Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Lana Kozina

# Dosezi pitagorejske matematike

Diplomski rad

Osijek, 2019.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Lana Kozina

# Dosezi pitagorejske matematike

Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2019.

# Sadržaj

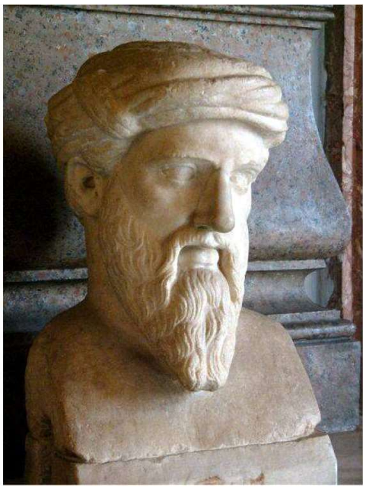
# Uvod

Ponekad se tvrdi da "čistu" matematiku dugujemo Pitagori, stoga se on često naziva prvim "pravim" matematičarom. No tko je on i koliki je njegov utjecaj na ovu znanost? O njegovom životu ne zna se mnogo. Zajednica koju je osnovao vodila je svoj život poštujući strogu tajnost i odanost, stoga nam je Pitagora i danas misteriozna osoba. Budući da su se svi rezultati koje su otkrili pripisivali Pitagori, ne možemo sa sigurnošću tvrditi je li ih zaista dokazao on ili neki drugi pitagorejac. Velik dio života ove zajednice predstavljala je filozofija, osim toga, podrijetlo te riječi dolazi upravo od njih. Prema njima je stvarnost matematička, svijet sastavljen od suprotnosti, a duša je broj koji se pokreće samostalno i utjelovljuje se dok ne dođe do potpunog očišćenja te se može uzdići do jedinstva s božanskim. Za njih su brojevi imali duhovna značenja i predstavljali su velik dio njihove stvarnosti. Došli su do raznih novih dostignuća koja su najznačajnija u području aritmetike, geometrije, glazbe i astronomije. Prema predaji, Pitagori su pažnju privukli skladni zvuci koje su proizvodili udarci čekića o nakovanj. Istražujući tu pojavu, eksperimentirao je na zategnutim žicama i otkrio je da se interval oktave ostvaruje titranjem žica kojima duljine stoje u omjeru $2 : 1$, interval kvinte dobiva se omjerom $3 : 2$, a interval kvarte omjerom $4 : 3$. Ovim otkrićem Pitagora je postavio temelj glazbene teorije, a pitagorejska ljestvica koja proizlazi iz ovih odnosa intervala osnova je za kasnije ljestvice. Navodno je bio izvrstan glazbenik te je koristio glazbu kao sredstvo liječenja bolesnika. U astronomiji su učili da je Zemlja sfera u središtu svemira. Također su uočili nagib Mjesečeve orbite prema Zemljinom ekvatoru. Bili su jedni od prvih koji su shvatili da je Venera kao večernja zvijezda isto što i Venera kao jutarnja zvijezda. Većina matematičkih rezultata koje su otkrili pitagorejci opisana je u djelu *Elementi* koje je napisao grčki matematičar Euklid (330. - 260. pr. Kr.) oko 300. pr. Kr., što ćemo dalje u radu i navesti. Matematika nikada nije predstavljala toliko važan dio života i religije kao što je to bila kod pitagorejaca.

U ovom radu opisat ćemo matematičke pojmove i rezultate koje su pitagorejci poznavali i koje su oni otkrili. Na početku rada napravljen je kratki povijesni pregled u kojem se opisuje život Pitagore te osnutak pitagorejske škole. Također ćemo se upoznati s njihovim vjerovanjima i načinom života. U sljedećem poglavlju navode se i opisuju osnovni pojmovi i rezultati o prirodnim brojevima kojima su se pitagorejci bavili. Riječ je o prostim i složenim brojevima, parnim i neparnim brojevima, savršenim i prijateljskim brojevima te o figurativnim brojevima. Osim toga, pitagorejci su poznavali odnos aritmetičke, geometrijske te harmonijske sredine između dva broja čime se također bavimo u radu. U posljednjem poglavlju saznat ćemo o utjecaju pitagorejaca na području geometrije. Bavit ćemo se Pitagorinim teoremom kao i njegovim obratom. Opisat ćemo pitagorejske trojke i teorem o zbroju kuteva u trokutu kao i njegovu generalizaciju. Upoznat ćemo se s rezultatima pitagorejaca na području geometrijske algebre, saznat ćemo kako su došli do otkrića iracionalnih brojeva te ćemo proučiti pet pravilnih poliedara.

# 1 Pitagora i zajednica pitagorejaca

Pitagora (569. - 475. pr. Kr.) je rođen na grčkom otoku Samosu. Kao dječak je mnogo putovao sa svojim ocem koji je bio trgovac. Na tim putovanjima Pitagora se susreo s raznim učiteljima koji su ga upoznali s filozofijom i znanosti. Bio je dobro obrazovan, a na njega su značajan utjecaj imali Ferekid[1], Tales[2] i Anaksimandar[3]. Oko 535. pr. Kr. Pitagora odlazi u Egipat gdje posjećuje brojne hramove i upoznaje kulturu čiji su mnogi običaji, poput tajnosti svećenstva, vegetarijanstva i težnje čistoći, utjecali na njega te se primjećuju u kasnije osnovanom društvu pitagorejaca. Pitagorejska škola je filozofsko - religiozna škola koju je osnovao Pitagora oko 518. pr. Kr. u Krotonu, a čije sljedbenike nazivamo pitagorejcima. U školi je bilo pravilo da se koriste samo usmenom komunikacijom. Njezini učenici podijeljeni su na članove užeg kruga koji su se nazivali mathematikoi i na članove šireg kruga zvane akousmatikoi. Grčka riječ *mathematikoi* značila je "oni koji su učeni". Ovo je bila prva upotreba riječi *matematika.* S napretkom učenja pitagorejci su primjenjivali ovu riječ za opisivanje aritmetike i geometrije, a njihova primjena predstavljala je temelj za naziv *matematika* u klasičnoj Grčkoj. Mathematikoi su bili stalni članovi koji su živjeli u pitagorejskoj zajednici kao vegetarijanci i bez osobnog vlasništva. Oni su se pretežno bavili matematičkim i znanstvenim radom. Akousmatikoi su bili oni članovi zajednice koji su živjeli u svojim domovima te su smjeli imati osobno vlasništvo, nisu morali biti vegetarijanci, a školu su posjećivali tijekom dana. Oni su se više fokusirali na religiozne aspekte učenja. Iako je ženama u to doba bilo zabranjeno prisustvovati na javnim okupljanima, postoje izvori prema kojima im je dopušteno da dolaze na predavanja i budu članovi ove škole.



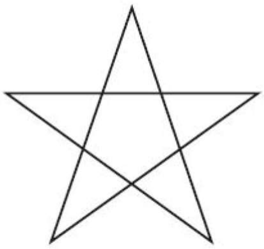
Slika 1: Pitagora

[1]Ferekid sa Sirosa (6. stoljeće pr. Kr.) - grčki filozof
[2]Tales iz Mileta (640. - 547. pr. Kr.) - grčki filozof
[3]Anaksimandar iz Mileta (610. - 546. pr. Kr.) - grčki filozof

Pitagorina uvjerenja koja su morala poštovati svi pitagorejci bila su sljedeća:

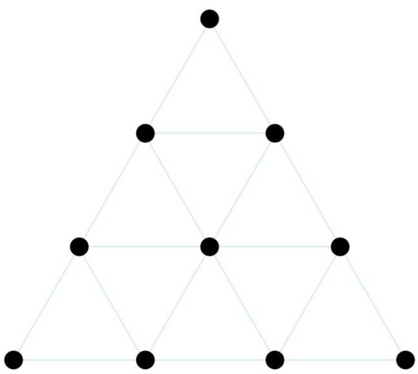
- stvarnost je na svojoj najdubljoj razini po prirodi matematička
- filozofija se može primijeniti za duhovno čišćenje
- duša se može ujediniti s božanstvom
- određeni simboli imaju mistično značenje
- sva braća reda trebaju poštivati strogu tajnost i odanost.

Simbol kojim su se članovi bratstva prepoznavali bio je petokraka zvijezda ili pentagram.



Slika 2: Simbol prepoznavanja pitagorejaca

U središtu zanimanja pitagorejaca bili su osnovni matematički principi, poput koncepcije broja, likova i apstraktna ideja dokaza. Vodeća izreka njihove škole je bila *"Sve je broj"* ili *"Bog je broj"*, stoga su oni vjerovali da se sve može shvatiti preko brojeva i njihovih omjera. Također su smatrali i da svaki broj ima svoj karakter i značenje. Tako su brojevi mogli biti muški ili ženski, lijepi ili ružni, savršeni ili nepotpuni. Za pitagorejce najsvetiji broj bio je broj deset koji je činio zbroj prva četiri prirodna broja i bio je povezan s jednakostraničnom trokutastom figurom koja se sastojala od 10 točaka raspoređenih u četiri reda. Ta jednakostranična trokutasta figura, poznata kao i "tetraktis" je simbol na kojem su pripadnici pitagorejske zajednice polagali zakletvu.



Slika 3: Tetraktis

# 2 Pitagorejska aritmetika

Proučavanje brojeva započeo je Pitagora sa svojim sljedbenicima u 6. st. pr. Kr. Kao što je već spomenuto, vjerovali su u numerologiju. Smatrali su da je svemu, fizičkom i duhovnom, dodijeljen njegov broj. Među spisima o pitagorejcima i njihovom učenju, pronađena su značenja brojeva. Tako broj jedan predstavlja razum i stvoritelja svih brojeva. Jedinicu nisu odmah smatrali brojem zato što su vjerovali da mjera nije ono što su izmjerili već je mjera ono odakle počinjemo brojati. Broj dva predstavlja raznolikost u razmišljanju. To je prvi parni broj i smatra se ženskim, kao i svi parni brojevi. Broj tri predstavlja sklad. To je prvi neparni broj te je smatran muškim, kao i svi neparni brojevi. Broj četiri je simbol pravde, broj pet, kao zbroj prvog ženskog i prvog muškog broja, predstavlja brak, broj šest označava stvaranje, itd. Iako su pitagorejci najprije proučavali brojeve više za ono što su im predstavljali, ipak su uspjeli otkriti razna nova aritmetička svojstva. Budući da su Grci oznake za brojeve uveli oko 450. pr. Kr., malo je vjerojatno da su rani pitagorejci imali bilo kakve simbole za brojeve, stoga su oni brojeve prikazivali ili pomoću kamenčića u pijesku ili pomoću točkica u određenom geometrijskom uzorku.

## 2.1 Vrste prirodnih brojeva

Pitagorejci su proučavali razne vrste prirodnih brojeva i njihove odnose koje navodimo i opisujemo u nastavku.

### 2.1.1 Prosti i složeni brojevi

Razlikovali su pravčaste i ravninske, odnosno proste i složene prirodne brojeve. Oni se definiraju na sljedeći način:

**Definicija 2.1.** *Prirodan broj $n$, $n > 1$, nazivamo* ***prostim*** *ukoliko nema niti jednog djelitelja $d$ za koji vrijedi $1 < d < n$. Broj koji nije prost naziva se* ***složen****.*

**Primjer 2.1.**

- *prvih deset prostih brojeva:* $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$
- *prvih deset složenih brojeva:* $4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18$.

Danas postoje brojni rezultati o prostim i složenim brojevima. U nastavku navodimo one koje se pripisuju pitagorejcima.

**Propozicija 2.1.** *Svaki složen broj je višekratnik nekog prostog broja.*

*Dokaz.* Uzmimo neki složeni broj $a$. Tvrdimo da je broj $a$ višekratnik nekog prostog broja. Kako je $a$ složen broj, tada je on djeljiv s nekim brojem. Uzmimo da postoji takav broj i neka je to broj $b$. U slučaju da je broj $b$ prost, dokaz je gotov. U slučaju da je broj $b$ složen, tada je on djeljiv nekim brojem. Uzmimo da postoji takav broj i neka je to broj $c$. Kako $c$ dijeli $b$, a broj $b$ dijeli $a$, onda $c$ dijeli i broj $a$.

U slučaju da je $c$ prost broj, dokaz je gotov. U slučaju da je $c$ složen broj, tada je on djeljiv nekim brojem. Nakon primjene prethodnog postupka dovoljan broj puta ostat će neki prost broj koji dijeli broj $a$. Kada nakon primjene ovog postupka ne bi ostao prost broj, tada bi broj $a$ bio djeljiv s beskonačnim nizom brojeva, od koji je svaki manji od drugog, što je nemoguće. □

**Propozicija 2.2.** *Svaki je broj ili prost ili je višekratnik prostog broja.*

*Dokaz.* Uzmimo proizvoljan broj $a$. Tvrdimo da je broj $a$ ili prost broj ili višekratnik nekog prostog broja. U slučaju da je broj $a$ prost, dokaz je gotov. U slučaju da je $a$ složen broj, onda je on višekratnik nekog prostog broja prema prethodnoj propoziciji, time je tvrdnja dokazana. □

**Propozicija 2.3.** *Postoji beskonačno mnogo prostih brojeva.*

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji konačno mnogo prostih brojeva. U tom slučaju među njima postoji najveći, označimo ga s $p_n$. Neka je $M$ produkt svih tih prostih brojeva uvećan za 1, tj. $M = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Tada je $M > p_n$. $M$ je očigledno složen broj pa je djeljiv s nekim prostim brojem. Budući da broj $M$ nije djeljiv ni s jednim od prostih brojeva $p_1, p_2, ..., p_n$, trebao bi postojati prost broj veći od $p_n$, što je kontradikcija s pretpostavkom i time je tvrdnja dokazana. □

Pitagorejcima je također bilo poznato da su relativno prosti brojevi oni brojevi čiji je najveći zajednički djelitelj jednak broju 1.

**Propozicija 2.4.** *Ako prost broj ne dijeli zadani broj, onda je s njim relativno prost.*

*Dokaz.* Uzmimo da je broj $a$ prost broj i neka on ne dijeli broj $b$. Tvrdimo da su brojevi $a$ i $b$ relativno prosti. U slučaju da brojevi $a$ i $b$ nisu relativno prosti, tada su oni djeljivi s istim brojem. Neka su brojevi $a$ i $b$ djeljivi s brojem $c$. Kako broj $c$ dijeli broj $a$ koji je prost broj dolazimo do kontradikcije. □

**Propozicija 2.5.** *Najmanji zajednički višekratnik skupa prostih brojeva nije djeljiv niti s jednim drugim prostim brojem.*

*Dokaz.* Neka je broj $a$ najmanji zajednički višekratnik prostih brojeva $b$, $c$ i $d$. Tvrdimo da broj $a$ nije djeljiv s niti jednim drugim prostim brojem osim njih. Pretpostavimo suprotno, neka je broj $a$ djeljiv prostim brojem $e$, $e \neq b, e \neq c, e \neq d$. Budući da je broj $a$ djeljiv brojem $e$, tada je broj $a$ produkt brojeva $e$ i $f$. Ako je produkt neka dva broja djeljiv prostim brojem, onda je taj prosti broj djeljiv s jednim od dva polazna broja. Prema tome, brojevi $b$, $c$ i $d$ su djeljivi jednim od brojeva $e$ ili $f$. Kako je broj $e$ prost broj i $e \neq b, e \neq c, e \neq d$, oni nisu djeljivi s $e$. Slijedi da su djeljivi brojem $f$. No kako je broj $f$ manji od broja $a$ dolazimo do kontradikcije jer je broj $a$ najmanji zajednički višekratnik brojeva $b$, $c$ i $d$. Time je tvrdnja dokazana. □

### 2.1.2 Parni i neparni brojevi

Pitagorejci su također proučavali parnost brojeva. Laički bismo ove brojeve okarakterizirali na sljedeći način:

- parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi s brojem 2
- neparni brojevi su takvi da pri dijeljenju s brojem 2 daju ostatak 1.

Način na koji su pitagorejci opisali ove brojeve prikazan je u sljedećoj definiciji.

**Definicija 2.2.** ***Paran*** *je onaj broj koji je djeljiv na dva jednaka dijela.* ***Neparan*** *je onaj broj koji nije djeljiv na dva jednaka dijela, odnosno koji se razlikuje za jedinicu od parnog broja.*

**Primjer 2.2.**

- *prvih deset parnih brojeva:* $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20$
- *prvih deset neparnih brojeva:* $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$.

Matematičkim jezikom možemo reći da su parni brojevi oblika $2k$, a neparni brojevi su oblika $2k + 1$, gdje je $k$ cijeli broj.

U nastavku navodimo pojmove koji se pripisuju pitagorejcima.

**Definicija 2.3.** ***Parno paran*** *broj je onaj broj koji se mjeri parnim brojem paran broj puta.*

Odnosno, parno paran broj je onaj broj koji je djeljiv s 4.

**Primjer 2.3.** *Broj* $16$ *je parno paran broj jer ga možemo prikazati kao* $16 = 4 \cdot 4$.

**Definicija 2.4.** ***Neparno paran*** *broj je onaj broj koji se mjeri parnim brojem neparan broj puta.*

Drugim riječima, neparno paran broj je paran broj koji nije djeljiv s 4.

**Primjer 2.4.** *Broj* $6$ *je neparno paran broj jer je on paran broj koji možemo zapisati kao* $6 = 3 \cdot 2$*, ali nije višekratnik broja* $4$.

**Definicija 2.5.** ***Parno neparan*** *broj je onaj broj koji se mjeri neparnim brojem paran broj puta.*

Dakle, parno neparan broj je takav broj koji kada podijelimo na pola daje neparan broj, stoga su pitagorejci za ovakve brojeve govorili da imaju neparne polovine.

**Primjer 2.5.** *Broj* $26$ *je parno neparan jer pri dijeljenju s brojem* $2$ *daje neparan broj.*

**Definicija 2.6.** ***Neparno neparan*** *broj je onaj broj koji se mjeri neparnim brojem neparan broj puta.*

To jest, neparno neparan broj je produkt dva neparna broja.

**Primjer 2.6.** *Broj 27 je neparno neparan jer je rezultat množenja dvaju neparnih brojeva:* $27 = 3 \cdot 9$.

Prilikom proučavanja parnosti i neparnosti pitagorejci su uočili razna svojstva ovih brojeva koje nadalje navodimo.

- Zbrajanje

  1. Zbroj dvaju parnih brojeva jest paran broj.

     Neka su $a$ i $b$ dva prirodna broja. Brojevi $2a$ i $2b$ su parni brojevi. Tada je i $2a + 2b = 2 \cdot (a + b)$ paran broj.

  2. Zbroj parnog i neparnog broja jest neparan broj. Zbroj neparnog i parnog broja jest neparan broj.

     Neka su $a$ i $b$ dva prirodna broja. Broj $2a$ je paran broj, a $2b + 1$ je neparan broj. Tada je $2a + 2b + 1 = 2 \cdot (a + b) + 1$ neparan broj.

  3. Zbroj dvaju neparnih brojeva jest paran broj.

     Neka su $a$ i $b$ dva prirodna broja. Brojevi $2a + 1$ i $2b + 1$ su neparni brojevi. Tada je $(2a + 1) + (2b + 1) = 2 \cdot (a + b) + 2 = 2 \cdot (a + b + 1)$ paran broj.

- Oduzimanje

  Analogno vrijedi i za oduzimanje.

  1. Razlika dvaju parnih brojeva jest paran broj.
  2. Razlika parnog i neparnog broja jest neparan broj. Razlika neparnog i parnog broja jest neparan broj.
  3. Razlika dvaju neparnih brojeva jest paran broj.

- Množenje

  1. Produkt dvaju parnih brojeva jest paran broj.

     Neka su $a$ i $b$ dva prirodna broja. Brojevi $2a$ i $2b$ su parni brojevi. Tada je $2a \cdot 2b = 2 \cdot (2ab)$ paran broj.

  2. Produkt parnog i neparnog broja jest paran broj. Produkt neparnog i parnog broja jest paran broj.

     Neka su $a$ i $b$ dva prirodna broja. Broj $2a$ je paran broj, a $2b+1$ je neparan broj. Tada je $2a \cdot (2b+1) = 2 \cdot (a \cdot (2b+1))$ paran broj.

  3. Produkt dvaju neparnih brojeva jest neparan broj.

     Neka su $a$ i $b$ dva prirodna broja. Brojevi $2a+1$ i $2b+1$ su neparni brojevi. Tada je $(2a+1) \cdot (2b+1) = 2 \cdot 2ab + 2a + 2b + 1 = 2 \cdot (2ab + a + b) + 1$ neparan broj.

### 2.1.3 Savršeni i prijateljski brojevi

Pitagorejci su se bavili jednim od najstarijih problema u teoriji brojeva. To je problem pronalaženja savršenih brojeva. Kako su prema svojoj filozofiji pridruživali razna svojstva i osobine brojevima, tako su savršenim brojevima pripisivali magična svojstva. Definicija koju su nam oni dali glasi ovako:

**Definicija 2.7.** ***Savršeni*** *brojevi su oni brojevi koji su jednaki zbroju svojih pravih djelitelja.*

U nastavku navodimo pravilo za pronalaženje savršenih brojeva koje se pripisuje pitagorejcima.

*Ako je zbroj* $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n$ *jednak prostom broju* $p$*, gdje je* $n$ *prirodan broj, onda je* $2^n p$ *savršen broj.*

U nastavku se navodi primjer s četiri savršena broja koje su pronašli pitagorejci te nakon toga rezultat čije otkriće im se pripisuje.

**Primjer 2.7.**
$6 = 1 + 2 + 3;$
$28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14;$
$496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248;$
$8128 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 127 + 254 + 508 + 1016 + 2032 + 4064;$

*ili prema pravilu:*

$1 + 2 = 3$, $3$ *je prost broj pa slijedi da je* $2 \cdot 3 = 6$ *prost broj;*
$1 + 2 + 2^2 = 7$, $7$ *je prost broj pa slijedi da je* $2^2 \cdot 7 = 28$ *prost broj;*
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$, $31$ *je prost broj pa slijedi da je* $2^4 \cdot 31 = 496$ *prost broj;*
$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = 127$, $127$ *je prost broj pa slijedi da je* $2^6 \cdot 127 = 8128$ *prost broj.*

**Teorem 2.1.** *Ako je* $p = 2^m - 1$ *prost broj, onda je* $n = 2^{m-1}p$ *savršen.*

*Dokaz.* Koristimo osnovni teorem aritmetike o jedinstvenoj faktorizaciji prirodnih brojeva na proste faktore. Ako je $p = 2^m - 1$ prost, onda $n = 2^{m-1}p$ ima djelitelje:

$$1, 2, 2^2, \ldots, 2^{m-1}, p, 2p, 2^2p, \ldots, 2^{m-1}p.$$

Slijedi da je zbroj svih djelitelja od $n$ jednak

$$(1 + p)(1 + 2 + \cdots + 2^{m-1}) = (1 + p)(2^m - 1) = (1 + p)p = 2n.$$

Kako smo među djelitelje uključili i $n$, njegovim oduzimanjem slijedi da je suma pravih djelitelja od $n$ jednaka upravo $n$. Primijenjena formula za sumu geometrijskog niza bila je poznata pitagorejcima. □

Prosti brojevi oblika $2^m - 1$ danas su poznati kao ***Mersenneovi brojevi***. Ime su dobili po Marinu Mersenneu[4] koji je primjenom prethodnog teorema u 17. stoljeću pronašao prvih osam savršenih brojeva, za $m = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31$. Još nije otkriveno postoji li konačno ili beskonačno mnogo Mersenneovih brojeva.

Osim savršenim brojevima, pitagorejci su se bavili i prijateljskim brojevima. Ovi brojevi bili su važni u astrologiji i magiji. Pomoću njih su se u prošlosti ugovarali neki brakovi i smatralo se da imaju važan utjecaj za sklapanje prijateljstva. Pitagora i njegovi sljedbenici su otkrili prve prijateljske brojeve. Riječ je o brojevima 220 i 284. U nastavku je definicija prijateljskih brojeva prema pitagorejcima.

**Definicija 2.8.** ***Prijateljski*** *broj je onaj prirodan broj koji ima svoj prijateljski par. Prirodni brojevi* $a$ *i* $b$ *čine* ***par prijateljskih brojeva*** *ukoliko je zbroj pravih djelitelja broja* $a$ *jednak broju* $b$ *i ujedno zbroj pravih djelitelja broja* $b$ *jednak broju* $a$.

[4]Marin Mersenne (1588. - 1648.) - francuski matematičar i fizičar

**Primjer 2.8.** *Pravi djelitelji broja* 220 *su:* $1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110$.
*Kada zbrojimo sve njegove djelitelje dobit ćemo upravo broj* 284*:*

$$1 + 2 + 4 + 5 + +10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284.$$

*Pravi djelitelji broja* 284 *su:* $1, 2, 4, 71, 142$.
*Kada zbrojimo sve njegove djelitelje dobit ćemo upravo broj* 220*:*

$$1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220.$$

Pretpostavlja se da je jedini par prijateljskih brojeva koji su pitagorejci poznavali upravo 220 i 284. Uzmemo li u obzir prethodno, za savršene brojeve možemo reći da su prijateljski sami sa sobom.

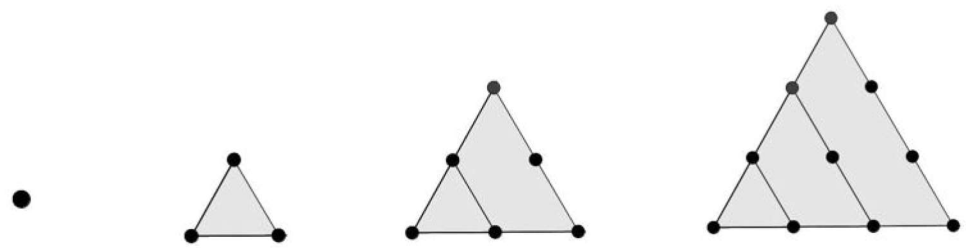
### 2.1.4 Figurativni brojevi

Ranije je spomenuto kako su pitagorejci prikazivali brojeve pomoću kamenčića u pijesku ili pomoću točkica u određenom geometrijskom uzorku. Otkriće ovakvog načina pisanja brojeva uzrokovalo je razvoj geometrije jer je grčka matematika do tog trenutka bila uglavnom aritmetička. Te točkice mogle su tvoriti razne geometrijske figure, odakle slijedi i sam naziv figurativni brojevi.

**Definicija 2.9.** ***Figurativni*** *brojevi su prirodni brojevi koje možemo prikazati slaganjem točkica u geometrijske likove.*

Ako se u figurativnom broju točkice mogu ravnomjerno rasporediti u jednakostraničan trokut, onda taj broj nazivamo ***trokutni broj***. U sljedećem primjeru navodimo nekoliko trokutnih brojeva.

**Primjer 2.9.** *Brojevi* 1*,* 3*,* 6 *i* 10*.*



Slika 4: Trokutni brojevi

Primijetimo da se među trokutnim brojevima nalazi i broj deset. Za pitagorejce najsvetiji broj na koji su polagali zakletvu predstavljao je i četiri elementa; vodu, vatru, zemlju i zrak.

Pitagorejci su pokazali kakvog su oblika trokutni brojevi. Najprije uočimo da se svaki novi trokutni broj dobiva iz prethodnog dodavanjem jednog retka koji sadrži jednu točkicu više od prethodnog retka. Ako s $T_n$ označimo $n$-ti trokutni broj, tada je:

$$\begin{aligned} T_n &= T_{n-1} + n \\ &= T_{n-2} + (n-1) + n \\ &= \dots \\ &= T_1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n \\ &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n, \end{aligned} \tag{2.1}$$

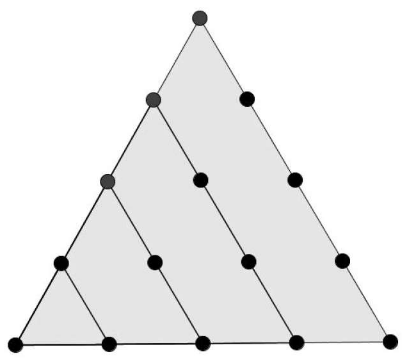
drugim riječima, suma $n$ uzastopnih prirodnih brojeva jest trokutni broj

$$T_n = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**Primjer 2.10.** *Za primjer uzmimo sljedeće:*

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

*te pogledamo li sliku*



Slika 5: Trokutni broj 15

*vidimo da je zaista riječ o trokutnom broju.*

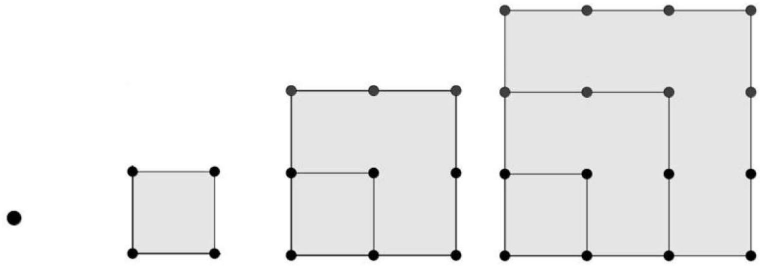
Također, pokazali su da je suma dva uzastopna trokutna broja jednaka sumi uzastopnih neparnih brojeva, što su opisali i formulom:

$$T_n + T_{n+1} = 1 + 3 + \cdots + (2n+1) = (n+1)^2.$$

**Primjer 2.11.** *Uzmimo za primjer* $T_2 = 3$ *i* $T_3 = 6$. *Dakle,* $T_2 + T_3 = 3 + 6 = 1 + 3 + 5 = (2+1)^2 = 9$.

Slično, figurativni broj u kojem se točkice mogu ravnomjerno rasporediti u kvadrat nazivamo ***kvadratni broj***. U sljedećem primjeru navodimo nekoliko kvadratnih brojeva.

**Primjer 2.12.** *Brojevi* 1, 4, 9, 16.

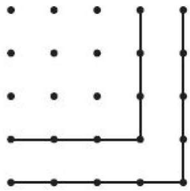


Slika 6: Kvadratni brojevi

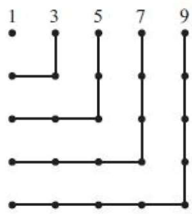
Pitagorejci su došli do oblika kvadratnih brojeva. Ako s $K_n$ označimo $n$-ti kvadratni broj, tada vrijedi:

$$K_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2.$$

Odgovarajuće polazište za prethodnu tvrdnju jest da se kvadrat čija se stranica sastoji od $n$ točkica može podijeliti u manji kvadrat čiju stranu čini $n - 1$ točkica.



Ponavljanjem ove podjele kao na sljedećem dijagramu možemo primijetiti da razlike između susjednih kvadrata čine niz neparnih brojeva.




Drugim riječima, suma prvih $n$ neparnih brojeva jest kvadratni broj. Smatra se da su pitagorejci ovaj rezultat dokazali promatrajući sljedećih $n$ jednadžbi:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 - 1^2 &= 3 \\ 3^2 - 2^2 &= 5 \\ 4^2 - 3^2 &= 7 \\ &\cdots \\ n^2 - (n-1)^2 &= 2n - 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Zbrajanjem prethodnih jednadžbi slijedi

$$1^2 + (2^2 - 1^2) + (3^2 - 2^2) + (4^2 - 3^2) + \cdots + [n^2 - (n-1)^2] = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1),$$

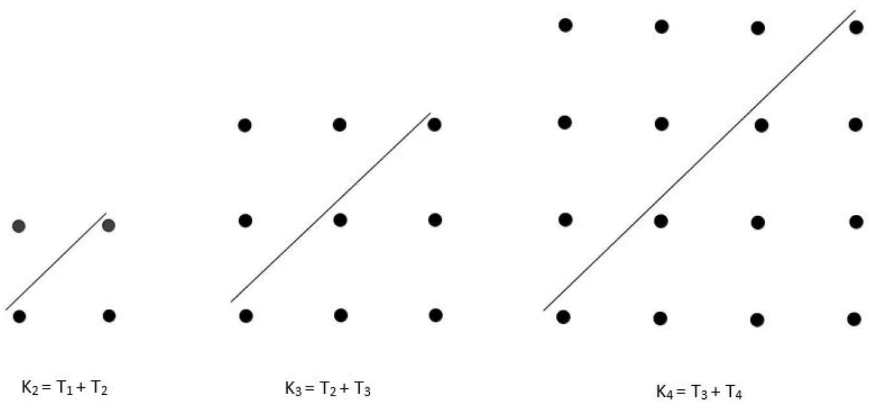
odakle nakon sređivanja prethodne jednakosti slijedi konačna formula:

$$n^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1).$$

Podsjetimo se, pitagorejci su pokazali da je suma dva uzastopna trokutna broja jednaka sumi uzastopnih neparnih brojeva, odnosno kvadratnom broju. Dakle, pronašli su vezu između trokutnih i kvadratnih brojeva:

$$T_{n-1} + T_n = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2 = K_n.$$

Sljedeći dijagram daje geometrijski prikaz ove veze.




Slika 7: Veza trokutnih i kvadratnih brojeva

Pogledajmo najprije kvadratni broj. Odvojimo li točkice koje čine kvadrat ravnom linijom dobivamo dva trokutna broja. Primijetimo još da je stranica kvadrata jednaka stranici od većeg trokuta.

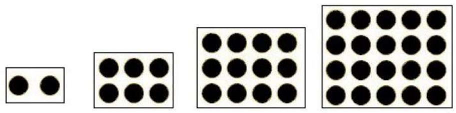
Pitagorejci su pokazali da je parni kvadratni broj četverostruki kvadratni broj. Drugim riječima, ukoliko je kvadratni broj djeljiv s 2, onda je djeljiv i s 4. Također su pokazali da je neparni kvadratni broj osmerostruki trokutni broj uvećan za 1. Odnosno, ukoliko je broj $n$ neparan, onda 8 dijeli $n^2 - 1$.

**Primjer 2.13.** *Pogledajmo za primjer prvih deset kvadratnih brojeva:*
$1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$. *Parni od njih su* $4, 16, 36, 64, 100$. *Očito je da je svaki od njih djeljiv brojem 2, kao i brojem 4.*
$4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1;$
$16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4;$
$36 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 9;$
$64 = 2 \cdot 32 = 4 \cdot 16;$
$100 = 2 \cdot 50 = 4 \cdot 25.$

**Primjer 2.14.** *Za primjer uzmimo neki neparni kvadratni broj. Neka je to* $K_5 = 25$. *Dakle, neparni kvadratni broj je osmerostruki trokutni broj uvećan za* 1 *pa je* $25 = 8 \cdot 3 + 1$, *to jest kako je* 5 *neparan broj, tada* 8 *dijeli* $5^2 - 1 = 24$.

Osim navedenih, također su poznavali i brojeve koji se točkicama mogu prikazati u obliku pravokutnika, a čije stranice se razlikuju za jedan red ili stupac točkica. Ovakve brojeve zovemo ***pravokutni brojevi***. U sljedećem primjeru navodimo nekoliko pravokutnih brojeva.

**Primjer 2.15.** *Brojevi* $2, 6, 12, 20$.

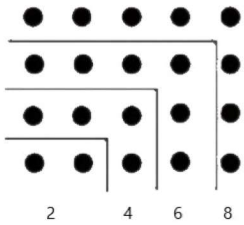


Slika 8: Pravokutni brojevi

Pokazali su i kakvog su oblika ovakvi brojevi. Ako s $R_n$ označimo $n$-ti pravokutni broj tada vrijedi

$$R_n = 2 + 4 + \cdots + 2n = n(n + 1).$$

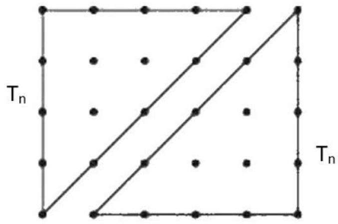
Drugim riječima, suma prvih $n$ parnih brojeva jest pravokutni broj. Slično kao i kod kvadrata, promatra se pravokutnik čiju jednu stranicu čini $n$ točkica, a drugu $n+1$ točkica. Taj pravokutnik možemo podijeliti na manji pravokutnik gdje se jedna stranica sastoji od $n-1$, a druga od $n$ točkica. Ponavljanjem ove podjele kao na sljedećem dijagramu možemo uočiti da razlike između susjednih pravokutnika čine niz parnih brojeva.




Osim toga, pitagorejci su primijetili postojanje veze između trokutnih i pravokutnih brojeva. Podsjetimo se, trokutni brojevi su oblika $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$, dok su pravokutni brojevi oblika $R_n = n(n+1)$ odakle slijedi zaključak da je dvostruki trokutni broj jednak pravokutnom broju ili matematičkim jezikom:

$$2T_n = R_n.$$

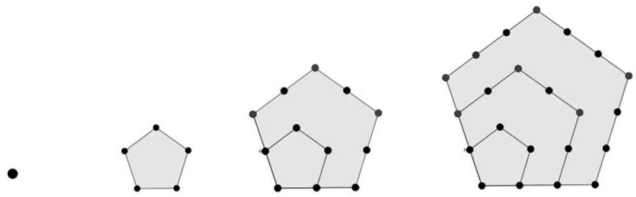
Zaista, pogledamo li sljedeći dijagram gdje spajamo dva trokuta koji predstavljaju trokutni broj $T_n$ uočavamo da oni čine pravokutno polje sa stranicama $n$ i $n+1$, odnosno pravokutni broj $R_n$.




Slika 9: Veza trokutnih i pravokutnih brojeva

Među raznim figurativnim brojevima koje su poznavali, spominju se još i brojevi koji se točkicama mogu prikazati u obliku peterokuta. Ovakve brojeve zovemo ***pentagonalni brojevi***. U sljedećem primjeru navodimo nekoliko pentagonalnih brojeva.

**Primjer 2.16.** *Brojevi* $1, 5, 12, 22$.

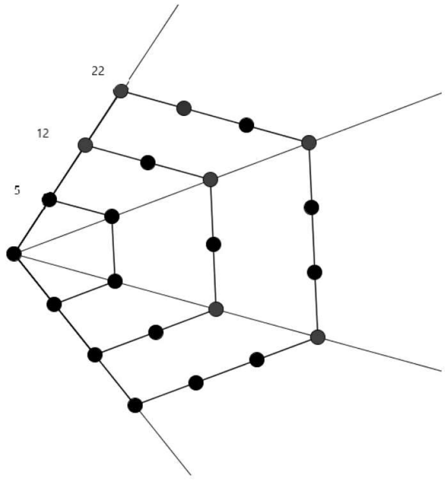


Slika 10: Pentagonalni brojevi

Ako s $P_n$ označimo $n$-ti pentagonalni broj, tada vrijedi

$$P_n = 1 + 4 + 7 + \cdots + (3n-2) = \frac{3n^2 - n}{2}.$$

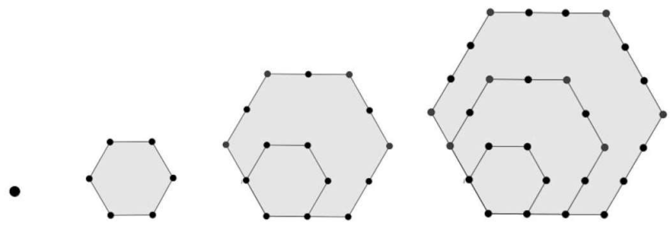
Dakle, krenemo od pentagonalnog broja 1 te redom dodajemo brojeve $4, 7, 10, \ldots$, odnosno brojeve koji su za tri veći od svog prethodnika te na taj način tvorimo pentagonalni broj. Ovu shemu možemo vidjeti na sljedećem dijagramu.




Slika 11: Izvod pentagonalnih brojeva

Također su poznavali i brojeve koji se točkicama mogu prikazati u obliku šesterokuta, odnosno ***heksagonalne brojeve***. U sljedećem primjeru navodimo nekoliko heksagonalnih brojeva.

**Primjer 2.17.** *Brojevi* $1, 6, 15, 28$.

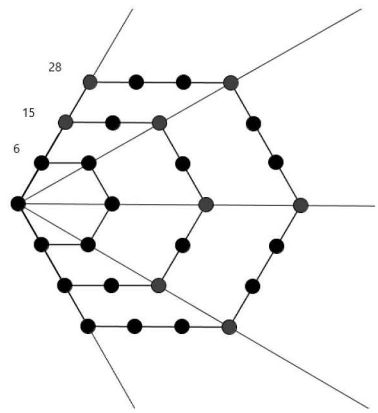


Slika 12: Heksagonalni brojevi

Ako s $H_n$ označimo $n$-ti heksagonalni broj, tada vrijedi

$$H_n = 1 + 5 + 9 + 13 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1).$$

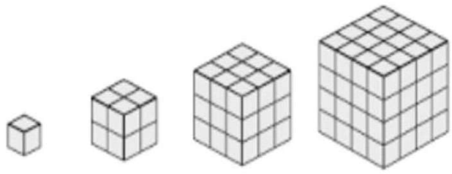
Dakle, krenemo od heksagonalnog broja 1 te redom dodajemo brojeve $5, 9, 13, \ldots$, odnosno brojeve koji su za četiri veći od svog prethodnika te na taj način tvorimo heksagonalni broj. Ovu shemu možemo vidjeti na sljedećem dijagramu.




Slika 13: Izvod heksagonalnih brojeva

Od figurativnih brojeva koje su poznavali spominju se još i *prostorni brojevi*. Brojevi koji se točkicama mogu prikazati u obliku kocke nazivaju se ***kockasti brojevi***. Ovi brojevi su oblika $n^3$. U sljedećem primjeru navodimo nekoliko kockastih brojeva.

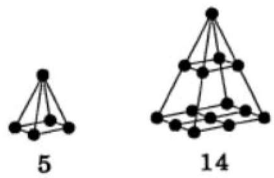
**Primjer 2.18.** *Brojevi* $1, 8, 27, 64$.



Slika 14: Kockasti brojevi

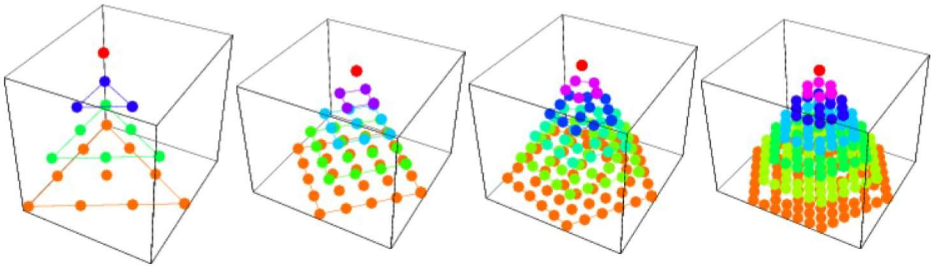
Slično, poznavali su i brojeve koji se točkicama mogu prikazati u obliku piramide čija je baza pravilni mnogokut. Ovakvi brojevi nazivaju se ***piramidalni brojevi***. Specijalan slučaj je kada točkice čine piramidu kojoj je svaka ploha jednakostranični trokut. Ovakva piramida naziva se *tetraedar*, a takve brojeve nazivamo ***tetraedalni brojevi***. U sljedećem primjeru navodimo nekoliko piramidalnih brojeva.

**Primjer 2.19.** *Za primjer uzmimo dva uzastopna kvadratna broja. Neka su to* $1$ *i* $4$. *Zaista, točkicama ih možemo povezati u piramidu kojoj je baza pravilni četverokut. Dodamo li tim kvadratnim brojevima i sljedeći po redu kvadratni broj* $9$ *opet dobivamo piramidalni broj* $14$.




Slika 15: Piramidalni brojevi

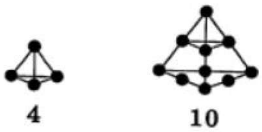
Sljedeća slika prikazuje još neke piramidalne brojeve.



Slika 16: Piramidalni brojevi s različitim bazama

U primjeru koji slijedi u nastavku navodimo neke tetraedalne brojeve.

**Primjer 2.20.** *Za primjer uzmimo uzastopne trokutne brojeve. Neka su to* 1 *i* 3*. Točkicama ih možemo povezati u pravilnu trostranu piramidu. Dodamo li sljedeći trokutni broj* 6*, opet dobivamo tetraedar, odnosno tetraedalni broj* 10*.*




Slika 17: Tetraedalni brojevi

## 2.2 Sredine prirodnih brojeva

Pitagora i njegovi sljedbenici su poznavali odnos između aritmetičke, geometrijske i harmonijske sredine brojeva čije otkriće im se pripisuje.

### 2.2.1 Aritmetička sredina

Općenito, aritmetičku sredinu dobivamo tako da zbrojimo sve brojeve te dobiveni zbroj podijelimo s brojem koliko je zadanih brojeva. U nastavku slijedi pitagorejska definicija aritmetičke sredine.

**Definicija 2.10.** ***Aritmetička sredina*** *je kada tri prirodna broja pokazuju uzastopnu razliku. Odnosno, koliko je prvi broj veći od drugog, toliko je drugi broj veći od trećeg.*

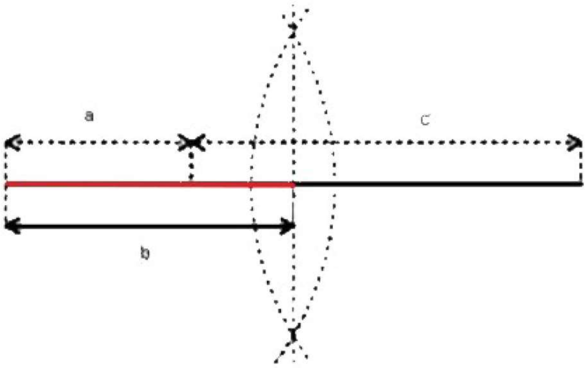
Matematičkim jezikom prethodnu definiciju za brojeve $a$, $b$ i $c$, gdje je $a > b > c$, bismo zapisali kao:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{a} = \frac{b}{b} = \frac{c}{c} = 1,$$

to jest

$$\frac{a+c}{2} = b.$$

Sljedeća slika prikazuje geometrijsku konstrukciju aritmetičke sredine dvaju brojeva.




Slika 18: Aritmetička sredina $b$ brojeva $a$ i $c$

### 2.2.2 Geometrijska sredina

Općenito, geometrijsku sredinu dobivamo tako da pomnožimo $n$ brojeva te zatim odredimo $n$-ti korijen dobivenog umnoška. U nastavku slijedi pitagorejska definicija geometrijske sredine.

**Definicija 2.11.** ***Geometrijska sredina*** *tri prirodna broja je kada se prvi broj odnosi prema drugom, kao drugi prema trećem.*

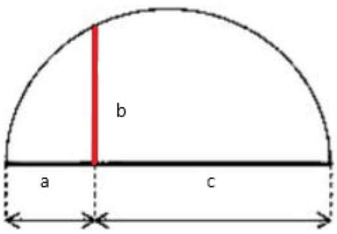
Matematičkim jezikom prethodnu definiciju za brojeve $a$, $b$ i $c$, gdje je $a > b > c$, bismo zapisali kao:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c},$$

to jest

$$b^2 = ac.$$

Sljedeća slika prikazuje geometrijsku konstrukciju geometrijske sredine dvaju brojeva.




Slika 19: Geometrijska sredina $b$ brojeva $a$ i $c$

### 2.2.3 Harmonijska sredina

Ranije smo spomenuli kako su se pitagorejci bavili i glazbom u kojoj su koristili harmonijsku sredinu te je ova sredina tako dobila svoj naziv. Općenito, harmonijska sredina je recipročna vrijednost aritmetičke sredine recipročnih vrijednosti zadanih brojeva. U nastavku slijedi pitagorejska definicija harmonijske sredine.

**Definicija 2.12.** ***Harmonijska sredina*** *za tri prirodna broja glasi: za koliko vlastite veličine je prvi broj veći od drugog, za toliki dio trećeg je drugi broj veći od trećeg.*

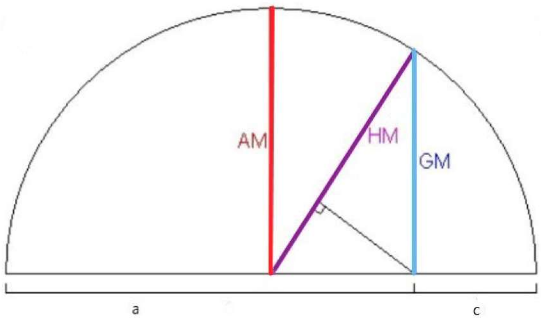
Matematičkim jezikom prethodnu definiciju za brojeve $a$, $b$ i $c$, gdje je $a > b > c$, bismo zapisali kao:

$$\frac{a-b}{b-c} = \frac{a}{c},$$

to jest

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$$

Sljedeća slika prikazuje aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu dvaju brojeva.




Slika 20: Aritmetička, geometrijska i harmonijska sredina brojeva $a$ i $c$

# 3 Pitagorejska geometrija

Geometrija (grč. $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\iota\alpha$; *geo* = Zemlja, *metria* = mjerenje) je grana matematike kojom su se tijekom povijesti bavile razne civilizacije, no ime su joj dali stari Grci. Jedan od najpoznatijih rezultata u geometriji dali su pitagorejci, danas je on poznat kao Pitagorin teorem. Iako je ovaj teorem u nekim specijalnim slučajevima bio poznat i Babiloncima oko 1000 godina prije, Pitagora i njegovi sljedbenici prvi su ga dokazali. Proclos[5] je zapisao:*"Pitagora je pretvorio geometriju u slobodoumno obrazovanje koje je istraživalo principe znanosti od početka i ispitivalo teoreme na apstraktan i intelektualni način; on je taj koji je otkrio teoriju iracionalnosti i konstrukciju pravilnih poliedara."* Proclosova izjava govori o važnosti pitagorejaca i njihovog utjecaja na razvoj geometrije. U nastavku navodimo neka geometrijska postignuća koja se prema Thomasu Heathu[6] smatraju pitagorejskim.

- Pitagorin teorem.
- Suma kuteva u trokutu jednaka je dva prava kuta. Osim toga, poznata im je bila i generalizirana tvrdnja, to jest da je suma unutarnjih kuteva $n$-stranog poligona jednaka $2n - 4$ prava kuta.
- Geometrijska algebra.
- Otkriće iracionalnih brojeva.
- Pet pravilnih poliedara.

## 3.1 Pitagorin teorem

Kao što je ranije spomenuto, jedan od najpoznatijih rezultata u geometriji i općenito u matematici je upravo Pitagorin teorem. Njegova primjena je opsežna, stoga je on važan kako u matematici tako i u drugim znanostima te u svakodnevnom životu.

### 3.1.1 Iskaz i dokaz Pitagorinog teorema

Postoji nekoliko stotina dokaza ovog teorema. Euklid je bio prvi koji je objavio dokaz u svojim *Elementima*. Nacionalno vijeće profesora matematike je 1968. godine objavilo djelo *The Pythagorean Proposition*, čiji je autor profesor Elisha Scott Loomis[7], u kojem se može pronaći 367 dokaza Pitagorinog teorema koji su izveli razni matematičari. U nastavku slijedi iskaz Pitagorinog teorema.

**Teorem 3.1.** ***(Pitagorin teorem)*** *Zbroj kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak je kvadratu nad hipotenuzom.*

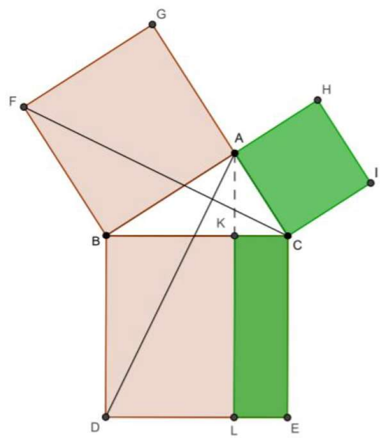
[5]Proclos (412. - 485. pr. Kr) - posljednji veliki grčki filozof
[6]Thomas Heath (1861. - 1940.) - britanski matematičar, povjesničar antičke grčke matematike
[7]Elisha Scott Loomis (1852. - 1940.) - američki profesor i matematičar

Pitagorejci govoreći o kvadratima nisu podrazumijevali potencije brojeva, nego geometrijske likove, a jednakost kao jednakost površina, stoga je izvorno shvaćanje teorema bilo nešto drugačije, odnosno kako je nama danas poznato:

*Zbroj površina kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak je površini kvadrata nad hipotenuzom,*

pri čemu su površine jednake ako je jednu moguće rastaviti na dijelove od kojih se druga može sastaviti. U nastavku navodimo prvi Euklidov dokaz i jedan od poznatijih dokaza Pitagorinog teorema. Ovo se ujedno smatra i originalnim pitagorejskim dokazom.

*Dokaz.* Promotrimo sljedeću sliku.




Slika 21: Euklidov dokaz Pitagorinog teorema

Neka je dan pravokutni trokut $ABC$, uz oznake kao na *Slici 21.* Kvadrati $ACIH$, $BAGF$ i $CBDE$ nacrtani su nad stranicama $\Delta ABC$. Budući da je $BAGF$ kvadrat, vrijedi $|AB| = |FB|$. Analogno, kako je $CBDE$ kvadrat, onda vrijedi $|BC| = |BD|$. Kroz točku $A$ povucimo pravac paralelan s $BD$, tako dobivamo točke $K$ i $L$. Sada nacrtajmo dužine $\overline{\text{CF}}$ i $\overline{\text{AD}}$. Tada slijedi da je $\angle ABD = 90° + \angle ABC = \angle FBC$. Prema S-K-S poučku o sukladnosti trokuta slijedi da su $\Delta FBC$ i $\Delta ABD$ sukladni jer je $|AB| = |FB|$, $|BC| = |BD|$ i $\angle ABD = \angle FBC$. Uočimo da je površina $\Delta BDK$ za pola manja od površine pravokutnika $BDLK$. S druge strane, primijetimo da je površina $\Delta BDA$ jednaka površini $\Delta BDK$ budući da imaju istu osnovicu i istu duljinu visine. Sada slijedi da je površina $\Delta BDA$ za pola manja od površine pravokutnika $BDLK$. Kako $\Delta FBC$ ima istu visinu na stranicu $BF$ kao $AB$, stranica kvadrata $BAGF$, vrijedi

$$P_{BAGF} = 2 \cdot P_{\Delta FBC} = 2 \cdot P_{\Delta BDA} = P_{BDLK}.$$

Budući da je duljina stranice kvadrata $BAGF$ jednaka $|AB|$ slijedi da je površina pravokutnika $BDLK$ jednaka $|AB|^2$. Slično,

$$P_{CKLE} = P_{ACIH} = |AC|^2.$$

Slijedi

$$
\begin{aligned}
|AB|^2 + |AC|^2 &= |BD| \cdot |BK| + |KL| \cdot |KC| \\
&= |BD| \cdot |BK| + |BD| \cdot |KC| \\
&= |BD| \cdot (|BK| + |KC|) \qquad (3.1) \\
&= |BD| \cdot |BC| \\
&= |BC|^2,
\end{aligned}
$$

time je dokazana tvrdnja teorema. □

### 3.1.2 Obrat Pitagorinog teorema i dokaz

Pitagorejcima je bio poznat i obrat Pitagorinog teorema kojeg su također dokazali. U nastavku se iskazuje ova tvrdnja te se navodi dokaz za koji se smatra da je originalni dokaz pitagorejaca.

**Teorem 3.2.** ***(Obrat Pitagorinog teorema)*** *Ako neki trokut ima svojstvo da je zbroj kvadrata nad dvjema njegovim stranicama jednak kvadratu nad trećom, onda se radi o pravokutnom trokutu.*

Kao što je ranije spomenuto, pitagorejci su imali nešto drugačija shvaćanja, pa uzmemo li to u obzir ovaj teorem glasi:

*Ako neki trokut ima svojstvo da je zbroj površina kvadrata nad dvjema njegovim stranicama jednak površini kvadrata nad trećom, onda se radi o pravokutnom trokutu.*

*Dokaz.* Neka je dan trokut $ABC$.


Slika 22: Slika za dokaz obrata Pitagorinog teorema

Uzmimo da je dan kvadrat nad jednom stranicom $\Delta ABC$ te neka je to stranica $BC$. Neka je površina kvadrata nad stranicom $BC$ jednaka zbroju površina kvadrata nad stranicama $AB$ i $AC$. Sada iz točke $A$ povucimo dužinu $\overline{\mathrm{AD}}$ okomitu na dužinu $\overline{\mathrm{AC}}$ tako da je $|AD| = |AB|$. Nadalje, spojimo točke $C$ i $D$ tako da dobijemo dužinu $\overline{\mathrm{DC}}$. Kako je $|AD| = |AB|$ slijedi da su i površine kvadrata nad tim stranicama jednake. Budući da je $\angle DAC = 90°$, zbroju površina kvadrata nad stranicama $AD$ i $AC$ jednaka je površina kvadrata nad stranicom $DC$.

Kako je prema pretpostavci površina kvadrata nad stranicom $BC$ jednaka zbroju površina kvadrata nad stranicama $AB$ i $AC$, sada je površina kvadrata nad stranicom $DC$ jednaka površini kvadrata nad stranicom $BC$ tako da je $|DC| = |BC|$. Budući da je $|AD| = |AB|$ i $|AC|$ je zajednička stranica, slijedi da je i $|DC| = |BC|$. Dakle, vrijedi $\angle DAC = \angle BAC$. Kako je $\angle DAC = 90°$, tada je i $\angle BAC = 90°$. Dakle, trokut $ABC$ je pravokutan trokut.

□

### 3.1.3 Pitagorejske trojke

Uz Pitagorin teorem vežu se posebne trojke brojeva koje su Pitagora i njegovi sljedbenici proučavali te one nose njihovo ime. Počeli su ih istraživati uz pomoć kvadratnih brojeva pretpostavljajući da takva tri uzastopna čine pitagorejsku trojku.

Pojam pitagorejskih trojki poznavali su ranije civilizacije, poput Egipćana kojima je bila poznata pitagorejska trojka $(3, 4, 5)$ i Babilonaca koji su imali matematičku tablicu poznatu pod nazivom "Plimpton 322" iz razdoblja oko 1800. pr. Kr., koja sadrži niz pitagorejskih trojki te se smatra najstarijim poznatim dokumentom o teoriji brojeva. Pitagorejci su uočili da pitagorejskih trojki ima beskonačno mnogo jer za svaki broj $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, brojevi $2n$, $n^2 - 1$ i $n^2 + 1$ čine pitagorejsku trojku. U nastavku slijedi definicija pitagorejskih trojki.

**Definicija 3.1.** ***Pitagorejska trojka*** *je uređena trojka prirodnih brojeva takva da je zbroj kvadrata prvih dvaju od njih jednak kvadratu trećeg.*

Matematičkim jezikom rekli bismo da je pitagorejska trojka takva trojka prirodnih brojeva $a$, $b$ i $c$ za koju vrijedi

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

odnosno, takva da su $a$, $b$ i $c$ stranice pravokutnog trokuta.

U sljedećem primjeru navodimo nekoliko pitagorejskih trojki.

**Primjer 3.1.** *Prvih nekoliko pitagorejskih trojki:*
$(3, 4, 5)$, $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$;
$(5, 12, 13)$, $5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$;
$(6, 8, 10)$, $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$;
$(8, 15, 17)$, $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$;
$(9, 12, 15)$, $9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225 = 15^2$.

Ukoliko su brojevi $a$, $b$ i $c$ relativno prosti, tada kažemo da je trojka brojeva $(a, b, c)$ ***primitivna pitagorejska trojka***. Uočimo da su primitivne pitagorejske trojke iz prethodnog primjera trojke: $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$ i $(8, 15, 17)$.

U nastavku slijedi rezultat koji su otkrili i dokazali pitagorejci.

**Teorem 3.3.** *(Teorem o pitagorejskim trojkama) Za svaku primitivnu pitagorejsku trojku $(a, b, c)$ postoje relativno prosti prirodni brojevi $m$ i $n$ različite parnosti takvi da je $m > n$ i $(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$. Vrijedi i obratno, svaka trojka tog oblika primitivna je pitagorejska trojka.*

*Dokaz.* Neka je dana pitagorejska trojka $(a, b, c)$. Brojevi $a$, $b$ i $c$ ne mogu biti svi neparni jer kvadrati neparnih brojeva daju ostatak 1 pri dijeljenju s brojem 4, stoga bi lijeva strana jednakosti $a^2 + b^2 = c^2$ pri dijeljenju s 4 dala ostatak 2, dok bi desna strana te jednakosti dala ostatak 1. Osim toga, nemoguće je da je samo jedan broj dane trojke neparan. Kada bi to bio jedan od brojeva $a$ ili $b$, tada bi lijeva strana jednakosti $a^2 + b^2 = c^2$ pri dijeljenju s 4 dala ostatak 1, dok bi desna strana te jednakosti dala ostatak 0. Također je nemoguće da su i $a$ i $b$ neparni, a $c$ paran jer bi tada lijeva strana jednakosti pri dijeljenju s 4 dala ostatak 2, dok bi desna strana dala ostatak 0. Dakle, u pitagorejskoj trojci $(a, b, c)$ su ili sva tri broja parna ili je točno jedan od brojeva $a$ i $b$ paran, dok su drugi broj i $c$ neparni. Stoga je u primitivnoj pitagorejskoj trojci jedan od $a$ i $b$ paran, a ostala dva broja su neparna. Uzmimo da je broj $a$ paran. Tada vrijedi

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{c-b}{2} \cdot \frac{c+b}{2}.$$

Brojevi $\frac{a}{2}$, $\frac{c-b}{2}$ i $\frac{c+b}{2}$ su prirodni, a brojevi $\frac{c-b}{2}$ i $\frac{c+b}{2}$ su relativno prosti jer bi u suprotnom neki broj veći od 1 dijelio njihov zbroj $c$ i razliku $b$, pa brojevi $b$ i $c$ ne bi bili relativno prosti. Produkt dvaju relativno prostih brojeva ovdje je kvadrat prirodnog broja $\frac{a}{2}$. To je moguće samo ako su i $\frac{c-b}{2}$ i $\frac{c+b}{2}$ kvadratni, tj., oblika

$$\frac{c+b}{2} = m^2, \frac{c-b}{2} = n^2, mn = \frac{a}{2},$$

pri čemu je $m > n$ i $m$ i $n$ su relativno prosti. Pritom $m$ i $n$ ne mogu oba biti neparni jer bi u suprotnom vrijedilo $m^2 - n^2 = b$ paran, dakle $m - n$ je neparan. Sada rješavanjem sustava

$$\frac{a}{2} = mn \Rightarrow a = 2mn$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{c+b}{2} = m^2 / \cdot 2 \\ \frac{c-b}{2} = n^2 / \cdot 2 \end{array}\right\} + \Rightarrow 2c = 2(m^2 + n^2) \Rightarrow c = m^2 + n^2,$$

$$\frac{m^2 + n^2 - b}{2} = n^2 / \cdot 2 \Rightarrow m^2 + n^2 - 2n^2 = b \Rightarrow b = m^2 - n^2$$

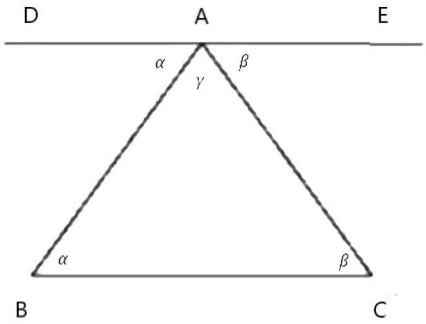
slijedi tvrdnja teorema. □

## 3.2 Zbroj kuteva u trokutu i $n$-terokutu

Među mnogobrojnim rezultatima u geometriji koji se pripisuju pitagorejcima pojavljuje se i tvrdnja o zbroju kuteva u trokutu. Smatra se da su, osim što su spomenuti rezultat prvi dokazali, oni i generalizirali tu tvrdnju. U nastavku slijedi iskaz i dokaz ovih rezultata.

**Teorem 3.4.** *Zbroj kuteva u trokutu iznosi dva prava kuta. Zbroj kuteva u $n$-terokutu iznosi $2n - 4$ prava kuta.*

*Dokaz.* Neka je dan proizvoljan trokut $ABC$. Konstruirajmo pravac $DE$ koji prolazi kroz točku $A$ i paralelan je s pravcem $BC$. Sada slijedi $\angle ABC = \angle DAB$. Osim toga, vrijedi i $\angle ACB = \angle EAC$. Dakle, vrijedi $\angle ABC + \angle ACB = \angle DAB + \angle EAC$. Sada prethodnoj jednakosti dodamo i $\angle BAC$ pa slijedi da je $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = \angle DAB + \angle BAC + \angle EAC$, odnosno zbroj unutarnjih kuteva trokuta jednak je zbroju dva prava kuta.



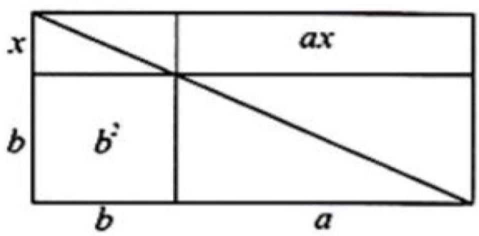

Slika 23: Slika za dokaz *Teorema 3.4.*

Budući da se $n$-terokut može rastaviti na $n-2$ trokuta, povlačenjem svih dijagonala iz jednog njegovog vrha dolazimo do tvrdnje da je zbroj kuteva u $n$-terokutu jednak $(2n-4)\cdot 90°$. □

## 3.3 Geometrijska algebra

Geometrijska algebra predstavlja granu matematike koja razvija geometrijske pojmove i metode u svrhu istraživanja algebarskih struktura, dakle ona daje geometrijski pristup algebri. Takvo geometrijsko shvaćanje operacija s brojevima je karakteristično za razdoblje klasične grčke matematike. S otkrićem geometrijske algebre često se povezuju Pitagora i njegovi sljedbenici. U nastavku se navode primjeri jednadžbi i nekih problema koji se rješavaju primjenom geometrijske algebre te za koje se smatra da su došli od pitagorejaca.

**Primjer 3.2.** *Riješimo jednadžbu $ax = b^2$ pomoću geometrijske algebre. Promotrimo sljedeću sliku.*




Slika 24: Rješenje jednadžbe $ax = b^2$ geometrijskom algebrom

*Uočavamo pravokutnik kojeg dijagonala dijeli na dva sukladna trokuta. Sada slijedi jednakost kvadrata $b^2$ i pravokutnika $ax$, odnosno tražena duljina je $x$.*

**Primjer 3.3.** *Jedan od najpoznatijih problema geometrijske algebre jest konstrukcija dijeljenja dužine u omjeru zlatnog reza. Neka je zadana dužina duljine $a$. Na njoj je potrebno odrediti točku tako da se cijela dužina odnosi prema većem od dobivena dva dijela dužine kao taj dio prema manjem dijelu. Označimo veći dio s $x$ pa uvjet glasi:*

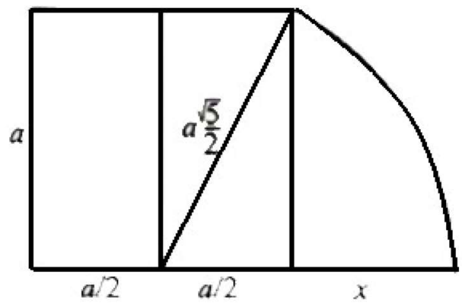
$$a : x = x : (a - x).$$

*Sređivanjem gornjeg izraza uočavamo da je riječ o kvadratnoj jednadžbi*

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

*Rješenja ove jednadžbe su $x_1 = \frac{-a-\sqrt{5a^2}}{2} = a\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{-a+\sqrt{5a^2}}{2} = a\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.*
*Budući da pozitivno rješenje ima geometrijskog smisla, slijedi da je rješenje ovog problema $x = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.*

Sljedeća slika prikazuje konstrukciju dijeljenja dužine u omjeru zlatnog reza.

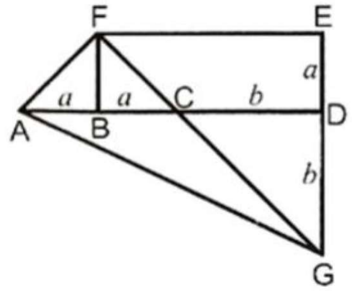



Slika 25: Rješenje problema dijeljenja dužine u omjeru zlatnog reza geometrijskom algebrom

**Primjer 3.4.** *Dokažimo da vrijedi jednakost*

$$(2a + b)^2 + b^2 = 2a^2 + 2(a + b)^2.$$

*Promotrimo sljedeću sliku.*




Slika 26: Rješenje *Primjera 3.4.* geometrijskom algebrom

*Uočimo da vrijedi*

$$|AD|^2 + |DG|^2 = |AG|^2 = |AF|^2 + |FG|^2 = (|AB|^2 + |BF|^2) + (|EF|^2 + |EG|^2).$$

## 3.4 Otkriće iracionalnih brojeva

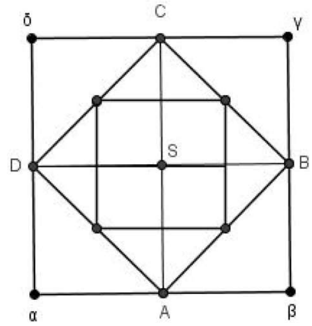
Pitagora i njegovi sljedbenici smatrali su da se sve može shvatiti preko prirodnih brojeva i njihovih omjera. Posljedica takvog učenja jest očekivanje da je svaka duljina cjelobrojna ili racionalna, tj. da su sve duljine sumjerljive jediničnoj. Danas bismo rekli da su veličine $a$ i $b$ ***sumjerljive*** ako je njihov omjer $a : b$ opisiv kao omjer prirodnih brojeva.

Provodeći svoja istraživanja u matematici pitagorejci su došli do zaključka da postoje omjeri veličina koje se ne mogu prikazati kao omjer dva prirodna broja. Takve dužine nazvali su iracionalnim jer se one prema njihovom učenju protive razumu (racionalnom). Do ovog otkrića došao je pitagorejac Hipasus iz Metaponta. Uzevši u obzir njihovu filozofiju koja se suprostavlja ovom otkriću odlučili su da će ono ostati tajna te da neće o njemu govoriti izvan svoje zajednice. Prema legendi, Hipasus nije poslušao zapovijed svoje braće te je o ovom otkriću pričao izvan zajednice stoga su ga pitagorejci za kaznu utopili u moru.

Budući da su pitagorejci došli do ovog otkrića promatrajući sumjerljivost stranica kvadrata i njegove dijagonale, pojam iracionalnosti se isprva odnosio samo na dužine dok se na brojeve počeo odnositi u 16. stoljeću. Iako su ovim otkrićem razbili ideju elegantnog matematičkog svijeta kakvog su zamislili, pitagorejci su njime značajno utjecali na razvoj matematike. U nastavku slijedi teorem i dokaz o nesumjerljivosti stranice kvadrata i njegove dijagonale koji je ujedno i dokaz iracionalnosti broja $\sqrt{2}$.

**Teorem 3.5.** *Stranica kvadrata nije sumjerljiva njegovoj dijagonali.*

*Dokaz.* Neka je dan kvadrat s vrhovima $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Neka su polovišta njegovih stranica redom $A, B, C, D$. Tada je i četverokut $ABCD$ kvadrat. Ucrtajmo dijagonale $\overline{\mathrm{AC}}$ i $\overline{\mathrm{BD}}$ kvadrata $ABCD$. Označimo slovom $S$ sjecište dijagonala koje je ujedno i središte kvadrata $ABCD$ i $\alpha\beta\gamma\delta$. Sada imamo jedan veliki kvadrat $\alpha\beta\gamma\delta$ koji je po površini očigledno dvostruki $ABCD$ i četverostruki $\alpha ASD$.




Slika 27: Iracionalnost broja $\sqrt{2}$

Pretpostavimo da su stranica i dijagonala kvadrata sumjerljive. Tada postoje prirodni brojevi $m$, $n$ i duljina $d$ takvi da je $|BD| = md$ i $|AD| = nd$. Ako bi brojevi $m$ i $n$ bili oba parna, mogli bismo uzeti $2d$ umjesto $d$, dakle možemo pretpostaviti da je barem jedan od brojeva $m$ i $n$ neparan. Kako je površina kvadrata $\alpha\beta\gamma\delta$ dvostruko veća od površine kvadrata $ABCD$ slijedi $m^2d^2 = 2n^2d^2$ pa $m$ mora biti paran jer je paran kvadratni broj kvadrat parnog broja. Stoga je $|SD| = kd$ za neki prirodni broj $k$. Sada, jer je površina kvadrata $ABCD$ dvostruko veća od površine kvadrata $\alpha ASD$, slijedi $n^2d^2 = 2k^2d^2$ pa i $n$ mora biti paran. Dakle i $m$ i $n$ su parni što je kontradikcija s pretpostavkom.

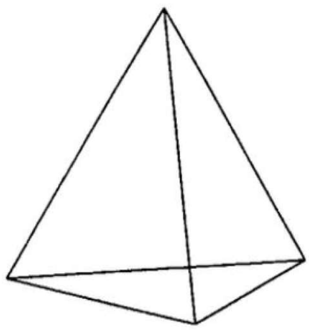
□

## 3.5 Platonova tijela

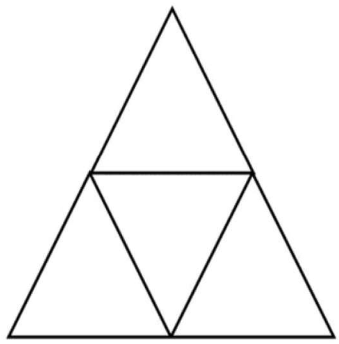
Općenito, ***pravilni poliedar*** je geometrijsko tijelo kojem su sve strane međusobno sukladni pravilni mnogokuti takvi da se u svakom vrhu sastaje isti broj tih mnogokuta. Pet pravilnih poliedara dobilo je ime po Platonu[8] koji ih je prvi opisao u dijalogu *Timej*, stoga su još poznati kao ***Platonova tijela***. Povjesničari teoriju koja se pojavljuje u *Timeju* pripisuju pitagorejcima koji su poznavali svih pet pravilnih poliedara. U nastavku se nabrajaju i opisuju sva Platonova tijela.

[8]Platon (427. - 347. pr. Kr.) - grčki filozof

- ***Tetraedar*** je geometrijsko tijelo omeđeno s četiri jednakostranična trokuta te kojem prolaze po tri brida kroz svaki vrh. Ukupno ima četiri vrha, šest bridova i četiri strane. Na sljedećim slikama nalazi se prikaz tetraedra i njegove mreže.

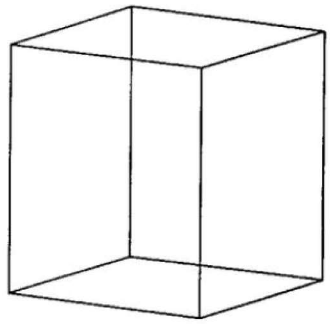


Slika 28: Tetraedar

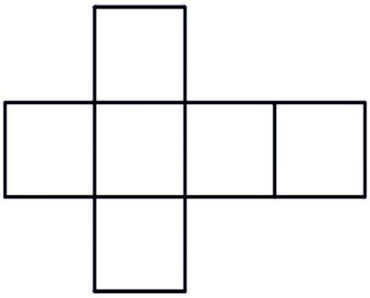


Slika 29: Mreža tetraedra

- ***Kocka (heksaedar)*** je geometrijsko tijelo omeđeno sa šest kvadrata te kojem prolaze po tri brida kroz svaki vrh. Ukupno ima osam vrhova, dvanaest bridova i šest strana. Na sljedećim slikama nalazi se prikaz kocke i njene mreže.

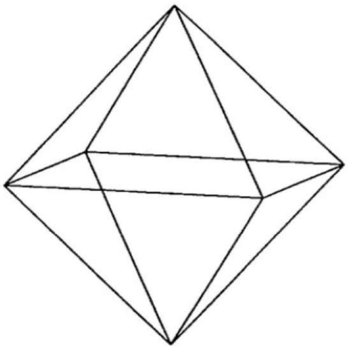


Slika 30: Kocka

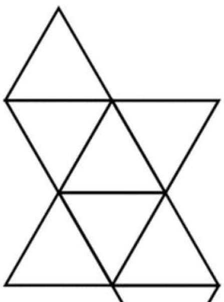


Slika 31: Mreža kocke

- ***Oktaedar*** je geometrijsko tijelo omeđeno s osam jednakostraničnih trokuta te kojem prolaze po četiri brida kroz svaki vrh. Ukupno ima šest vrhova, dvanaest bridova i osam strana. Na sljedećim slikama nalazi se prikaz oktaedra i njegove mreže.

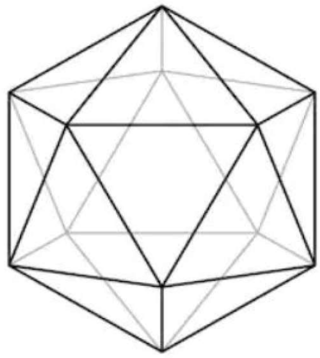


Slika 32: Oktaedar

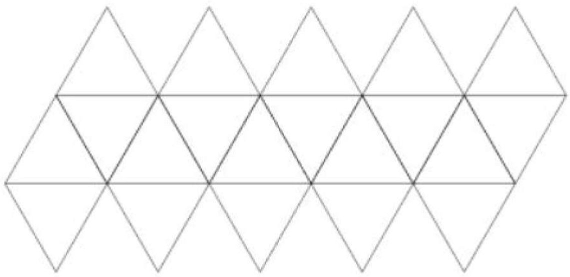


Slika 33: Mreža oktaedra

- ***Ikozaedar*** je geometrijsko tijelo omeđeno s dvadeset jednakostraničnih trokuta te kojem prolaze po pet bridova kroz svaki vrh. Ukupno ima dvanaest vrhova, trideset bridova i dvadeset strana. Na sljedećim slikama nalazi se prikaz ikozaedra i njegove mreže.

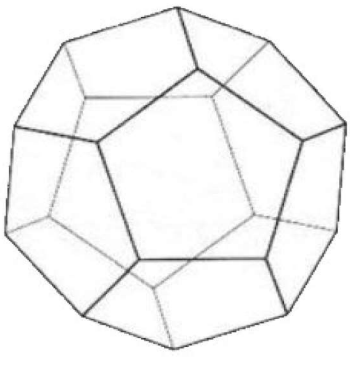


Slika 34: Ikozaedar

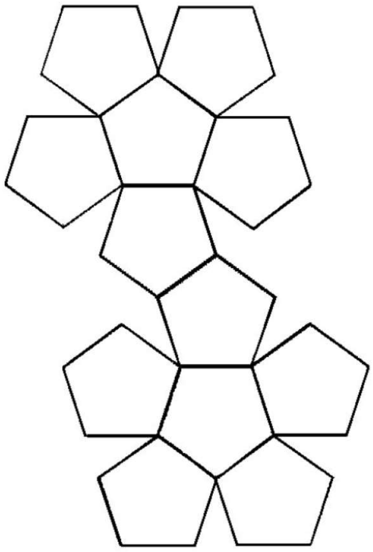


Slika 35: Mreža ikozaedra

- ***Dodekaedar*** je geometrijsko tijelo omeđeno s dvanaest pravilnih peterokuta te kojem prolaze po tri brida kroz svaki vrh. Ukupno ima dvadeset vrhova, trideset bridova i dvanaest strana. Na sljedećim slikama nalazi se prikaz dodekaedra i njegove mreže.



Slika 36: Dodekaedar



Slika 37: Mreža dodekaedra

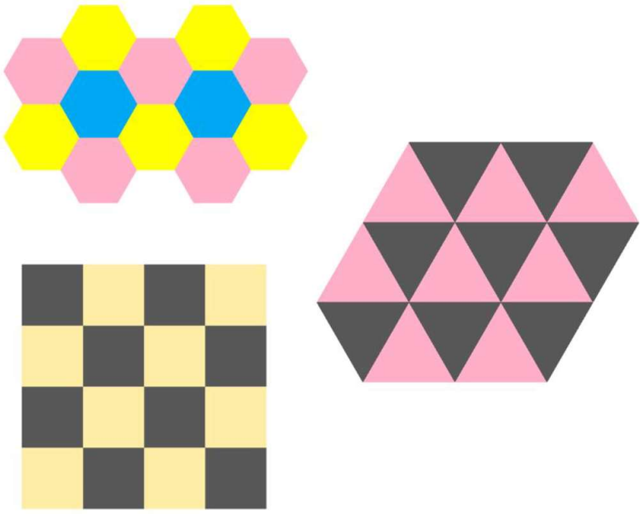
Danas je vrlo razvijeno proučavanje popločavanja ravnine i popunjavanje prostora pravilnim ili polupravilnim likovima, odnosno tijelima, što je u uskoj vezi s proučavanjem Platonovih tijela. Zajednica pitagorejaca znala je da postoje točno tri načina za popločavanje ravnine sukladnim pravilnim mnogokutima. Kako zbroj kuteva u $n$-terokutu iznosi $2n-4$ prava kuta, tada je u pravilnom $n$-terokutu svaki kut jednak $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva. Dakle, ako se u nekoj točki ravnine sastaje $m$ pravilnih $n$-terokuta, onda mora vrijediti:

$$m\alpha = m \cdot \frac{2n-4}{n} \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi.$$

Ispitivanjem kombinacija za prirodne brojeve $m$ i $n$ slijedi da su jedini mogući slučajevi

- $m = 6$, $n = 3$;
- $m = 4$, $n = 4$;
- $m = 3$, $n = 6$.

Drugim riječima, popločavanje ravnine moguće je samo pravilnim trokutima, četverokutima i šesterokutima.



Slika 38: Popločavanje ravnine

Proučavajući harmonijsku sredinu, pitagorejci su uočili da se ona na prirodan način pojavljuje kod pravilnih poliedara.

**Primjer 3.5.** *Uzmimo za primjer kocku te na njoj nađimo harmonijsku sredinu broja bridova i broja strana.*

*Označimo u tu svrhu broj vrhova s $v$, broj bridova s $b$ i broj strana sa $s$. Tada bi prema ranije spomenutoj formuli trebalo vrijediti:*

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{b} + \frac{1}{s}$$

*Budući da kocka ima* 12 *bridova i* 6 *strana slijedi:*

$$\frac{2}{v} = \frac{1}{12} + \frac{1}{6}$$
$$\frac{2}{v} = \frac{3}{12}$$
$$3v = 24$$
$$v = 8.$$

*Dobili smo da je $v = 8$, što je upravo i broj vrhova kocke. Dakle, pokazali smo da je broj vrhova kocke harmonijska sredina broja njezinih bridova i broja njezinih strana.*

# Literatura

[1] F. M. BRÜCKLER, *Povijest matematike 1*, Odjel za matematiku Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2014.

[2] W. BURKERT, *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*, Harvard University Press, Massachusetts, 1972.

[3] D. BURTON, *The History of Mathematics: An Introduction, Sixth Edition*, The McGraw - Hill Companies, New York, 2007.

[4] M. HALAPA, *Harmonijska sredina dvaju brojeva*, Matka - časopis za mlade matematičare, 10 (1994), 50-55.

[5] M. GUSIĆ, *Povijest - Hipas glavom platiti mora*, Matka, 24 (2015), 182-183.

[6] D. E. JOYCE, *Euclid's Elements*, Clark University, Worcester, Massachusetts, 2013.

[7] C. H. KAHN, *Pythagoras and the Pythagoreans: A Brief History*, Hackett, Indianapolis, 2001.

[8] V. J. KATZ, *A History of Mathematics: An Introduction, 3rd Edition*, Addison - Wesley, Boston, Massachusetts, 2007.

[9] S. KUTLEŠA, *Petrić o tajnama brojeva*, Prilozi za istraživanje hrvatske filozofske baštine, 63-64 (2006), 171-187.

[10] *MacTutor History of Mathematics archive, biographies*, `https://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html`

[11] I. MATIĆ, *Uvod u teoriju brojeva*, Odjel za matematiku Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2015.

[12] P. VRANJKOVIĆ, *Aritmetička i geometrijska sredina dvaju brojeva*, Matka - časopis za mlade matematičare, 7 (1994), 100-105.

# Sažetak

Pitagora sa Samosa često se prikazuje kao prvi "pravi" matematičar. O njegovim dostignućima ne znamo mnogo jer su učenici filozofsko - religiozne škole, koju je osnovao, sva svoja otkrića pripisivala njemu. Budući da su u svom djelovanju koristili samo usmenu komunikaciju ne postoje sačuvani spisi Pitagore ili njegovih sljedbenika. Ono što se zna o njima doznajemo od drugih. Većina njihovih dostignuća opisana je oko 300. pr. Kr. u Euklidovim *Elementima*. Općenito, najznačajnija otkrića su im u području aritmetike, geometrije, glazbe i astronomije. Matematika je predstavljala velik dio života pitagorejaca. Proučavali su razne vrste prirodnih brojeva te time postavili temelj osnovama teorije brojeva. Istraživali su svojstva parnih i neparnih brojeva. Bavili su se prostim i složenim brojevima kao i savršenim i prijateljskim brojevima te raznim vrstama figurativnih brojeva. Također su poznavali aritmetičku, geometrijsku i harmonijsku sredinu brojeva. Ono po čemu danas najviše pamtimo Pitagoru jest Pitagorin teorem. Iako je ovaj teorem bio poznat i nekim ranijim civilizacijama, nosi Pitagorino ime jer ga je on prvi dokazao. Osim toga, pitagorejcima je bio poznat i obrat ovog teorema. Njegova primjena je vrlo važna u matematici, ali i u drugim znanostima. Vezano uz Pitagorin teorem proučavali su i pitagorejske trojke. Prvi su dokazali da zbroj kuteva u trokutu iznosi 180° i generalizirali su tu tvrdnju. Proučavajući sumjerljivost veličina pitagorejci su otkrili postojanje iracionalnih brojeva što se kosilo s njihovim vjerovanjima, pa su to otkriće čuvali u tajnosti. Među ostalim važnim otkrićima u geometriji ističu se rezultati u području geometrijske algebre te pravilni poliedri.

**Ključne riječi:** Pitagora, pitagorejci, prosti brojevi, složeni brojevi, parni brojevi, neparni brojevi, savršeni brojevi, prijateljski brojevi, figurativni brojevi, aritmetička sredina, geometrijska sredina, harmonijska sredina, Pitagorin teorem, pitagorejske trojke, geometrijska algebra, iracionalni brojevi, Platonova tijela

# Achievements of Pythagorean mathematics


## Summary

Pythagoras from Samos is often portrayed as the first ”real” mathematician. We do not know much about his achievements because the students of the philosophical - religious school he founded, attributed all his discoveries to him. Since they used only oral communication in their work, there are no preserved writings of Pythagoras or his followers. All we know today about them is what others wrote. Most of their achievements are described around 300 BC in Euclid’s *Elements*. In general, their most significant breakthroughs are in arithmetic, geometry, music and astronomy. Mathematics was big part of the Pythagorean life. They studied various types of natural numbers, laying the foundation for the theory of numbers. They investigated the properties of even and odd numbers. They dealt with prime and complex numbers as well as perfect and amicable numbers and various types of figurate numbers. They also knew the arithmetic, geometric and harmonic mean of numbers. What we remember most about Pythagoras today is Pythagoras’ theorem. Although this theorem was also known to some earlier civilizations, it bears Pythagoras’ name since he was the first to prove it. Also, the Pythagoreans were aware of the reversal of this theorem. It’s application is very important in mathematics but also in other sciences. In addition to the Pythagorean theorem, Pythagorean triples were also studied. They were first to prove that the sum of the angles in a triangle is 180° and they generalized this claim. Studying the commensurability of sizes, the Pythagoreans discovered the existence of irrational numbers that contradicted their beliefs, so they kept this discovery in secret. Other important discoveries in geometry include results in geometric algebra and regular polyhedra.



**Keywords:** Pythagoras, Pythagoreans, prime numbers, complex numbers, even numbers, odd numbers, perfect numbers, amicable numbers, figurate numbers, arithmetic mean, geometric mean, harmonic mean, Pythagoras theorem, Pythagorean triplets, geometric algebra, irrational numbers, Plato’s bodies

# Životopis

Rođena sam 7. studenog 1995. godine u Slavonskom Brodu. Obrazovanje započinjem 2002. godine u osnovnoj školi "Đuro Pilar" te završetkom osnovnoškolskog obrazovanja 2010. godine upisujem opći smjer gimnazije "Matija Mesić" u Slavonskom Brodu. Nakon završene srednje škole i položene državne mature 2014. godine upisujem nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.