.11}$$

$$d = e^{r\Delta t}\left(1 - \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right), \tag{4.12}$$

pri čemu je p dana s (4.10) i m definiran kao

$$m = \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}. \tag{4.13}$$

Vjerojatnost p konvergira prema 0.5 kada $m \to \infty$, pa i vjerojatnost neutralna na rizik p^* također. Drugim riječima, model ne dopušta arbitražu u graničnom smislu. Posljednji model JKYMC3, u kojem je zadovoljen uvjet $p = 0.5$, ekvivalent je WIL2 modela.

U drugoj skupini, JKYMD, umjesto tehnički točnih izraza koristi se aproksimacija $e^x \approx 1 + x$, tj. potrebno je odrediti rješenja sustava

$$
\begin{cases} pu + (1-p)d = 1 + r\Delta t \\ p(1-p)(u-d)^2 = \sigma^2 \Delta t. \end{cases}
$$

Prvi pristup rezultira modelom JKYMD1, gdje su parametri definirani na sljedeći način

$$
u = 1 + r\Delta t + \frac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}} \sigma \sqrt{\Delta t}, \tag{4.14}
$$

$$
d = 1 + r\Delta t - \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}} \sigma \sqrt{\Delta t}, \tag{4.15}
$$

a vjerojatnost p dana je jednadžbom (4.10), pri čemu je m definiran s

$$
m = \frac{1 + \sigma^2 \Delta t - (1 + r\Delta t)^2}{(1 + r\Delta t)\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{4.16}
$$

Budući da p ne osigurava uvjet ne dopuštanja arbitraže, nije jednaka vjerojatnosti bez rizika p^*. No, konvergira prema 0.5, tako da je se može smatrati ekvivalentnom martingalnom mjerom jer je ne postojanje arbitraže osigurano u graničnom slučaju. Parametri modela JKYMD2, koji nastaje drugim pristupom, su sljedeći

$$
u = 1 + r\Delta t + \frac{1-p}{\sqrt{p(1-p)}} \sigma \sqrt{\Delta t}, \tag{4.17}
$$

$$
d = 1 + r\Delta t - \frac{p}{\sqrt{p(1-p)}} \sigma \sqrt{\Delta t}, \tag{4.18}
$$

pri čemu je p dana s jednadžbom (4.10), a m je oblika

$$
m = \frac{e^{2r\Delta t} + \sigma^2 \Delta t - (1 + r\Delta t)^2}{(1 + r\Delta t)\sigma\sqrt{\Delta t}}. \tag{4.19}
$$

Istim zaključivanjem kao i u prethodnom modelu, model ne dopušta arbitražu u graničnom slučaju. Posljednji model, JKYMD3, za $p = 0.5$ ima parametre oblika

$$
u = 1 + r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}, \tag{4.20}
$$

$$
d = 1 + r\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}. \tag{4.21}
$$

Ovdje za svaki odabir n vrijedi $p^* = 0.5$, pa model ne dopušta arbitražu.

4.8 Chanceov pristup

Već smo komentirali da Hsijev dokaz o konvergenciji binomnog modela prema Black-Scholes-Mertonovom modelu pokazuje da je svaka vjerojatnost prihvatljiva pod uvjetom da nije 0 ili 1. Ovaj rezultat sugerira da bi svaki odabir vjerojatnosti neutralne na rizik doveo do konvergencije ako se ostvaruju ispravne vrijednosti očekivanja i volatilnosti u skladu s teorijom prethodnog poglavlja. Chance je u [6] predložio općeniti binomni model, kojega ćemo zvati generalizirani Cox-Ross-Rubinsteinov model ili kraće GCRR model, koji ne dopušta arbitražu i rezultira točnom volatilnošću za svaki n. U ovom pristupu promatramo očekivanje povrata i varijancu log-povrata, tj.

$$\begin{cases} p^*u + (1-p^*)d = e^{r\Delta t} \\ p^*(1-p^*)\left(\ln\left(\frac{u}{d}\right)\right)^2 = \sigma^2\Delta t, \end{cases}$$

pri čemu vjerojatnost p^* ima proizvoljnu vrijednost iz intervala $(0,1)$. Riješimo sada taj sustav. Najprije, uočimo da iz druge jednadžbe jednostavnom algebrom dolazimo do izraza

$$\frac{u}{d} = e^{\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}}.$$

Sada uvrštavanjem prethodnog izraza u prvu jednadžbu lako se dobije

$$d = \frac{e^{r\Delta t}}{p^* e^{\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}} + (1-p^*)},$$

pa je drugo rješenje oblika

$$u = \frac{e^{r\Delta t + \frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}}}{p^* e^{\frac{\sigma\sqrt{\Delta t}}{\sqrt{p^*(1-p^*)}}} + (1-p^*)}.$$

Ovako dobiveni parametri zaista sugeriraju kako možemo proizvoljno postaviti p^* na bilo koju vrijednost između 0 i 1 te biti sigurni da će model konvergirati prema BSM modelu. Specijalan slučaj gdje je $p^* = 0.5$ vodit će do jednadžbi Chrissovog modela.

5 Primjena binomnih modela

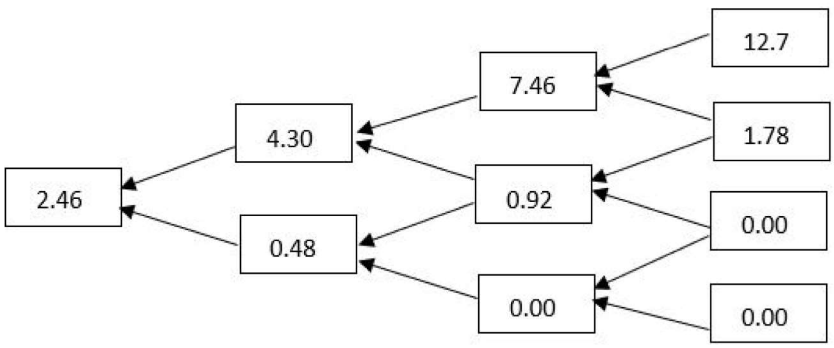
S obzirom na argumente u prethodnom poglavlju vidimo da svaki model iz familije binomnih modela, u iznenađujuće blagim uvjetima, konvergira prema Black-Scholes-Mertonovom modelu. Osim što smo teorijski pokrili sličnosti i razlike, kroz konkretan primjer vrednujemo europsku call opciju u okviru parametriziranih binomnih modela.

Primjer 5.1. *Neka godišnja varijanca log-povrata bude $\sigma^2 = 0.1$. Godišnja kamatna stopa postavljena je na vrijednost $r = 0.1$. Pretpostavimo da je trenutna cijena dionica $S_0 = 50$. Promatramo europsku call opciju s cijenom izvršenja $K = 53$ i vremenom dospijeća $T = 3$ mjeseca. Duljina svakog perioda je $\Delta t = 1/12$, odnosno jedan mjesec. U tom slučaju broj perioda iznosi*

$$n = \frac{T}{\Delta t} = 3.$$

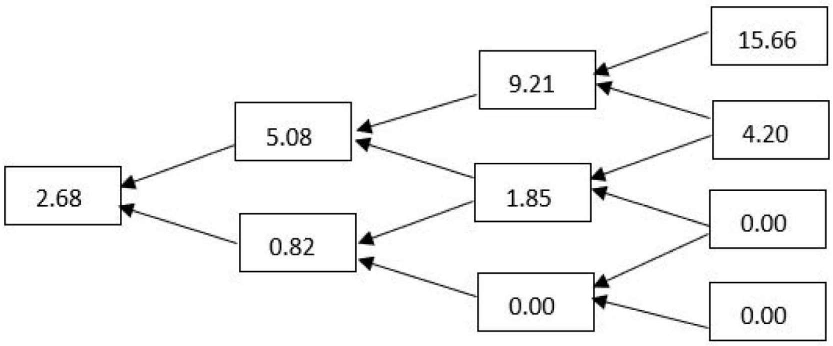
Vrijednost europske call opcije računamo na temelju rezultata (2.6).

- *Najprije usvajamo CRR parametrizaciju (4.1) kako bi odredili cijenu opcije. Tada je $u = 1.35$, $d = 0.74$ i $p^* = 0.51$. Cijena europske call opcije je $C_0^{CALL} = 2.46$.*



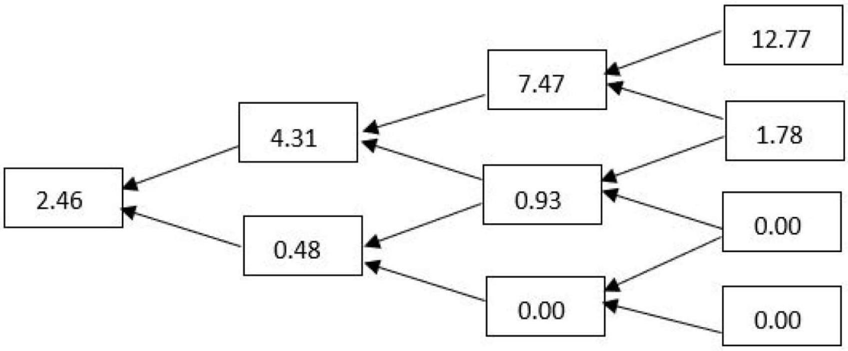
Slika 4: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema CRR modelu

- *Promatramo parametrizaciju RBJRT modela (4.2) u svrhu određivanja cijene opcije. U ovom slučaju je $u = 1.36$, $d = 0.75$ i $p^* = 0.5$. Ovdje cijena europske call opcije iznosi $C_0^{CALL} = 2.68$.*



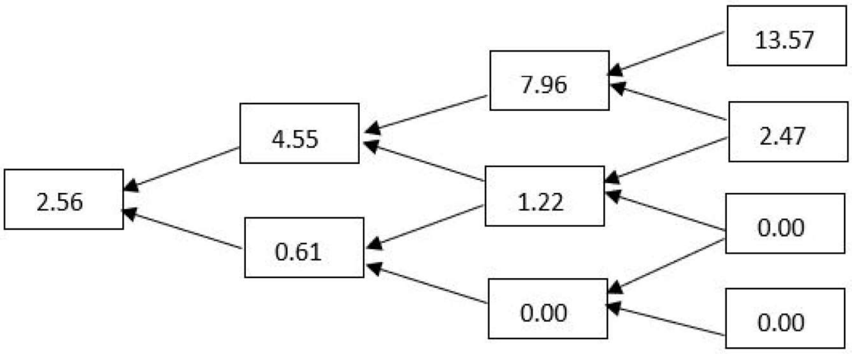
Slika 5: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema RBJRT modelu

- *U slučaju Trigeorgisovog modela* (4.3), *parametri su* $u = 1.35$, $d = 0.74$ *i* $p^* = 0.51$. *Cijena europske call opcije iznosi* $C_0^{CALL} = 2.46$.



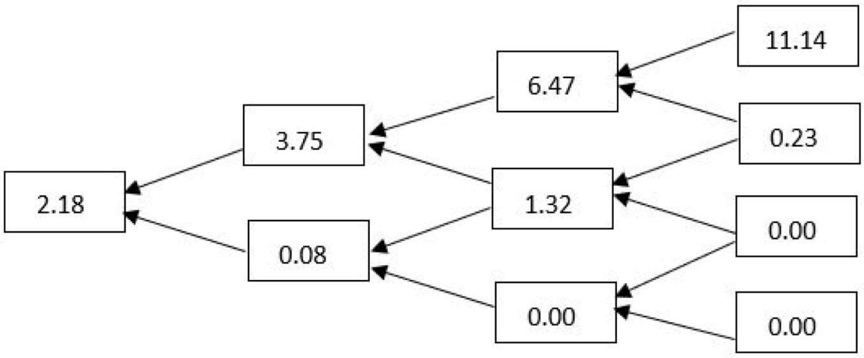
Slika 6: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema Trigeorgisovom modelu

- *Chrissov model za* $p^* = 0.5$ *iz* (4.4) *i* (4.5) *daje vrijednosti* $u = 1.36$ *i* $d = 0.75$. *U tom slučaju cijena europske call opcije iznosi* $C_0^{CALL} = 2.56$.



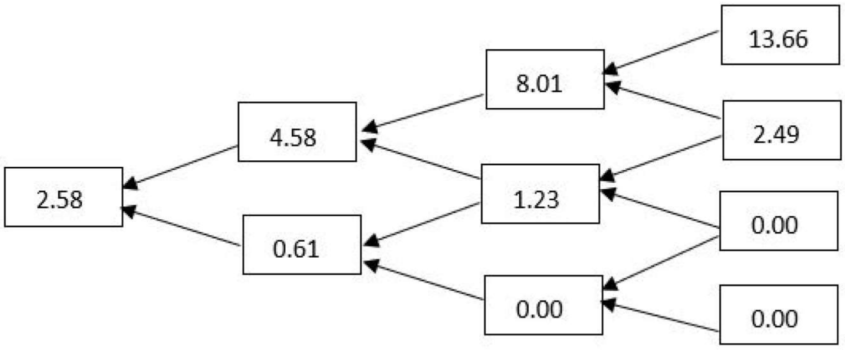
Slika 7: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema Chrissovom modelu

- *Prvi model Wilmotta s parametrima* (4.6) *i* (4.7) *daje vrijednosti* $u = 1.37$, $d = 0.73$, *i* $p^* = 0.5$. *Ovdje cijena europske call opcije iznosi* $C_0^{CALL} = 2.18$.



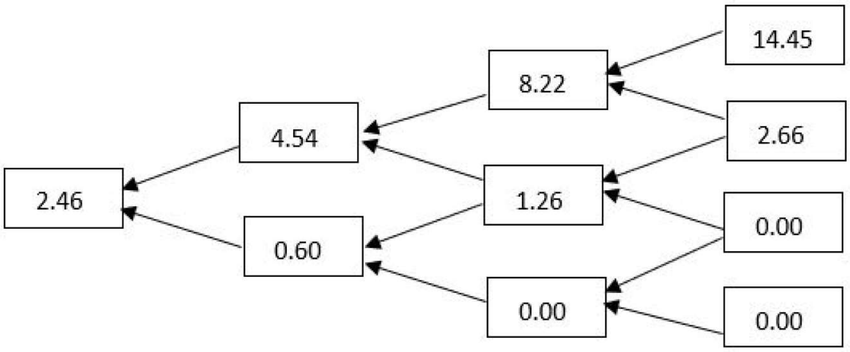
Slika 8: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema WIL1 modelu

Njegov drugi model definiran s (4.8) *i* (4.9), *koji ima fiksnu vrijednost za vjerojatnost u iznosu 0.5 i daje gotovo iste vrijednosti parametara* $u = 1.37$ *i* $d = 0.73$, *europsku call opciju vrednuje u iznosu* $C_0^{CALL} = 2.58$.



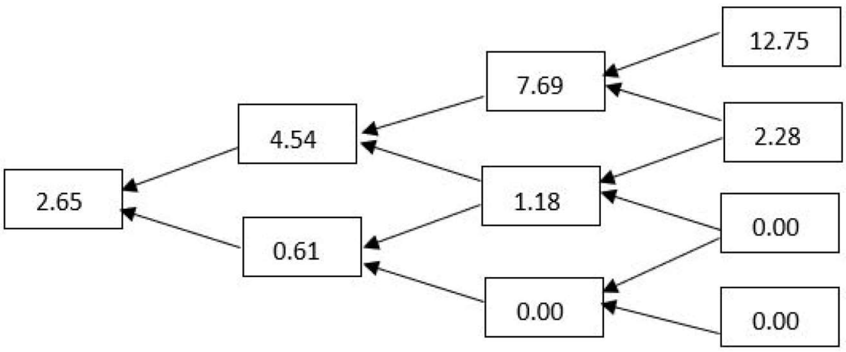
Slika 9: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema WIL2 modelu

- *Prisjetimo se da su JKYMC1 i JKYMC3 ekvivalenti Wilmottovih modela. Parametri preostalog modela JKYMC2 dani s* (4.10), (4.11), (4.12) *i* (4.13) *iznose* $m = 0.31$, $u = 1.43$, $d = 0.68$ *i* $p^* = 0.42$. *Vrijednost europske call opcije tada je* $C_0^{CALL} = 2.46$.



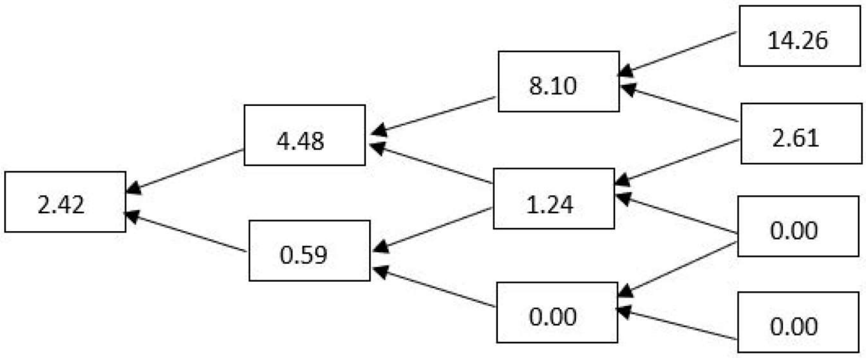
Slika 10: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema JKYMC2 modelu

Parametri modela JKYMD1 prema (4.10), (4.14), (4.15) *i* (4.16) *su* $m = -0.04$, $u = 1.34$, $d = 0.76$ *i* $p^* = 0.51$. *U tom slučaju, vrijednost europske call opcije je* $C_0^{CALL} = 2.65$.



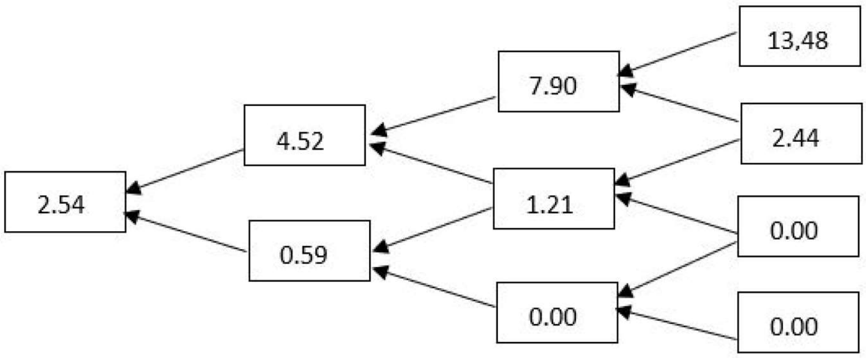
Slika 11: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema JKYMD1 modelu

Model JKYMD2 daje vrijednosti parametara (4.10), (4.17), (4.18) *i* (4.19) *u iznosu* $m = 0.29$, $u = 1.40$, $d = 0.70$ *i* $p^* = 0.43$. *Tada je vrijednost europske call opcije* $C_0^{CALL} = 2.42$.



Slika 12: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema JKYMD2 modelu

Parametri posljednjeg modela, JKYMD3, s obzirom na (4.20) *i* (4.21) *su* $u = 1.35$ *i* $d = 0.75$. *U tom slučaju vrijednost europske call opcije iznosi* $C_0^{CALL} = 2.54$.



Slika 13: Realizacija procesa vrijednosti ECO prema JKYMD3 modelu

U odnosu na CRR model, RBJRT pristup rezultira manjom vjerojatnošću p^*. Ovaj rezultat posljedica je činjenice da je $r \geq \frac{\sigma^2}{2}$ odnosno $e^{r\Delta t} \geq e^{\frac{\sigma^2}{2}\Delta t}$. Stoga je u pravilu cijena europske call opcije u okviru ovog pristupa veća ili jednaka od cijene dobivene CRR modelom. Trigeorgisov pristup bi u pravilu trebao imati nešto niže vrijednosti za u i d u odnosu na CRR model jer je

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = \sqrt{\sigma^2 \Delta t} \leq \sqrt{\sigma^2 \Delta t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)^2 \Delta t^2}.$$

No, dobivene vrijednosti Trigeorgisovog modela razlikuju se od onih iz CRR modela tek u trećoj decimali, što je zapravo rezultat danih vrijednosti za r i σ^2 koje su reda veličine 10^{-1}. Zato će i razlika u vrijednosti ECO u odnosu na CRR model biti minimalna. Prema definiciji parametara WIL1 modela (4.7) zbog ovakvog odabira vrijednosti za r i σ^2, očito je faktor u veći, a faktor d manji od onih definiranih CRR pristupom. Zato je i vjerojatnost p^* niža od one iz CRR modela. Prema tome, vrijednost ECO izračunata prema formuli

(2.6) bit će niža. Ovaj rezultat je tehničke prirode i ovisi o odabiru vrijednosti kamatne stope i volatilnosti. Analogno zaključujemo za WIL2 model. Skupina JKYMD modela ima dodatan parametar m i umjesto tehnički točnih izraza koristi aproksimaciju $e^x \approx 1 + x$. Stoga je teško predvidjeti ponašanje faktora u i d, a samim time i razliku u odnosu na CRR model. No, modeli su konstruirani tako da konvergiraju prema BSM modelu, pa ispravno vrednuju europske opcije.

U konačnici, vidimo da se rješenja neznatno razlikuju. Razlog je tomu što za Δt dovoljno mali, cijene izračunate u odnosu na različite parametrizacije trebaju po vrijednosti biti blizu jedna drugoj. Cijena europske call opcije u $t = 0$ izračunata prema Black-Scholes-Mertonovoj formuli iznosi 2.43. Svi modeli postavljeni su tako da konvergiraju, tj. za dovoljno mali Δt dobro aproksimiraju BSM model, a dobivene vrijednosti u primjeru upravo ilustriraju tu činjenicu. Dakle, numerički rezultati ukazuju na to da binomni model s različitim modifikacijama učinkovito vrednuje europske opcije.

Literatura

[1] B. BASRAK, *Matematičke financije*, web-skripta, PMF-MO, Zagreb, 2009.

[2] A. BELACHEW, B. MARTIN, R. VASUDEVA, *Convergence of the multi-step binomial model in the binomial market model to the Black-Scholes Financial model*, International Journal of Advance Research in Science and Engineering, 7(2018), 563-581.

[3] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[4] F. BLACK, M. SCHOLES, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81(1973), 637-659.

[5] J. N. CARPENTER *The Exercise and Valuation of Executive Stock Options*, Journal of Financial Economics, 48(1998), 127-158.

[6] D. M. CHANCE *A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets*, Journal of Applied Finance, 18(2008), 38-56.

[7] S. CHUNG, P. SHIH, *Generalized Cox-Ross-Rubinstein Binomial Models*, Management Science, 53(2007), 508-520.

[8] J. C. COX, S. A. ROSS, M. RUBINSTEIN, *Option pricing: A simplified approach* Journal of Financial Economics, 7(1979), 229-263.

[9] R. DURRET, *Essentials of Stochastic Processes*, Springer Texts in Statistics, Springer, New York, 1999.

[10] C. HSIA, *On Binomial Option Pricing*, Journal of Financial Research, 6(1983), 41-46.

[11] G. JABBOUR, M. KRAMIN, S. YOUNG, *A Generalization Of Lattice Specifications For Currency Options*, Journal of Business & Economics Research, 1(2003), 1-13.

[12] M. S. JOSHI, *More mathematical finance*, Pilot Whale Press, Melbourne, 2011.

[13] A. KARLÉN, H. NOHROUZIAN, *Lattice approximations for Black-Scholes type models in Option Pricing*, Bachelor thesis in mathematics/applied mathematics, Mälardalen University, Västerås, Sweden, 2013.

[14] D. LAMBERTON, B. LAPEYR, *Introduction to Stohastic Calculus Applied to Finance*, Chapmann & Hall, Washington, 1996.

[15] T. MARSH, T. KOBAYASHI, *The Contributions of Professors Fischer Black, Robert Merton and Myron Scholes to the Financial Services Industry*, International Review of Finance, 1(2000), 295-315.

[16] P. K. MEDINA, S. MERINO, *Mathematical Finance and Probability: A Discrete Introduction*, Birkhäuser Verlag, Switzerland, 2003.

[17] M. MUSIELA, M. RUTKOWSKI, *Martingale Methods in Financial Modelling*, 2nd Edition, Springer. 1998.

[18] B. NOVAK, *Financijska tržišta i institucije*, Ekonomski fakultet u Osijeku, Osijek, 2005.

[19] R. J. RENDLEMAN, B. J. BARTTER, *Two-State Option Pricing*, The Journal of Finance, 34(1979), 1093–1110.

[20] Z. VONDRAČEK, *Financijsko modeliranje*, web-skripta, PMF-MO, Zagreb, 2008.

[21] Z. VONDRAČEK, *Slučajni procesi*, web-skripta, PMF-MO, Zagreb, 2010.

Sažetak

Ovaj diplomski rad objedinjuje istraživanja binomnih modela za nearbitražno vrednovanje europske opcije. Proučava se princip određivanja cijena financijskih imovina u općenitom modelu u diskretnom vremenu te izvodi eksplicitna formula za cijenu europske call opcije u binomnom modelu s n perioda. Pokazuje se da nije riječ o jedinstvenom modelu, već o familiji interpretacija procesa u diskretnom vremenu koji konvergira prema geometrijskom Brownovom gibanju. Očito je da bi preferirani binomni model trebao biti karakteriziran odsustvom arbitraže u konačnom broju vremenskih koraka i rezultirati točnom volatilnošću, no neki modeli ipak ne ispunjavaju ove zahtjeve. Izvodi se generalizirani binomni model, a dobiveni rezultati se ilustriraju i provjeravaju numeričkim primjerom.

Ključne riječi: financijsko tržište, europske opcije, arbitraža, martingal, slučajni zahtjev, ekvivalentna martingalna mjera, binomni model, geometrijsko Brownovo gibanje, Black-Scholes-Mertonova formula, Cox-Ross-Rubinsteinov model, Rendleman-Bartterov model, Jarrow-Rudd-Turnbullov model, Trigeorgisov model, Chrissov model, Wilmottovi modeli, Avellaneda-Laurence model, Jabbour-Kramin-Youngovi modeli, generalizirani binomni model

.

Generalized Cox-Ross-Rubinstein Model

Summary

This paper synthesizes the research on binomial models for European options. The principle of pricing financial assets in a general model at discrete time is studied and an explicit formula for pricing European call option in a binomial model with n periods is derived. Paper shows that the model is not a single model but a family of interpretations of a discrete-time process that converges to the geometric Brownian motion process in the limit. It would seem that a preferable binomial model should prohibit arbitrage for a finite number of time steps and recover the correct volatility, and some models fail to meet these requirements. A generalized binomial model is derived and obtained results are illustrated and verified by a numerical example.

Keywords: financial market, European options, arbitrage, martingale, contingent claim, equivalent martingale measure, binomial model, geometric Brownian motion, Black-Scholes-Merton formula, Cox-Ross-Rubinstein model, Rendleman-Bartter model, Jarrow-Rudd-Turnbull model, Trigeorgis model, Chriss model, Wilmott models, Avellaneda-Laurence model, Jabbour-Kramin-Young models, generalized binomial model

Životopis

Rođen sam 5. ožujka 1996. godine u Osijeku. Osnovnu školu Mitnica u Vukovaru pohađao sam u razdoblju od 2002. godine do 2010. godine. Završetkom osnovnoškolskog obrazovanja upisujem Opću gimnaziju u Vukovaru, koju završavam 2014. godine. Iste godine ostvarujem pravo upisa na Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Naziv sveučilišnog prvostupnika matematike stječem 2017. godine završnim radom pod nazivom "Hermite-Hadamardova nejednakost" uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Mihaele Ribičić Penave. Odmah nakon toga upisao sam Diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku u Osijeku. U sklopu diplomskog studija obavio sam stručnu studentsku praksu u poduzeću VUPIK plus d.o.o na odjelu financija i računovodstva.