

# Apolonijeve kružnice

---

**Semkiv, Marija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:112149>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-03**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Marija Semkiv

**Apolonijeve kružnice**

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Marija Semkiv  
**Apolonijeve kružnice**  
Diplomski rad

Voditelj: doc. dr. sc. Ivica Martinjak

Osijek, 2019.

# Sadržaj

<b>1. Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2. Geometrijske konstrukcije</b>	<b>2</b>
2.1. Konstrukcije pravilnih mnogokuta . . . . .	3
2.2. Metoda inverzije . . . . .	7
2.2.1. Geometrijske konstrukcije inverznih točaka . . . . .	8
2.2.2. Primjena metode inverzije na Apolonijev problem . . . . .	13
<b>3. Apolonijev problem</b>	<b>15</b>
3.1. Rješenja Apolonijeva problema . . . . .	15
<b>4. Apolonijev skup</b>	<b>24</b>
4.1. Descartesov teorem . . . . .	24
4.2. Broj kružnica u Apolonijevom skupu . . . . .	32
4.3. Apolonijeva grupa . . . . .	34
4.4. Analogon hipoteze o blizancima . . . . .	38
<b>5. Daljnje implikacije Apolonijevog problema</b>	<b>40</b>
<b>Literatura</b>	<b>42</b>
<b>Sažetak</b>	<b>44</b>
<b>Abstract</b>	<b>45</b>
<b>Životopis</b>	<b>46</b>

# 1. Uvod

Konstruktivna geometrija je grana geometrije koja se bavi geometrijskim konstrukcijama. Jedan od najpoznatijih konstrukcijskih problema je Apolonijev problem poznatog grčkog matematičara čija su brojna postignuća pretežito u području geometrije. Apolonijev problem je poznat od davnina, iz razdoblja prije Krista a odnosi se na problem konstrukcije kružnice koja dodiruje tri zadane kružnice. Kada pričamo o Apolonijevim kružnicama, tada mislimo na kružnice kod kojih za svaku točku koja pripada kružnici vrijedi da je omjer udaljenosti od dvije zadane točke konstantan.

Interes za Apolonijevim problemom postoji još i danas. Descartes je 1643. godine otkrio vezu između zakrivljenosti četiri kružnice koje se međusobno diraju, a kasnije je definiran i Apolonijev skup i Apolonijeva grupa, pa se s Apolonijevim problemom možemo sresti i u području teorije brojeva, linearne algebre i fraktalne geometrije.

U ovom radu prvo ćemo proći kroz osnove konstruktivne geometrije. Zatim ćemo obraditi neke od konstrukcija mnogokuta, te ćemo pojasniti metodu inverzije s obzirom da se s njom služimo u rješavanju Apolonijevog problema. U drugom dijelu rada pojasniti ćemo Apolonijev problem te pokazati konstrukcije od nekih mogućih slučajeva koji se pojavljuju pri rješavanju Apolonijevog problema. U trećem dijelu rada proučit ćemo slučaj kada se tri kružnice međusobno diraju. Vidjet ćemo vezu između zakrivljenosti četiri kružnice koje se diraju te se upoznati s pojmom Apolonijevog skupa. Zatim ćemo vidjeti kako doći do broja kružnica u Apolonijevom skupu, upoznati se s Apolonijevom grupom te vidjeti analogon hipoteze o blizancima na Apolonijevom skupu. U zadnjem dijelu objasniti ćemo neke od daljnjih implikacija Apolonijevog problema, tj. njegovu primjenu u drugim područjima. Slike koje se nalaze u ovom radu napravljene su u programu GeoGebra.

## 2. Geometrijske konstrukcije

Euklidska ravnina je skup  $\pi$  čiji su elementi točke, a njeni istaknuti podskupovi pravci. Osnovni objekti planimetrije<sup>1</sup> su točka, pravac i ravnina. Točke, pravce i ravnine smatramo intuitivno jasnim tvorevinama, dok se ostali objekti mogu izgraditi iz njih. Točka i pravac se ne definiraju, nego su određeni svojim aksiomatskim svojstvima.

Konstruktivna geometrija je grana planimetrije koja se bavi geometrijskim konstrukcijama. Geometrijske konstrukcije su dio planimetrije koji planimetrijske probleme rješava konstruktivnim metodama.

**Definicija 2.1.** *Bilo koji podskup točaka promatrane ravnine  $\pi$  zvat ćemo geometrijskom figurom ravnine  $\pi$ .*

Konstruirati geometrijske figure znači nacrtati te geometrijske figure. Za konstruiranje geometrijske figure koristit ćemo ravnalo i šestar. Ravnalo kojim se koristimo je jednobridno tj. koristimo se samo jednim njegovim bridom pri konstruiranju, a šestar je s promjenjivim rasponom tj. oko svake točke možemo opisati kružnicu s polumjerom po želji.

Aksiomi konstruktivne geometrije:

**A 2.1.** *Svaka zadana figura je konstruirana.*

**A 2.2.** *Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda je konstruirana i njihova unija.*

**A 2.3.** *Ako su konstruirane dvije figure, onda se može ustanoviti je li njihova razlika prazan skup ili nije. U slučaju da ta razlika nije prazan skup, ta je razlika konstruirana.*

**A 2.4.** *Ako su konstruirane dvije ili više figura, onda se može ustanoviti je li njihov presjek prazan skup ili nije. U slučaju da taj presjek nije prazan skup, onda je taj presjek konstruiran.*

**A 2.5.** *Ako je dana neka neprazna figura, onda je moguće konstruirati točku koja pripada toj figuri.*

Pomoću ravnala i šestara možemo konstruirati:

1. pravac koji prolazi kroz zadane dvije različite točke
2. sjecište dvaju zadanih neparalalalnih pravaca pri čemu je jedan zadan s dvije različite točke
3. kružnicu s središtem u zadanoj točki koja prolazi drugom zadanom točkom
4. dva sjecišta pravca i zadane kružnice pri čemu je pravac zadan s dvijema točkama i siječe danu kružnicu, te dva sjecišta kružnice i zadanog pravca pri čemu je kružnica zadana s središtem i jednom točkom koja joj pripada
5. sjecište dvije kružnice pri čemu je jedna kružnica zadana, a druga je zadana svojim središtem i jednom točkom koja joj pripada.

---

<sup>1</sup>geometrija u ravnini

Temeljnim konstrukcijama nazivamo konstruktivne zadatke koji su jednostavni.

Temeljne konstrukcije su:

1. prijenos dužine
2. prijenos kutova
3. konstrukcija simetrale i polovišta dužine
4. konstrukcija simetrale kuta i polovišta luka
5. konstrukcija pravca koji prolazi zadanom točkom i koji je paralelan s danim pravcem
6. konstrukcija okomice iz dane točke na dani pravac
7. dijeljenje dužine na jednake dijelove i u danom omjeru
8. konstrukcija trokuta ako su mu poznate sve tri stranice
9. konstrukcija kružnog luka iz čijih se točaka vidi neka dužina pod danim kutom.

Pomoću niza temeljnih konstrukcija rješavamo zahtjevnije konstruktivne zadatke. Rješenje zadatka je figura koja zadovoljava sve postavljene uvjete u zadatku. Da bi riješili konstruktivni zadatak moramo proći kroz četiri koraka:

#### 1. Analiza

Analiza zadatka je traženje načina na koji ćemo riješiti zadatak. U ovom dijelu na skici danih figura upotrebljavamo različite temeljne konstrukcije te dolazimo do tražene figure.

#### 2. Konstrukcija

U konstrukciji zadatka određujemo broj i redoslijed temeljnih konstrukcija koje su potrebne da bi na osnovu zadanih figura dobili traženu figuru.

#### 3. Dokaz

U ovom dijelu dokazujemo da svaka figura koju smo dobili konstrukcijom zadovoljava svaki uvjet zadatka.

#### 4. Rasprava

Cilj rasprave je ustanoviti dali je zadatak rješiv i u kojim uvjetima te koliko mogućih rješenja imamo.

Pri rješavanju konstruktivnih zadataka pomažu nam razne metode:

1. Metode geometrijskog konstruiranja: metoda geometrijskih mjesta, algebarska metoda
2. Metode geometrijskih transformacija: metoda osne simetrije, metoda centralne simetrije, metoda translacije, metoda rotacije, metoda inverzije, metoda homotetije.

## 2.1. Konstrukcije pravilnih mnogokuta

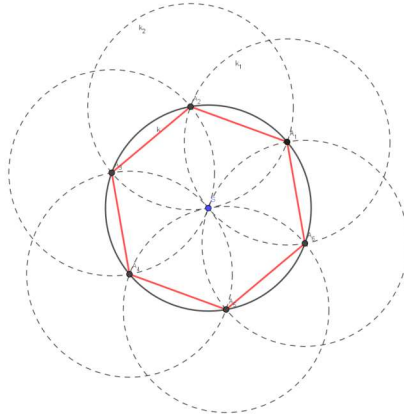
**Definicija 2.2.** *Pravilni  $n$ -terokut je konveksan lik ravnine omeđen s  $n$  međusobno jednakih dužina, takvih da su mu i svi kutovi koji zatvaraju uzastopne stranice jednaki.*

Svi vrhovi pravilnog  $n$ -terokuta leže na jednoj kružnici. Kružnicu na kojoj leže nazivamo opisana kružnica pravilnog  $n$ -terokuta. Svaki pravilan  $n$ -terokut može se zadati dužinom kao stranicom tog  $n$ -terokuta i polumjerom opisane kružnice tog  $n$ -terokuta.

**Primjer 2.1.** *Konstrukcija pravilnog šesterokuta*

*Zadano: kružnica  $k$ .*

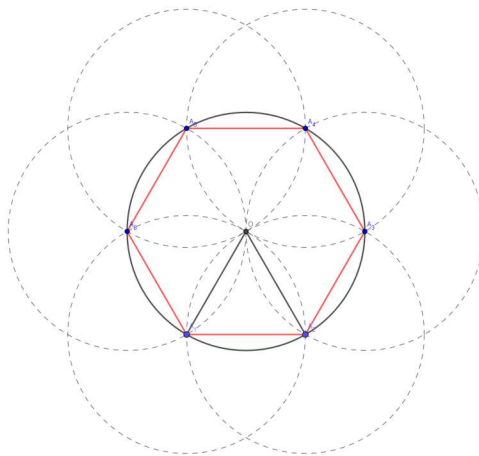
Imamo zadanu kružnicu  $k$  sa središtem u  $S$  i radijusom  $r$ . Odaberemo točku  $A_1$  na kružnici  $k$  te konstruiramo kružnicu  $k_1(A_1, r)$ . Presjek kružnice  $k_1$  i kružnice  $k$  je točka  $A_2$  koja je ujedno i drugi vrh tog šesterokuta. Konstruiramo kružnicu  $k_2(A_2, r)$ . Presjek kružnice  $k$  i kružnice  $k_2$  je točka  $A_3$ . Ponovimo isti postupak počevši od  $A_3$  te dobijemo vrh  $A_4$  itd. Konstruiran šesterokut prikazan je na Slici 1.



Slika 1: Konstrukcija pravilnog šesterokuta.

Zadano: dužina  $\overline{A_1A_2}$ .

Neka je zadana dužina  $\overline{A_1A_2}$ . Prvo konstruiramo jednakostraničan trokut. Jednakokrtačan trokut konstruiramo tako da iz točaka  $A_1$  i  $A_2$  opišemo luk radijusa  $|A_1A_2|$ . Presjekom ta dva luka dobijemo točku  $O$ . Točka  $O$  je središte kružnice radijusa  $|A_1A_2|$ . To je kružnica koja je opisana traženom pravilnom šesterokutu. Imamo kružnicu opisanu šesterokutu i dvije točke traženog šesterokuta. Ponovimo postupak kao u prethodnom dijelu primjera te dobijemo traženi šesterokut. Konstruiran šesterokut prikazan je na Slici 2.



Slika 2: Konstrukcija pravilnog šesterokuta.



Općenito, svaki pravilan  $n$ -terokut gdje je  $n = 2^{k+1}$ ,  $n = 5 \cdot 2^k$  i  $n = 3 \cdot 2^k$  može se konstruirati. To je posljedica toga što se njihovi središnji kutevi  $\frac{2\pi}{n}$  dobiju raspolavljanjem središnjih kuteva pravilnog trokuta, četverokuta i peterokuta. Ako znamo konstruirati pravilan  $n$ -terokut, znat ćemo konstruirati i pravilan  $2n$ -terokut.

Neka je zadana kružnica  $k$  radijusa 1. Želimo upisati pravilan  $n$ -terokut u zadanu kružnicu. Pravilan  $n$ -terokut možemo podijeliti na  $n$  jednakokračnih trokuta kojima je bočna stranica duljine 1, baza jednaka stranici  $n$ -terokuta te je vrh koji spaja jednake stranice jednakokračnog trokuta središte kružnice  $k$ . Stranica  $s_n$   $n$ -terokuta je  $s_n = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{n}$ . Pošto znamo stranicu  $s_n$  našega  $n$ -terokuta, pokušat ćemo doći do stranice  $s_{2n}$  našega  $2n$ -terokuta.

Pomoću formule

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \quad (1)$$

i

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

izračunati ćemo stranicu pravilnog  $2n$ -terokuta pri čemu je  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ .

Iz relacije (1) slijedi :

$$1 - \sqrt{\left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}\right)} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n}. \quad (2)$$

Izraz (2) pomnožimo s 2 i dobijemo

$$2 - 2\sqrt{\left(1 - \sin^2 \frac{\pi}{n}\right)} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{2n}$$

tj.

$$2 - \sqrt{\left(4 - 4 \sin^2 \frac{\pi}{n}\right)} = s_{2n}^2$$

$$2 - \sqrt{\left(4 - s_n^2\right)} = s_{2n}^2$$

Konačno,

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}}.$$

Dakle, iz ovoga možemo vidjeti da ako se može konstruirati stranica  $n$ -terokuta, onda možemo konstruirati i stranicu  $2n$ -terokuta.

### **Primjer 2.2.** *Konstrukcija pravilnog trokuta*

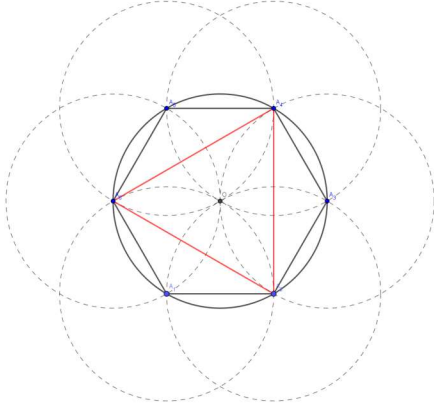
*Zadano: kružnica  $k$ .*

*Neka je zadana kružnica  $k$ . Konstruiramo pravilan šesterokut, pri čemu je  $k$  kružnica opisana pravilnom šesterokutu. Spojimo svaki drugi vrh šesterokuta te dobijemo pravilan trokut.*

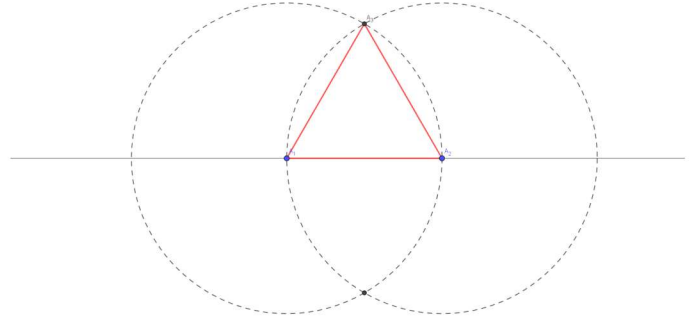
*Konstruiran trokut prikazan je na Slici 3a.*

*Zadano: dužina  $\overline{A_1A_2}$ .*

*Neka je zadana dužina  $\overline{A_1A_2}$ . Iz točke  $A_1$  i točke  $A_2$  opišemo luk radijusa  $|A_1A_2|$ . Presjekom ta dva luka dobijemo točku  $A_3$ . Spojimo  $A_1$  i  $A_2$  i dobijemo trokut  $\Delta A_1A_2A_3$  koji je jednakostraničan. Konstruiran trokut prikazan je na Slici 3b.*



(a) Zadana je kružnica



(b) Zadana je dužina

Slika 3: Konstrukcija pravilnog trokuta.

**Teorem 2.1.** *Ako je  $n = p \cdot g$ , gdje su  $n, p, g$  prirodni brojevi i  $p$  i  $q$  relativno prim, to je konstrukcija dijeljenja kružnice na  $n$  jednakih brojeva rješiva točno onda kada je i konstrukcija dijeljenja kružnice na  $p$  i  $q$  jednakih dijelova također rješiva.*

Carl Friedrich Gauss dokazao je 1796. godine da je konstrukcija pravilnog  $n$ -terokuta,  $n \in \mathbb{N}$  rješiva ako  $n$  možemo prikazati kao  $2^{2^k} + 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , tj. ako je  $n$  Fermatov prim broj. Poznato je svega prvih pet Fermatovih prim brojeve, za  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ . To su brojevi :

3, 5, 17, 257 i 65537.

Gauss je riješio problem konstrukcije sedamnaesterokuta. Ako poznamo koliko iznosi  $\cos \frac{2\pi}{17}$  onda ćemo moći konstruirati pravilan sedamnaesterokut.

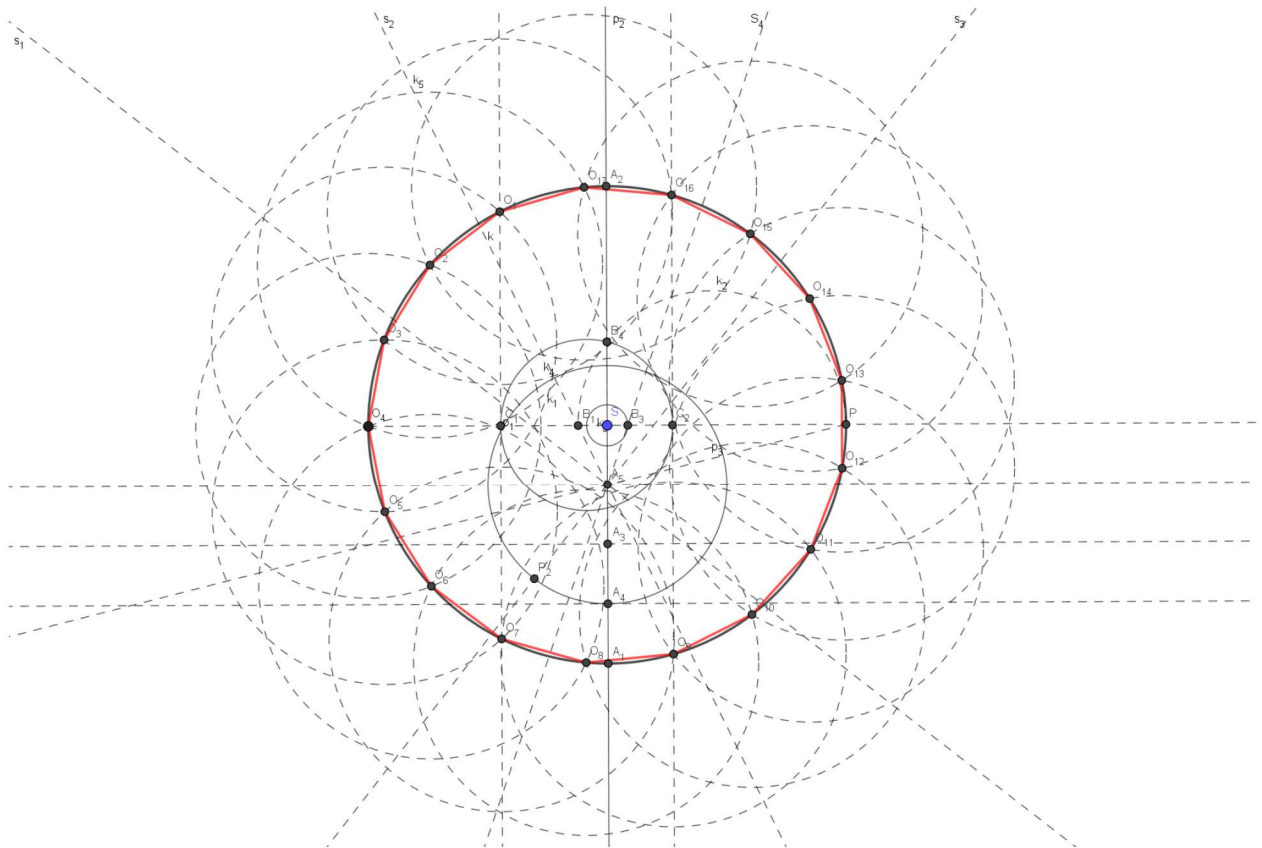
$$2 \cos \frac{2\pi}{17} = \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{2(\sqrt{17} + 3)(2\sqrt{7} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}})}}{8} \quad (3)$$

Kako se došlo do izraza (3) možemo vidjeti u [2].

Slijedi opis konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta.

Neka je zadana kružnica  $k(S, r)$ . Odaberemo točku na kružnici i konstruiramo pravac  $p_1$  koji prolazi odabranom točkom i središtem kružnice  $k$ . Pravac  $p$  siječe kružnicu  $k$  u točki  $P$ . Konstruiramo okomicu  $p_2$  iz točke  $S$  na pravac  $p$ . Konstruirana okomica siječe kružnicu  $k$  u točkama  $A_1$  i  $A_2$ . Konstruiramo simetralu dužine  $\overline{SA_1}$ . Sjecište simetrale i pravca  $p_2$  je točka  $A_3$ . Konstruiramo simetralu dužine  $\overline{A_3A_1}$  i  $\overline{A_3A_2}$  i sjecišta simetrala i pravca  $p_2$  označimo redom  $A_4$  i  $A_5$ . Konstruiramo kružnicu  $k_1(A_5, |A_5A_3|)$ . Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $A_5$  i  $P$  i označimo ga s  $p_3$ . Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci  $p_3$  i  $p_2$  i označimo ju s  $s_1$ . Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci  $p_2$  i  $s_1$  i označimo ju s  $s_2$ . Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci  $p_2$  i  $p_3$  (s druge strane pravca  $p_2$ ) i označimo ju s  $s_3$ . Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci  $s_3$  i  $p_2$  i označimo ju s  $s_4$ . Pravac  $s_2$  siječe pravac  $p_1$  u točki  $B_1$ . Konstruiramo polovište dužine  $\overline{PB_1}$  te kružnicu

$k_2$  kojoj je središte u tom polovištu radijusa  $PB_1$ . Konstruiramo kružnicu  $k_3(S, |SB_3|)$ , pri čemu je  $B_3$  sjecište simetrale  $s_4$  i pravca  $p_1$ . Konstruiramo kružnicu  $k_4(B_1, |B_1B_4|)$  pri čemu je  $B_4$  sjecište kružnice  $k_2$  i pravca  $p_2$ . Sjecište kružnice  $k_4$  i pravca  $p_1$  su točke  $C_1$  i  $C_2$ . Konstruiramo okomice iz točaka  $C_1$  i  $C_2$  na pravac  $p_1$ . Sjecište tih okomica i kružnice  $k$  su točke  $O_1, O_7, O_{16}$  i  $O_9$ . One su i ujedno točke traženog sedamnaesterokuta. Konstruiramo kružnicu  $k_5(O_1, |O_1O_{16}|)$ . Sjecište kružnice  $k_5$  i  $k$  su točke  $O_{16}$  i  $O_2$ . Ponovimo isti postupak od  $O_2$  i dobijemo vrh  $O_5$  itd. Konstruiran sedamnaesterokut prikazan je na Slici 4.



Slika 4: Pravilan sedamnaesterokut.

## 2.2. Metoda inverzije

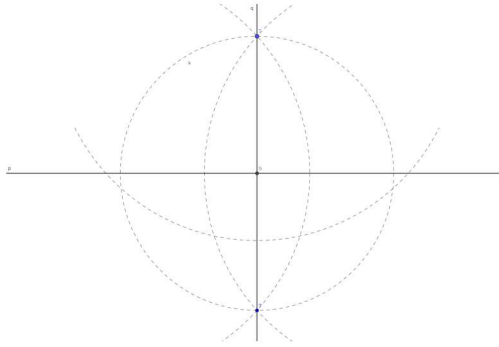
Kada govorimo o transformaciji ravnine u samu sebe, podrazumijevamo da svaka točka  $P$  u ravnini ima svoju sliku  $P'$  pod tom transformacijom.

Najjednostavnija metoda geometrijskih transformacija je metoda osne simetrije.

**Definicija 2.3.** Transformacija  $\sigma$  ravnine koja preslikava svaku točku  $A$  ravnine na njoj simetričnu točku  $A'$  s obzirom na neku os  $s$ , zovemo osnom simetrijom s obzirom na tu os.

**Primjer 2.3.** Konstrukcija osno simetrične točke

Neka je dana točka  $T$  i pravac  $p$ . Konstruiramo okomicu iz točke  $T$  na pravac  $p$  i označimo je  $q$ . Sjecište pravca  $p$  i  $q$  je točka  $S$ . Konstruiramo kružnicu  $k(S, |ST|)$ . Kružnica  $k$  siječe pravac  $q$  u točkama  $T$  i  $T'$ , pri čemu su  $T$  i  $T'$  simetrične s obzirom na os  $p$ .



Slika 5: Osnovna simetrična slika točke koja ne leži na osi simetrije.

Ostali primjeri geometrijskih transformacija su metoda rotacije, metoda translacije, metoda centralne simetrije, metoda homotetije te metoda inverzije. U rješavanju Apolonijeva problema najviše se ističe metoda inverzije.

**Definicija 2.4.** Preslikavanje  $\sigma$  skupa točaka ravnine, za koje vrijedi:

1. Pridružene točke  $A$  i  $A' = \sigma(A)$  su kolinearne sa čvrstom točkom  $S$  ravnine i  $A, A'$  je različito od  $S$
2.  $|SA||SA'| = c$  ( $c = \text{const}, c > 0$ ) nazivamo inverzijom, točku  $S$  centrom inverzije, a  $c$  konstantom inverzije  $\sigma$ .

Inverziju s konstantom  $c$  i centrom  $S$  označavamo  $\sigma(S, c)$ . S obzirom da je  $c$  veće od 0 točke  $A$  i  $A'$  kolinearne su sa točkom  $S$  te leže s iste strane centra  $S$ .

Svojstva inverzije:

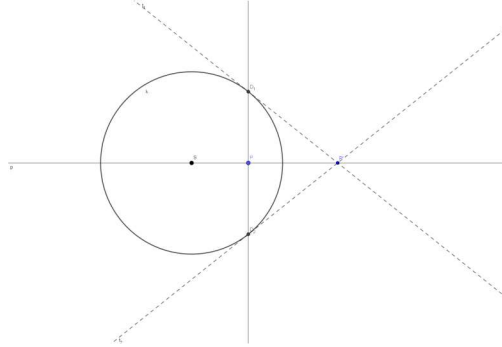
1. Neka je  $p$  pravac koji prolazi centrom inverzije  $S$ . Točke koje pripadaju pravcu  $p$  preslikavaju se u točke koje pripadaju istom pravcu tj. pravac  $p$  preslika se sam na sebe.
2. Neka je  $k(S, r)$  kružnica čije je središte  $S$  centar inverzije i radijus  $r$ . Svaka točka koja leži na kružnici  $k$  preslika se sama na sebe. Kružnicu  $k$  nazivamo kružnicom inverzije.
3. Ako je  $A' = \sigma(A)$  tada je  $A = \sigma(A')$ .
4. Ako pravac  $p$  ne prolazi centrom inverzije, tada je  $\sigma(p) = p'$  kružnica koja prolazi središtem inverzije.
5. Ako kružnica  $k$  prolazi centrom inverzije, tada je  $\sigma(k) = p$  pravac koji ne prolazi centrom inverzije.
6. Ako kružnica  $k$  ne prolazi centrom inverzije, tada je  $\sigma(k) = k'$  kružnica koja ne prolazi centrom inverzije.
7. Ako kružnica  $k$  siječe kružnicu inverzije okomito, tada je  $\sigma(k) = k$ , tj. kružnica  $k$  se preslikava u samu sebe.

### 2.2.1. Geometrijske konstrukcije inverznih točaka

U ovome dijelu rada pokazati ćemo primjere geometrijske konstrukcije inverznih točaka, te kroz njih proći kroz sva svojstva inverzije.

**Primjer 2.4.** Inverzna slika točke unutar kružnice inverzije

Neka je  $k(S, r)$  kružnica inverzije s središtem u  $S$  radijusa  $r$ . Neka je  $P$  točka koja se nalazi unutar kružnice inverzije. Konstruiramo pravac  $p$  koji prolazi točkama  $S$  i  $P$ . Konstruiramo okomicu iz točke  $P$  na pravac  $p$ . Sjecište okomice i kružnice inverzije su točke  $D_1$  i  $D_2$ . Konstruiramo tangente iz točaka  $D_1$  i  $D_2$  na kružnicu  $k$  i označimo ih redom  $t_1$  i  $t_2$ . Presjek  $t_1$  i  $t_2$  je točka  $P' = \sigma(P)$ . Možemo primjetiti da  $P'$  leži na pravcu  $p$ .



Slika 6: Inverzna slika točke unutar kružnice inverzije.

Promotrimo li  $\Delta SD_1P'$ , možemo uočiti da je sličan tokutu  $\Delta SPD_1$ .

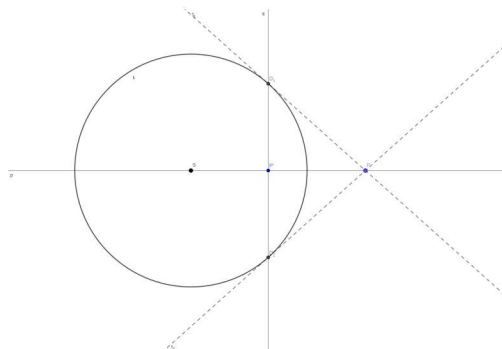
Tada vrijedi :

$$\frac{|SD_1|}{|SP'|} = \frac{|SP|}{|SD_1|}.$$

Slijedi  $|SP||SP'| = |SD_1|^2, |SD_1| = r$ .

**Primjer 2.5.** Inverzna slika točke izvan kružnice inverzije

Neka je  $k(S, r)$  kružnica inverzije s središtem u  $S$  radijusa  $r$ . Neka je  $P$  točka koja se nalazi izvan kružnice inverzije. Konstruiramo pravac  $p$  koji prolazi točkama  $S$  i  $P$ . Konstruiramo tangente iz točke  $P$  na kružnicu  $k$  i označimo ih redom  $t_1$  i  $t_2$ . Presjek  $t_1$  i kružnice  $k$  je točka  $D_1$ , presjek  $t_2$  i kružnice  $k$  je točka  $D_2$ . Konstruiramo pravac  $q$  koji prolazi točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Sjecište pravca  $p$  i  $q$  je točka  $P' = \sigma(P)$ .



Slika 7: Inverzna slika točke izvan kružnice inverzije.

Promotrimo li  $\Delta SD_1P$ , možemo uočiti da je sličan tokutu  $\Delta SP'D_1$ .

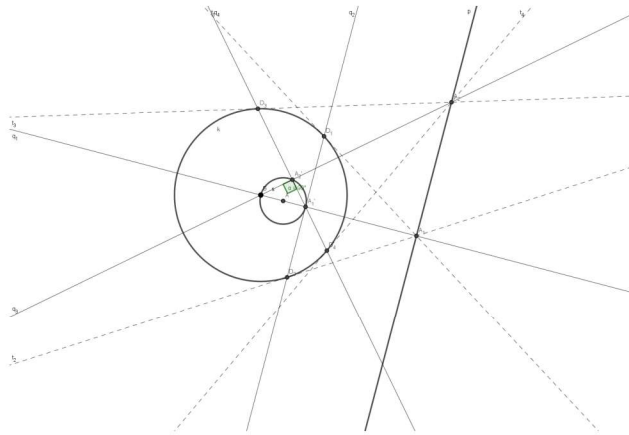
Tada vrijedi :

$$\frac{|SD_1|}{|SP|} = \frac{|SP'|}{|SD_1|}.$$

Slijedi  $|SP||SP'| = |SD_1|^2, |SD_1| = r$ .

**Primjer 2.6.** Inverzna slika pravca koji ne prolazi centrom inverzije

Neka je  $k(S, r)$  kružnica inverzije  $\sigma$  s središtem u  $S$  radijusa  $r$ . Neka je  $p$  pravac koji ne prolazi centrom kružnice inverzije. Konstruiramo pravac  $q_1$  koji prolazi točkom  $S$  i okomit je na pravac  $p$ . Sjecište pravca  $q_1$  i  $p$  označimo s  $A_1$ . Konstruiramo tangente iz točke  $A_1$  na kružnicu  $k$  i označimo ih s  $t_1$  i  $t_2$ . Diralište tangente  $t_1$  i kružnice  $k$  je točka  $D_1$ , a diralište tangente  $t_2$  i kružnice  $k$  je točka  $D_2$ . Konstruiramo pravac  $q_2$  koji prolazi točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Presjek pravaca  $q_1$  i  $q_2$  je točka  $A'_1 = \sigma(A_1)$ . Analogno, konstruiramo inverznu sliku točke  $A_2$ ,  $A'_2 = \sigma(A_2)$ . Točke  $A'_1$  i  $A'_2$  leže na kružnici koja je inverzna slika pravca  $p$ . Konstruiramo kružnicu  $s$  kojoj je središte u polovištu spojnice  $SA'_1$  radijusa  $\frac{1}{2}|SA'_1|$ .  $s = \sigma(p)$ .



Slika 8: Inverzna slika pravca koji ne prolazi centrom kružnice inverzije.

Pošto je  $A'_1 = \sigma(A_1)$  i  $A'_2 = \sigma(A_2)$  vrijedi:  $|SA_1||SA'_1| = r^2$  i  $|SA_2||SA'_2| = r^2$ .

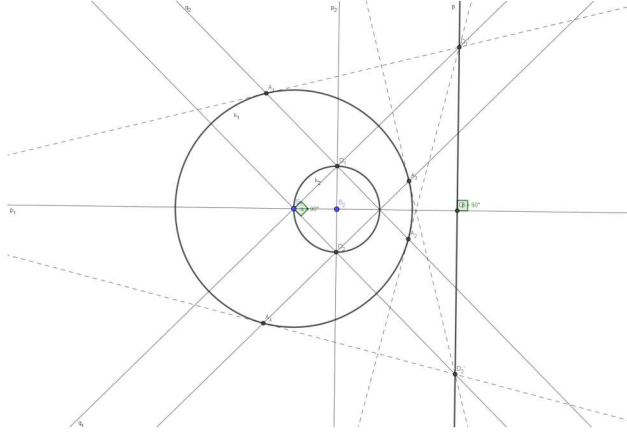
Slijedi da je

$$\frac{|SA_1|}{|SA_2|} = \frac{|SA'_2|}{|SA'_1|}.$$

$\triangle SA_1A_2$  i  $\triangle SA'_2A'_1$  su slični jer imaju dvije proporcionalne stranice i zajednički kut  $\angle A_1SA_2$ . Pošto je kut  $\angle SA_1A_2$  pravi kut slijedi da je kut  $\angle SA'_2A'_1$  pravi kut.  $\triangle SA_1A_2$  i  $\triangle SA'_2A'_1$  su pravokutni trokuti, te  $A'_2$  leži na kružnici  $s(A, |AA'_1|)$ , pri čemu je  $A$  polovište dužine  $SA'_1$ .

**Primjer 2.7.** Inverzna slika kružnice koja prolazi centrom inverzije

Neka je  $k_1(S_1, r_1)$  kružnica inverzije  $\sigma$  s središtem u  $S_1$  radijusa  $r_1$ . Neka je  $k_2(S_2, r_2)$  kružnica s središtem u  $S_2$  radijusa  $r_2$  koja prolazi centrom inverzije. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $S_1$  i  $S_2$  te ga označimo s  $p_1$  i pravac koji prolazi točkom  $S_2$  i okomit je na pravac  $p_1$  kojega označimo s  $p_2$ . Sjecišta pravca  $q_2$  i kružnice  $k_2$  su točke  $D_1$  i  $D_2$ . Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $S_1$  i  $D_1$  i označimo ga s  $q_1$ , te okomicu na pravac  $q_1$  koja prolazi točkom  $D_1$  i označimo ju s  $q_2$ . Sjecišta kružnice  $k_1$  i pravca  $q_2$  su točke  $A_1$  i  $A_2$ . Konstruiramo tangente iz točaka  $A_1$  i  $A_2$  na kružnicu  $k_1$ . Presjek tih tangenti je točka  $D'_1 = \sigma(D_1)$ . Analogno, konstruiramo inverznu sliku točke  $D_2$ ,  $D'_2 = \sigma(D_2)$ . Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $D'_1$  i  $D'_2$  i označimo ga s  $p$ .  $p = \sigma(k_2)$ .



Slika 9: Inverzna slika kružnice koja prolazi centrom inverzije.

Pošto je  $D'_1 = \sigma(D_1)$  i  $D'_2 = \sigma(D_2)$  vrijedi:  $|S_1D_1||S_1D'_1| = r^2$  i  $|S_1D_2||S_1D'_2| = r^2$ .

Slijedi da je

$$\frac{|S_1D_1|}{|S_1D_2|} = \frac{|S_1D'_1|}{|S_1D'_2|}.$$

Neka je  $p$  pravac kroz  $D'_1$  okomit na pravac  $p_1$  (pravac koji prolazi središtima kružnice  $k_1$  i  $k_2$ ).  $\Delta S_1D_1D_2$  i  $\Delta S_1D'_1D'_2$  su slični jer imaju dvije proporcionalne stranice i zajednički kut  $\angle D_1S_1D_2$ .

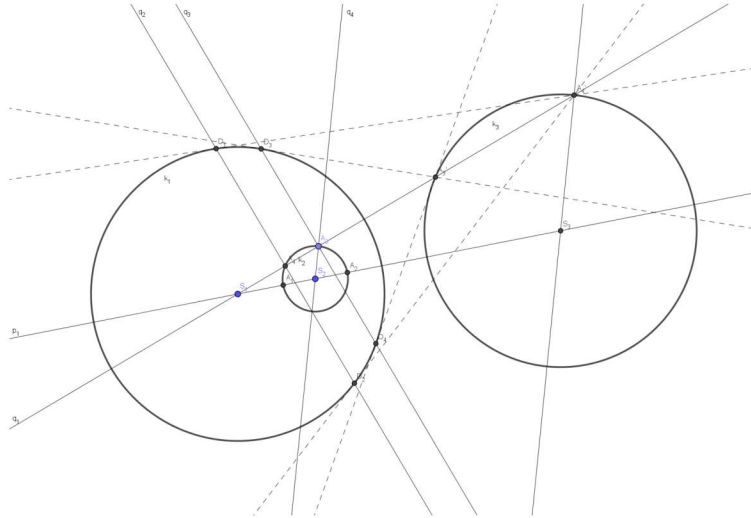
Pošto je kut  $\angle D_2S_1D_1$  pravi kut slijedi da je kut  $\angle D'_2S_1D'_1$  pravi kut, te točka  $D'_1$  leži na pravcu  $p$ . Svaka točka kružnice  $k_2$  leži na pravcu  $p$ , te je  $\sigma(k_2) \subseteq p$ . Preslikavanje  $\sigma$  je bijekcija, pa je stoga  $\sigma(k_2) = p$ .

**Primjer 2.8.** Inverzna slika kružnice koja ne prolazi centrom inverzije

Neka je  $k_1(S_1, r_1)$  kružnica inverzije  $\sigma$  s središtem u  $S_1$  radijusa  $r_1$ . Neka je  $k_2(S_2, r_2)$  kružnica s središtem u  $S_2$  radijusa  $r_2$  koja ne prolazi centrom inverzije. Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $S_1$  i  $S_2$  te ga označimo s  $p_1$ . Pravac  $p_1$  siječe kružnicu  $k_2$  u točkama  $A_1$  i  $A_2$ . Odaberemo proizvoljno jednu točku na kružnici  $k_2$  i označimo je s  $A_3$ . Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $S_1$  i  $A_3$  i označimo ga s  $q_1$ . Pravac  $q_1$  siječe kružnicu  $k_2$  u još jednoj točki, te ju označimo s  $A_4$ . Konstruiramo okomicu iz točke  $A_4$  na pravac  $p_1$  i označimo ju s  $q_2$ , te okomicu iz točke  $A_3$  na pravac  $p_1$  i označimo ju s  $q_3$ . Presjek pravca  $q_2$  i kružnice  $k_1$  su točke  $D_1$  i  $D_2$ , a presjek pravca  $q_3$  i kružnice  $k_1$  su točke  $D_3$  i  $D_4$ . Konstruiramo tangente iz točke  $D_1$  i  $D_2$  na kružnicu  $k_1$ . Presjek tih tangenti je točka  $A'_4 = \sigma(A_4)$ . Konstruiramo tangente iz točke  $D_3$  i  $D_4$  na kružnicu  $k_1$ . Presjek tih tangenti je točka  $A'_3 = \sigma(A_3)$ . Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $S_2$  i  $A_3$  i označimo ga s  $q_4$ , te paralelu s  $q_4$  kroz točku  $A'_4$ . Presjek te paralele i pravca  $p_1$  je točka  $S_3$  koja je i ujedno središte naše tražene kružnice. Konstruiramo kružnicu  $k(S_3, |S_3A'_3|) = \sigma(k_2)$ .

Pošto je  $A'_4 = \sigma(A_4)$  vrijedi:  $|S_1A_4||S_1A'_4| = r^2$ .

Točka  $A_3$  je drugo sjecište pravca koji prolazi točkama  $S_1$  i  $A_4$  i kružnice  $k_2$ . Uzevši u obzir svojstva potencije točke  $S_1$  s obzirom na  $k_2$  vrijedi:  $|S_1A_4||S_1A_3| = R^2$ , pri čemu je  $R^2$  potencija točke  $S_1$  s obzirom na  $k_2$ .



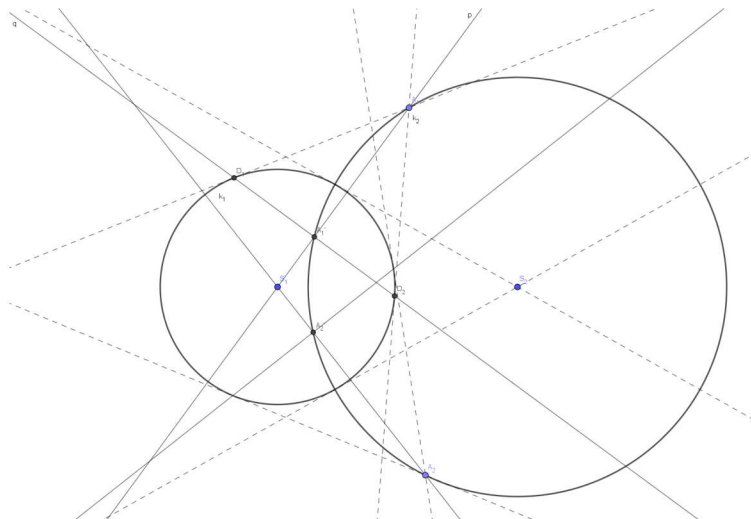
Slika 10: Inverzna slika kružnice koja ne prolazi centrom inverzije.

Tada slijedi:  $|S_1 A'_4| = \frac{r^2}{R^2}$ .

Točka  $A'_4$  je slika točke  $A_3$  pri homotetiji  $h(S_1, (\frac{r}{R})^2)$ . Znamo da je homotetička slika kružnice također kružnica, pa se stoga kružnica koja ne prolazi centrom inverzije preslikava u kružnicu koja također ne prolazi centrom inverzije.

**Primjer 2.9.** Inverzna slika kružnice koja siječe kružnicu inverzije okomito

Neka je  $k_1(S_1, r_1)$  kružnica inverzije  $\sigma$  s središtem u  $S_1$  radijusa  $r_1$ , a  $k_2(S_2, r_2)$  kružnica s središtem u  $S_2$  radijusa  $r_2$  koja siječe kružnicu  $k_1$  inverzije  $\sigma$  okomito. Odaberemo proizvoljno dvije točke na kružnici  $k_2$  i označimo ih s  $A_1$  i  $A_2$ . Konstruiramo pravac  $p_1$  koji prolazi točkama  $S_1$  i  $A_1$  i tangente iz točke  $A_1$  na kružnicu  $k_1$ . Diralište tih tangenata i kružnice  $k_1$  su točke  $D_1$  i  $D_2$ . Konstruiramo pravac  $q_1$  koji prolazi točkama  $D_1$  i  $D_2$ . Sjecište pravca  $p$  i  $q$  je točka  $A'_1 = \sigma(A_1)$ . Analogno, konstruiramo inverznu sliku točke  $A_2$ ,  $A'_2 = \sigma(A_2)$ . Točke  $A'_1$  i  $A'_2$  leže na kružnici  $k_2$ . Kružnica  $k_2 = \sigma(k_2)$ .



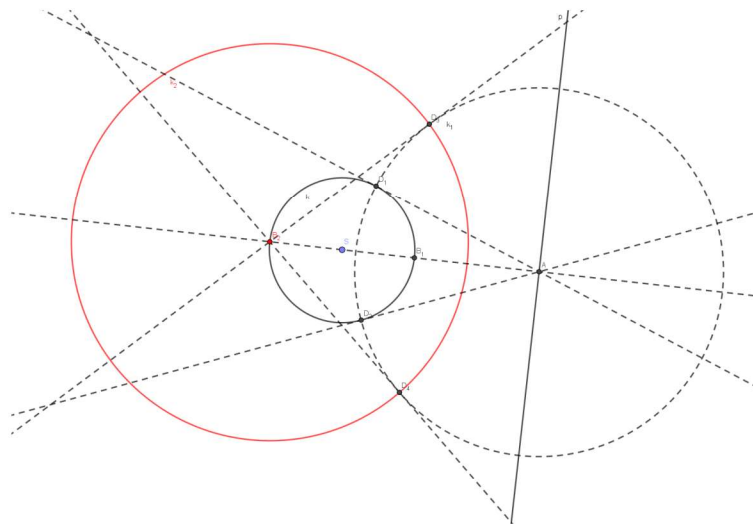
Slika 11: Inverzna slika kružnice koja siječe kružnicu inverzije okomito.



Kružnica  $k_2$  siječe kružnicu  $k_1$  u točkama  $B_1$  i  $B_2$ . Pravac koji prolazi točkama  $S_1$  i  $B_1$  je tangenta u točki  $B_1$  na kružnicu  $k_2$ . Neka je  $q$  pravac koji siječe kružnicu  $k_2$  u točkama  $P_1$  i  $P_2$ . Tada je potencija  $p$  s centrom u  $S_1$  i inverzijom  $\sigma$  s obzirom na  $k_2$ :  $|S_1P_1||S_1P_2| = (|S_1B_1|)^2 = p$ . Slijedi:  $P_2 = \sigma(P_1)$ . Dakle, kružnica  $k_2$  koja siječe kružnicu inverzije  $\sigma$  okomito preslika se inverzijom  $\sigma$  sama na sebe.

**Primjer 2.10.** Inverzija  $\sigma$  koja preslikava kružnicu  $k$  i pravac  $p$  jedno na drugo

Neka je dana kružnica  $k(S, r)$  i pravac  $p$ . Konstruiramo okomicu iz točke  $S$  na pravac  $p$ . Presjek te okomice i pravca  $p$  je točka  $A$ , a presjek te okomice i kružnice  $k$  su točke  $B_1$  i  $B_2$ . Konstruiramo tangente iz točke  $A$  na kružnicu  $k$ . Diralište tangenti i kružnice  $k$  su točke  $D_1$  i  $D_2$ . Konstruiramo kružnicu  $k_1(A, |AD_1|)$  te tangente iz točke  $B_2$  na kružnicu  $k_1$ . Dirališta tih tangenti i kružnice  $k_1$  su točke  $D_3$  i  $D_4$ . Konstruiramo kružnicu  $k_2(B_2, |B_2D_3|)$ . Kružnica  $k_2$  je kružnica inverzije  $\sigma$  s centrom u  $B_2$  koja preslikava kružnicu  $k$  u pravac  $p$  i obrnuto.

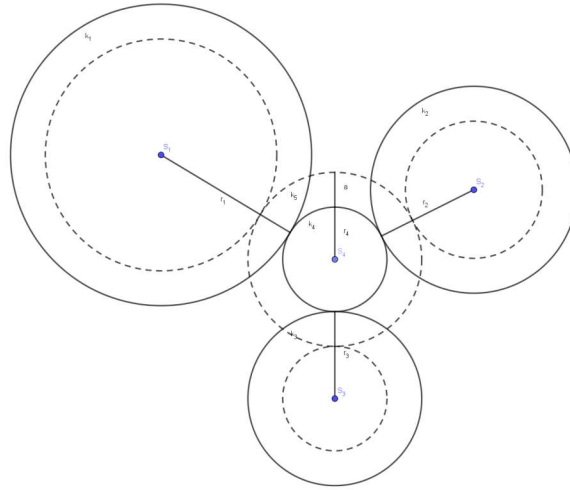


Slika 12: Inverzija  $\sigma$  koja preslikava kružnicu  $k$  i pravac  $p$  jedno na drugo.

### 2.2.2. Primjena metode inverzije na Apolonijev problem

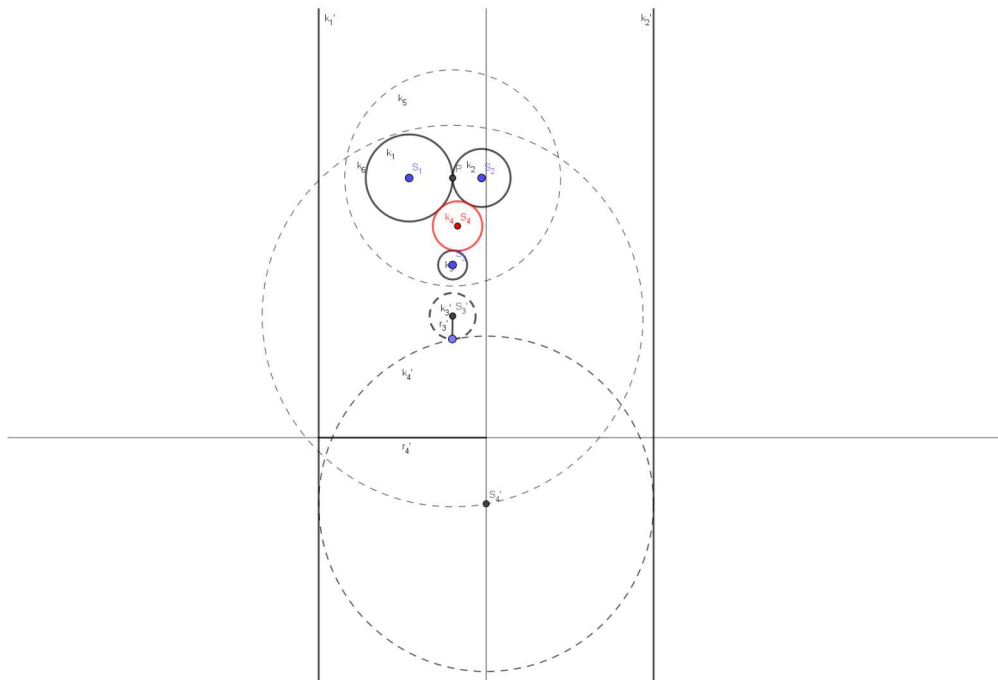
Apolonijev problem je najbolji primjer za rješavanje konstruktivnog zadatka pomoću metode inverzije. Inverzijom  $\sigma$  s obzirom na neki centar  $O$  inverzije  $\sigma$  Apolonijev problem za tri dane kružnice može biti transformiran u Apolonijev problem za druge tri dane kružnice. Dakle, ako imamo rješenje za bilo koje tri dane kružnice, imat ćemo rješenje i za druge tri dane kružnice koje su dobivene od prvih inverzijom. Neka su zadane tri kružnice  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$  i  $k_3(S_3, r_3)$  koji se dodiruju. Pretpostavimo da postoji kružnica  $k_4(S_4, r_4)$  takva da dira kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$ . Ako smanjimo radijus kružnica  $k_1, k_2$  i  $k_3$  za neki broj  $a$ , tada je kružnica  $s(S_4, r_4 + a)$  rješenje problema kao što možemo vidjeti na Slici 13.

Neka su dane tri kružnice  $k_1(S_1, r_1)$ ,  $k_2(S_2, r_2)$  i  $k_3(S_3, r_3)$ , pri čemu se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  diraju u jednoj točki  $P$ , a kružnica  $k_3$  nema dodirnih točaka s  $k_1$  i  $k_2$ . Kružnica  $k_4(S_4, r_4)$  je kružnica koja dira kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$ , nju želimo pronaći. Konstruiramo kružnicu inverzije  $k_5(P, r_5)$ ,



Slika 13: Kružnica koja dira tri dane kružnice.

pri čemu je  $r_5$  proizvoljno odabran. Kružnica  $k_1$  se preslika u pravac  $k'_1$ , kružnica  $k_2$  u pravac  $k'_2$ , a kružnica  $k_3$  u kružnicu  $k'_3(S'_3, r'_3)$ . Kružnica  $k'_4$  treba dirati pravce  $k'_1$  i  $k'_2$ , te je zato radijus  $r'_4$  polovina udaljenosti pravaca  $k'_1$  i  $k'_2$ , tj. točka  $S'_4$  leži na geometrijskom mjestu točaka koje su jednako udaljene od pravaca  $k'_1$  i  $k'_2$ . Također,  $k'_4$  bi trebala dirati i kružnicu  $k'_3$ . Stoga konstruiramo kružnicu  $k_6(O'_3, r'_4 + r'_3)$ , te presjekom  $k_6$  i pravca koji predstavlja geometrijsko mjesto točaka koje su jednako udaljene od pravaca  $k'_1$  i  $k'_2$  dobijemo točku  $S'_4$ . Konstruiramo kružnicu  $k'_4(S'_4, r'_4)$ . Preslikamo ju inverzijom  $\sigma$  te dobijemo traženu kružnicu  $k_4$  koja dira tri dane kružnice.



Slika 14: Kružnica koja dira tri dane kružnice.

### 3. Apolonijev problem

Apolonije iz Perge je grčki matematičar koji je rođen 262. godine prije Krista. Najpoznatiji je po teoriji čunjosječnjica. U svojem djelu Elementi konika je osim teorije presjeka stožca postavio i riješio Apolonijev problem. Apolonijev problem je problem konstruiranja kružnice<sup>2</sup> koja dira tri zadane kružnice. Pritom jedna od kružnica može imati beskonačan radijus ili radijus nula. U slučaju kada kružnica ima beskonačan radijus tada je pravac, a kad joj je radijus nula tada je točka. Postoji najviše osam rješenja Apolonijevog problema. Ovisno o položaju zadanih kružnica ovisi i broj rješenja Apolonijevog problema.

Apolonijev problem se može podijeliti na deset problema:

1. konstrukcija kružnice koja prolazi kroz tri zadane točke
2. konstrukcija kružnice koja prolazi dvijema danim točkama i dira dani pravac
3. konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dva dana pravca
4. konstrukcija kružnice koja dira tri dana pravca
5. konstrukcija kružnice koja prolazi dvijema danim točkama i dira danu kružnicu
6. konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu
7. konstrukcija kružnice koja dira dva dana pravca i danu kružnicu
8. konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dvije dane kružnice
9. konstrukcija kružnice koja dira dani pravac i dvije dane kružnice
10. konstrukcija kružnice koja dira tri dane kružnice.

#### 3.1. Rješenja Apolonijeva problema

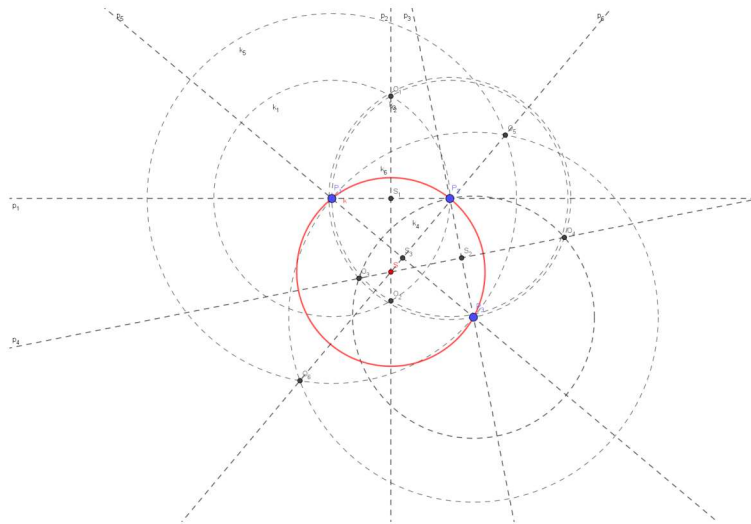
**Apolonijev problem 1.** Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz tri zadane točke

Neka su zadane tri točke  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$ . Konstruiramo pravac  $p_1$  koji prolazi točkama  $P_1$  i  $P_2$  i kružnice  $k_1(P_1, |P_1P_2|)$  i  $k_2(P_2, |P_1P_2|)$ . Sjecište kružnica  $k_1$  i  $k_2$  su točke  $O_1$  i  $O_2$ . Konstruiramo pravac  $p_2$  koji prolazi točkama  $O_1$  i  $O_2$ . Sjecište pravaca  $p_1$  i  $p_2$  je točka  $S_1$ . Točka  $S_1$  je polovište dužine  $\overline{P_1P_2}$ . Konstruiramo pravac  $p_3$  koji prolazi točkama  $P_2$  i  $P_3$  i kružnice  $k_3(P_2, |P_2P_3|)$  i  $k_4(P_3, |P_2P_3|)$ . Sjecište kružnica  $k_3$  i  $k_4$  su točke  $O_3$  i  $O_4$ . Konstruiramo pravac  $p_4$  koji prolazi točkama  $O_3$  i  $O_4$ . Sjecište pravaca  $p_3$  i  $p_4$  je točka  $S_2$ . Točka  $S_2$  je polovište dužine  $\overline{P_2P_3}$ . Konstruiramo pravac  $p_5$  koji prolazi točkama  $P_1$  i  $P_3$  i kružnice  $k_5(P_1, |P_1P_3|)$  i  $k_6(P_3, |P_1P_3|)$ . Sjecište  $k_5$  i  $k_6$  su točke  $O_5$  i  $O_6$ . Konstruiramo pravac  $p_6$  koji prolazi točkama  $O_5$  i  $O_6$ . Sjecište pravaca  $p_5$  i  $p_6$  je točka  $S_3$ . Točka  $S_3$  je polovište dužine  $\overline{P_1P_3}$ . Sjecište pravaca  $p_2$ ,  $p_4$  i  $p_6$  je točka  $S$ . Konstruiramo kružnicu  $k(S, |SP_1|)$ . Kružnica  $k$  je tražena kružnica koja prolazi točkama  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$ .

Kako je središte tražene kružnice sjecište simetrala dužina  $\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}$  i  $\overline{P_2P_3}$  tada ovisno o položaju točaka  $P_1$ ,  $P_2$  i  $P_3$  ovisi broj rješenja problema. U našem slučaju imamo samo jedno rješenje.

---

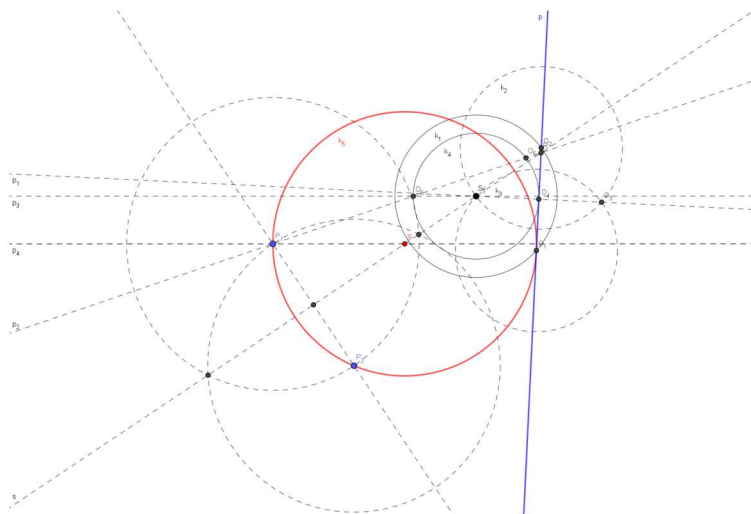
<sup>2</sup>Kružnica je skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne čvrste točke (središta kružnice).



Slika 15: Kružnica koja prolazi kroz tri zadane točke.

**Apolonijev problem 2.** Konstrukcija kružnice koja prolazi dvijema danim točkama i dira dani pravac

Neka su zadane dvije točke  $P_1$  i  $P_2$  i pravac  $p$ , pri čemu pravac koji prolazi točkama  $P_1$  i  $P_2$  nije paralelan s  $p$ . Konstruiramo simetralu  $s$  dužine  $\overline{P_1P_2}$ . Sjecište simetrale  $s$  i pravca  $p$  je točka  $R$ . Odaberemo točku  $S_1$  na simetrali  $s$  koja leži s iste strane pravca  $p$  kao i točke  $P_1$  i  $P_2$ . Konstruiramo kružnicu  $k_1$  radijusa  $r$  t.d. kružnica  $k_1$  siječe pravac  $p$  u dvije točke, koje ćemo nazvati  $O_1$  i  $O_2$ . Konstruiramo kružnice  $k_2(O_1, r)$  i  $k_3(O_2, r)$ . Kružnice  $k_2$  i  $k_3$  sijeku se u točkama  $O_3$  i  $S_1$ . Konstruiramo pravac  $p_1$  koji prolazi točkama  $O_3$  i  $S_1$ . Sjecište pravca  $p_1$  i  $p$  je točka  $O_4$ . Konstruiramo kružnicu  $k_4(S_1, |S_1O_4|)$ . Konstruiramo pravac  $p_2$  koji prolazi točkama  $P_1$  i  $R$ . Sjecište pravca  $p_2$  i kružnice  $k_4$  su točke  $O_5$  i  $O_6$ . Konstruiramo pravac  $p_3$  koji prolazi točkama  $O_6$  i  $S_1$  i paralelu  $p_4$  s pravcem  $p_3$  kroz točku  $P_1$ . Sjecište pravca  $p_4$  i simetrale  $s$  je točka  $S$ . Kružnica koja prolazi točkama  $P_1$  i  $P_2$  i dira pravac  $p$  je kružnica  $k_5(S, |SP_1|)$ .

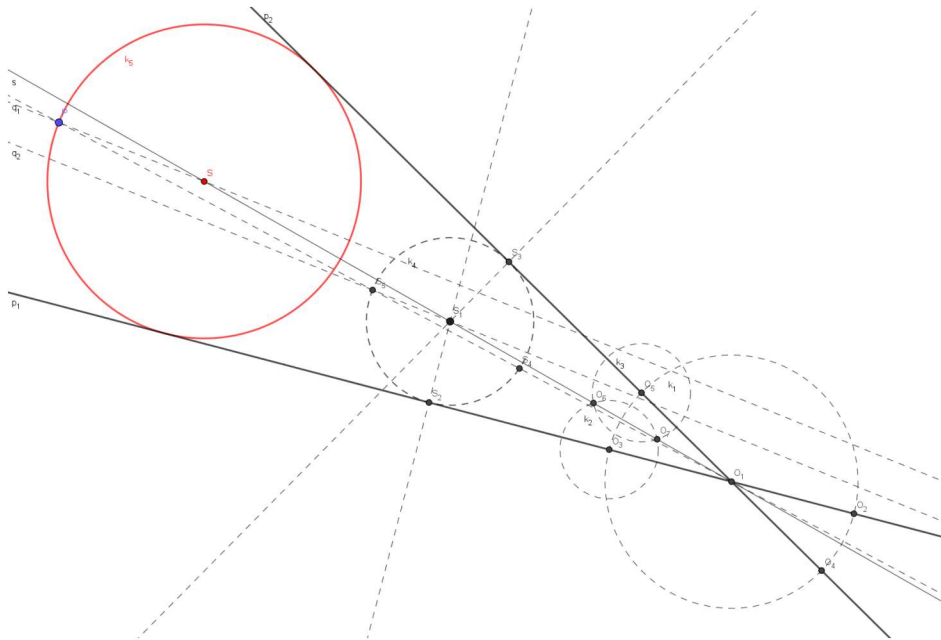


Slika 16: Kružnica koja prolazi kroz dvije zadane točke i dira zadani pravac.

Središte tražene kružnice je sjecište pravca  $p_4$  i simetrale  $s$ . Uočimo, sjecište pravca  $p_2$  i kružnice  $k_4$  su dvije točke te imamo dva rješenja u ovom slučaju.

**Apolonijev problem 3.** Konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dva dana pravca

Neka je zadana točka  $P$  i dva pravca  $p_1$  i  $p_2$ . Sjecište pravaca  $p_1$  i  $p_2$  je točka  $O_1$ . Konstruiramo kružnicu  $k_1$  s središtem u  $O_1$  i proizvoljnim radijusom  $r_1$ . Sjecište kružnice  $k_1$  i pravca  $p_1$  su točke  $O_2$  i  $O_3$ . Sjecište kružnice  $k_1$  i pravca  $p_2$  su točke  $O_4$  i  $O_5$ . Konstruiramo kružnice  $k_2(O_3, r_2)$  i  $k_3(O_5, r_2)$ , pri čemu je  $r_2$  veći od  $\frac{1}{2}|O_3O_5|$ . Sjecište kružnice  $k_2$  i  $k_3$  su točke  $O_6$  i  $O_7$ . Konstruiramo pravac  $s$  koji prolazi točkama  $O_6$  i  $O_1$ . Pravac  $s$  je simetrala kuta koji zatvaraju pravci  $p_1$  i  $p_2$ . Odaberemo točku  $S_1$  na simetrali  $s$ . Konstruiramo okomicu iz točke  $S_1$  na pravac  $p_1$ . Sjecište okomice i pravca  $p_1$  je točka  $S_2$ . Konstruiramo okomicu iz točke  $S_1$  na pravac  $p_2$ . Sjecište okomice i pravca  $p_2$  je točka  $S_3$ . Konstruiramo kružnicu  $k_4(S_1, |S_1S_2|)$ . Kružnica  $k_4$  dira pravac  $p_1$  u točki  $S_2$  i pravac  $p_2$  u točki  $S_3$ . Konstruiramo pravac  $q_1$  koji prolazi točkama  $P$  i  $O_1$ . Sjecište pravca  $q_1$  i kružnice  $k_4$  su točke  $S_4$  i  $S_5$ . Konstruiramo pravac  $q_2$  koji prolazi točkama  $S_5$  i  $S_1$ . Konstruiramo paralelu s pravcem  $q_3$  koja prolazi točkom  $P$ . Sjecište te paralele i simetrale  $s$  je točka  $S$ . Kružnica koja prolazi točkom  $P$  i dira pravce  $p_1$  i  $p_2$  je  $k_5(S, |SP|)$ .



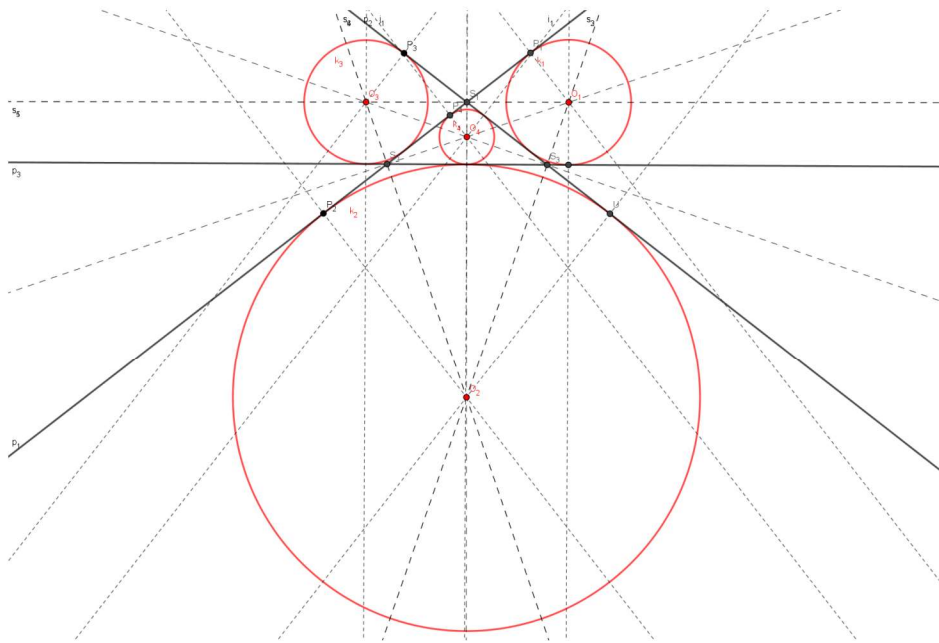
Slika 17: Kružnica koja prolazi kroz jednu zadanu točke i dira dva zadana pravaca.

Uočimo, sjecište pravca  $q_1$  i kružnice  $k_4$  su dvije točke. Središte tražene kružnice je sjecište paralele s pravcem koji prolazi točkom  $P$  i jednim od sjecišta pravca  $q_1$  i kružnice  $k_4$  te simetrale  $s$ . Pošto imamo dva sjecišta pravca  $q_1$  i kružnice  $k_4$ , u ovom slučaju imamo dva rješenja.

**Apolonijev problem 4.** Konstrukcija kružnice koja dira tri dana pravca

Neka su zadana tri pravca  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$ . Pravci se međusobno sijeku, ali ne u istoj točki. Sjecište pravca  $p_1$  i  $p_2$  je točka  $S_1$ , pravca  $p_1$  i  $p_3$  je točka  $S_2$  i pravca  $p_2$  i  $p_3$  je točka  $S_3$ .

Konstruiramo simetrale vanjskih kuteva trokuta  $\Delta S_1 S_2 S_3$  te ih označimo s  $s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6$ . Presjek simetrali  $s_1$  i  $s_2$  je točka  $O_1$ . Konstruiramo okomicu iz točke  $O_1$  na pravac  $p_1$ . Presjek  $p_1$  i te okomice je točka  $P_1$ . Tražena kružnica koja dira sva tri zadana pravca je  $k_1(O_1, |O_1 P_1|)$ . Presjek pravaca  $s_3$  i  $s_4$  je točka  $O_2$ , a pravaca  $s_5$  i  $s_6$  je točka  $O_3$ . Na isti način, konstruiramo još dvije kružnice koje diraju tri zadana pravca:  $k_2(O_2, |O_2 P_2|)$  i  $k_3(O_3, |O_3 P_3|)$ . Konstruiramo simetrale unutarnjih kuteva trokuta  $\Delta S_1 S_2 S_3$ . Sjecište simetrala unutarnjih kuteva trokuta označimo s  $O_4$ . Konstruiramo okomicu iz točke  $O_4$  na pravac  $p_1$ , te sjecište okomice i pravca  $p_1$  označimo s  $P_4$ . Kružnica koja dira sva tri zadana pravca je  $k_4(O_4, |O_4 P_4|)$ . Dakle, imamo četiri rješenja ovog problema.

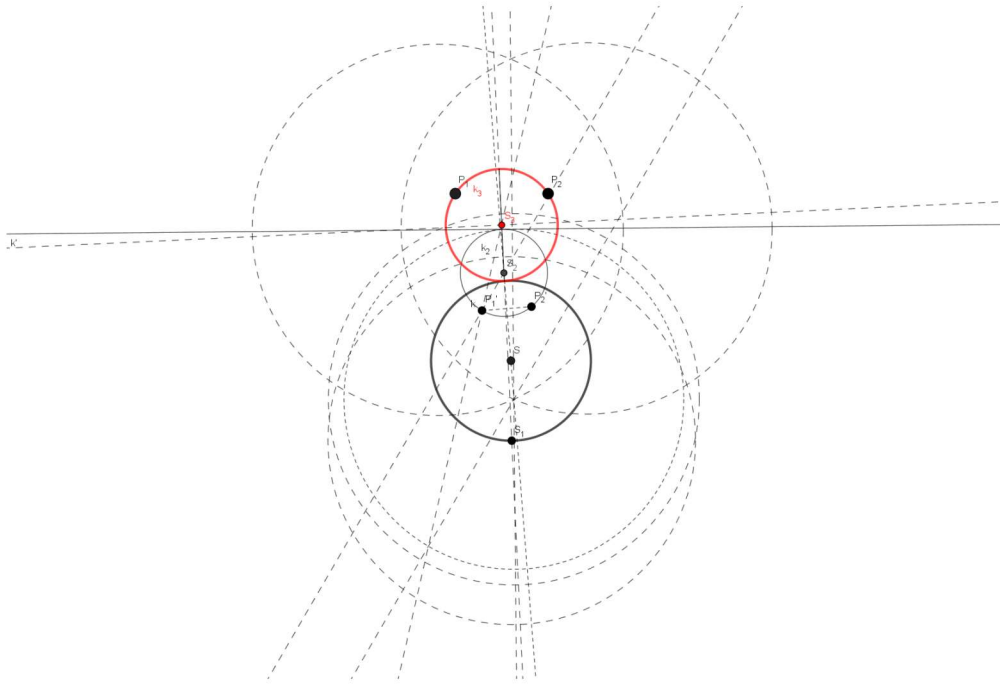


Slika 18: Kružnica koja dira tri zadana pravca.

**Apolonijev problem 5.** Konstrukcija kružnice koja prolazi dvijema danim točkama i dira danu kružnicu

Neka su zadane dvije točke  $P_1$  i  $P_2$  i kružnica  $k(S, r)$ , pri čemu točke  $P_1, P_2 \notin k$  i nisu unutar kružnice  $k$ . Konstruiramo kružnicu inverzije  $k_1(S_1, r_1)$ , pri čemu točka  $S_1$  leži na kružnici  $k(S, r)$  a radijus  $r_1$  odaberemo proizvoljno. Kružnica  $k$  preslika se u pravac  $k'$ , točka  $P_1$  u  $P'_1$  i točka  $P_2$  u  $P'_2$ . Sada smo sveli problem na traženje kružnice koja prolazi dvijema točkama i dira pravac. Konstruiramo kružnicu  $k_2(S_2, r_2)$  koja prolazi točkama  $P'_1$  i  $P'_2$  i dira pravac  $k'$  kao što je pokazano u Apolonijevom problemu 2. Zatim kružnicu  $k_2(S_2, r_2)$  preslikamo u  $k_3(S_3, r_3)$  s obzirom na kružnicu inverzije  $k_1$ . Kružnica  $k_3(S_3, r_3)$  je tražena kružnica koja prolazi kroz dvije dane točke i dira danu kružnicu.

Uočimo, kada konstruiramo kružnicu koja prolazi točkama  $P'_1$  i  $P'_2$  i dira pravac  $k'$  imamo dva rješenja, te kada rješenja preslikamo s obzirom na kružnicu inverzije  $k_1$  imamo dvije kružnice koje prolaze točkama  $P_1$  i  $P_2$  i diraju kružnicu  $k(S, r)$ . Dakle, u ovom slučaju imamo dva rješenja.

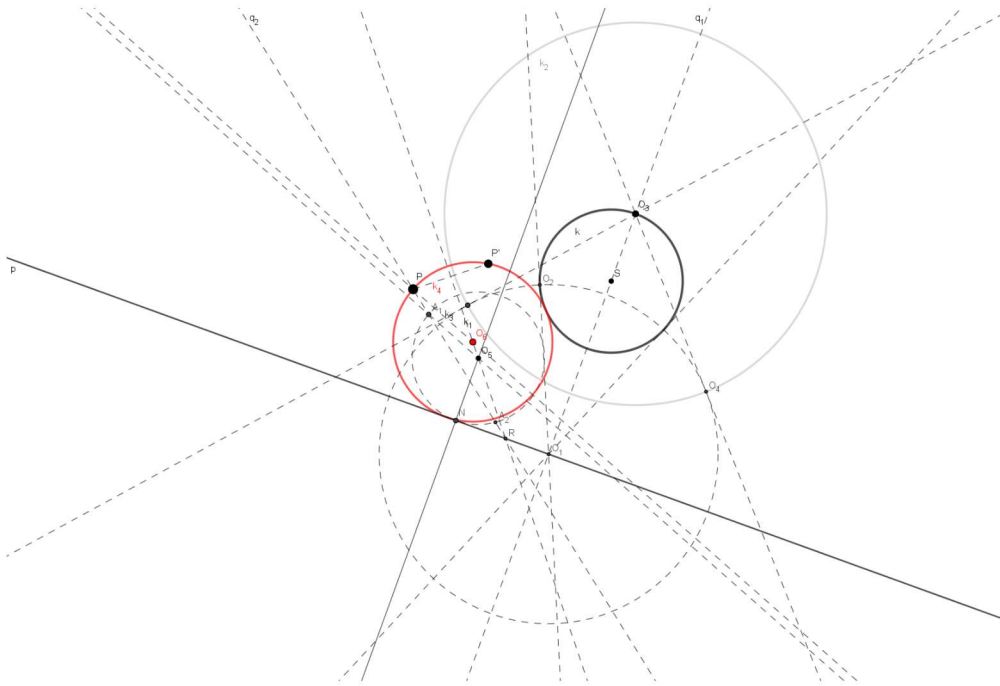


Slika 19: Kružnica koja prolazi kroz dvije dane točke i dira danu kružnicu.

**Apolonijev problem 6.** Konstrukcija kružnice koja prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu

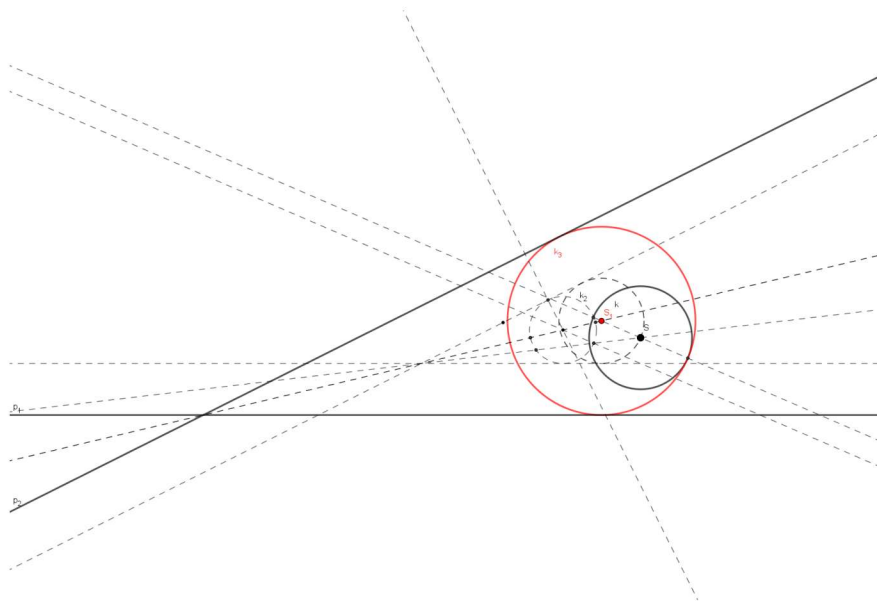
Neka su dani točka  $P$ , kružnica  $k(S, r)$  i pravac  $p$  t.d. se kružnica  $k$  i pravac  $p$  ne sijeku i točka  $P$  je s iste strane pravca  $p$  kao i kružnica  $k$ . Konstruiramo okomicu iz  $S$  na pravac  $p$  te ju označimo s  $q_1$ . Sjecište kružnice  $k$  i pravca  $q_1$  su dvije točke, pri čemu točku koja je udaljenija od pravca  $p$  označimo s  $O_3$ . Sjecište pravca  $q_1$  i  $p$  je točka  $O_1$ . Konstruiramo kružnicu  $k_1(O_1, |O_1O_2|)$ , pri čemu je  $O_2$  diralište tangente iz  $O_1$  na kružnicu  $k$ . Kružnica  $k_1$  siječe kružnicu  $k$  okomito. Konstruiramo kružnicu  $k_2(O_3, |O_3O_4|)$  koja siječe kružnicu  $k_1$  okomito, pri čemu je točka  $O_4$  diralište tangente na kružnicu  $k_1$  koja prolazi točkom  $O_3$ . Kružnica  $k_2$  je kružnica inverzije  $\sigma$ . Ona preslikava pravac  $p$  u kružnicu  $k$ , kružnicu  $k$  u pravac  $p$  i točku  $P$  u točku  $P'$ . Konstruiramo dužinu  $\overline{PP'}$  i simetralu dužine  $\overline{PP'}$ . Sjecište simetrale i pravca  $p$  je točka  $R$ . Odaberemo proizvoljno točku na simetrali i označimo je s  $O_5$ . Konstruiramo kružnicu  $k_3(O_5, |O_5N|)$ , pri čemu je  $N$  nožište okomice iz  $O_5$  na pravac  $p$ . Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $P$  i  $R$  i označimo ga s  $q_2$ . Sjecište pravca  $q_2$  i kružnice  $k_3$  su točke  $A_1$  i  $A_2$ . Konstruiramo pravac koji prolazi točkama  $O_5$  i  $A_1$ , te paralelu s tim pravcem kroz točku  $P$ . Sjecište paralele i simetrale dužine  $\overline{PP'}$  je točka  $O_6$ . Konstruiramo kružnicu  $k_4(O_6, |O_6P|)$ . Kružnica  $k_4$  prolazi točkama  $P$  i  $P'$ , te dira kružnicu  $k$  i pravac  $p$ .

U ovom slučaju imamo 4 rješenja. Neka je  $k_5(P, r_5)$  kružnica inverzije  $\sigma'$ . Tada će se pravac  $p$  preslikati u kružnicu  $p'$ , a kružnica  $k$  u kružnicu  $k'$ . Kako se  $p$  i  $k$  ne sijeku, tada se ni kružnice  $p'$  i  $k'$  ne sijeku. Konstruiramo zajedničke unutarnje i vanjske tangente od  $p'$  i  $k'$ . Preslikamo ih inverzijom  $\sigma'$  i dobijemo četiri kružnice koje prolaze točkom  $P$  i diraju pravac  $p$  i kružnicu  $k$ . Dakle, imamo četiri rješenja.



Slika 20: Kružnica koja prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu.

**Apolonijev problem 7.** Konstrukcija kružnice koja dira dva dana pravca i danu kružnicu. Neka su dani pravci  $p_1$  i  $p_2$  i kružnica  $k(S, r)$ . Konstruiramo simetralu kuta kojega zatvaraju pravci  $p_1$  i  $p_2$ . Smanjimo radijus kružnice  $k$  za  $r$  i pravce  $p_1$  i  $p_2$  transliramo za  $r$ . Sada smo sveli problem na konstrukciju kružnice koja dira dva zadana pravca i danu točku. Konstruiramo kružnicu  $k_2(S_1, r_1)$  koja dira dva dana pravca i jednu točku kao što smo pokazali u Apolonijevom problemu 3. Zatim konstruiramo kružnicu  $k_3(S_1, r_1 + r)$ . Kružnica  $k_3$  dira pravce  $p_1$  i  $p_2$  i kružnicu  $k$ .



Slika 21: Kružnica koja dira danu kružnicu i dva pravca.

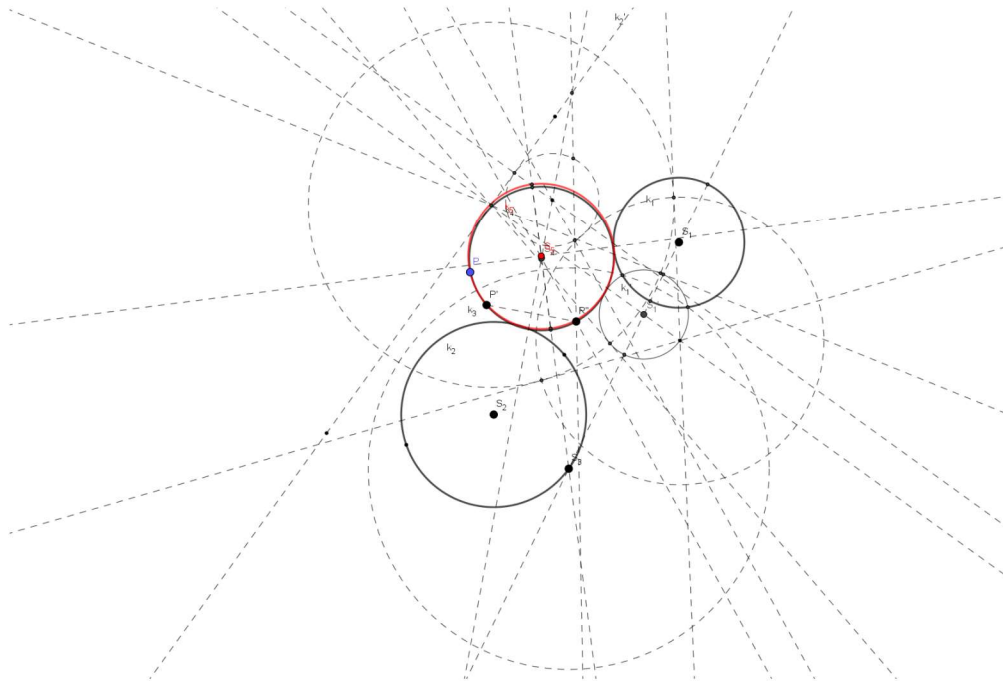
Sada promatramo točku  $S$  i pravce paralelne s pravcima  $p_1$  i  $p_2$  i udaljene od njih za  $r$ . Za



pravac  $p_1$  imamo dva pravca koja su paralelna s njim i udaljena od njega za  $r$ , kao i za pravac  $p_2$ . Tada ćemo imati četiri slučaja u koja ćemo imati dva rješenja. Dakle, u našem slučaju imamo osam rješenja.

**Apolonijev problem 8.** Konstrukcija kružnice koja prolazi zadanom točkom i dira dvije zadane kružnice

Neka su zadani točka  $P$  i dvije kružnice  $k_1(S_1, r_1)$  i  $k_2(S_2, r_2)$ . Konstruiramo kružnicu inverzije  $\sigma$   $k_3(S_3, r_3)$  pri čemu točka  $S_3$  leži na kružnici  $k_2$ . Kružnica  $k_2$  se preslika u pravac  $k'_2$ , kružnica  $k_1$  se preslika u kružnicu  $k'_1(S'_1, r'_1)$  a točka  $P$  se preslika u točku  $P'$ . Sada smo sveli problem na traženje kružnice koja prolazi danom točkom i dira dani pravac i kružnicu. Konstruiramo kružnicu  $k_4(S_4, r_4)$  koja prolazi točkom  $P$  i dira pravac  $k'_2$  i kružnicu  $k'_1$  kao što smo pokazali u Apolonijevom problemu 6. Preslikamo kružnicu  $k_4$  inverzijom  $\sigma$  i dobijemo kružnicu  $k_5(S_5, r_5)$ . Kružnica  $k_5$  prolazi točkom  $P$  i dira kružnice  $k_1$  i  $k_2$ .

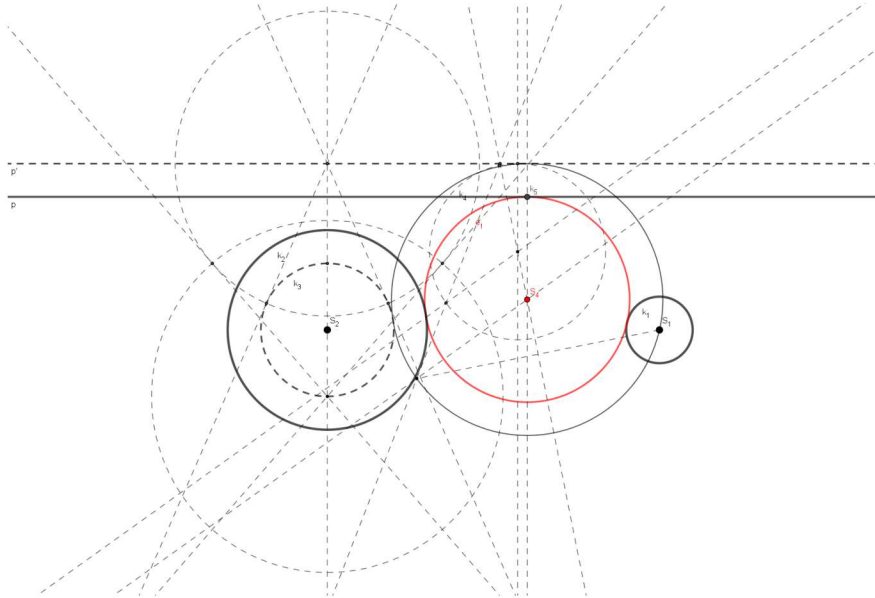


Slika 22: Kružnica koja prolazi danom točkom i dira dvije dane kružnice.

Neka je  $k_6(P, r_6)$  kružnica inverzije  $\sigma'$ . Tada će se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  preslikati u kružnice  $k_7$  i  $k_8$ . Kako se  $k_1$  i  $k_2$  ne sijeku, tada se ni kružnice  $k_7$  i  $k_8$  ne sijeku. Konstruiramo zajedničke unutarne i vanjske tangente od  $k_7$  i  $k_8$ . Preslikamo li ih sve inverzijom  $\sigma$  dobit ćemo četiri kružnice koje prolaze točkom  $P$  i diraju kružnice  $k_1$  i  $k_2$ . Dakle, u ovom slučaju imamo četiri rješenja.

**Apolonijev problem 9.** Konstrukcija kružnice koja dira dani pravac i dvije dane kružnice Neka su dane kružnice  $k_1(S_1, r_1)$  i  $k_2(S_2, r_2)$  i pravac  $p$  t.d.  $p$  ne leži na nijednoj od zadanih kružnica te se kružnice ne sijeku niti je jedna unutar druge. Radijus kružnice  $k_1$  je manji od radijusa kružnice  $k_2$ . Smanjimo radijus kružnica  $k_1$  i  $k_2$  za  $r_1$  i transliramo pravac  $p$  za  $r$  prema gore. Sada imamo kružnicu  $k_3(S_2, r_3 - r_1)$ , točku  $S_1$  i pravac  $p'$ . Sveli smo problem na

konstruiranje kružnice koja prolazi danom točkom i dira pravac i kružnicu. Konstruiramo kružnicu  $k_4(S_4, r_4)$  koja prolazi točkom  $S_1$  i dira pravac  $p'$  i kružnicu  $k_3$  kao što smo pokazali u Apolonijevom problemu 6. Konstruiramo kružnicu  $k_5(S_4, r_4 - r)$ . Kružnica  $k_5$  dira kružnicu  $k_1$  i  $k_2$  te pravac  $p$ .



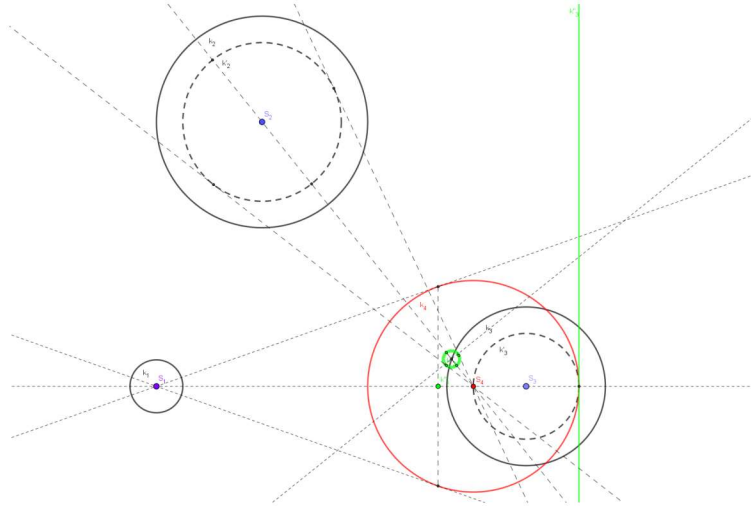
Slika 23: Kružnica koja dira dvije dane kružnice i dani pravac.

U ovom slučaju promatramo točku  $S_1$  i kružnice  $k(S_2, r_2 - r_1)$ ,  $k(S_2, r_2 + r_1)$  i pravce  $p_1$  i  $p_2$  koji su udaljeni od pravca  $p$  za  $r$ . Gledamo kružnice koje diraju  $k_1$  i  $p_1$  i prolaze točkom  $S_1$ , kružnice koje diraju  $k_1$  i  $p_2$  i prolaze točkom  $S_1$ , kružnice koje diraju  $k_2$  i  $p_1$  i prolaze točkom te kružnice koje diraju  $k_2$  i  $p_2$  i prolaze točkom  $S_1$ .

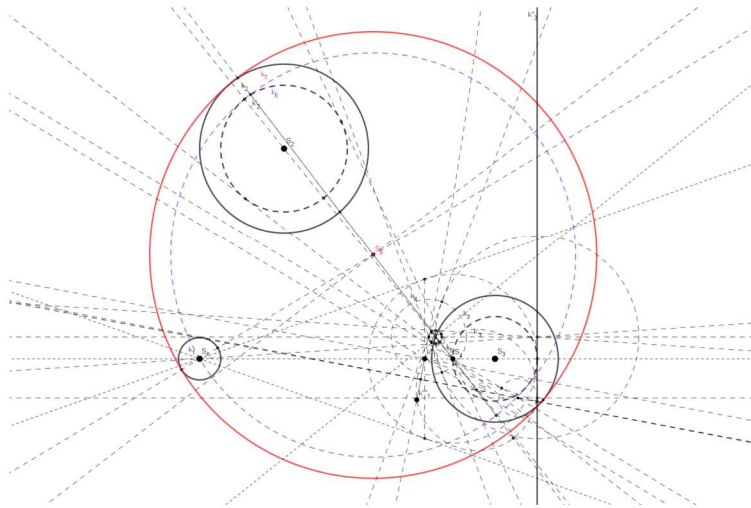
U svakom od slučaja imamo dva rješenja. Dakle, u našem slučaju imamo osam rješenja.

**Apolonijev problem 10.** Konstrukcija kružnice koja dira tri dane kružnice

Neka je  $k_1$  kružnica sa središtem  $S_1$  i polumjerom  $r_1$ ,  $k_2$  kružnica s središtem  $S_2$  i polumjerom  $r_2$  i  $k_3$  kružnica s središtem  $S_3$  i polumjerom  $r_3$ . Neka je  $r_1$  manji od  $r_2$  i  $r_3$ . Smanjimo polumjere kružnica  $k_1, k_2$  i  $k_3$  za  $r_1$ . Sada imamo kružnicu  $k'_2(S_2, r_2 - r_1)$ ,  $k'_3(S_3, r_3 - r_1)$  i točku  $k'_1 = S_1$ , te smo sveli problem na traženje kružnice koja prolazi točkom  $k'_1$  i dira kružnice  $k'_2$  i  $k'_3$ . Odredimo inverziju  $\sigma$  čije središte leži na kružnici  $k'_3$  i ima polumjer  $2(r_3 - r_1)$ . Kružnica inverzije je  $k_4(S_4, 2(r_3 - r_1))$  i označena je crvenom bojom na Slici 24. Kružnica  $k'_3$  preslikava se u pravac  $k''_3$ , kružnica  $k'_2$  preslikava se u kružnicu  $k''_2$  a točka  $k'_1$  preslika se u točku  $k''_1$ .  $k''_1, k''_2$  i  $k''_3$  obojeni su zelenom bojom za Slici 24. Sada smo sveli problem na traženje kružnice koja prolazi točkom  $k''_1$  i dira kružnicu  $k''_2$  i pravac  $k''_3$ . Konstruiramo kružnicu  $k_5(S_5, r_5)$  koja prolazi točkom  $k''_1$  i dira kružnicu  $k''_2$  i pravac  $k''_3$  kao i u Apolonijevom problemu 6. Sada kružnicu  $k_5$  preslikamo inverzijom  $\sigma$ . Dobivena kružnica  $k_6(S_6, r_6)$  označena je ljubičastom bojom na Slici 25. Kružnici  $k_6$  povećamo radijus za  $r_1$  i dobijemo traženu kružnicu  $k_7(S_6, r_6 + r_1)$  koja dira naše tri zadane kružnice. U ovom slučaju



Slika 24: Konstrukcija  $k_1'', k_2''$  i  $k_3''$ .



Slika 25: Kružnica koja dira tri zadane kružnice.

Apolonijevog problema postoji osam rješenja. Konstruiramo kružnice

$$k_1(S_2, r_2 + r_1), k_2(S_2, r_2 - r_1), k_3(S_3, r_3 + r_1), k_4(S_3, r_3 - r_1).$$

Sada tražimo kružnice koje prolaze točkom  $S_1$  i diraju konstruirane kružnice s iste strane. Dobili smo četiri rješenja. Zatim potražimo kružnice koje prolaze kroz  $S_1$  i diraju kružnice  $k_1(S_2, r_2 + r_1)$  i  $k_4(S_3, r_3 - r_1)$ , te kružnice  $k_2(S_2, r_2 - r_1)$  i  $k_3(S_3, r_3 + r_1)$  s različitih strana. Dobili smo četiri rješenja. Dakle, ukupno imamo osam rješenja Apolonijevog problema.

## 4. Apolonijev skup

### 4.1. Descartesov teorem

René Descartes je bio poznati francuski matematičar, fizičar i filozof. U području matematike istaknuo se u geometriji, te ga se smatra utemeljiteljem analitičke geometrije<sup>3</sup>. Godine 1643. poslao je princezi Elizabeth<sup>4</sup> pismo u kojemu je pisao o vezi između radijusa četiri kružnice koje se diraju [5, str.5].

**Teorem 4.1.** (*Descartesov teorem o kružnicama*)

Zakrivljenosti  $\kappa_i$  kružnica  $k_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  koje se međusobno diraju zadovoljavaju jednakost

$$(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 = 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2).$$

*Dokaz.* Neka su  $a, b$  i  $c$  stranice trokuta  $\triangle ABC$ ,  $s$  poluopseg trokuta  $\triangle ABC$ ,  $r$  radijus trokutu upisane kružnice, te  $r_a$  radijus prve trokutu pripisane kružnice. Opseg  $O$  trokuta  $\triangle ABC$  je  $O = a + b + c$ , te stoga poluopseg  $s$  trokuta  $\triangle ABC$  iznosi  $s = \frac{a+b+c}{2}$ . Radijus trokutu upisane kružnice jednak je :

$$r = \frac{P}{s} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}. \quad (4)$$

Kvadriramo li izraz (4), dobit ćemo

$$r^2 = \left( \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s} \right)^2 = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} = \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}.$$

Radijus  $r_a$  trokutu  $\triangle ABC$  pripisane kružnice jednak je

$$r_a = \frac{P}{s-a} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}. \quad (5)$$

Kvadriramo li izraz (5), dobit ćemo

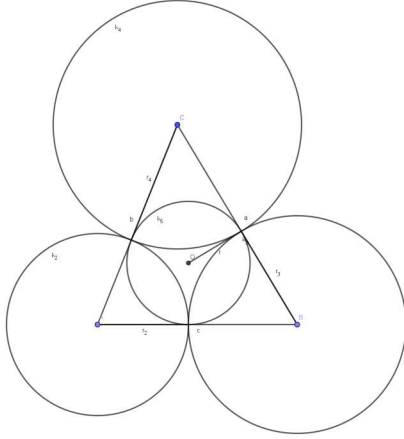
$$r_a^2 = \left( \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a} \right)^2 = \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(s-a)^2} = \frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}.$$

Neka su  $k_2(A, r_2), k_3(B, r_3)$  i  $k_4(C, r_4)$  tri kružnice koje se dodiruju. Neka je  $k_1$  kružnica radijusa  $r_1$  koja dira kružnice  $k_2, k_3$  i  $k_4$ , kružnica  $k_5$  je kružnica upisana trokutu  $\triangle ABC$  radijusa  $r$  i  $k_6$  kružnica pripisana trokutu  $\triangle ABC$  radijusa  $r_a$ . Ako se kružnice  $k_2, k_3$  i  $k_4$  međusobno diraju izvana, tada je  $r_2 = s - a, r_3 = s - b, r_4 = s - c$  i  $r = \frac{1}{\mu_1}$ . Ako se kružnice  $k_2, k_3$  i  $k_4$  međusobno diraju pri čemu kružnica  $k_4$  dira kružnice  $k_2$  i  $k_3$  iznutra, tada je  $r_2 = -s, r_3 = s - c, r_4 = s - b$  i  $r_a = \frac{1}{\mu_1}$ . U ovom slučaju  $r_2$  ima predznak minus zato što dira kružnice  $k_3$  i  $k_4$  iznutra.

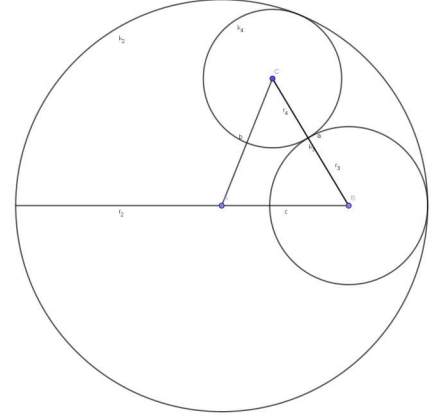
Označimo s  $\kappa_2, \kappa_3$  i  $\kappa_4$  zakrivljenosti kružnica  $k_2, k_3$  i  $k_4$  redom. Neka se kružnice  $k_7, k_8$  i  $k_9$  diraju, ali ne sijeku, te neka ih kružnica  $k_5$  dira iznutra.  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  i  $\mu_4$  su zakrivljenosti

<sup>3</sup>grana geometrije koja se bavi rješavanjem geometrijskih zadataka pomoću algebarskih metoda

<sup>4</sup>kćer kralja Fredericha iz Češke



(a) Tri kružnice se diraju izvana



(b) Jedna kružnica dira preostale dvije iznutra

Slika 26: Tri kružnice koje se međusobno diraju.

kružnica  $k_5$ ,  $k_7$ ,  $k_8$  i  $k_9$  redom. Kružnice  $k_7, k_8$  i  $k_9$  prolaze diralištima kružnica  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$ .

U slučaju kada se kružnice  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$  međusobno diraju izvana vrijedi

$$\begin{aligned}
 \kappa_3\kappa_4 + \kappa_4\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 &= \left( \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4} \right) \kappa_2\kappa_3\kappa_4 = \frac{(s-a) + (s-b) + (s-c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\
 &= \frac{3s - (a+b+c)}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{3s - 2s}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\
 &= \frac{s}{(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{r^2} \\
 &= \mu_1.
 \end{aligned}$$

U slučaju kada se kružnice  $k_2, k_3$  i  $k_4$  međusobno diraju, pri čemu kružnica  $k_4$  dira kružnice  $k_2$  i  $k_3$  iznutra vrijedi

$$\begin{aligned}
 \kappa_3\kappa_4 + \kappa_4\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 &= \left( \frac{1}{\kappa_2} + \frac{1}{\kappa_3} + \frac{1}{\kappa_4} \right) \kappa_2\kappa_3\kappa_4 = \frac{-s + (s-c) + (s-b)}{-s(s-c)(s-b)} \\
 &= \frac{s-c-b}{-s(s-c)(s-b)} = \frac{c+b-s}{s(s-c)(s-b)} \\
 &= \frac{a+b+c-s-a}{s(s-c)(s-b)} = \frac{2s-s-a}{s(s-c)(s-b)} \\
 &= \frac{s-a}{s(s-c)(s-b)} = \frac{1}{r_a^2} \\
 &= \mu_1.
 \end{aligned}$$

Dakle, u oba slučaja je  $\kappa_3\kappa_4 + \kappa_4\kappa_2 + \kappa_2\kappa_3 = \mu_1$ . Pošto je izbor  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$  bio slučajan, možemo permutirati indekse te dobijemo

$$\begin{aligned}
 \mu_1^2 &= \kappa_2\kappa_3 + \kappa_2\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4 \\
 \mu_2^2 &= \kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4 \\
 \mu_3^2 &= \kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_2\kappa_4 \\
 \mu_4^2 &= \kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3.
 \end{aligned}$$

Pošto se i kružnice  $k_7$ ,  $k_8$  i  $k_9$  međusobno diraju tada vrijedi

$$\begin{aligned}\kappa_1^2 &= \mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4 \\ \kappa_2^2 &= \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_3\mu_4 \\ \kappa_3^2 &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_4 \\ \kappa_4^2 &= \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3.\end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^4 \kappa_i\right)^2 &= (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 \\ &= \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4 \\ &= \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + (\kappa_2\kappa_3 + \kappa_2\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4) + (\kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4) + (\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_2\kappa_4) \\ &\quad + (\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3) \\ &= \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + \mu_1^2 + \mu_2^2 + \mu_3^2 + \mu_4^2 \\ &= \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^4 \mu_i^2 \tag{6} \\ &= (\mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4) + (\mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_3\mu_4) + (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_4 + \mu_2\mu_4) \\ &\quad + (\mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3) + \sum_{i=1}^4 \mu_i^2 \\ &= 2 \sum_{1 \leq i < j \leq 4} \mu_i\mu_j + \sum_{i=1}^4 \mu_i^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^4 \mu_i\right)^2.\end{aligned}$$

Dakle,  $\left(\sum_{i=1}^4 \kappa_i\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^4 \mu_i\right)^2$ , tj.  $\sum_{i=1}^4 \kappa_i = \sum_{i=1}^4 \mu_i$ .

$$\begin{aligned}-\kappa_1^2 + (\kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 &= -\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_2\kappa_3 + \kappa_2\kappa_4 + \kappa_3\kappa_2 + \kappa_3^2 + \kappa_3\kappa_4 + \kappa_2\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4 + \kappa_4^2 \\ &= -\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 + 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4 \\ &= -\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 + 2\mu_1^2 \\ &= -(\mu_2\mu_3 + \mu_2\mu_4 + \mu_3\mu_4) + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_4 + \mu_3\mu_4 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_4 \\ &\quad + \mu_2\mu_4 + \mu_1\mu_2 + \mu_1\mu_3 + \mu_2\mu_3 + 2\mu_1^2 \\ &= 2\mu_1\mu_2 + 2\mu_1\mu_3 + 2\mu_1\mu_4 + 2\mu_1^2 \\ &= 2\mu_1(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4) \\ &= 2\mu_1\left(\sum_{i=1}^4 \kappa_i\right).\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\begin{aligned}
2\mu_1 &= \frac{-\kappa_1^2 + (\kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \\
&= \frac{-\kappa_1^2 + (\kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 + \kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4 - \kappa_1\kappa_2 - \kappa_1\kappa_3 - \kappa_1\kappa_4}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \\
&= \frac{\kappa_1(-\kappa_1 + \sum_{i=2}^4 \kappa_i) + \kappa_2(-\kappa_1 + \sum_{i=2}^4 \kappa_i) + \kappa_3(-\kappa_1 + \sum_{i=2}^4 \kappa_i) + \kappa_4(-\kappa_1 + \sum_{i=2}^4 \kappa_i)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \\
&= \frac{(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)(-\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)}{\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4} \\
&= -\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4.
\end{aligned}$$

Permutiramo indekse i dobijemo sljedeće tri jednačbe

$$\begin{aligned}
\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 &= 2\mu_2 \\
\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4 &= 2\mu_3 \\
\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4 &= 2\mu_4.
\end{aligned}$$

Kvadriramo prethodne tri jednačbe te ih zbrojimo. Tada je

$$\begin{aligned}
4 \sum_{i=1}^4 \mu_i^2 &= (-\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 + (\kappa_1 - \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 + (\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_3 + \kappa_4)^2 \\
&\quad + (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - \kappa_4)^2 \\
&= \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 - 2\kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_3 - 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4 \\
&\quad + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 - 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 - 2\kappa_2\kappa_3 - 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4 \\
&\quad + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 + 2\kappa_1\kappa_2 - 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 - 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 - 2\kappa_3\kappa_4 \\
&\quad + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 - 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 - 2\kappa_2\kappa_4 - 2\kappa_3\kappa_4 \\
&= 4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) \\
&= 4 \left( \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 \right).
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 \mu_i^2 &= \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2. \\
2 \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 &= \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 = \sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^4 \mu_i^2.
\end{aligned}$$

Prema jednačbi (6) slijedi

$$\sum_{i=1}^4 \kappa_i^2 + \sum_{i=1}^4 \mu_i^2 = \left( \sum_{i=1}^4 \kappa_i \right)^2.$$

Dakle,

$$2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2.$$

□

1936. godine Sir Frederick Soddy objavio je pjesmu naziva "The Kiss Precise" u kojoj je pisao o vezi između radijusa četiri kružnice koje se diraju, ali se ne sijeku te njenu generalizaciju na trodimenzionalan prostor.

Dio Soddyjeve pjesme glasi[5, str. 7]:

"Since zero bend's a dead straight line  
and concave bends have minus sign  
the sum of the squares of all four bends  
is half the square of their sum."

**Teorem 4.2.** (*Soddyjev teorem*)

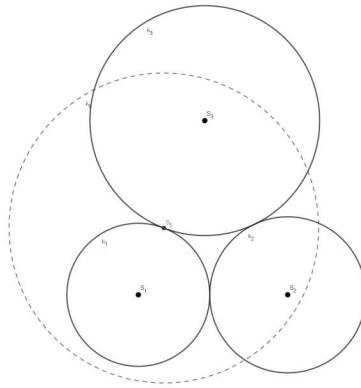
Neka su  $k_i, i = 1, 2, 3, 4$  četiri kružnice koje se međusobno diraju, a  $\kappa_i, i = 1, 2, 3, 4$  njihove zakrivljenosti. Tada vrijedi :

$$\sum \kappa_i^2 = \frac{1}{2} \left( \sum \kappa_i \right)^2 .$$

**Teorem 4.3.** (*Apolonijev teorem*)

Neka su dane kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  koje se međusobno diraju. Tada postoje točno dvije kružnice  $k_4$  i  $k'_4$  koje diraju sve tri dane kružnice.

*Dokaz.* Neka su  $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$  i  $k_3(S_3, r_3)$  kružnice koje se međusobno diraju. Neka je  $k_5(S_5, r_5)$  kružnica inverzije  $\sigma$ , pri čemu je točka  $S_5$  diralište kružnice  $k_1$  i  $k_3$ .

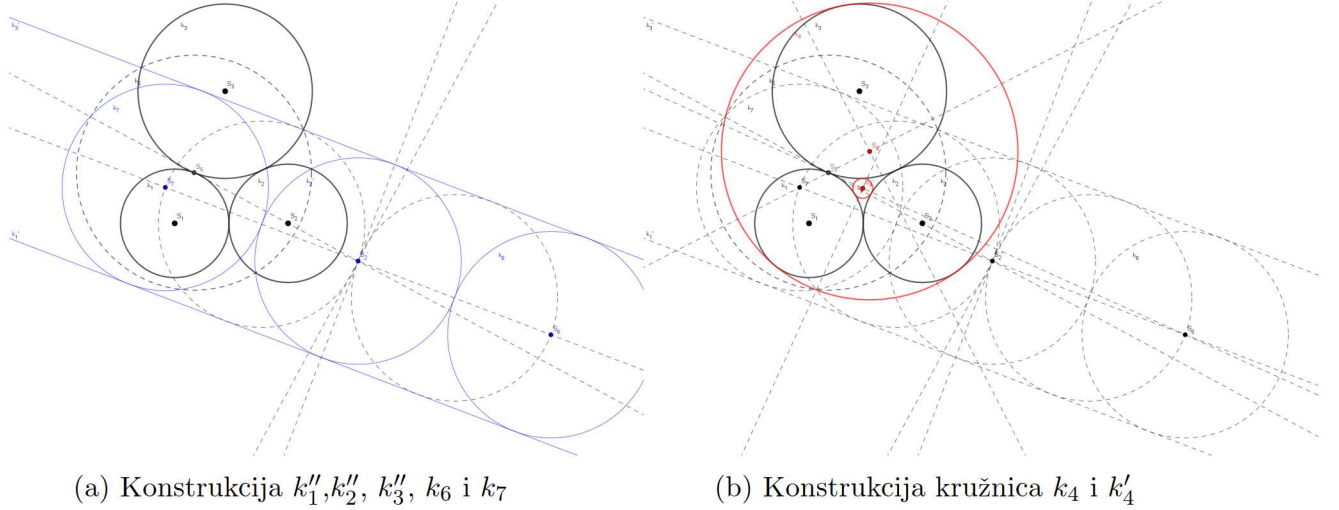


Slika 27: Kružnice  $k_1, k_2, k_3, k_4$ .

Kružnica  $k_1$  se inverzijom preslika u pravac  $k'_1$ , kružnica  $k_3$  u pravac  $k'_3$  a kružnica  $k_2$  u kružnicu  $k'_2(S'_2, r'_2)$ . Središte kružnice  $k_5$  inverzije  $\sigma$  je diralište kružnica  $k_1$  i  $k_3$ , te su pravci  $k'_1$  i  $k'_3$  paralelni, a kružnica  $k'_2$  dira pravce  $k'_1$  i  $k'_3$  kao na Slici 28a. Možemo vidjeti da postoje dvije kružnice t.d. diraju pravce  $k'_1$  i  $k'_3$  i kružnicu  $k'_2$ . Te dvije kružnice su  $k_6(S_6, r'_2)$  i  $k_7(S_7, r'_2)$ , pri čemu točke  $S_6$  i  $S_7$  leže na geometrijskom središtu točaka jednako udaljenih od pravaca  $k'_1$  i  $k'_3$ , te je  $d(S'_2, S_6) = d(S'_2, S_7) = r'_2$ . Preslikamo kružnice  $k_6$  i  $k_7$  inverzijom  $\sigma$  i dobijemo kružnice  $k_4$  i  $k'_4$  koje diraju kružnice  $k_1(S_1, r_1), k_2(S_2, r_2)$  i  $k_3(S_3, r_3)$ .

□





Slika 28: Konstrukcija kružnica koje diraju tri zadane kružnice.

Znamo da za zakrivljenosti  $\kappa_i$  kružnica  $k_i, i = 1, 2, 3, 4$  koje se međusobno diraju vrijedi

$$(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 = 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2),$$

te da postoje točno dvije kružnice  $k_4$  i  $k_4'$  koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$ , pri čemu se kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  međusobno diraju. Sada možemo izračunati koliko iznose zakrivljenosti kružnica  $k_4$  i  $k_4'$ .

$$2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2) = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 + 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4$$

$$\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2 = 2\kappa_1\kappa_2 + 2\kappa_1\kappa_3 + 2\kappa_1\kappa_4 + 2\kappa_2\kappa_3 + 2\kappa_2\kappa_4 + 2\kappa_3\kappa_4$$

$$\kappa_4^2 - 2\kappa_4(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3) = 0$$

$$\kappa_4 = \frac{2(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) \pm \sqrt{4(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 - 4(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3))}}{2}$$

$$= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm \sqrt{(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3)^2 - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 - 2(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3))}$$

$$= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + 4(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3) - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)}$$

$$= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm \sqrt{4(\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3)}$$

$$= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \pm 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$$

Dakle, zakrivljenosti kružnica  $\kappa_4$  i  $\kappa_4'$  koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  su:

$$\kappa_4 = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}$$

$$\kappa_4' = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}. \quad (7)$$

Apolonijev skup je fraktal<sup>5</sup> koji se sastoji od kružnica. U Apolonijevom skupu svaka kružnica u skupu dira susjedne tri kružnice. Descartesova četvorka je svaka četvorka  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$

<sup>5</sup>Geometrijske objekte kojima je fraktalna dimenzija veća od topološke dimenzije nazivamo fraktalima.

koja zadovoljava Descartesovu jednadžbu  $(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 = 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2)$ , pri čemu su  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  i  $\kappa_4$  zakrivljenosti četiri kružnice koje se međusobno diraju. Ako su zakrivljenosti kružnica koje pripadaju Apolonijevom skupu iz skupa cijelih brojeva, tada Apolonijev skup nazivamo cjelobrojnim.

**Teorem 4.4.** *Ako početne četiri kružnica koje se međusobno diraju u Apolonijevom skupu imaju cjelobrojne zakrivljenosti, tada sve kružnice u Apolonijevom skupu imaju cjelobrojne zakrivljenosti.*

*Dokaz.* Neka su  $k_1, k_2$  i  $k_3$  kružnice koje se međusobno diraju, te  $\kappa_1, \kappa_2$  i  $\kappa_3$  njihove zakrivljenosti. Prema teoremu 4.3 postoje kružnice  $k_4$  i  $k'_4$  zakrivljenosti  $\kappa_4$  i  $\kappa'_4$  koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$ . Neka su  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$  početne četiri kružnice u Apolonijevom skupu, te neka su  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \in \mathbb{Z}$ . Prema relaciji (7) vrijedi :

$$\begin{aligned}\kappa_4 &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} \\ \kappa'_4 &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3}.\end{aligned}$$

Tada je

$$\begin{aligned}\kappa_4 + \kappa'_4 &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} + \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} \\ &= 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3.\end{aligned}$$

$$\kappa'_4 = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 - \kappa_4 \in \mathbb{Z}.$$

□

Kada imamo tri kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  koje se međusobno diraju, tada možemo odrediti četvrtu kružnicu  $k_4$  koja ih dira iznutra. Apolonijev skup će biti određen s kružnicama  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$ , pri čemu će ostale kružnice koje pripadaju Apolonijevom skupu biti unutar kružnice  $k_4$ .

**Primjer 4.1.** *Neka su  $k_1, k_2$  i  $k_3$  kružnice koje se diraju, te  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$  zakrivljenosti kružnica  $k_1, k_2, k_3$  redom. Neka je  $\kappa_1 = 21, \kappa_2 = 24, \kappa_3 = 28$ . Prema relaciji (7), kružnice  $k_4$  i  $k'_4$  koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  imaju zakrivljenosti :*

$$\begin{aligned}\kappa_4 &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} = 21 + 24 + 28 - 2\sqrt{21 \cdot 24 + 21 \cdot 28 + 24 \cdot 28} \\ &= 73 - 2\sqrt{504 + 588 + 672} = 73 - 2\sqrt{1764} = 73 - 2 \cdot 42 = 73 - 84 = -11\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa'_4 &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_3 + \kappa_2\kappa_3} = 21 + 24 + 28 + 2\sqrt{21 \cdot 24 + 21 \cdot 28 + 24 \cdot 28} \\ &= 73 + 2\sqrt{504 + 588 + 672} = 73 + 2\sqrt{1764} = 73 + 2 \cdot 42 = 73 + 84 = 157.\end{aligned}$$

*Kružnica  $k_4$  ima negativnu zakrivljenost zato što dira kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  iznutra. Zakrivljenosti kružnica  $k_5$  i  $k'_5$  koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_4$  su:*

$$\begin{aligned}\kappa_5 &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_2\kappa_4} = 21 + 24 - 11 - 2\sqrt{21 \cdot 24 - 21 \cdot 11 - 24 \cdot 11} \\ &= 34 - 2\sqrt{504 - 231 - 264} = 34 - 2\sqrt{9} = 34 - 2 \cdot 3 = 34 - 6 = 28\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa'_5 &= \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_4 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_2 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_2\kappa_4} = 21 + 24 - 11 + 2\sqrt{21 \cdot 24 - 21 \cdot 11 - 24 \cdot 11} \\ &= 34 + 2\sqrt{504 - 231 - 264} = 34 + 2\sqrt{9} = 34 + 2 \cdot 3 = 34 + 6 = 40.\end{aligned}$$

Primjetimo,  $k_5$  je zapravo kružnica  $k_3$ , kao što možemo vidjeti na Slici 29. Zakrivljenosti kružnica  $k_6$  i  $k'_6$  koje diraju kružnice  $k_2$ ,  $k_3$  i  $k_4$  su:

$$\begin{aligned}\kappa_6 &= \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 - 2\sqrt{\kappa_2\kappa_3 + \kappa_2\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4} = 24 + 28 - 11 - 2\sqrt{24 \cdot 28 - 24 \cdot 11 - 28 \cdot 11} \\ &= 41 - 2\sqrt{672 - 264 - 308} = 41 - 2\sqrt{100} = 41 - 2 \cdot 10 = 41 - 20 = 21\end{aligned}$$

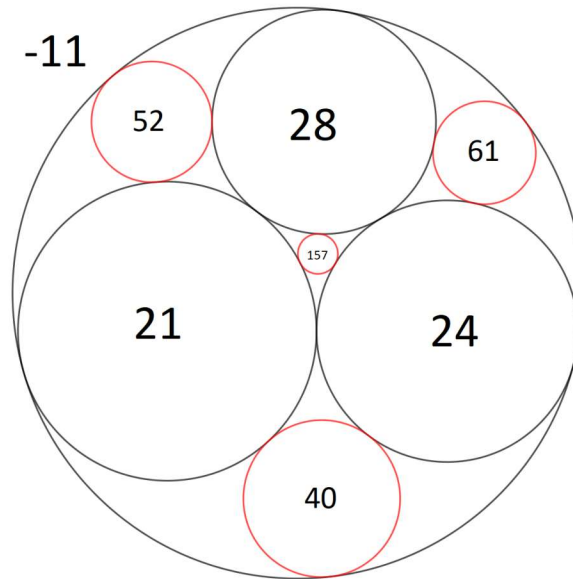
$$\begin{aligned}\kappa'_6 &= \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 + 2\sqrt{\kappa_2\kappa_3 + \kappa_2\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4} = 24 + 28 - 11 + 2\sqrt{24 \cdot 28 - 24 \cdot 11 - 28 \cdot 11} \\ &= 41 + 2\sqrt{672 - 264 - 308} = 41 + 2\sqrt{100} = 41 + 2 \cdot 10 = 41 + 20 = 61.\end{aligned}$$

Zakrivljenosti kružnica  $k_7$  i  $k'_7$  koje diraju kružnice  $k_1$ ,  $k_3$  i  $k_4$  su:

$$\begin{aligned}\kappa_7 &= \kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4 - 2\sqrt{\kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4} = 21 + 28 - 11 - 2\sqrt{21 \cdot 28 - 21 \cdot 11 - 28 \cdot 11} \\ &= 38 - 2\sqrt{588 - 231 - 308} = 38 - 2\sqrt{49} = 38 - 2 \cdot 7 = 38 - 14 = 24\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\kappa'_7 &= \kappa_1 + \kappa_3 + \kappa_4 + 2\sqrt{\kappa_1\kappa_3 + \kappa_1\kappa_4 + \kappa_3\kappa_4} = 21 + 28 - 11 + 2\sqrt{21 \cdot 28 - 21 \cdot 11 - 28 \cdot 11} \\ &= 38 + 2\sqrt{588 - 231 - 308} = 38 + 2\sqrt{49} = 38 + 2 \cdot 7 = 38 + 14 = 52.\end{aligned}$$

Kao što možemo vidjeti na Slici 29, kružnica  $k_6$  je zapravo kružnica  $k_1$ , a kružnica  $k_7$  je zapravo kružnica  $k_2$ . Također, pošto su zakrivljenosti početnih kružnica u Apolonijevom skupu  $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4 \in \mathbb{Z}$ , tada su i zakrivljenosti ostalih kružnica u ovom Apolonijevom skupu cjelobrojne.



Slika 29: Kružnice  $k_1, k_2, k_3, k_4, k'_4, k'_5, k'_6, k'_7$ .

## 4.2. Broj kružnica u Apolonijevom skupu

Neka je  $P$  Apolonijev skup,  $k$  kružnica u Apolonijevom skupu,  $r$  radijus kružnice  $k$  i  $\kappa$  zakrivljenost kružnice  $k$ . Neka je  $l(k)$ ,  $l \geq 1$  generacija u kojoj se kružnica  $k$  prvi put pojavljuje u Apolonijevom skupu,  $N_u(l)$  ukupan broj kružnica u Apolonijevom skupu u  $l$ -toj generaciji te  $N_p(l)$  broj kružnica koje se pojavljuju prvi put u  $l$ -toj generaciji.

Za  $l = 1$ , tj. u prvoj generaciji imamo početne četiri kružnice  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$  koje se diraju. Dakle, broj kružnica u 1. generaciji je 4.

Za  $l = 2$  tražimo kružnice koje diraju po tri od četiri početne. Kružnice koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  su  $k_4$  i  $k_5$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_4$  su  $k_3$  i  $k_6$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_1, k_3$  i  $k_4$  su  $k_2$  i  $k_7$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_2, k_3$  i  $k_4$  su  $k_1$  i  $k_8$ . Sada imamo osam kružnica više u Apolonijevom skupu, tj. broj kružnica u 2. generaciji je  $4 + 8 = 12$ .

Za  $l = 3$  tražimo kružnice koje diraju po tri od osam kružnica u prvoj generaciji. Kružnice koje diraju kružnice  $k_1, k_6$  i  $k_4$  su  $k_4$  i  $k_9$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_6, k_2$  i  $k_4$  su  $k_4$  i  $k_{10}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_2, k_8$  i  $k_4$  su  $k_4$  i  $k_{11}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_8, k_3$  i  $k_4$  su  $k_4$  i  $k_{12}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_3, k_7$  i  $k_4$  su  $k_4$  i  $k_{13}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_7, k_1$  i  $k_4$  su  $k_4$  i  $k_{14}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_5$  su  $k_3$  i  $k_{15}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_1, k_3$  i  $k_5$  su  $k_2$  i  $k_{16}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_2, k_3$  i  $k_5$  su  $k_1$  i  $k_{17}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_6, k_1$  i  $k_2$  su  $k_4$  i  $k_{18}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_8, k_2$  i  $k_3$  su  $k_4$  i  $k_{19}$ . Kružnice koje diraju kružnice  $k_7, k_3$  i  $k_1$  su  $k_4$  i  $k_{20}$ . Sada imamo 24 kružnice više u Apolonijevom skupu, tj. broj kružnica u 3. generaciji je  $12 + 24 = 36$ .

Dakle, u 1. generaciji imamo 4 kružnice, u 2. generaciji  $12 = 4 \cdot 3$  kružnica, u 3. generaciji  $36 = 4 \cdot 9 = 4 \cdot 3^2$  kružnica. Broj kružnica u  $l$ -toj generaciji je  $4 \cdot 3^{l-1}$ . Primjetimo,  $N_u(l) = 4 \cdot 3^{l-1} = 3 \cdot 4 \cdot 3^{l-2} = 3 \cdot N_u(l-1)$ .

Dokaz matematičkom indukcijom

1. korak: provjeravamo dali je tvrdnja točna za  $l=1$ .

$$N_u(1) = 4 \cdot 3^{1-1} = 4 \cdot 3^0 = 4$$

2. korak: pretpostavimo da za  $l = k$  tvrdnja vrijedi.

$$N_u(k) = 4 \cdot 3^{k-1}$$

3. korak: dokazujemo da za  $l = k + 1$  vrijedi tvrdnja, tj.  $N_u(k + 1) = 4 \cdot 3^k$ .

$$N_u(k + 1) = 3 \cdot N_u(k) = 3 \cdot 4 \cdot 3^{k-1} = 4 \cdot 3^k.$$

Sada kada znamo koliko imamo kružnica u svakoj generaciji, zanima nas koliko se kružnica pojavljuje prvi put u svakoj generaciji. U 1. generaciji imamo četiri početne kružnice. U 2. generaciji pojavljuje se još osam kružnica, od koji se samo kružnice  $k_5, k_6, k_7$  i  $k_8$  pojavljuju prvi put. U 3. generaciji pojavljuje se još 24 kružnice, od koji se samo kružnice  $k_9, k_{10}, k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{15}, k_{16}, k_{17}, k_{18}, k_{19}$  i  $k_{20}$  pojavljuju prvi put. Dakle, u 2. generaciji 4 kružnice koje se pojavljuju prvi put, u 3. generaciji  $12=4 \cdot 3$  kružnica. Broj kružnica koje

se pojavljuju prvi put u  $l$ -toj generaciji je  $4 \cdot 3^{l-2}$ ,  $l > 1$ . Primjetimo,  $N_p(l) = 4 \cdot 3^{l-2} = 3 \cdot 4 \cdot 3^{l-3} = 3 \cdot N_p(l-1)$ .

Dokaz matematičkom indukcijom

1. korak: provjeravamo dali je tvrdnja točna za  $l=2$ .

$$N_p(2) = 4 \cdot 3^{2-2} = 4 \cdot 3^0 = 4$$

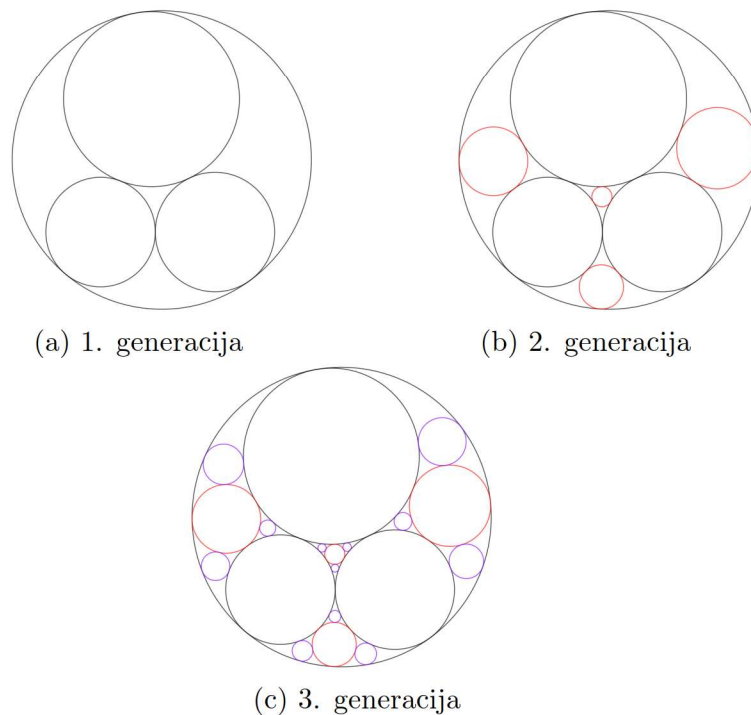
2. korak: pretpostavimo da za  $l = k$  tvrdnja vrijedi.

$$N_p(k) = 4 \cdot 3^{k-2}$$

3. korak: dokazujemo da za  $l = k + 1$  vrijedi tvrdnja, tj.  $N_p(k + 1) = 4 \cdot 3^{k-1}$ .

$$N_p(k + 1) = 3 \cdot N_p(k) = 3 \cdot 4 \cdot 3^{k-2} = 4 \cdot 3^{k-1}.$$

Kružnice koje se prvi puta pojavljuju u 2. generaciji označene su crvenom bojom na Slici 30b, a kružnice koje se prvi puta pojavljuju u 3. generaciji označene su ljubičastom bojom na Slici 30c.



Slika 30: Generacije kružnica u skupu  $P$ .

Drugi način za određivanje broja kružnica u Apolonijevom skupu je pomoću veličine zakrivljenosti kružnica koje pripadaju cjelobrojnom Apolonijevom skupu  $P$ . Neka je

$$N(x) = |\{k \in P : \kappa(k) \leq x\}|,$$

te  $\delta(P)$  konstanta,  $1 \leq \delta(P) \leq 2$ .

**Teorem 4.5.** Neka je  $N(x) = |\{k \in P : \kappa(k) \leq x\}|$ . Tada je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log N(x)}{\log x} = \delta(P).$$

Dokaz teorema možemo vidjeti u [1]. Numerički rezultati sugeriraju da je  $\delta = 1.30568$ . Neka su  $R$  četvorke  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$  Descartesove četvorke najmanjih zakrivljenosti u Apolonijevom skupu  $P$ , te  $V(\kappa) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4$ .

**Definicija 4.1.** Četvorka zakrivljenost  $\kappa = (\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$  s  $V(\kappa) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 > 0$  je  $R$  četvorka ako vrijedi da je  $\kappa_1 \leq 0 \leq \kappa_2 \leq \kappa_3 \leq \kappa_4$  i  $\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 \geq \kappa_4$ .

Prim  $R$  četvorke su  $R$  četvorke kojima je najveći zajednički djelitelj broj 1.

**Teorem 4.6.** Za  $n > 1$  broj  $N_R(-n)$  prim cjelobrojnih  $R$  četvorki je

$$N_R(-n) = \frac{n}{4} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{\chi_4(p)}{p}\right) + 2^{\omega(n) - \delta_n - 1},$$

gdje je  $\chi_4(n) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$  za neparne  $n$  te 0 inače,  $\omega(n)$  broj različitih prim brojeva koji dijele  $n$ ,  $\delta_n$  je 1 za  $n \equiv 2 \pmod{4}$  te 0 za  $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ .

Dokaz teorema možemo vidjeti u [9, str. 25].

Neka je  $n = p$ , pri čemu je  $p$  prim broj. Pošto je  $p$  prost broj i  $n > 1$  te je stoga i  $p > 1$  i  $\omega(n) = 1$ . Tada je  $p \equiv 1 \pmod{4}$  ili  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . Za  $p \equiv 1 \pmod{4}$  vrijedi da  $4|(p-1)$ , te postoji  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $p-1 = 4 \cdot k$  te je  $p = 4 \cdot k + 1$ . Tada je  $\chi_4(p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4k}{2}} = (-1)^{2k} = 1$ ,  $\omega(n) = 1$ ,  $\delta_n = 0$ . Tada je

$$N_R(-p) = \frac{p}{4} \left(1 - \frac{1}{p}\right) + 2^{1-0-1} = \frac{p}{4} \left(\frac{p-1}{p}\right) + 1 = \frac{1}{4} \cdot (p-1) + 1 = \frac{p-1+4}{4} = \frac{p+3}{4}.$$

Za  $p \equiv 3 \pmod{4}$  vrijedi da  $4|(p-3)$ , te postoji  $k \in \mathbb{N}$  takav da je  $p-3 = 4 \cdot k$  te je  $p = 4 \cdot k + 3$ . Tada je  $\chi_4(p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{4k+3-1}{2}} = (-1)^{\frac{4k+2}{2}} = (-1)^{2k+1} = -1$ ,  $\omega(n) = 1$ ,  $\delta_n = 0$ . Tada je

$$N_R(-p) = \frac{p}{4} \left(1 + \frac{1}{p}\right) + 2^{1-0-1} = \frac{p}{4} \left(\frac{p+1}{p}\right) + 1 = \frac{1}{4} \cdot (p+1) + 1 = \frac{p+1+4}{4} = \frac{p+5}{4}.$$

$$\mathbf{N}_R(-\mathbf{P}) = \begin{cases} \frac{p+3}{4} & , \text{ ako je } p \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{p+5}{4} & , \text{ ako je } p \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$$

### 4.3. Apolonijeva grupa

Neka su  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$  četiri kružnice koje se međusobno diraju, pri čemu kružnica  $k_4$  dira kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  iznutra. Kružnice  $k_1, k_2, k_3$  i  $k_4$  su početne kružnice u Apolonijevm skupu. Ako pogledamo kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$  koje se međusobno diraju, prema Teoremu 4.3 postoje jos dvije kružnice  $k_4$  i  $k'_4$  koje diraju kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_3$ . Tada imamo novu konfiguraciju od četiri kružnice  $k_1, k_2, k_3$  i  $k'_4$  koje se međusobno diraju. Prema (7) slijedi

da je  $\kappa'_4 = 2\kappa_1 + 2\kappa_2 + 2\kappa_3 - \kappa_4$ , što možemo zapisati u matricnom zapisu kao  $A = B \cdot S_4$  pri čemu je  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa'_4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$  i

$$\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ako pogledamo kružnice  $k_2, k_3$  i  $k_4$ , tada postoje dvije kružnice  $k_1$  i  $k'_1$  koje ih diraju. Tada je  $C = B \cdot S_1$ , pri čemu je  $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} \kappa'_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$  i

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako pogledamo kružnice  $k_1, k_3$  i  $k_4$ , tada postoje dvije kružnice  $k_2$  i  $k'_2$  koje ih diraju. Tada je  $D = B \cdot S_2$ , pri čemu je  $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa'_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$  i

$$\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ako pogledamo kružnice  $k_1, k_2$  i  $k_4$ , tada postoje dvije kružnice  $k_3$  i  $k'_3$  koje ih diraju. Tada je  $E = B \cdot S_3$ , pri čemu je  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa'_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$ ,  $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 & \kappa_4 \end{pmatrix}$  i

$$\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrice  $S_i, i = 1, 2, 3, 4$  su kvadratne matrice. Determinanta matrica  $S_i, i = 1, 2, 3, 4$  je  $-1$ , te su matrice  $S_i, i = 1, 2, 3, 4$  regularne matrice ranga 4.

$$\det(\mathbf{S}_1) = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \det(\mathbf{S}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$\det(\mathbf{S}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1, \det(\mathbf{S}_4) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Pošto su matrice  $S_i, i = 1, 2, 3, 4$  regularne, tada postoje inverzi matrica  $S_i, i = 1, 2, 3, 4$ .

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^2 = I$$

$S_i^2 = I, i = 1, 2, 3, 4$ , tj. matrice  $S_i$  su same sebi inverzne.

**Definicija 4.2.** Apolonijeva grupa  $A$  je podgrupa  $4 \times 4$  cjelobrojnih matrica determinante  $\pm 1$  ( $GL_4(\mathbb{Z})$ ) generirana s  $S_1, S_2, S_3$  i  $S_4$ .

**Primjer 4.2.** Neka je  $G$  grupa,

$$G = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_1S_2, S_1S_3, S_1S_4, S_2S_3, S_2S_4, S_3S_4, S_4S_3, S_3S_2, S_4S_2\}.$$

Neka je  $P_3$  Apolonijev skup u kojemu imamo 3. generacije kružnica koje se diraju, pri čemu je  $R$  četvorka  $(-11, 21, 24, 28)$ . Pomnožimo li  $R$  četvorku s elementima skupa  $G$  dobit ćemo sve Descartesove četvorke zakrivljenosti kružnica koje se diraju u skupu  $P_3$ .

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_1 = (157 \ 21 \ 24 \ 28)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_2 = (-11 \ 61 \ 24 \ 28)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_3 = (-11 \ 21 \ 52 \ 28)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_4 = (-11 \ 21 \ 24 \ 40)$$

Sada smo dobili nove četvorke zakrivljenosti kružnica koje se diraju u 2. generaciji.

$$\mathbf{S}_1\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_1\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_1\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 1 & 6 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_2\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_2\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3\mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_4\mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_4\mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



$$\mathbf{S}_4\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_3\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{S}_2\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_1S_2 = (157 \ 397 \ 24 \ 28)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_1S_3 = (157 \ 21 \ 388 \ 28)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_1S_4 = (157 \ 21 \ 24 \ 376)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_2S_3 = (-11 \ 61 \ 132 \ 28)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_2S_4 = (-11 \ 61 \ 24 \ 120)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_3S_4 = (-11 \ 21 \ 52 \ 96)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_4S_3 = (-11 \ 21 \ 76 \ 40)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_3S_2 = (-11 \ 117 \ 52 \ 28)$$

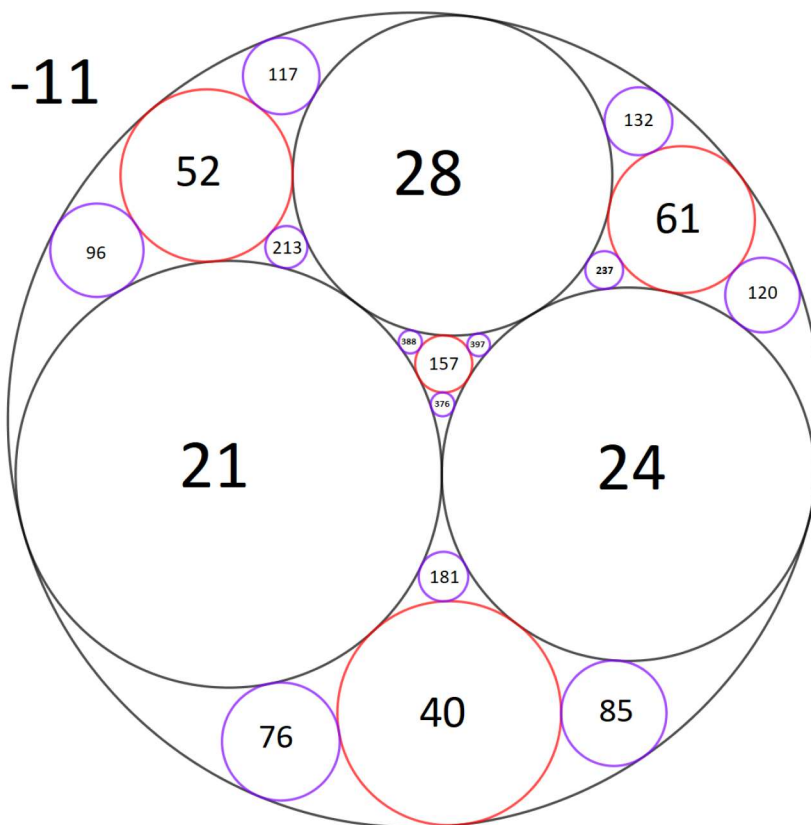
$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_4S_2 = (-11 \ 85 \ 24 \ 40)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_4S_1 = (181 \ 21 \ 24 \ 40)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_3S_1 = (213 \ 21 \ 52 \ 28)$$

$$(-11 \ 21 \ 24 \ 28) \cdot S_2S_1 = (237 \ 61 \ 24 \ 28)$$

Sada smo dobili nove četvorke zakrivljenosti kružnica koje se diraju u 3. generaciji. Na slici 31 prikazane su kružnice i njihove zakrivljenosti. Možemo vidjeti da su elementi grupe  $G$   $4 \times 4$  matrice determinanti 1, te da su  $S_1, S_2, S_3$  i  $S_4$  generatori grupe  $G$ . Dakle,  $G$  je Apolonijeva grupa.



Slika 31: Apolonijev skup  $P_3$ .

#### 4.4. Analogon hipoteze o blizancima

Neka je  $p$  prim broj,  $x \in [2, \infty >$ ,  $\pi(x) : [2, \infty > \rightarrow \mathbb{N}$  funkcija definirana s

$$\pi(x) = \text{card}\{p \in P : p \leq x\}.$$

Dakle, funkcija  $\pi(x)$  broji koliko ima prim brojeva  $p$  koji su manji ili jednaki od broja  $x$ .

**Teorem 4.7.** (Teorem o prim brojevima)

Za funkciju  $\pi$  imamo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x) \ln(x)}{x} = 1;$$

tj. za "velike"  $x$  imamo asiptotsko ponašanje  $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$ .

Jedan od zanimljivih problema u brojanju kružnica u cjelobrojnom Apolonijevom skupu je brojanje kružnica kojima je zakrivljenost prim broj te brojanje prim blizanaca u Apolonijevom skupu. Prim blizanci su dvije kružnice u Apolonijevom skupu koje se diraju i imaju zakrivljenosti koje pripadaju skupu prim brojeva.

**Teorem 4.8.** U svakom cjelobrojnom Apolonijevom skupu ima beskonačno mnogo Prim blizanaca i beskonačno mnogo kružnica čije su zakrivljenosti prim brojevi.

Neka je  $P$  cjelobrojni Apolonijev skup,  $k$  kružnica koje pripadaju skupu  $P$ , te  $r(k)$  radijus i  $\kappa(k)$  zakrivljenost kružnice  $k$ . Neka je

$$\Pi_P(x) = |\{k \in P : \kappa(k) \leq x, \kappa(k) \text{ je prim broj}\}|.$$

Funkcija  $\Pi_P(x)$  broji koliko ima kružnica  $k$  čije su zakrivljenosti  $\kappa(k)$  prim brojevi i manje ili jednake broju  $x$ . Definiramo

$$\psi_P(x) = \sum_{k \in P} \log \kappa(k).$$

Kada  $x \rightarrow \infty$  tada je  $\Pi_P(x) \sim \frac{\psi_P(x)}{\log(x)}$ .

Prisjetimo se,  $N_P(x) = |\{k \in P : \kappa(k) \leq x\}|$ .

Neka su  $k_1$  i  $k_2$  dvije kružnice koje se diraju i zakrivljenosti  $\kappa(k_1)$  i  $\kappa(k_2)$  su im prim brojevi i  $\kappa(k_1), \kappa(k_2) \leq x$ , tj. kružnice  $k_1$  i  $k_2$  su prim blizanci čije su zakrivljenosti manje ili jednake broju  $x$ . Tada je

$$\Pi_P^{(2)}(x) = |\{k_1, k_2 \in P | \kappa(k_1), \kappa(k_2) \leq x, \kappa(k_1), \kappa(k_2) \text{ je prim broj}\}|.$$

Funkcija  $\Pi_P^{(2)}(x)$  broji koliko ima Prim blizanaca čije su zakrivljenosti  $\kappa(k_1)$  i  $\kappa(k_2)$  prim brojevi i manje ili jednake broju  $x$ . Definiramo

$$\psi_P^{(2)}(x) = \sum_{k_1, k_2 \in P} \log \kappa(k_1) \log \kappa(k_2).$$

Neka je  $N_P^{(2)}(x) = |\{k_1, k_2 \in P | \kappa(k_1), \kappa(k_2) \leq x \text{ i } k_1, k_2 \text{ se diraju}\}|$ .

**Hipoteza 4.1.** *Za bilo koji prim cjelobrojni Apolonijev skup  $P$  vrijedi da*

$$\frac{\psi_P(x)}{N_P(x)} \rightarrow L(2, \chi_4)$$

i

$$\frac{\psi_P^{(2)}(x)}{N_P^{(2)}(x)} \rightarrow \alpha,$$

gdje je

$$L(2, \chi_4) = \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} (1 - p^{-2})^{-1} \cdot \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} (1 + p^{-2})^{-1} = 0.9159\dots,$$

$$\alpha = \frac{2}{3} \cdot \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} (1 - p^{-2})^{-2} \cdot \prod_{p \equiv 3 \pmod{4}} (1 + p^{-2})^{-2} \cdot (1 - 2p(p-1)^{-2}) = 0.460\dots$$

Kao što možemo primjetiti, konstante  $L(2, \phi_4)$  i  $\alpha$  ne ovise o skupu  $P$ . Više o prethodnoj hipotezi možemo vidjeti u [8].

## 5. Daljnje implikacije Apolonijevog problema

Iako se na prvi pogled možda tako ne čini, Apolonijev problem je iznimno važan. Osim što je bitan u geometriji, povezan je i sa drugim problemima u matematici te čak ima primjenu u sadašnjem svijetu.

Najpoznatija primjena Apolonijevog problema je u hiperboličkoj trilateraciji. Hiperbolička trilateracija je postupak kojega primjenjujemo da bi odredili položaj uz poznate razlike u udaljenostima između barem tri točke i našeg položaja. Hiperboličkom trilateracijom se koriste Decca Navigator System i LORAN. Decca Navigator System je hiperbolički radio navigacijski sustav, niskofrekventan i dugog dometa, pomoću kojega su brodovi i avioni mogli odrediti svoj položaj primajući radio signal s odašiljačke stanice. Brod bi primio signal s barem tri odašiljačke stanice, te bi imali hiperbole<sup>6</sup> čiji fokusi predstavljaju odašiljačke stanice. Presjekom tri hiperbole bi dobili točan položaj koji tražimo. LORAN je hiperbolički radio navigacijski sustav dugog dometa koji je pomoću signala s barem tri navigacijske postaje određivao položaj broda ili aviona. Ako bi htjeli odrediti položaj aviona, mogli bi ga odrediti uspoređujući razlike u vremenu dolaska signala aviona do četiri različitih postaja. Na sličan način, trodimenzionalni generalizirani Apolonijev problem<sup>7</sup> ima primjenu i u funkcioniranju GPS, koja je opisana u [13]. Globalni pozicijski sustav funkcionira tako da satelit mjeri udaljenost od našega položaja. Kako ta informacija putuje do nas, naš položaj se u međuvremenu mijenja te zbog te vremenske razlike dobijemo udaljenost koja je malo dulja ili kraća od stvarne udaljenosti. Zato se gleda udaljenost od još barem tri satelita. Presjekom sfera čije je središte satelit a radijus udaljenost satelita od prijemnika na traženoj lokaciji dobit ćemo traženu lokaciju. Više o navigacijskim sustavima možemo vidjeti u [11].

**Primjer 5.1.** *Neka su dana tri svjetionika  $A, B$  i  $C$  takvi da je  $|AB| = 1.5, |AC| = 2$ . Brod se nalazi unutar trokuta  $\triangle ABC$ , pri čemu je  $\triangle ABC$  pravokutan. Poznato je da se intenziteti svjetlosti svjetionika odnose u omjerima  $36:9:4$  s pozicije broda, te da svjetionici imaju ista svjetla. Sada ćemo pomoću Apolonijevih kružnica odrediti položaj broda.*

*Zbog zakona inverznih kvadrata vrijedi: intenzitet  $= \frac{G}{r^2}$ , pri čemu je  $G$  jačina svjetlosti a  $r$  udaljenost našega broda od izvora svjetlosti. Kako je jačina svjetlosti jednaka za sve svjetionike imamo:  $\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{\text{intenzitet}_2}{\text{intenzitet}_1} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \rightarrow |AS| : |BS| = 1 : 2$  i  $\frac{r_1^2}{r_3^2} = \frac{\text{intenzitet}_3}{\text{intenzitet}_1} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \rightarrow |AS| : |CS| = 1 : 3$  te se udaljenosti naših svjetionika od broda odnose kao  $|AS| : |BS| : |CS| = 1 : 2 : 3$  pri čemu točka  $S$  označava položaj broda.*

*Znamo da za Apolonijevu kružnicu vrijedi da je omjer udaljenosti od dvije zadane točke  $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$  i točaka koje pripadaju kružnici konstantan. Radijus Apolonijeve kružnice je  $r_1 = \frac{p \cdot q \cdot |PQ|}{|p^2 - q^2|}$  pri čemu je  $\frac{p}{q}$  omjer udaljenosti od dvije zadane točke  $P(x_P, y_P), Q(x_Q, y_Q)$  i točaka koje pripadaju kružnici a  $x$  koordinata središta kružnice  $x = \frac{(\frac{p}{q})^2 \cdot x_Q - x_P}{(\frac{p}{q})^2 - 1}$ . Tražimo Apolonijevu kružnicu  $k_1$  za koju je omjer udaljenosti od točaka  $A(x_A, y_A)$  i  $B(x_B, y_B)$  i točaka koje pripadaju kružnici  $1 : 2$ . Radijus te kružnice je  $r_1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 1.5}{|1^2 - 2^2|} = \frac{3}{3} = 1$  a  $x$  koordinata*

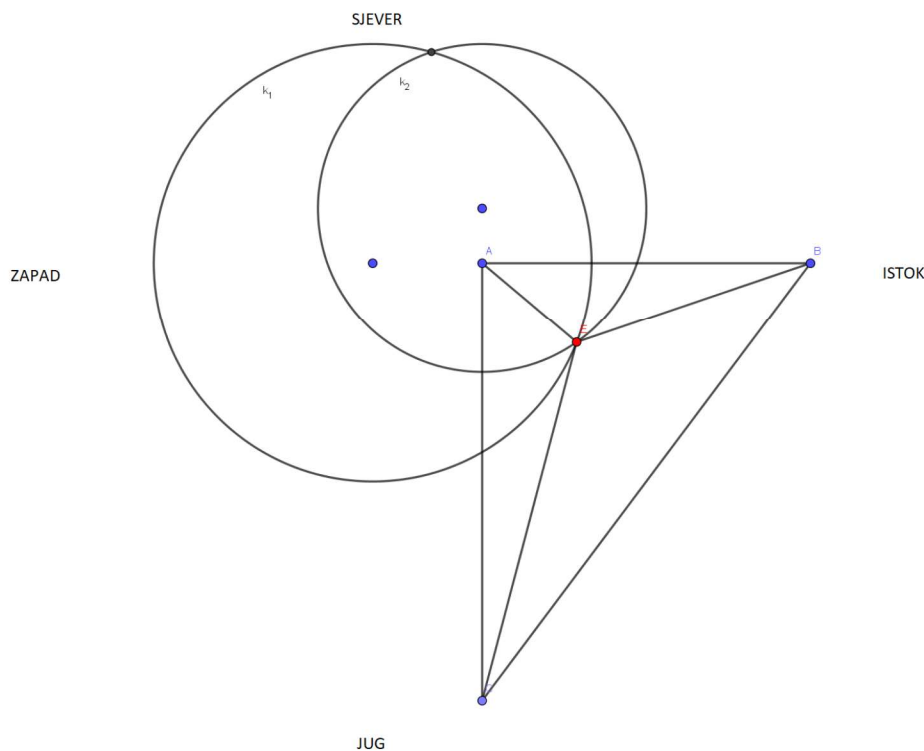
<sup>6</sup>Neka su dane točke  $F_1$  i  $F_2$ . Hiperbola je skup točaka u ravnini za koje vrijedi  $d(F_1, F_2) = 2a = \text{const}$ . Tjemena hiperbole su točke  $T_1(a, 0)$  i  $T_2(-a, 0)$ .

<sup>7</sup>problem pronalaska sfere koja dira tri dane sfere

središta kružnice je  $x_1 = \frac{(\frac{1}{2})^2 \cdot x_B - x_A}{(\frac{1}{2})^2 - 1} = \frac{\frac{1}{4} \cdot (x_B - x_A) - \frac{3}{4} \cdot x_A}{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} + x_A$ , te je  $x_1 - x_A = -\frac{1}{2}$ . Središte kružnice  $k_1$  nalazi se za 0.5 zapadno od svjetionika A.

Ponovimo isti postupak za točke A i C. Tražimo Apolonijevu kružnicu  $k_2$  za koju je omjer udaljenosti od točaka  $A(x_A, y_A)$  i  $C(x_C, y_C)$  i točaka koje pripadaju kružnici 1 : 3. Radijus te kružnice je  $r_2 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 2}{|1^2 - 3^2|} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$  a x koordinata središta kružnice  $x_2 = \frac{(\frac{1}{3})^2 \cdot x_C - x_A}{(\frac{1}{3})^2 - 1} = \frac{\frac{1}{9} \cdot (x_C - x_A) - \frac{8}{9} \cdot x_A}{-\frac{8}{9}} = -\frac{1}{4} + x_A$ , te je  $x_2 - x_A = -\frac{1}{4}$ . Središte kružnice  $k_2$  nalazi se za 0.25 sjeverno od svjetionika A.

Presjekom kružnice  $k_1$  i  $k_2$  se sijeku u dvije točke, te se naš brod nalazi u jednoj od njih. Pošto znamo da je brod unutar trokuta  $\triangle ABC$ , uzimamo sjecište koje se nalazi unutar trokuta  $\triangle ABC$ . Više o ovom primjeru možemo vidjeti u [4].



Slika 32: Svjetionici i brod.

## Literatura

- [1] D. W. Boyd, *The Sequence of Radii of the Apollonian Packing*, Mathematics of Computation, 39(1982), 249-254
- [2] C. H. Chepmell, G. I. Hopkins, *Problem 2745*, The American Mathematical Monthly, 27(1920), 331-332
- [3] R. Courant, H. Robbins, *What is mathematics?*, Oxford University Press, 1996
- [4] J. Cox, M. B. Partensky, *Spatial Localization Problem and the Circle of Apollonius*, arXiv:physics/0701146, 2007.
- [5] H. S. M. Coxeter, *The Problem of Apollonius*, The American Mathematical Monthly, 75(1967), 5-15
- [6] Ž. Dadić, *Povijest ideja i metoda u matematici i fizici*, Školska knjiga, Zagreb, 1992
- [7] M. Fraboni, T. Moller, *Fractals in the Classroom*, The Mathematics Teacher, 102(2008), 197-199
- [8] E. Fuchs, K. Sanden, *Some experiments with integral apollonian circle packings*, Experimental Mathematics, 20(2011), 1-29
- [9] R. L. Graham, J. C. Lagarias C. L. Mallows, A. R. Wilks, C. H. Yan, *Apollonian Circle Packings: Number Theory*, J. Number Theory, 100(2003), 1-45
- [10] K. E. Hirst, *The kiss precise*, The Mathematical Gazette, 53(1969), 305-308
- [11] B. Hofmann-Wellenhof, K. Legat, M. Wieser, *Navigation: Principles of Positioning and guidance*, Springer, 2003
- [12] J. Hoshen, *On the Apollonius solutions to the GPS equations*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 1(1999), 99-102
- [13] J. Hoshen, *The GPS equations and the Problem of Apollonius*, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems , 32(1996), 1116 - 1124
- [14] N. Koceić Bilan, N. Smajić, L. Trombetta Burić, *Konstruktivna geometrija u nastavi matematike*, Osječko matematički list, 83(2013), 73-83
- [15] J. C. Lagarias, C. L. Mallows, A. R. Wilks, *Beyond the Descartes Circle Theorem*, The American Mathematical Monthly, 109(2002), 338-361
- [16] D. Mackenzie, *A Tisket, a tasket, an Apollonian Gasket*, American Scientist, 98(2010), 10-14
- [17] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996

- [18] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika*, Školska knjiga, Zagreb, 2004
- [19] D. Pedoe, *On a theorem in Geometry*, The American Mathematical Monthly, 74(1967), 627-640
- [20] P. Sarnak, *Integral Apollonian Packings*, The American Mathematical Monthly, 118(2011), 291-306
- [21] B. Širola, *Distribucija prim brojeva i Reimannova zeta-funkcija; 1. dio*, Math. e, 13(2008)

## Sažetak

U ovome radu proučavati ćemo Apolonijeve kružnice. Na početku ćemo proći kroz osnove konstruktivne geometrije i metodu inverzije kako bi mogli konstruirati neke od slučajeva Apolonijevog problema. Zatim ćemo se upoznati s Apolonijevim skupom. Proći ćemo kroz neka svojstva koja vrijede za četiri kružnice koje se diraju te vidjeti kako saznati broj kružnica u Apolonijevom skupu. Zatim ćemo se upoznati s Apolonijevom grupom i vidjeti analogon hipoteze o blizancima za Apolonijev skup. Na kraju ćemo navesti neke primjene Apolonijevog problema u drugim područjima.

ključne riječi:

geometrijske konstrukcije, kružnice, Apolonijev problem, Apolonijev skup, Apolonijeva grupa, metoda inverzije



## Abstract

In this paper we study Apollonian circles. At the beginning, we touched the basics of constructions in geometry and inversion method so that we could construct some cases of the Apollonian problem. Then, we meet the Apollonian packing. We go through some characteristics that are valid for four circles that are touching each other and see how to find out the number of circles in an Apollonian packing. Then we meet then the Apollonian group and see the analog of the hypothesis about twins for the Apollonian packing. Finally, we adduce some applications of the Apollonian problem in other areas.

Key words:

geometric constructions, circles, Apollonian problem, Apollonian packing, Apollonian group, inversion method

## Životopis

Rođena sam 20. siječnja 1992. godine u Slavonskom Brodu. Obrazovanje započinjem 1998. godine u Osnovno školi "Hugo Badalić" u Slavonskom Brodu. 2006. godine upisujem matematičku gimnaziju "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu te ju završavam 2010. godine. Tada upisujem Preddiplomski studij matematike, smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji završavam 2016. godine. Iste godine upisujem Diplomski studij matematike, smjer financijska matematika i statistika na Sveučilištu J.J. Strossmayera u Osijeku.