Generalizacija Cox - Ross - Rubinsteinovog modela

Čavajda, Andrea

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Andrea Čavajda

Generalizacija Cox-Ross-Rubinsteinovog modela

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Andrea Čavajda

Generalizacija Cox-Ross-Rubinsteinovog modela

Diplomski rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak
Komentor: dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Financijsko tržište, na kojemu se trguje osnovnim i izvedenim financijskim instrumentima, osnovna je struktura koja omogućava uspješno funkcioniranje suvremene ekonomije. Glavna je uloga izvedenih financijskih instrumenata manipulacija rizikom nastalim uslijed neizvjesnosti na tržištu. Vrijednost tih instrumenata izvodi se iz osnovnih financijskih instrumenata, a najpoznatiji izvedeni instrumenti su opcije. Iako se smatra da su se opcije koristile i davno prije, do 1973. godine smatrane su nejasnim financijskim instrumentom. Problem vrednovanja opcija rezultirao je razvojem nekih od danas osnovnih modela za određivanje cijena financijskih instrumenata.

1973. godine Fischer Black[1] i Myron Scholes[2] pružili su prvi dostatan model cijena opcija (vidi u [1]), koji nedugo zatim proširuje R. Cox Merton[3]. Razni znanstvenici pridonijeli su teoriji vrednovanja opcija. 1978. godine Sharpe predlaže pojednostavljeni pristup i sugerira prednosti proučavanja cijena u diskretnom vremenu. Zatim, Cox, Ross[4] i Rubinstein[5] (u nastavku CRR) 1979. predstavljaju binomni model u diskretnom vremenu (vidi u [4]) koji i dalje prati važna svojstva Black-Scholes-Mertonovog pristupa, a predlaže da cijena rizičnog financijskog instrumenta, u jednom periodu, može porasti za faktor u ili pasti za faktor d. Štoviše, njihov pristup predstavlja diskretnu aproksimaciju Black-Scholes-Mertonovog modela. Iako CRR model pruža jednostavni numerički izračun cijena financijskih instrumenata, razvila se potreba za nekim preinakama.

P. Boyle[6] je 1986. godine razvio trinomni model (vidi u [6],[7]), uključivši u binomno stablo mogućnost da cijena rizičnog financijskog instrumenta ostane nepromijenjena. B. Kamrad[7] i P. Ritchken[8] 1991. godine predstavili su novi model (vidi u [9]) koji se temelji na Boyleovom uz dodatan parametar λ. N. Kan proširila je binomni model (vidi u [10]) pretpostavivši da se u svakom periodu cijena rizične financijske imovine, ne mijenja samo za faktore u i d, već posljedično s ugradnjom procesa $(X_T,\ t \leq T)$, za razne moguće vrijednosti uX_t i $dX_t,\ t \leq T$.

Cilj ovog rada je pokazati kako se trguje u skladu s binomnim modelom i kako na nekim od proširenja tog modela. U prvom poglavlju navodimo osnovne pojmove koji se koriste na financijskom tržištu. S obzirom da je binomni CRR model temelj na kojem počivaju sva proširenja, u drugom i trećem poglavlju, detaljno ćemo objasniti strukturu tog modela, a zatim u četvrtom poglavlju i njegovu povezanost s financijskim tržištem u neprekidnom vremenu. U posljednjem poglavlju opisane su tri generalizacije CRR modela i objašnjeno je kako se u tim okvirima određuju cijene osnovnih financijskih instrumenata.

---

[1]Fischer Sheffey Black (siječanj 11, 1938 – kolovoz 30, 1995) američki ekonomist.
[2]Myron Samuel Scholes (srpanj 1, 1941) kanadsko-američki ekonomist.
[3]Robert Cox Merton (srpanj 31, 1944) američki ekonomist, dobitnik Nobelove nagrade.
[4]Stephen Alan "Steve" Ross (veljača 3, 1944 – travanj 3, 2017) američki ekonomist
[5]Mark Edward Rubinstein (lipanj 8, 1944 – svibanj 9, 2019) američki ekonomist.
[6]Phelim P. Boyle (1941), irski ekonomist i aktuar.
[7]Bardia Kamrad (listopad 11, 1957) američki ekonomist
[8]Peter Ritchken (ožujak 30, 1952) američki ekonomist.

1 Financijsko tržište u diskretnom vremenu

Realizacije slučajnih varijabli, kojima modeliramo vrijednost nekog financijskog instrumenta, u diskretnom vremenu promatramo u konačno mnogo trenutaka. Vrijednost tako promatranog financijskog intrumenta na intervalu između dva uzastopna trenutka je konstantna. Osim u konačno mnogo trenutaka, matematički model može opisivati vrijednost financijskog instrumenta i u prebrojivo mnogo trenutaka. Takve modele nazivamo modelima u diskretnom vremenu. Slučajni proces je familija slučajnih varijabli $(X_t,\ t \in T)$ na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ gdje je T skup indeksa kojim modeliramo vrijeme. Kažemo da pratimo promjene stanja slučajnog procesa kroz vrijeme. Slučajne procese dijelimo na procese u diskretnom i neprekidnom vremenu te na procese s diskretnim i neprebrojivim skupom stanja.

Financijsko tržište (engl. financial market) je koncept na kojem se susreću ponuda i potražnja financijskih sredstava. Odnos koji se stvara između ponude i potražnje tih sredstava oblikuje njihovu tržišnu cijenu. Financijsko tržište je skup mjesta, instrumenata, tehnika, tokova i osoba koji omogućuju razmjenu novca, deviza i kapitala. Postoji mnogo vrsta financijskih tržišta, npr. tržište dionica, tržište obveznica, tržište kredita, tržište potraživanja po kreditnim karticama, tržište državnih vrijednosnih papira, itd. Na financijskom tržištu trguje se financijskim instrumentima.

Financijski instrument je dokumentarni dokaz vlasništva nad nekom financijskom imovinom, primjerice blagajnički zapis, dionica, obveznica, itd., kojom se trguje na financijskom tržištu. Financijski instrumenti mogu se podijeliti na temelju raznih kriterija. Za nas će biti važne sljedeće dvije kategorije:

- Osnovni financijski instrumenti - rizični financijski instrumenti (novac u stranoj valuti, dionice, obveznice, zlato, ...) i nerizični financijski instrumenti (novac u domaćoj valuti koji se može uložiti ili posuditi uz nepromjenjivu kamatnu stopu r). Ulaganje u nerizične financijske instrumente ne nosi nikakav rizik, tj. poznavanje nepromjenjive kamatne stope omogućava nam da točno izračunamo kako će se vrijednost tog financijskog instrumenta mijenjati kroz vrijeme. S druge strane, rizični financijski instrumenti sa sobom nose određeni rizik te njihove buduće vrijednosti nije moguće u potpunosti točno odrediti.
- Izvedeni financijski instrumenti - vrijednost im se izvodi iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata, a primarno se koriste za upravljanje rizikom. To su primjerice opcije, forward i futures ugovori i sl. Opcije su izvedenice čija je cijena direktno vezana uz cijenu dionice za koju želimo kupiti opciju. One daju kupcu pravo, ali ne i obvezu, da kupi (call option) ili proda (put option) financijsku imovinu po unaprijed dogovorenoj cijeni tijekom određenog vremena ili na točno određen datum (trenutak dospijeća). Unaprijed dogovorena cijena naziva se cijena izvršenja (strike price).

U ovom radu proučavat ćemo financijsko tržište na kojem se trguje osnovnim financijskim instrumentima, točnije jednom rizičnom financijskom imovinom (dionica) i jednom nerizičnom financijskom imovinom. Dionica je vlasnički vrijednosni papir koji predstavlja pravo vlasništva u određenom dioničkom društvu.

1.1 Cijene

Cijenu i-te financijske imovine u trenutku t označavamo s S_t^i.

Cijenu nerizične financijske imovine u trenutku t označavamo s S_t^0. U trenutku $t = 0$, S_0^0 je poznata konstanta, a u bilo kojem trenutku $t > 0$ cijena nerizične financijske imovine je unaprijed poznata

$$S_t^0 = S_0^0(1 + r')^t, \tag{1.1}$$

gdje je r' konstantna efektivna kamatna stopa[9]. Ukoliko promatramo tržište u neprekidnom vremenu vrijedi

$$S_t^0 = S_0^0 e^{rt},$$

gdje je r nepromjenjiva neprekidna kamatna stopa. Uočimo vezu između tih dviju kamatnih stopa

$$r' = e^r - 1 > -1.$$

Cijena rizične financijske imovine u trenutku $t = 0$ je poznata konstanta, $S_0^i,\ i \in \{1, \dots, d\}$, a za $t > 0$ modeliramo ju nenegativnom slučajnom varijablom

$$S_t^i,\ t > 0,\ i \in \{1, \dots, d\},$$

tj. S_t^i je cijena i-te imovine u trenutku t.

Prije nego što objasnimo kako se u modelu trguje potrebne su nam neke pretpostavke o financijskom tržištu na kojemu ćemo graditi model.

Pretpostavljamo sljedeće:

- Sve stranke na tržištu imaju jednak pristup svim informacijama.
- Trgovati se može bez transakcijskih troškova (trgovanje je besplatno).
- Sva financijska imovina je beskonačno djeljiva, likvidna i može se posuđivati bez troškova. Likvidnost imovine ovdje znači da se može kupovati i prodavati u neograničenim količinama.

[9] Efektivna kamatna stopa, koja će u daljem tekstu skraćeno biti označena kao EKS, jedinstven je način prikazivanja kamatne stope s ciljem transparentnosti i lakše usporedbe uvjeta za odobravanje kredita/depozita kod svih kreditnih institucija i kreditnih unija.

- Vrijednost nerizične imovine se mijenja po formuli (1.1), a investitori po istoj stopi mogu investirati i posuđivati novac.
- Dozvoljena je tzv. *short* prodaja. *Short* prodaja provodi se pri očekivanju pada cijene rizične financijske imovine. Investitor posuđuje dionice ili druge vrste rizične financijske imovine, uz obećanje da će ih u nekom budućem trenutku vratiti, i prodaje ih kako bi ih zatim otkupio prema očekivano manjoj cijeni.
- Posjedovanjem imovine ne ostvarujemo dodatni prihod ili trošak.

1.2 Osnovni pojmovi

Prije nego konstruiramo vjerojatnosni prostor na kojemu ćemo promatrati navedene cijene, podsjetit ćemo se nekoliko temeljnih pojmova (vidi u [2] i [12]).

Definicija 1.1. *Neka je Ω neprazan skup elementarnih događaja. Familija $\mathcal{F}$ podskupova skupa Ω jest σ-algebra skupova na Ω ako zadovoljava sljedeća svojstva*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je $A^c \in \mathcal{F}$

(iii) ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_i,\ i \in I) \subset \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, onda $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj.

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{F}.$$

Uređeni par $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se izmjeriv prostor.

Definicija 1.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor, funkcija $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ naziva se vjerojatnost na Ω ako zadovoljava sljedeće*

(i) $P(A) \geq 0,\ \forall A \in \mathcal{F}$,

(ii) $P(\Omega) = 1$,

(iii) ako je dana prebrojiva familija $(A_i,\ i \in I) \subset \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, skupova koji su disjunktni $(A_j \cap A_i, \forall i \neq j)$, onda vrijedi

$$P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i).$$

Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ nazivamo vjerojatnosni prostor.

Definicija 1.3. *Neka su P i P^* dvije vjerojatnosti na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$. Kažemo da su P i P^* ekvivalentne ako za svaki $A \in \mathcal{F}$ vrijedi*

$$P(A) = 0 \iff P^*(A) = 0.$$

Pišemo $P \approx P^*$.

Definicija 1.4. *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Ako red $\sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$ apsolutno konvergira, onda kažemo da slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje i broj*

$$E[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega)P(\{\omega\})$$

zovemo matematičko očekivanje slučajne varijable X.

Definicija 1.5. *Neka je $X : \Omega \to \mathbb{R}$ slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koja ima očekivanje te neka je $\mathcal{G}$ σ-algebra sadržana u $\mathcal{F}$. Uvjetno očekivanje od X uz dano $\mathcal{G}$ je $\mathcal{G}$-izmjeriva slučajna varijabla $E[X|\mathcal{G}] : \Omega \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi*

$$E[E[X|\mathcal{G}]1_A] = E[X1_A], \ \forall A \in \mathcal{G}.$$

Uvjetno očekivanje postoji i jedinstveno je gotovo sigurno te se može pokazati da je uvjetno očekivanje najbolja aproksimacija slučajne varijable X u srednje kvadratnom smislu ukoliko su nam poznate informacije sadržane u σ-algebri $\mathcal{G}$.

Navedimo neka osnovna svojstva uvjetnog očekivanja:

1. Ako je X $\mathcal{G}$-izmjeriva, tada je $E[X|\mathcal{G}] = X$ g.s.

2. Ako je X nezavisna od $\mathcal{G}$, tada je $E[X|\mathcal{G}] = E[X]$.

3. $E[E[X| \ \mathcal{G}]] = E[X]$.

4. Ako su X_1 i X_2 slučajne varijable koje imaju očekivanje, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada je

$$E[\alpha X_1 + \beta X_2| \ \mathcal{G}] = \alpha E[X_1|\mathcal{G}] + \beta E[X_2|\mathcal{G}].$$

5. Ako slučajna varijabla Z ima očekivanje i ako je $\mathcal{G}$-izmjeriva, onda je

$$E[ZX|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}].$$

6. AKo je $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, onda je

$$E[E[X|\mathcal{G}]| \ \mathcal{H}] = E[X|\mathcal{H}].$$

Definicija 1.6. *Slučajni proces je familija slučajnih varijabli $(X_t, \ t \in T)$ na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, pri čemu je $T \subseteq \mathbb{R}$. Ako je T diskretan skup, onda govorimo o slučajnom procesu u diskretnom vremenu.*

Definicija 1.7. *Familija* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ σ*-algebri sadržanih u* $\mathcal{F}$ *zove se filtracija ako vrijedi da je* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}_0$.

Filtracija je svaka rastuća familija σ-algebri na Ω koje su sve sadržane u σ-algebri $\mathcal{F}$ iz vjerojatnosnog prostora $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Definicija 1.8. *Slučajni proces* $(X_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *je adaptiran na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *ako je za svaki* $n \in \mathbb{N}_0,\ X_n$ *izmjeriva u odnosu na* $\mathcal{F}_n$.

Definicija 1.9. *Slučajni proces* $(Z_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *je predvidiv u odnosu na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *ako je za svaki* $n \in \mathbb{N},\ Z_n,$ *izmjeriva u odnosu na* $\mathcal{F}_{n-1}$.

Definicija 1.10. *Slučajni proces* $(X_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *na vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je martingal u diskretnom vremenu s obzirom na filtraciju* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *ako su zadovoljeni sljedeći zahtjevi*

(i) $E[|X_n|] < \infty,\ \forall n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) $(X_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *je* $\mathbb{F}$*-adaptiran,*

(iii) $E[X_{n+1}|\ \mathcal{F}_n] = X_n$ *g.s.,* $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Zahtjev *iii*) ekvivalentan je zahtjevu

$$E[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] = 0,$$

pri čemu $(X_{n+1} - X_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ zovemo niz martingalnih razlika.

Definicija 1.11. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *vjerojatnosni prostor s filtracijom* $\mathbb{F} = (F_n,\, n \in \mathbb{N}_0),\ X = (X_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathbb{F}-$*martingal i* $Z = (Z_n,\ n \in \mathbb{N})$ *predvidiv proces u odnosu na filtraciju* $\mathbb{F}$. *Slučajan proces* $Y = (Y_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ *definiran s*

$$\begin{aligned} Y_0 &= 0 \\ Y_n &= \sum_{k=1}^{n} Z_k(X_k - X_{k-1}),\ n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

naziva se martingalna transformacija procesa X *procesom* Z.

Može se pokazati da je martingalna transformacija također martingal.

Teorem 1.1. *Ako je* $X = (X_n,\, n \in \mathbb{N}_0)$ $\mathbb{F}-$*martingal i* $Z = (Z_n,\, n \in \mathbb{N})$ *predvidiv proces takav da je svaka* Z_n *ograničena slučajna varijabla, onda je martingalna transformacija definirana prethodnom definicijom 1.11 martingal.*

Dokaz. Kako je Y_n linearna kombinacija $\mathcal{F}_n$-izmjerivih slučajnih varijabli, ona je i sama $\mathcal{F}_n$-izmjeriva. Z_{n+1} je $\mathcal{F}_n$-izmjeriva, a svojstvo *iii*) iz definicije 1.10 slijedi iz

$$\begin{aligned} E[(Y_{n+1} - Y_n)|\mathcal{F}_n] &= E[Z_{n+1}(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] \\ &= Z_{n+1}E[(X_{n+1} - X_n)|\mathcal{F}_n] = 0. \end{aligned}$$

$\square$

1.3 Model financijskog tržišta u diskretnom vremenu

Pretpostavljamo da se imovinom može trgovati u trenucima $t = 0,\ 1, \ldots,\ T$. Konstruirajmo vjerojatnosni prostor. Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor na kojem promatramo cijenu imovine. Elementarni događaji $w \in \Omega$ različita su stanja svijeta, odnosno mogući scenariji. Pretpostavljamo da se može dogoditi najviše konačno mnogo različitih scenarija, odnosno da je prostor elementarnih događaja, Ω, konačan:

$$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ ...,\ \omega_k\}, \qquad \text{za neki } k \in \mathbb{N}.$$

Za σ-algebru uzimamo partitivni skup od Ω, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pretpostavljamo da uz vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ imamo neopadajući niz σ- algebri sadržanih u $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset ... \subset \mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}.$$

Sigma algebra $\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots, T$ sadrži elemente, tj. događaje koji mogu biti opaženi do trenutka t.

U trenutku $t = 0$ nemamo nikakvu informaciju o mogućem stanju svijeta, tj. $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, a na kraju perioda promatranja imamo potpunu informaciju $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$. Stoga, σ- algebra $\mathcal{F}_t$ predstavlja informaciju o stanju svijeta, dostupnu svim sudionicima na tržištu, u trenutku t.

S odmakom vremena opažamo sve više događaja, stoga ima smisla pretpostaviti da je tako definirana familija σ-algebri neopadajuća.

Informacije o financijskom tržištu u diskretnom vremenu kroz vrijeme modeliramo filtracijom $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t,\ t = 0, 1, \ldots, T\}$.

Slučajna varijabla $S_t^i,\ t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ izmjeriva je u odnosu na prethodno definiranu sigma algebru $\mathcal{F}_t$, tj. za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\{S_t^i \leq x\} = \{\omega \in \Omega \mid S_t^i(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}_t.$$

Dakle, je li cijena S_t^i veća ili manja od x ovisi samo o događajima do trenutka t.

Sa $S_t := (S_t^0,\ S_t^1,\ \ldots,\ S_t^d)$ označit ćemo vektor cijena svih imovina u trenutku t.
Za svaki $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$, $S_t : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1}$ je $\mathcal{F}_t$-izmjeriv slučajni vektor pa je $S = (S_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ adaptiran slučajni proces.

U nastavku definiramo povrate financijske imovine, koje, s obzirom na bolja statistička svojstva, često promatramo umjesto cijena.

Definicija 1.12. *Povrat je relativna promjena cijene financijske imovine u određenom trenutku s obzirom na neki prethodni trenutak, često izražena kao postotak.*

Definicija 1.13. *Jednostavni relativni povrat od i-te financijske imovine u trenutku t, s obzirom na njenu vrijednost u trenutku $t-1$, R_t^i, je postotna promjena njezine cijene*

$$R_t^i = \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i}, \; i \in \{0, 1, \dots, d\}, \; t \in \{1, \dots, T\}.$$

Alternativno, definiramo bruto povrat

$$1 + R_t^i = \frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}.$$

Definicija 1.14. *Log-povrat u trenutku t s obzirom na vrijednost financijske imovine u trenutku $t-1$ definira se kao*

$$r_t^i = ln(1 + R_t^i) = ln\left(\frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}\right), \; i \in \{0, 1, \dots, d\}, \; t \in \{1, \dots, T\}.$$

1.4 Strategija trgovanja ili dinamički portfelj

Trgovanje se u modelu odvija konstrukcijom portfelja. U trenutku $t = 0$ kupujemo financijske instrumente i tako stvaramo portfelj:

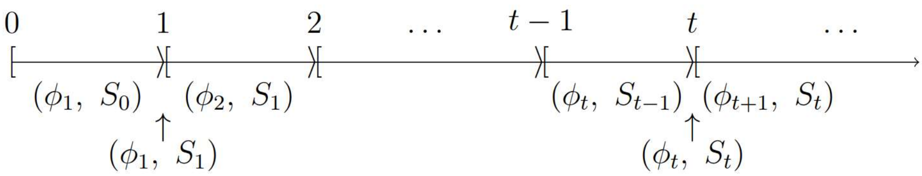
$$\phi_1 = (\phi_1^0, \; \phi_1^1, \; \dots, \; \phi_1^d),$$

gdje ϕ_1^i označava broj jedinica i-te imovine u portfelju.

U trenutku $t = 1$ možemo rebalansirati portfelj, odnosno zamijeniti ga drugim portfeljem:

$$\phi_2 = (\phi_2^0, \; \phi_2^1, \; \dots, \; \phi_2^d).$$

Taj portfelj ovisi o cijenama u trenutku *t=1*, a s obzirom da su one slučajne, $\mathcal{F}_1$-izmjerive, i portfelj ϕ_2 će biti $\mathcal{F}_1$-izmjeriv slučajni vektor u $\mathbb{R}^{(d+1)}$. U trenutku $t = 2$ saznajemo nove cijene S_2 pa opet rebalansiramo portfelj i tako dalje. Slučajan proces $\phi = (\phi_t, t \in \{0, 1, \dots, T\})$ je predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, \, t \in \{0, 1, \dots, T\})$.



Slika 1.1 Dinamika portfelja

Definicija 1.15. *Slučajan proces $\phi = (\phi_t,\ t \in \{1, 2, \ldots, T\})$, s vrijednostima u $\mathbb{R}^{(d+1)}$, predvidiv u odnosu na filtraciju $\mathbb{F}$, zove se dinamički portfelj ili strategija trgovanja.*

Dodatno, definiramo portfelj u trenutku $t = 0$ formulom $\phi_0 := \phi_1$.

Definicija 1.16. *Vrijednost portfelja ϕ u trenutku $t = 0, 1, \ldots, T$ definira se kao*

$$V_t(\phi) = (\phi_t,\ S_t) = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i.$$

$V_t(\phi)$ je $\mathcal{F}_t$ -izmjeriva slučajna varijabla pa vidimo da je $V(\phi) = (V_t(\phi) :\ t = 0, 1, \ldots, T)$ adaptiran slučajni proces.

Definicija 1.17. *Strategija trgovanja ϕ je samofinancirajuća ako $\forall t \in \{0, 1, \ldots, T - 1\}$ vrijedi*

$$(\phi_t,\ S_t) = (\phi_{t+1},\ S_t). \tag{1.2}$$

Uvjet (1.2) govori da vrijednost novog portfelja uz stare cijene mora biti jednaka vrijednosti starog uz te iste cijene, odnosno da sredstva za kupnju novog portfelja mogu doći samo iz vrijednosti starog portfelja.

Rebalansiranje se vrši s ciljem $(\phi_t,\ S_t) > (\phi_{t-1},\ S_t)$.

Definicija 1.18. *Strategija trgovanja ϕ je dopustiva ako je samofinancirajuća i vrijedi*

$$V_t(\phi) \geq 0, \qquad \forall t = 0, 1, \ldots, T.$$

Definicija 1.19. *Dopustiva strategija ϕ je arbitraža ako je $V_0(\phi) = 0$ i $P(V_T(\phi) > 0) > 0$, gdje je P objektivna vjerojatnost* [10] *na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.*

[10] Objektivna vjerojatnost P na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definirana je sljedećim zahtjevom

$$P(\omega_i) > 0,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Dakle, arbitraža je dopustiva strategija koja u početku ne košta ništa, a s pozitivnom vjerojatnošću generira zaradu. Odnosno arbitraža omogućuje stvaranje profita iz ničega, a bez izloženosti riziku gubitka. Arbitraža predstavlja istovremenu kupovinu i prodaju financijske imovine u svrhu zarade koja nastaje iz razlike u cijeni imovine.

Na tržištu je teško pronaći arbitražu pa ima smisla proučavati modele tržišta koji ne dopuštaju arbitražu. Kažemo da financijsko tržište ne dopušta arbitražu ako niti jedna dopustiva strategija nije arbitraža.

Osim stvarnih vrijednosti financijskih imovina i portfelja zanimaju nas i sadašnje, diskontirane vrijednosti. Diskontirane cijene financijskih imovina označavamo s $\tilde{S}_t^i$.

Sadašnja vrijednost nerizičnog financijskog instrumenta koji u trenutku t vrijedi 1, iznosi

$$\frac{1}{(1+r')^t}.$$

Ako i-ti rizični financijski instrument diskontiramo kao nerizični, njegova sadašnja vrijednost iznositi će

$$\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{(1+r')^t}.$$

Uočimo, $\tilde{S}_t^0 = \tilde{S}^0{}_{t+1} = S_0^0$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Diskontiranu vrijednost portfelja označavamo s $\tilde{V}_t(\phi)$, a iznosi

$$\tilde{V}_t(\phi) = (\phi_t, \tilde{S}_t) = \sum_{k=0}^{d} \phi_t^k \tilde{S}_t^k$$

gdje smo sa $\tilde{S}_t := (\tilde{S}_t^0, \tilde{S}_t^1, ..., \tilde{S}_t^d)$ označili vektor diskontiranih cijena svih imovina u trenutku t.

Uočimo, $\tilde{V}_0(\phi) = V_0(\phi)$.

Definicija 1.20. *Vjerojatnosna mjera P^* na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se martingalna mjera ili vjerojatnost neutralna na rizik ako za sve $t \in \{0, 1, \ldots, T-1\}$ vrijedi:*

$$E^*[\tilde{S}_{t+1}^i \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{S}_t^i, \qquad i = 0, 1, \ldots, d.$$

Ekvivalentno, P^* je martingalna mjera ako je slučajni proces diskontiranih cijena financijskih imovina $(\tilde{S}_t,\, t \in \{0, 1, \ldots, T\}) = ((\tilde{S}_t^0, \tilde{S}_t^1, ..., \tilde{S}_t^d),\ t \in \{0, 1, \ldots, T\})$, $\mathbb{F}$-martingal $(\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t,\, t \in \{0, 1, \ldots, T\}))$ s obzirom na vjerojatnost P^*, tj. ako vrijedi

$$E^*[\tilde{S}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = E^*[(\tilde{S}_{t+1}^0, \tilde{S}_{t+1}^1, ..., \tilde{S}_{t+1}^d) \mid \mathcal{F}_t] = (\tilde{S}_t^0, \tilde{S}_t^1, ..., \tilde{S}_t^d) = \tilde{S}_t.$$

Vjerojatnosna mjera P^* na $(\Omega, \mathcal{F})$ naziva se ekvivalentna martingalna mjera ako je martingalna mjera i vrijedi $P^* \approx P$.

Uočimo, za nerizičnu financijsku imovinu vrijedi

$$E[\tilde{S}^0_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = \tilde{S}^0_t = S^0_0,$$

dok to za rizičnu generalno ne vrijedi

$$E[\tilde{S}^i_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] \neq \tilde{S}^i_t, \qquad i = 1, \dots, d,$$

gdje je E očekivanje s obzirom na objektivnu vjerojatnost P:

$$P(\omega_i) > 0, \ \forall i \in \{1, \dots, n\}.$$

Kako bismo provjerili da tržište ne dopušta arbitražu, po definiciji, trebali bismo provjeriti da nijedna dopustiva strategija nije arbitraža. To nije jednostavan proces, a sljedeći će ga teorem pojednostaviti.

Teorem 1.2. *Ako postoji bar jedna ekvivalentna martingalna mjera na $(\Omega, \mathcal{F})$ tada financijsko tržište u diskretnom vremenu ne dopušta arbitražu, tj. u okvirima tog modela financijskog tržišta nemoguće je konstrurati portfelj koji je arbitraža.*

Dokaz. Pretpostavimo da postoji barem jedna takva vjerojatnost P^*, s obzirom na koju je vektor diskontiranih cijena $(\tilde{S}_t, \ t = 0, 1, \dots, T)$ martingal i koja je ekvivalentna vjerojatnosti P. Pokažimo sada da nije moguće konstruirati portfelj koji je abritraža.

Pretpostavimo suprotno, tj. neka je:

$\phi = (\phi_t, \ t = 1, 2, \dots, T) = ((\phi^0_t, \ \phi^1_t, \ \dots, \ \phi^d_t), \ t = 1, 2, \dots, T)$, slučajni proces za koji vrijedi:

$$V_0(\phi) = 0, \ P(V_T(\phi > 0)) > 0, \qquad \tilde{V}_t(\phi) = (\phi_t, \tilde{S}_t) = V_0(\phi) + \sum_{k=1}^{t} (\phi_k, \ \Delta\tilde{S}_k)$$

gdje je $\Delta\tilde{S}_k = \tilde{S}_k - \tilde{S}_{k-1}$ prirast diskontiranih cijena na $\langle k-1, k]$. Također, ϕ_k je $\mathcal{F}_{k-1}$ -izmjeriv, $k = 1, \dots, T$.

Vektor $(\Delta\tilde{S}_t, \ t = 1, 2, \dots, T)$ je vektor martingalnih razlika, pa je i sam martingal. Stoga, ima konstantno očekivanje, jednako 0.

Vektor

$$(\tilde{V}_t(\phi),\ t=0,1,\dots,T) = \Big(\sum_{k=1}^{t}(\phi_k,\ \Delta\tilde{S}_k),\ t=0,1,\dots,T\Big)$$

je martingalna transformacija martingala $(\tilde{S}_t, t \in \{0,1,\dots,T\})$ predvidivim procesom ϕ, pa je i sam martingal obzirom na P^* (Ω konačan) i ima konstantno očekivanje:

$$E^*[\tilde{V}_t(\phi)] = E^*[\tilde{V}_0(\phi)] = 0.$$

Ako je portfelj ϕ arbitraža, tada on mora biti dopustiv, tj. $\forall t \in \{0,1,\dots,T\}$ mora biti $\tilde{V}_t(\phi) \geq 0$.

Uočimo:

- $\tilde{V}_t(\phi) \geq 0$.
- $E^*[\tilde{V}_t(\phi)] = 0$.

Slijedi, $\tilde{V}_t(\phi) = 0$. gotovo sigurno, tj. $P^*(\tilde{V}_t(\phi) = 0) = 1$.

Specijalno, za $t = T$ je $P^*(\tilde{V}_T(\phi) = 0) = 1$, a to je u kontradikciji sa zahtjevom iz definicije abritraže $P^*(\tilde{V}_T(\phi) > 0) > 0$.

Slijedi, portfelj ϕ ne može biti arbitraža. $\square$

Vrijedi i obrat prethodnog teorema, tj. ako na financijskom tržištu u diskretnom vremenu ne postoji arbitraža, tada postoji barem jedna vjerojatnost P^* neutralna na rizik.

2 Jednoperiodni binarni model

Pretpostavimo da se imovinom može trgovati u trenucima $t \in \{0, 1\}$ te pretpostavimo da trgujemo jednom nerizičnom financijskom imovinom i jednom rizičnom financijskom imovinom. S obzirom da postoje samo dva trenutka, početni i završni te kako je između njih samo jedan period, takav model na financijskom tržištu naziva se jednoperiodni model.

Slučajnu varijablu $S_1^i,\ i \in \{0, 1\}$, tj. cijenu imovina u trenutku 1 možemo modelirati s dvije, tri ili više mogućih vrijednosti. U ovom slučaju modelirat ćemo ju s dvije moguće vrijednosti. Uočimo, cijena financijskih instrumenata mijenja se samo jednom.

2.1 Cijene financijskih instrumenata

Cijena nerizične financijske imovine u trenutku $t = 0$ je neka poznata konstanta $S_0^0 > 0$, a u trenutku $t = 1$, iznosi:

$$S_1^0 = S_0^0(1 + r'), \qquad \text{gdje je } r' \text{ EKS.}$$

Cijena rizične financijske imovine u trenutku *t=0* je neka poznata konstanta $S_0^1 > 0$, a u trenutku $t = 1$, iznosi:

$$S_1^1 = S_0^1(1 + X_1),$$

gdje je X_1 relativni povrat cijene rizične financijske imovine u trenutku $t = 1$:

$$X_1 = \frac{S_1^1 - S_0^1}{S_0^1}.$$

Pretpostavimo da se relativni povrat može realizirati samo s a ili s b, tj. imamo samo dva moguća elementarna događaja $\Omega = \{a, b\}$.

Distribucija slučajne varijable X_1 dana je sljedećom tablicom:

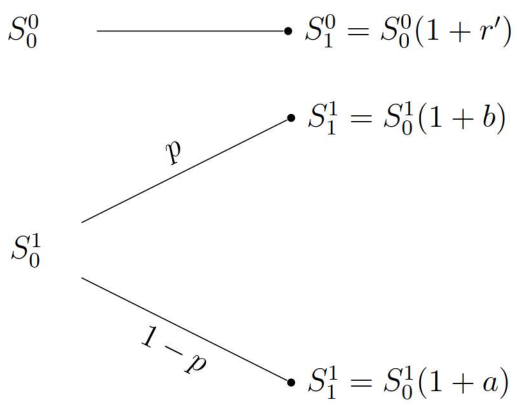
$$X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle,$$

te vrijedi $-1 \leq a < b,\ a,\ b \in \mathbb{R}$.

Cijena rizične financijske imovine je, u trenutku $t = 1$, transformacija slučajne varijable X_1, a distribucija joj je dana tablicom:

$$S_1^1 = \begin{pmatrix} S_0^1(1+a) & S_0^1(1+b) \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle,$$

te vrijedi $-1 \leq a < b,\ a,\ b \in \mathbb{R}$.



Slika 2.1: Promjene cijena u jednom periodu

2.2 Strategija trgovanja

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor na kojem promatramo navedene financijske instrumente. Skup elementarnih događaja Ω je dvočlani skup $\Omega = \{a, b\}$, a σ-algebra je partitivni skup skupa Ω, $\mathcal{P}(\Omega)$. Vjerojatnost $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ definirana je s $P(\{a\}) = 1-p,\ P(\{b\}) = p$.

Konstruirajmo sada portfelj na tako modeliranom financijskom tržištu. Portfelj je vektor $\phi_t = (\phi_t^0,\ \phi_t^1) \in \mathbb{R}^2$, za $t \in \{0,1\}$.

Vrijednost portfelja u trenutku $t = 0$ iznosi:

$$V_0(\phi_0) = \phi_0^0\ S_0^0 + \phi_0^1\ S_0^1,$$

a u trenutku $t = 1$:

$$V_1(\phi_1) = \phi_1^0\ S_1^0 + \phi_1^1\ S_1^1.$$

Vrijednost portfelja je nenegativna slučajna varijabla. Uočimo $V_1(\phi_1)$ je transformacija slučajne varijable X_1.

Ranije smo već rekli da je arbitraža portfelj za koji vrijedi:

- $V_0(\phi_0) = 0$
- $V_1(\phi_1) > 0$
- $P(V_1(\phi_1) > 0) > 0$.

Dakle, u početku ne košta ništa, ne donosi gubitak te s pozitivnom vjerojatnošću generira zaradu.

Teorem 2.1. *Kako bi jednoperiodni model financijskog tržišta bio bez arbitraže nužno je da vrijedi $a < r' < b$.*

Dokaz. Pretpostavimo da ne vrijedi $a < r' < b$.

1.slučaj: Pretpostavimo da vrijedi $r' \leq a < b$.

U trenutku $t = 0$ posudimo iznos S_0^1, uz EKS r' te tim novcem kupimo 1 dionicu.
Formirali smo portfelj (-S_0^1, 1).
U trenutku $t = 1$ prodamo dionicu i zaradimo ili $S_0^1(1 + a)$ ili $S_0^1(1 + b)$.
Banci sada dugujemo $S_0^1(1 + r')$.
S obzirom da je $r' \leq a < b$, vrijedi $S_0^1(1 + r') \leq S_0^1(1 + a) < S_0^1(1 + b)$.

Dakle, dug banci je svakako manji od formirane zarade. Stoga, vraćanjem duga banci ostaje nam iznos $S_1^1 - S_0^1(1 + r')$.
Generirali smo zaradu, koja s vjerojatnošću $1 - p$ iznosi $S_0^1(a - r') \geq 0$, dok s vjerojatnošću p iznosi $S_0^1(b - r') \geq 0$. U oba slučaja, dakle, postoji arbitraža.

2.slučaj: Pretpostavimo da vrijedi $a < b \leq r'$.

U trenutku $t = 0$ posudimo dionicu koja vrijedi S_0^1. Zatim ju prodamo te dobiveni novac u iznosu S_0^1 uložimo u banku, nerizično, uz EKS r'.

U trenutku $t = 1$ moramo vratiti onoliki iznos, kolika je sada vrijednost posuđene dionice u trenutku $t = 0$.
Vrijednost dionice s vjerojatnošću $1 - p$ iznosi $S_1^1 = S_0^1(1 + a)$, dok s vjerojatnošću p iznosi $S_1^1 = S_0^1(1 + b)$.
Sada iz banke podignemo uloženi novac u vrijednosti $S_0^1(1 + r')$, što je svakako više od S_1^1.
Vratimo dug S_1^1 i generiramo zaradu u iznosu: $S_0^1(1 + r') - S_1^1$.
S vjerojatnošću $1 - p$ to je jednako $S_0^1(r' - a) > 0$, dok je s vjerojatnošću p jednako $S_0^1(r' - b) \geq 0$.
U oba slučaja, također postoji arbitraža.

Slijedi, kako bi model jednoperiodnog financijskog tržišta bio bez arbitraže, nužno je da vrijedi $a < r' < b$.

□

Pretpostavimo da na financijskom tržištu vrijedi $-1 \leq a < r' < b$, a, $b \in \mathbb{R}$, tj. da nema arbitraže. Prema teoremu 1.2 slijedi da postoji barem jedna vjerojatnosna mjera $P^* : \mathcal{F} \to [0,1]$, neutralna na rizik, tj. za koju vrijedi:

$$S_0^1 = E^* \left[\frac{S_1^1}{1+r'} \right], \ i \in \{0,1\}.$$

Vrijednost rizične financijske imovine u trenutku $t = 1$ iznosi:

$$S_1^1 = S_0^1(1 + X_1),$$

pri čemu je X_1 slučajna varijabla s tablicom distribucije:

$$X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0,1 \rangle.$$

S obzirom da smo zaljučili da postoji vjerojatnost P^* neutralna na rizik, definirajmo artificijelnu distribuciju slučajne varijable X_1:

$$X_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p^* & p^* \end{pmatrix}, \quad p^* \in \langle 0,1 \rangle.$$

Odredimo vrijednost p^*:

$$\begin{aligned} S_0^1 = E^*\left[\frac{S_1^1}{1+r'}\right] &= \frac{1}{1+r'}E^*[S_1^1] = \frac{1}{1+r'}E^*[S_0^1(1+X_1)] = \\ &= \frac{1}{1+r'}(S_0^1(1+a)(1-p^*) + S_0^1(1+b)p^*), \end{aligned}$$

odakle, dijeljenjem s S_0^1 te množenjem s $1 + r'$, slijedi da je

$$1 + r' = (1+a)(1-p^*) + (1+b)p^* =$$

$$= 1 - p^* + a - ap^* + p^* + bp^*,$$

pa je

$$r' - a = p^*(b-a),$$

odnosno slijedi da je

$$P^*(\{b\}) = p^* = \frac{r'-a}{b-a}, \qquad P^*(\{a\}) = 1 - p^* = \frac{b-r'}{b-a}.$$

3 Cox-Ross-Rubinsteinov (CRR) model

U jednoperiodnom modelu promatrano razdoblje obuhvaćalo je dva trenutka, početni i završni, tj. jedan period između njih. U nastavku ćemo promatrati model gdje je promatrano vremensko razdoblje podijeljeno na više od jednog perioda, tj. promatrati ćemo višeperiodni model.

Cox-Ross-Rubinsteinov model, u nastavku CRR model, je višeperiodni model financijskog tržišta u diskretnom vremenu. U ovom modelu također trgujemo s dva financijska instrumenta, jednim nerizičnim (novac) te jednim rizičnim (dionica) u T perioda, odnosno u trenucima $t \in \{0, 1, \dots, T\}$.

3.1 Cijene financijskih instrumenata

Cijena nerizičnog financijskog instrumenta u trenutku $t = 0$ je nenegativna, poznata konstanta te iznosi S_0^0, a cijenu u trenutku $t \in \{1, \dots, T\}$ računamo pomoću formule:

$$S_t^0 = S_0^0\,(1 + r')^t, \qquad r' \text{ EKS.}$$

Cijena se rizičnog financijskog instrumenta u periodu između dva uzastopna trenutka $t-1$ i t promijeni za faktor $(1 + X_t)$. U $t = 0$ to je također nenegativna i poznata konstanta S_0^1. Cijenu rizičnog financijskog instrumenta u trenucima $t \in \{1, \dots, T\}$ ne možemo direktno računati kao cijenu nerizičnog financijskog instrumenta. To nije unaprijed determinirana vrijednost, stoga ju modeliramo slučajnom varijablom:

$$S_t^1 = S_{t-1}^1(1 + X_t) = S_{t-2}^1(1 + X_{t-1})(1 + X_t) = \tag{3.1}$$

$$= \dots = S_0^1 \prod_{k=1}^{t}(1 + X_k), \tag{3.2}$$

gdje je X_t slučajna varijabla kojom je modeliran relativni povrat rizične financijske imovine u trenutku t, tj.

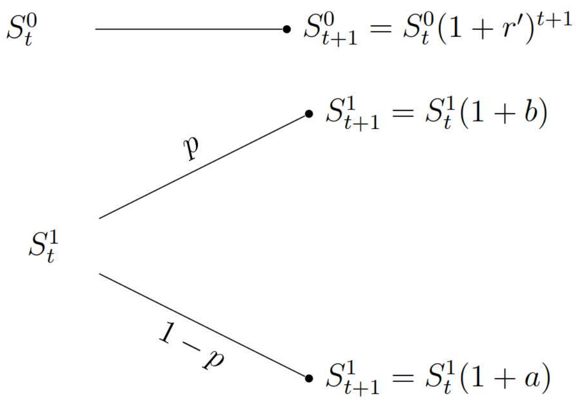
$$X_t = \frac{S_t^1 - S_{t-1}^1}{S_{t-1}^1}.$$

Relativni povrat X_t modeliramo kao i ranije diskretnom slučajnom varijablom. Ovisno o namjeni višeperiodnog modela, slučajnu varijablu S_t, kao i kod jednoperiodnog modela, možemo modelirati s dvije, tri ili više mogućih vrijednosti, uključujući i prebrojivo mnogo (konačan broj vrijednosti je dovoljan da bi model bio primjenjiv).

Pretpostavimo da imamo dva moguća elementarna događaja, tj. $\Omega = \{a, b\}$. Tablica distribucije slučajne varijable X_t dana je s:

$$X_t = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}, \quad p \in \langle 0, 1 \rangle$$

te pritom vrijedi $-1 \leq a < b,\ a,\ b \in \mathbb{R}$.



Slika 3.1: Promjene cijena u jednom periodu u okvirima CRR modela

3.2 Konstrukcija vjerojatnosnog prostora

Vjerojatnosni prostor CRR modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu je produktni vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ na kojemu vrijedi:

- skup elementarnih događaja $\Omega = \{a, b\} \times \{a, b\} \times \cdots \times \{a, b\} = \{a, b\}^T$
- elementarni događaji su uređene T-torke $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_T)$, gdje je $\forall t \in \{1, 2, \ldots, T\}$, $\omega_t = a$ ili $\omega_t = b$
- $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ je σ-algebra koja sadrži sve informacije na tržištu u trenucima $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$
- vjerojatnost $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ svakom elementarnog događaju $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_T)$ pridružuje vjerojatnost

  $$P(\{\omega\}) = P'(\{\omega_1\}) \cdot P'(\{\omega_2\}) \cdot \cdots \cdot P'(\{\omega_T\}) = \prod_{k=1}^{T} P'(\{\omega_k\}),$$

  gdje je $P' : \mathcal{P}(\{a, b\}) \to [0, 1]$ vjerojatnost takva da je

  $$P'(\{a\}) = 1 - p, \qquad P'(\{b\}) = p, \qquad p \in \langle 0, 1 \rangle.$$

- Na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ definiramo niz slučajnih varijabli: $X_1, \ldots, X_T$ na sljedeći način

$$X_t(\omega) = \omega_t,\ \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_T).$$

Uočimo da su to nezavisne slučajne varijable s distribucijom $P(X_t = b) = p,\ P(X_t = a) = 1 - p$.

- Informacije o financijskom tržištu kroz vrijeme, kao i ranije, modeliramo filtracijom $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t : t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, gdje su:
  - $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ tj. u trenutku $t = 0$ nemamo nikakvu informaciju.
  - $\mathcal{F}_t = \sigma(S_0^1, S_1^1, \ldots, S_t^1)$, za neki $t \in \{1, \ldots, T\}$ tj. u $t \in \{1, \ldots, T\}$ imamo informaciju o cijenama $S_0^1, S_1^1, \ldots, S_t^1$.
  - $\sigma(S_0^1, S_1^1, \ldots, S_t^1)$ je najmanja σ-algebra na Ω takva da su sve slučajne varijable $S_0^1, S_1^1, \ldots, S_t^1$ izmjerive. Uočimo da je ta informacija jednaka informaciji koju možemo dobiti pomoću relativnih povrata $X_1, \ldots, X_t$, tj. $\mathcal{F}_t = \sigma(X_1, \ldots, X_t)$.

Diskontirane cijene financijskih imovina označavamo kao i ranije s $\tilde{S}_t^i$. Sadašnja vrijednost i-tog rizičnog financijskog instrumenta, ako ga diskontiramo kao da je nerizični, iznosi

$$\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{(1 + r')^t}.$$

Uočimo, $\tilde{S}_t^0 = S_0^0 = \tilde{S}^0{}_{t+1}$ za sve $t = 0, 1, \ldots, T$. Sa $\tilde{S}_t := (\tilde{S}_t^0, \tilde{S}_t^1)$ označili smo vektor diskontiranih cijena svih imovina u trenutku t.

3.3 Arbitraža u okvirima CRR modela

Lema 3.1. *Neka je P^* vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna s P.*

(a) Niz diskontiranih cijena $(\tilde{S}_t : t = 0, 1, \ldots, T)$ je P^*-martingal ako i samo ako vrijedi

$$E^*[X_{t+1} |\ \mathcal{F}_t] = r', \qquad t = 0,\ 1, \ldots,\ T - 1.$$

(b) Neka je zadovoljen uvjet (a). Tada vrijedi $a < r' < b$ i slučajne varijable $X_1, X_2, \ldots, X_T$ su nezavisne i jednako distribuirane (u odnosu na P^*).

Dokaz. (a) Za $t \in \{0, 1, \ldots, T\}$ vrijedi sljedeći niz ekvivalencija:

$$E^*\Big[\tilde{S}_t^1 \big|\ \mathcal{F}_{t-1}\Big] = \tilde{S}^1{}_{t-1} \iff E^*\left[\frac{\tilde{S}_t^1}{\tilde{S}^1{}_{t-1}}\Big|\ \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1$$

$$\iff E^*\left[\frac{\frac{S_t^1}{(1+r')^t}}{\frac{S_{t-1}^1}{(1+r')^{t-1}}}\Big|\ \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1 \iff (1+r')^{-1}E^*\left[\frac{S_t^1}{S_{t-1}^1}\Big|\ \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1$$

$$\iff E^*\left[\frac{S_t^1}{S_{t-1}^1}\Big|\ \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1 + r' \iff E^*\left[\frac{S_t^1}{S_{t-1}^1} - 1\Big|\ \mathcal{F}_{t-1}\right] = 1 + r' - 1$$

$$\iff E^*\Big[X_t\Big|\ \mathcal{F}_{t-1}\Big] = r'$$

gdje smo u prvoj ekvivalenciji iskoristili da je $\tilde{S}^1{}_{t-1}$ $\mathcal{F}_{t-1}$-izmjeriva.

(b) Po pretpostavci vrijedi $E^*\Big[X_t\Big|\ \mathcal{F}_{t-1}\Big] = r'$.

Međutim, $\mathcal{R}(X_t) = \{a, b\}$ te $P^*(X_t = a) > 0$ i $P^*(X_t = b) > 0$ (P^* je ekvivalentna P).

Pretpostavimo da ne vrijedi $a < r' < b$.

Tada je ili $r' \leq a < b$ ili $a < b \leq$ r'.

U prvom slučaju je $P^*(X_t \geq r') = 1$ i $P^*(X_t > r') > 0$ pa slijedi $E^*[X_t|\ \mathcal{F}_{t-1}] > r'$ što je u kontradikciji s $E^*[X_t|\ \mathcal{F}_{t-1}] = r'$.

Drugi slučaj na sličan način daje kontradikciju.

Nadalje, računamo,

$$r' = E^*[X_t|\ \mathcal{F}_{t-1}]$$

$$= E^*[1_{\{X_t=a\}}X_t|\ \mathcal{F}_{t-1}] + E^*[1_{\{X_t=b\}}X_t|\ \mathcal{F}_{t-1}]$$

$$= aE^*[1_{\{X_t=a\}}|\ \mathcal{F}_{t-1}] + bE^*[1_{\{X_t=b\}}|\ \mathcal{F}_{t-1}]$$

$$= aP^*(X_t = a|\ \mathcal{F}_{t-1}) + bP^*(X_t = b|\ \mathcal{F}_{t-1}).$$

Također imamo i

$$1 = P^*(X_t = a|\ \mathcal{F}_{t-1}) + P^*(X_t = b|\ \mathcal{F}_{t-1}).$$

Rješavanjem po

$$P^*(X_t = a|\ \mathcal{F}_{t-1})\ i\ P^*(X_t = b|\ \mathcal{F}_{t-1}),$$

dobivamo

$$P^*(X_t = a|\ \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{b - r'}{b - a},\ P^*(X_t = b|\ \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{r' - a}{b - a}. \tag{3.3}$$

Definiramo:

$$p^* := \frac{r' - a}{b - a}.$$

Zbog pokazanog $a < r' < b$ slijedi $0 < p^* < 1$. Ovako definirani p^* postaje:

$$P^*(X_t = a|\ \mathcal{F}_{t-1}) = 1 - p^*,\ P^*(X_t = b|\ \mathcal{F}_{t-1}) = p^*.$$

Iz gornje dvije jednakosti imamo:

$$\begin{aligned} P^*(X_t = a) &= E^*[1_{\{X_t=a\}}] = E^*\left[E^*[1_{\{X_t=a\}}|\ \mathcal{F}_{t-1}]\right] \\ &= E^*[P^*(X_t = a|\ \mathcal{F}_{t-1})] = E^*[1 - p^*] = 1 - p^*, \end{aligned}$$

i slično

$$P^*(X_t = b) = p^*.$$

To pokazuje jednaku distribuiranost slučajnih varijabli $X_1, \ \dots, \ X_T$. Drugo, iz (3.3) vidimo da je X_t nezavisna od σ -algebre $\mathcal{F}_{t-1}, \ t \in \{1, \dots, T\}$. Budući da je $\mathcal{F}_{t-1}$ generirana s $X_1, \ \dots, \ X_{t-1}, \ t \in \{1, \dots, T\}$, iz ovoga možemo zaključiti nezavisnost slučajnih varijabli $X_1, \ \dots, \ X_T$.

□

Propozicija 3.1. *CRR model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $a < r' < b$.*

Dokaz. Ako tržište ne dopušta arbitražu, tada postoji ekvivalentna martingalna mjera P^*. Prema lemi 3.1 (a) (primjenjenoj na vjerojatnost P^*) slijedi

$$E^*[X_{t+1}|\ \mathcal{F}_t] = r',\ t = 0, 1, \dots, T - 1.$$

Sada iz leme 3.1 (b) slijedi $a < r' < b, \ a, \ b \in \mathbb{R}$.

Pretpostavimo da vrijedi $a < r' < b$. Pokažimo sada da uz uvjet $a < r' < b$ postoji bar jedna ekvivalentna martingalna mjera neutralna na rizik. Neka je:

$$P^*(\{b\}) = p^* = \frac{r' - a}{b - a}, \qquad P^*(\{a\}) = 1 - p^* = \frac{b - r'}{b - a}, \qquad -1 \leq a < b < \infty,$$

Tada je $0 < p^* < 1$ te vrijedi:

$$P^*(\{\omega\}) = P^*(\{\omega_1\})P^*(\{\omega_2\})\cdots P^*(\{\omega_T\})$$

za $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_T)$.

Sada su sve slučajne varijeble $X_i,\ i = 1, \ldots, T$ međusobno nezavisne i jednako distribuirane s distribucijom:

$$X_i = \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p^* & p^* \end{pmatrix}, \quad p^* \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Uočimo da zbog nezavisnosti vrijedi:

$$\begin{aligned}
E^*[X_{t+1}|\ \mathcal{F}_t] &= E^*[X_{t+1}|\ \sigma(X_1, \ldots, X_t)] = \\
&\overset{\text{nez.}}{=} E^*[X_{t+1}] \\
&= aP^*(X_{t+1} = a) + bP^*(X_{t+1} = b) \\
&= a\frac{b-r'}{b-a} + b\frac{r'-a}{b-a} = \frac{ab - ar' + br' - ab}{b-a} \\
&= \frac{r'(b-a)}{b-a} = r'
\end{aligned}$$

Sada možemo računati:

$$E^*[\tilde{S}^1{}_{t+1} \mid \mathcal{F}_t] = E^*\left[\frac{S^1_{t+1}}{(1+r')^{t+1}}\Big|\ \mathcal{F}_t\right] = E^*\left[\frac{S^1_t(1+X_{t+1})}{(1+r')^{t+1}}\Big|\ \mathcal{F}_t\right] =$$

$$E^*\left[\frac{1}{(1+r')^{t+1}}\ S^1_0(1+X_1)\cdots(1+X_t)(1+X_{t+1})\Big|\ \mathcal{F}_t\right] =$$

$$E^*\left[\frac{1}{(1+r')^{t}}\ S^1_0(1+X_1)\cdots(1+X_t)\frac{(1+X_{t+1})}{(1+r')}\ \Big|\ \mathcal{F}_t\right] =$$

$$= E^*\left[\tilde{S}^1_t\ \frac{(1+X_{t+1})}{1+r'}\Big|\ \mathcal{F}_t\right] =$$

$$\overset{\tilde{S}^1_t\text{-}\mathcal{F}_t\text{-izmjeriva}}{=} \tilde{S}^1_t\frac{1}{1+r'}\left(E^*\left[1 \mid \mathcal{F}_t\right] + E^*\left[X_{t+1}|\ \mathcal{F}_t\right]\right) =$$

$$= \tilde{S}^1_t\frac{1}{1+r'}(1+r') = \tilde{S}^1_t$$

Slijedi, slučajni proces diskontiranih cijena $(\tilde{S}^1_t,\ t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ je $\mathbb{F}$-martingal uz vjerojatnost P^* neutralnu na rizik. Isto smo mogli zaključiti, ne računajući prethodno, na osnovu Leme 3.1 (a), s obzirom da $E^*[X_{t+1}|\ \mathcal{F}_t] = r',\ t = 0,\ 1, \ldots,\ T-1.$ povlači da je proces diskontiranih cijena $(\tilde{S}^1_t,\ t \in \{0, 1, \ldots, T\})$ $\mathbb{F}$-martingal.

$\square$

4 Konvergencija binomnog modela

U ovom poglavlju prvo ćemo pokazati povezanost niza cijena iz CRR modela sa cijenama na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu (vidi u [4], stranice 246-250.). Kako bismo to postigli prvo ćemo objasniti kako se trguje u neprekidnom vremenu.

4.1 Financijsko tržište u neprekidnom vremenu

Sljedeće definicije i tvrdnje mogu se u potpunosti naći u [8].

Definicija 4.1 (Brownovo gibanje). *Slučajni proces* $(B_t, t \geq 0)$ *zove se standardno Brownovo gibanje ako vrijedi:*

- $B_0 = 0$ *g.s.,*
- *za svaki* $\omega \in \Omega$*, funkcija* $t \mapsto B_t(\omega)$ *je neprekidna g.s.,*
- *za svaki* k*,* $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_k$*, prirasti* $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_k} - B_{t_{k-1}}$ *su nezavisni,*
- *za svaki* $t > s \geq 0$*, vrijedi* $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$*.*

Za Brownovo gibanje $(B_t,\, t \geq 0)$ je $E(B_t) = 0$ i $Var(B_t) = t$. U nastavku ćemo proučiti linearnu transformaciju Brownovog gibanja gdje su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ konstante,

$$X_t = \alpha t + \sigma B_t. \tag{4.1}$$

Ovako definiran proces $(X_t,\, t \geq 0)$ naziva se **Brownovo gibanje s driftom.**
Prilikom računanja očekivanja i varijance procesa X_t dobivamo: $E(X_t) = \alpha t$, $Var(X_t) = \sigma^2 t$, iz čega slijedi da je X_t, za svaki $t \geq 0$, normalno distribuirana slučajna varijabla, $X_t \sim \mathcal{N}(\alpha t, \sigma^2 t)$.

No, Brownovo gibanje nije dobar izbor procesa za modeliranje cijene dionica jer ima nezavisne priraste i može poprimiti negativne vrijednosti, a cijene dionica ne mogu biti negativne. Zatim, očekivanje slučajne varijable $B_t - B_s$ je nula, dok je varijanca proporcionalna proteklom vremenu. U nastavku ćemo definirati geometrijsko Brownovo gibanje kojim ćemo modelirati cijene dionica.

Definicija 4.2 (Geometrijsko Brownovo gibanje). *Geometrijsko Brownovo gibanje* $(S_t,\, t \geq 0)$ *je proces u neprekidnom vremenu s neprekidnim skupom stanja i g.s. neprekidnim trajektorijama takav da je:*

- $S_0 > 0$ *konstanta,*
- $S_t = S_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}$,

gdje je $(B_t,\, t \geq 0)$ *standardno Brownovo gibanje,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *i* $\sigma > 0$ *konstante.*

Geometrijsko Brownovo gibanje $(S_t,\, t \geq 0)$ dano izrazom

$$S_t = S_0 e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B_t}, \tag{4.2}$$

za $s < t$ ima sljedeća svojstva:

1. $E(\ln(\frac{S_t}{S_s})) = (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s)$,
2. $Var(\ln(\frac{S_t}{S_s})) = \sigma^2(t - s)$,
3. $(S_t,\, t \geq 0)$ je Markovljev[11] proces (vidi [8, str. 147]).

Standardna devijacija log-povrata je jedna mjera rizika, a naziva se volatilnost. Odnos relativnih i log-povrata nam je zanimljiv i zbog činjenice što se za dovoljno mali x, gdje je $x \in \mathbb{R}$, $\ln(1 + x)$ može dobro aproksimirati s x, tj. za male promjene cijena relativni i log-povrati su približno jednaki. Log-povrati su prigodni za promatranje jer je n-periodni log-povrat jednak sumi jednoperiodnih log-povrata, tj.

$$\begin{aligned} r_t(n) &= \ln(1 + R_t(n)) = \ln\big((1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \cdots (1 + R_{t-n+1})\big) \\ &= \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \cdots + \ln(1 + R_{t-n+1}) \\ &= r_t + r_{t-1} + \cdots + r_{t-n+1}, \end{aligned}$$

što nije slučaj s relativnim povratima.

Uvjerimo se u prethodno navedena svojstva geometrijskog Brownovog gibanja: prvo uočimo kako izgleda log-povrat geometrijskog Brownovog gibanja $(S_t,\, t \geq 0)$:

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_s}\right) = \ln\left(e^{\sigma(B_t - B_s) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)}\right) = \sigma(B_t - B_s) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s). \tag{4.3}$$

Uočimo, $B_t - B_s$ je prirast standardnog Brownovog gibanja te vrijedi $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, izraz (4.3) linearna je transformacija normalne slučajne varijable $\mathcal{N}(0, t - s)$. Stoga slijede tvrdnje 1. i 2.

[11] Andrej Andrejevič Markov (Rjazan, 14. lipnja 1856. - Petrograd, 20. srpnja 1922.), ruski matematičar.

Ostaje nam još dokazati da geometrijsko Brownovo gibanje zadovoljava Markovljevo svojstvo. Neka je t sadašnji, a $(t+h)$ budući trenutak, gdje je $h > 0$. Tada je:

$$S_{t+h} = e^{\sigma B_{t+h} + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)(t+h)} = e^{\sigma(B_{t+h} - B_t + B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)h} =$$
$$= S_t \cdot e^{\sigma(B_{t+h} - B_t) + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)h}.$$

Uz danu sadašnjost S_t, budućnost S_{t+h} ovisi samo o prirastu Brownovog gibanja na $\langle t, t+h]$, a kako su oni nezavisni, slijedi da S_{t+h} ovisi samo o S_t, za $0 \leq h < t$.
Slijedi da je volatilnost modela $\sigma\sqrt{t-s}$, na intervalu $\langle s, t\rangle$. Volatilnost modela koristi se kao jedna od mjera rizičnosti financijske imovine jer je standardna devijacija povrata i daje informaciju o raspršenosti log-povrata oko očekivanja.

Black i Scholes, te Merton, 1973. godine proveli su analizu matematičkog modela financijskog tržišta u neprekidnom vremenu. Osnovne pretpostavke modela kojeg danas nazivamo Black-Scholes-Mertonov model bile su da trgovati možemo neprekidno u periodu $[0, \infty\rangle$, uz uobičajene pretpostavke, a trgujemo s dvije imovine; jednom nerizičnom i jednom rizičnom.

Cijena nerizične financijske imovine, čija se cijena mijenja neprekidno, iznosi $S_0 e^{rt}$ u trenutku $t > 0$, gdje je r nepromjenjiva neprekidna kamatna stopa, a S_0 nenegativna poznata početna vrijednost.

Za modeliranje cijena rizičnih financijskih imovina $(S_t,\, t \geq 0)$ na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu koristimo geometrijsko Brownovo gibanje

$$S_t = S_0 e^{\sigma B_t + (\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t},$$

pri čemu je $(B_t,\, t \geq 0)$ Brownovo gibanje i $S_0 > 0$ od njega nezavisna početna vrijednost, $\alpha > 0$ konstanta koju zovemo srednja stopa povrata te $\sigma > 0$ volatilnost.

4.2 Prijelaz na tržište u neprekidnom vremenu

Dosad smo promatrali cijene u trenucima $t = 0, 1, 2, \ldots, T$, odnosno u T perioda, gdje je $\Delta t := 1$ bila duljina jednog vremenskog perioda. Intuitivno, povezujemo jedan period s nekom vremenskom mjerom npr. jedan period = jedan dan. No, zamislimo da se cijene mijenjaju češće, svakog sata ili čak svake minute. Neka je u $t = 0$ cijena rizične financijske imovine 32 USD, a volatilnost 0.09. Uz kamatnu stopu 0.8% godišnje, nacrtajmo trinomno stablo cijene rizične imovine za dva perioda duljine 0.5.

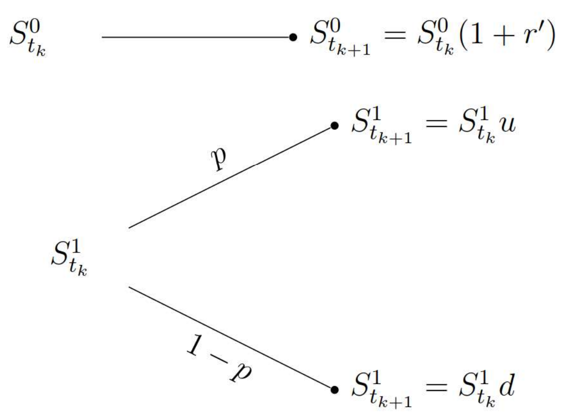
Uočimo, duljina perioda može biti bilo koji pozitivan broj manji od 1. Stavimo $\Delta t = T/n$, gdje n predstavlja broj perioda, a T vrijeme dospijeća. Što veći n, odnosno što se češće cijene mijenjaju, to je manja duljina perioda Δt.

U binomnom modelu s n perioda pretpostavljamo da se imovinom može trgovati u trenucima $t_k := k\Delta t$ za $k = 0, \dots, n$. Pretpostavimo da na tržištu postoji jedna nerizična imovina čija je vrijednost u trenucima $t_k = k\Delta t$ za $k = 0, \dots, n$ poznata i ima fiksni povrat r za jedan period, tj. cijena nerizične imovine u trenutku t_k je

$$S^0_{t_k} = S^0_{t_k}(1+r') = S^0_0(1+r')^{t_k},$$

gdje je r' konstantna efektivna kamatna stopa.
Dalje, pretpostavimo da na financijskom tržištu cijena rizične financijske imovine između dva uzastopna trenutka može ili porasti za faktor u s vjerojatnošću p ili pasti za faktor d s vjerojatnošću $(1-p)$. To znači da je cijena i-te rizične financijske imovine modelirana slučajnom varijablom

$$S^1_{t_{k+1}} = \begin{cases} S^1_{t_k} u \\ S^1_{t_k} d. \end{cases}$$



Slika 4.1: Promjene cijena u jednom periodu u okvirima CRR modela

Označimo s $\mathbb{T} := \{t_k,\ 0 \leq k \leq n\}$ ekvidistantnu razdiobu intervala $[0, T]$, pri čemu je $t_0 = 0$ početni trenutak, a $t_n = T$ trenutak dospijeća. Diskontirane cijene rizičnih financijskih imovina označavamo kao i ranije, s $\tilde{S}^1_t$ te definiramo

$$\tilde{S}^1_t := \frac{S^1_t}{S^0_t},\ t \in \mathbb{T}.$$

U nastavku proučavamo pod kojim uvjetima, pri ovakvim oznakama, binomni model ne dopušta arbitražu te kako izgleda ekvivalentna martingalna mjera.

Lema 3.1 u ovim oznakama glasi:

Lema 4.1. *Neka je P^* vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ ekvivalentna s P.*

(a) Niz diskontiranih cijena $(\tilde{S}_t : t \in \mathbb{T})$ je P^*-martingal ako i samo ako vrijedi

$$E^*[X_{t+1} |\ \mathcal{F}_t] = e^{r\Delta t}, \qquad t \in \mathbb{T}.$$

(b) Neka je zadovoljen uvjet (a). Tada vrijedi $d < e^{r\Delta t} < u$ i slučajne varijable $X_{t_1}, X_{t_2}, \ldots, X_{t_n}$ su nezavisne i jednako distribuirane (u odnosu na P^*).

Dokaz analogno kao u prethodnom poglavlju. Propozicija 3.1 u ovim oznakama glasi:

Propozicija 4.1. *CRR model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $d < e^{r\Delta t} < u$.*

Dokaz analogno kao u prethodnom poglavlju.

Odredimo izraz za vjerojatnost neutralnu na rizik p^*. Vjerojatnost neutralnu na rizik dobivamo iz sljedećih formula. Za relativni povrat rizične financijske imovine

$$X_{t+1} = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t},$$

očekivanje iznosi

$$E[X_{t+1}] = pu + (1-p)d.$$

Za određivanje vjerojatnosti neutralne na rizik prema Lemi 4.1 računamo $E^*[X_{t+1}|\mathcal{F}_t] = e^{r\Delta t}$. Neka je p^* vjerojatnost neutralna na rizik, tada vrijedi

$$p^*u + (1-p^*)d = e^{r\Delta t}$$

odakle slijedi

$$p^* = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

Ovaj uvjet ekvivalentan je činjenici da je očekivanje binomnog relativnog povrata jednako nepromjenjivoj neprekidnoj kamatnoj stopi.

U nastavku ćemo povezati cijene financijskih instrumenata iz CRR modela s cijenama financijskih instrumenata na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu. Parametri p, u i d biraju se u skladu sa činjenicom da za mali vremenski period binomni model konvergira ka neprekidnom modelu. Često se binomni model nastoji prilagoditi neprekidnom vremenu izjednačavanjem momenata log-povrata (vidi [11], stranice 3-5.).

Promotrimo tipičan niz od 6 promjena cijena, npr. u, d, u, u, d, u. Konačna cijena neke rizične financijske imovine biti će $S_T = S_0uduudu$, $S_T = S_0u^4d^2$. Imamo $S_T/S_0 = u^4d^2$ i $\ln S_T/S_0 = 4\ln u + 2\ln d$. Generalno, za fiksan T i n perioda imamo

$$\frac{S_T}{S_0} = u^j d^{n-j},$$

tj. log-povrat dionice

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = j\ln u + (n-j)\ln d = j\ln\frac{u}{d} + n\ln d,$$

pri čemu je j slučajan broj porasta cijene za faktor u tijekom n perioda do dospijeća T. Očekivana vrijednost log-povrata je

$$E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = E[j]\ln\frac{u}{d} + n\ln d,$$

a varijanca

$$Var\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = Var(j)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2.$$

Slučajan broj promjena cijene za faktor u ima binomnu distribuciju s parametrima n i p. Dakle, $E[j] = np$, $Var(j) = np(1-p)$.

Napokon, slijedi

$$E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \big(p\ln\frac{u}{d} + \ln d\big)n := \hat{\mu}n,$$
$$Var\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = p(1-p)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2 n := \hat{\sigma}^2 n,$$

gdje smo s $\hat{\mu}n$ i $\hat{\sigma}^2 n$ označili stvarne vrijednosti očekivanja i varijance log-povrata binomnog modela s n perioda. Želimo da vrijednosti $\hat{\mu}n$ i $\hat{\sigma}^2 n$ redom konvergiraju ka μT, $\sigma^2 T$, gdje je $\mu = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}$. U nastavku želimo odabrati u, d i p tako da uz fiksan T, kada $n \to \infty$ vrijedi

$$\big(p\ln\frac{u}{d} + \ln d\big)n \to \mu T, \tag{4.4}$$
$$p(1-p)\left(\ln\frac{u}{d}\right)^2 n \to \sigma^2 T. \tag{4.5}$$

S obzirom da imamo samo dvije jednadžbe, ne postoji jedinstveno rješenje $(u,\ d,\ p)$, no vrijednost jednog parametra možemo postaviti na određenu vrijednost (npr. $p = 0.5$), a potom odrediti ostala dva. Najčešće se uzima dodatni zahtjev

$$ud = 1,$$

koji govori da je $u = 1/d$ i omogućava svojstvo: $udS_0 = duS_0 = S_0$ tj. kada nastupi rast cijene pa uslijedi pad, ili obrnuto, cijena ostaje ista kao i prije tih promjena. Time se osigurava da je stablo, kojim su prikazane promjene cijene dionica, a koje ćemo prikazati u nastavku, rekombinirajuće, tj. čvorovi se spajaju.

Nadalje za parametre u, d rješavanjem gornjeg sustava dobivamo

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{4.6}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \tag{4.7}$$

pri čemu je

$$p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta t},$$

objektivna vjerojatnost. Parametri μ, σ odabrani su tako da vrijedi $0 < p < 1$. Tada, za svaki n vrijedi

$$\hat{\mu}n = \mu T$$

i

$$\hat{\sigma}^2 n = \left(\sigma^2 - \mu^2 \frac{T}{n}\right) T.$$

Očito, kad $n \to \infty$, $\hat{\sigma}^2 n \to \sigma^2 T$, dok $\hat{\mu}n = \mu T$ vrijedi za svaki n.

Nedostaje nam još opravdanje za ovakvu aproksimaciju binomnog modela.
Prisjetimo se, u CRR modelu cijena se rizičnog financijskog instrumenta mijenja prema formuli (3.1):

$$S_t = S_0(1 + X_1) \cdots (1 + X_t), \ t \in \mathbb{T}, \tag{4.8}$$

za neke nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable $X_1, \ldots, X_t$ s distribucijom $P(X_i = u) = p, \ P(X_i = d) = 1 - p$ te za S_0 nenegativnu početnu vrijednost.

Uočimo da (4.8) možemo napisati i na sljedeći način

$$S_t = S_0 e^{Y_1 + \cdots + Y_t}, \ t \in \mathbb{T},$$

za $Y_t = \ln(1 + X_t)$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable. Uočimo, do dospijeća T imamo n perioda, tj. vrijedi

$$S_T = S_0(1 + X_{t_1}) \cdots (1 + X_{t_n}) \tag{4.9}$$

a logaritmiranjem slijedi

$$\ln S_T = \ln S_0 + \sum_{i=1}^{n} \ln(1 + X_{t_i}) = \ln S_0 + \sum_{i=1}^{n} Y_{t_i}. \tag{4.10}$$

S obzirom da su relativni povrati $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ međusobno nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s distribucijom $P(X_{t_i} = u) = p, \ P(X_{t_i} = d) = 1 - p$, prema centralnom graničnom teoremu (vidi [12] 506-521.) vrijedi sljedeće

$$\sum_{i=1}^{n} \ln Y_{t_i} = \ln \frac{S_T}{S_0} \sim \mathcal{N}(\mu T, \sigma^2 T), \ n \to \infty. \tag{4.11}$$

Pokazali smo da

$$E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = E[\ln((1 + X_1) \cdots (1 + X_n))] = nE[\ln(1 + X_1)] \longrightarrow \mu T, \ n \to \infty$$

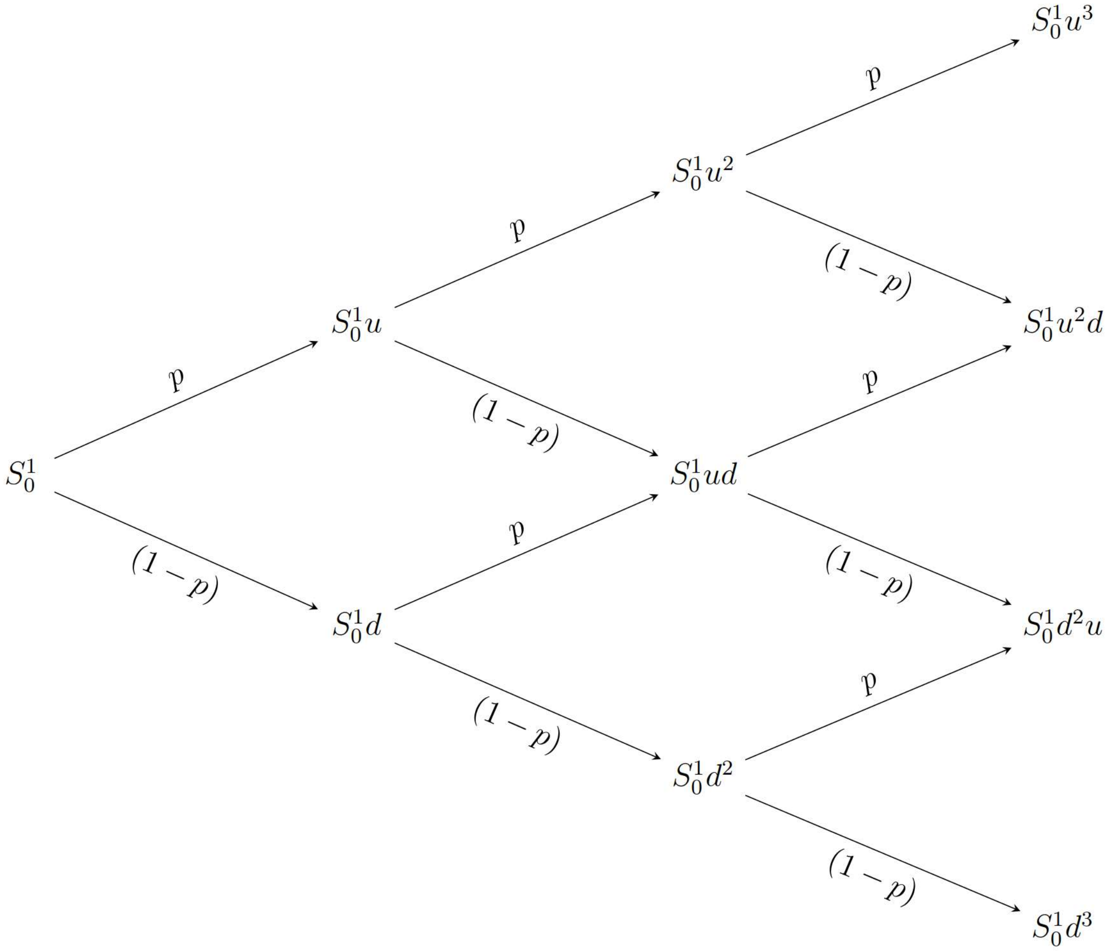
te

$$Var\left(\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right) = Var(\ln((1 + X_1) \cdots (1 + X_n))) \longrightarrow \sigma^2 T, \ n \to \infty,$$

tj. pokazali smo da prva dva momenta log povrata u diskretnom vremenu konvergiraju prema prva dva momenta log povrata u neprekidnom vremenu. U tom kontekstu, binomni model pruža diskretnu aproksimaciju neprekidnog procesa cijena Black-Scholesovog modela.

Sve korektno izabrane parametrizacije binomnog modela rezultiraju beskonačnim brojem binomnih stabala.

Promjena cijene rizične imovine prikazana je na sljedećoj slici rekombinirajućim stablom ($ud = 1$).



Slika 4.2: Dinamika cijena dionice u CRR modelu

5 Generalizirani CRR modeli

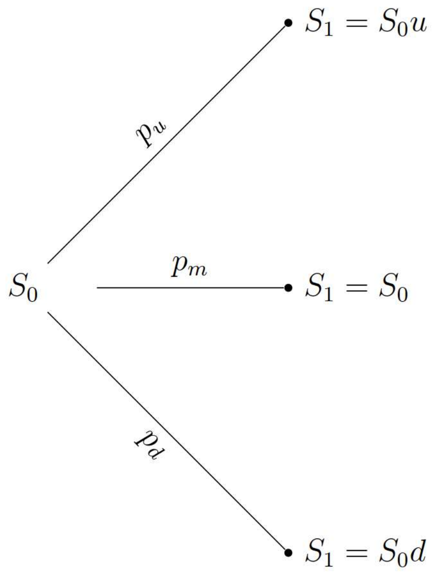
S obzirom da se često u praksi događa da Black-Scholesov model nije dostatan, a CRR model je diskretna aproksimacija tog modela, javlja se potreba za korištenjem alternativnih modela. Većina ih se temelji na klasičnom CRR modelu, a u nastavku ćemo pobliže objasniti nekoliko takvih.

5.1 Trinomni model

Poznato je da se trinomni modeli i modeli višeg reda mogu koristiti kao alternative binomnog modela. Trinomni model osim rasta i pada cijene financijske imovine pretpostavlja da ona može ostati i nepromjenjena. Trinomno stablo može se konstruirati na sličan način kao i binomno stablo. Faktori rasta, pada ili nepromijenjenosti cijene imovine označeni su redom s u, d i m. Neka je vrijednost rizične financijske imovine u početku S_0. Vrijednost imovine S_0 u trenutku $t = 1$ može se promijeniti na tri načina

$$S_1 = \begin{pmatrix} S_0 u & S_0 m & S_0 d \\ \\ p_u & p_m & p_d \end{pmatrix},$$

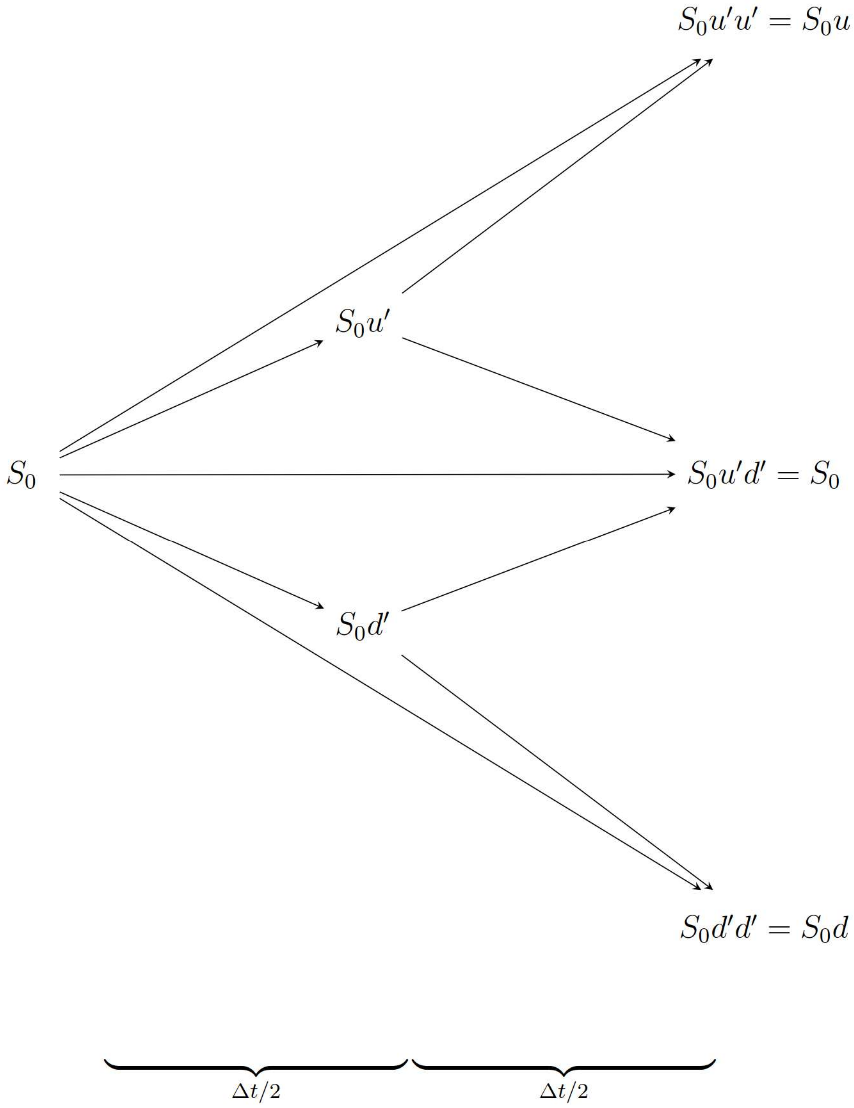
pri čemu faktor u predstavlja porast cijene imovine, faktor d pad, a faktor $m = 1$ nepromjenjenosti cijene.



Slika 5.2.1: Promjene cijena u jednom periodu u okvirima trinomnog modela

U trenutku $t = 1$ nepoznati parametri modela su vjerojatnosti p_u, p_m i p_d i parametri u, d i m koji određuju vrijednosti cijene imovine S_1.

Trinomno stablo za jedan period može se konstruirati kao kombinacija binomnog stabla s dva perioda. Pretpostavimo da promatramo binomni CRR model s dva perioda dužine $\Delta t/2$. Vrijednosti imovine dobivene pomoću binomnog modela poslije dva perioda dužine $\Delta t/2$ su vrijednosti imovine dobivene pomoću trinomnog modela nakon jednog perioda dužine Δt. Uočimo to na sljedećoj slici.



Slika 5.2.2: Binomno stablo s dva perioda duljine $\Delta t/2$

Na osnovu formula u binomnom modelu dobivamo parametre uzlaznog i silaznog kretanja cijene rizične financijske imovine, redom

$$u' = e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}},\ d' = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}},$$

a pripadne vjerojatnosti

$$p' = \frac{e^{r\Delta t/2} - d'}{u' - d'},\ 1 - p' = \frac{u' - e^{r\Delta t/2}}{u' - d'}.$$

Tada su parametri uzlaznog i silaznog kretanja cijene imovine za trinomni model dani, redom

$$u = u' \cdot u' = \left(e^{\sigma\sqrt{\Delta t/2}}\right)^2 = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \tag{5.1}$$

$$d = d' \cdot d' = \left(e^{-\sigma\sqrt{\Delta t/2}}\right)^2 = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}, \tag{5.2}$$

a pripadne vjerojatnosti kretanja cijena

$$p_u = p' \cdot p' = \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - d'}{u' - d'}\right)^2, \tag{5.3}$$

$$p_d = (1 - p') \cdot (1 - p') = \left(\frac{u' - e^{r\Delta t/2}}{u' - d'}\right)^2, \tag{5.4}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d. \tag{5.5}$$

Dakle, primjenom binomnog CRR modela s dva perioda dužine $\Delta t/2$ dobije se trinomni model

$$S_{t+\Delta t} = \begin{pmatrix} S_t e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} & S_t & S_t e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} \\ \\ p_u & p_m & p_d \end{pmatrix}.$$

Parametre trinomnog modela mogli smo dobiti na isti način kao i za binomni, izjednačavanjem momenata log-povrata u diskretnom i neprekidnom vremenu. Na osnovu tih dviju jednadžbi (izjednačavanje prva dva momenta), te najčešćeg dodatnog zahtjeva $ud = m^2$, dobivamo tri jednadžbe sa 4 nepoznanice u, d, p_u, p_m. Rezultat je familija trinomnih modela. Trinomni modeli imaju veći broj parametara od binomnih pa cijene imovine imaju veći izbor mogućih pozicija na stablu tijekom vremena. Uvjet $ud = m^2$ omogućuje rekombinaciju trinomnog stabla. Uočimo, prema Propoziciji 4.1, trinomni model ne dopušta arbitražu ako i samo ako je $d' < e^{r\Delta t/2} < u'$, odnosno ako i samo ako je $d < e^{r\Delta t} < u$.

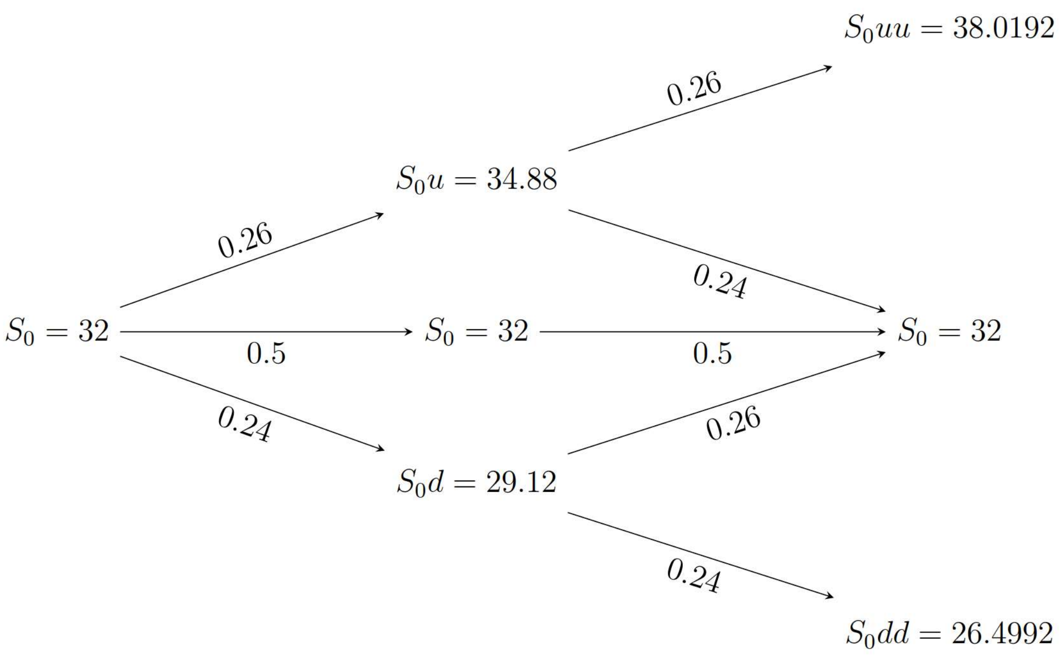
Primjer 5.1. Neka je u $t = 0$ cijena rizične financijske imovine 32 USD, a volatilnost 0.09. Uz kamatnu stopu 0.8% godišnje, nacrtajmo trinomno stablo cijene rizične imovine za dva perioda duljine 0.5.
Imamo sljedeće podatke

$$S_0 = 32,\ r = 0.008,\ \sigma = 0.09,\ \Delta t = 0.5.$$

Rješenje možemo dobiti koristeći razne trinomne modele. Mi ćemo koristiti formule 5.3-4.8. Dobivamo sljedeće

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 1.09,\ d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 0.91,$$

$$\begin{aligned} p_u =& \left(\frac{e^{r\Delta t/2} - d'}{u' - d'}\right)^2 = 0.26, \\ p_d =& \left(\frac{u' - e^{r\Delta t/2}}{u' - d'}\right)^2 = 0.24, \\ p_m =& 1 - p_u - p_d = 1 - 0.26 - 0.24 = 0.5. \end{aligned}$$



Slika 5.2.3: Dinamika cijene dionice iz Primjera 5.1

5.2 Kamrad-Ritchken model

Kamrad i Ritchken 1991. godine izgradili su novi model koristeći dodatan parametar λ. Navedeni parametar λ se može promatrati kao parametar koji kontrolira udaljenost između slojeva cijena na stablu, a naziva se *parametar rastezanja.*

$$S_{t+\Delta t}= \begin{pmatrix} S_t e^{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} & S_t & S_t e^{-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ \\ p_u & p_m & p_d \end{pmatrix},$$

gdje p_u, p_m i p_d predstavljaju vjerojatnosti da će cijena imovine porasti, ostati nepromjenjena ili pasti. Te vjerojatnosti mogu se izračunati izjednačavanjem momenata log-povrata, kao što smo to ranije radili za binomni model.

Slučajne varijable $\ln(S_{t+n}/S_n),\ 0 \leq n < T,\ 0 \leq t < T-n$ su prema prethodnom poglavlju, tj. prema (4.11) normalno distribuirane s očekivanjem μt i varijancom $\sigma^2 t$.

Imamo tri uvjeta koja trebaju biti zadovoljena:

$$p_u + p_m + p_d = 1,$$

$$E\left[\ln\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right)\right] = p_u\lambda\sigma\sqrt{\Delta t} + p_m 0 + p_d(-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}),$$

$$Var\left[\ln\left(\frac{S_{\Delta t}}{S_0}\right)\right] = p_u(\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2 + p_m 0 + p_d(-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2.$$

Izjednačimo s $\mu\Delta t$ i $\sigma^2\Delta t$

$$\mu\Delta t = p_u\lambda\sigma\sqrt{\Delta t} + p_d(-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}), \tag{5.6}$$

$$\sigma^2\Delta t = p_u(\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2 + p_d(-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2, \tag{5.7}$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d. \tag{5.8}$$

Sada iz prve jednadžbe imamo:

$$p_u = \frac{\mu t + p_d\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{5.9}$$

Uvrstimo li to u (5.7), slijedi

$$\sigma^2\Delta t = \frac{\mu t + p_d\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}(\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2 + p_d(-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2,$$

Sada možemo izlučiti p_d

$$
\begin{aligned}
p_d((\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2 + (-\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2)) &= \sigma^2\Delta t - \mu t\lambda\sigma\sqrt{\Delta t},\\
p_d(2(\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})^2) &= \sigma^2\Delta t - \mu t\lambda\sigma\sqrt{\Delta t},\\
p_d &= \frac{\sigma^2\Delta t}{2\lambda^2\sigma^2\Delta t} - \frac{\mu\Delta t}{2(\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})},\\
p_d &= \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\Delta t}{2(\lambda\sigma\sqrt{\Delta t})},\\
p_d &= \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}.
\end{aligned}
$$

Sada iz (5.9) imamo da je

$$
\begin{aligned}
p_u &= \frac{\mu\Delta t + (\frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma})\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}}{\lambda\sigma\sqrt{\Delta t}},\\
p_u &= \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{\sigma\lambda} + \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma},\\
p_u &= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}.
\end{aligned}
$$

Preostaje nam još izračunati p_m iz

$$
\begin{aligned}
p_m &= 1 - p_u - p_d,\\
p_m &= 1 - \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} - \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma},\\
p_m &= 1 - \frac{1}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Rješavanjem sustava od 3 jednadžbe s 3 nepoznanice, kada $n \to \infty$, dobivamo da su

$$
\begin{aligned}
p_u &= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma},\\
p_m &= 1 - \frac{1}{\lambda^2},\\
p_d &= \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma}.
\end{aligned}
$$

Uočimo da za $\lambda = 1$ imamo $p_m = 0$ te model postaje binomni CRR model. S obzirom da vjerojatnosti p_u, p_m i p_d moraju biti unutar intervala $[0, 1]$, za λ imamo sljedeći uvjet $\lambda \geq 1$. Kamrad i Ritchken pokazali su da odabir λ, tako da je $p_m = 1/3$, tj. $\lambda = \sqrt{2/3} = 1.2247$, rezultira brzom konvergencijom procesa cijena ka geometrijskom Brownovom gibanju i efikasnije je od korištenja binomnog stabla s duplo više perioda.

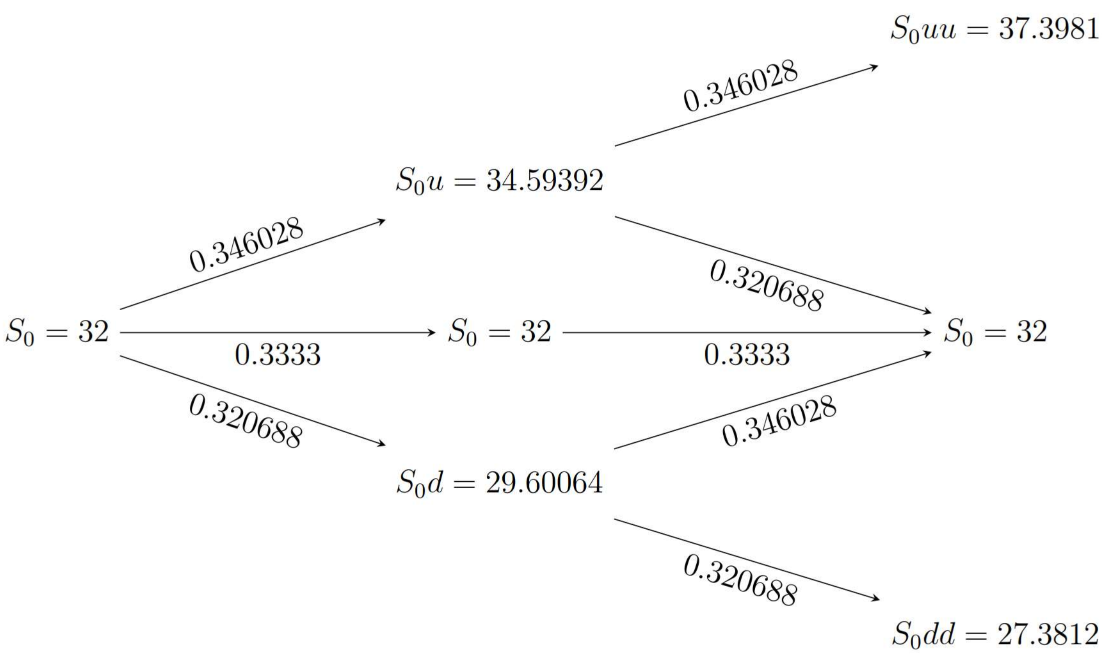
Primjer 5.2. Neka je u $t = 0$ cijena rizične financijske imovine 32 USD, a volatilnost 0.09. Uz kamatnu stopu 0.8% godišnje, nacrtajmo trinomno stablo cijene rizične imovine za dva perioda duljine 0.5.
Imamo sljedeće parametre

$$S_0 = 32,\ r = 0.008,\ \sigma = 0.09,\ \Delta t = 0.5.$$

Pretpostavimo da je $\lambda = \sqrt{2/3} = 1.2247$, dobivamo sljedeće

$$u = e^{\lambda\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 1.08106,\ d = e^{-\lambda\sigma\sqrt{2\Delta t}} = 0.925020,\ m = 1,$$

$$\begin{aligned}
\mu &= r - \frac{\sigma^2}{2} = 0.00395,\\
p_u &= \frac{1}{2\lambda^2} + \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} = 0.346028,\\
p_m &= 1 - \frac{1}{\lambda^2} \approx \frac{1}{3},\\
p_d &= \frac{1}{2\lambda^2} - \frac{\mu\sqrt{\Delta t}}{2\lambda\sigma} = 0.320688.
\end{aligned}$$



Slika 5.3.1: Dinamika cijene dionice iz Primjera 5.2

5.3 Kan generalizacija

Osnovni problem na temelju kojega se razvila ova generalizacija je problem modeliranja povrata financijske imovine. Naime, tijekom povijesti i razvijanja raznih generalizacija nametnuo se problem kako modelirati povrate financijske imovine. Normalnost povrata osnovna je pretpostavka na kojoj počivaju modeli u neprekidnom vremenu na financijskom tržištu. No, akademici i praktičari su u raznim istraživanjima došli do zaključka kako je normalnost u stvarnosti, odnosno na pravim podacima, često narušena. Relativni povrati modelirani su raznim distribucijama. Jedan oblik generalizacije CRR modela, koji navodi N. Kan u [10], pretpostavlja da se cijena rizične financijske imovine pri svakoj promjeni, pomnoži slučajnom varijablom te tako za svaki pomak, gore ili dolje (povećanje ili smanjenje cijene), postigne drugačije vrijednosti. Ovaj model konstruiran je tako da minimizira udaljenost između stvarnih i modelom predviđenih vrijednosti.

Cijena rizične financijske imovine je stoga modelirana s

$$S_t = S_{t-1}\epsilon_{t-1},\ \forall t \leq T, \tag{5.10}$$

gdje je $S_1 = S_0\epsilon_0,\ S_0$ je poznata pozitivna konstanta i

$$\epsilon_t = Y_t X_t,\ \forall t \leq T,$$

gdje je X_t diskretna slučajna varijabla koja s vjerojatnostima $p, (1-p)$ postiže vrijednosti u, d, redom. Također, pretpostavljamo da su slučajne varijable Y_t i $X_t,\ t \leq T$ međusobno nezavisne. Također pretpostavka je da je zadovoljen uvjet $0 < d < e^{r\Delta t} < u$.

Uočimo ovaj model ne uvjetuje nikakve dodatne pretpostavke na slučajni proces $(Y_t,\ t \leq T)$, osim nezavisnosti s procesom $(X_t,\ t \leq T)$ te da je $P(Y_t > 0) = 1$, za svaki $t \in \{1, \dots, T\}$.

Izraz (5.10) možemo zapisati i na sljedeći način

$$S_t = S_{t-1}Y_{t-1}(u\gamma_t + d(1-\gamma_t)),\ t \leq T, \tag{5.11}$$

gdje su slučajne varijable $\gamma_t,\ t \leq T$ nezavisne, jednako distribuirane, Bernoullijeve slučajne varijable koje postižu vrijednosti 0 i 1 s vjerojatnostima $(1-p)$ i p, redom.

Iz (5.10) imamo da je

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t-1} \epsilon_i,\ t \leq T. \tag{5.12}$$

Prema navedenim pretpostavkama slučajne varijable $\epsilon_1, \dots, \epsilon_t, \ t \leq T$ su međusobno nezavisne slučajne varijable te vrijedi

$$\begin{aligned} P(\epsilon_t = xu) =& P(Y_t X_t = xu | Y_t = x) = p = 1 - P(Y_t X_t = xd | Y_t = x) \\ =& 1 - P(\epsilon_t = xd), \ \forall t \leq T. \end{aligned}$$

Uočimo još da je izraz (5.12) ekvivalentan izrazu

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t-1} Y_i e^{\sum_{i=1}^{t-1} \delta_i}, \ t \leq T, \tag{5.13}$$

gdje su $\delta_t, \ t \leq T$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable takve da vrijedi

$$P(\delta_t = \ln u) = p = 1 - P(\delta_t = \ln d), \ \forall t \leq T.$$

Model 5.11 kaže da se cijena rizične financijske imovine, u danom trenutku, mijenja, ne samo za faktor u ili d, nego zbog ugradnje slučajnog procesa $(Y_t, \ t \leq T)$, za razne moguće vrijednosti faktora $Y_t u$ i $Y_t d, \ t \leq T$ uz dane pretpostavke na slučajan proces $(Y_t, \ t \leq T)$.

Uz neke pretpostavke može se dogoditi da tako modelirane cijene financijskih instrumenata ne prate niti jednu specifičnu distribuciju. Postavlja se problem kako modelirati proces cijena financijskih instrumenata kako bi što bolje računali pripadne cijene opcija. Intuitivno je jasno, da što bolje modeliramo cijene financijskih instrumenata, to ćemo kvalitetnije odrediti i cijene opcija. Kvalitetnije, u smislu da, modelski podaci dobro opisuju stvarne podatke i njihova svojstva. Može se pokazati da model ne dopušta arbitražu ako i samo ako vrijedi $Y_t d < e^{r\Delta t} < Y_t u$ (vidi u [10], stranica 22).

Nadalje, Kan postavlja neke distribucijske pretpostavke na proces $(Y_t, \ t \leq T)$ (vidi u [10] 34-46.). Pretpostavlja da svaka slučajna varijabla $Y_t, \ t \leq T$ može poprimiti k mogućih vrijednosti $c_1, \dots, c_k$, pri čemu je s $(n_1, \dots, n_k)$ dan vektor pojavljivanja tih k vrijednosti. $Y_t, \ t \leq T$ imaju stoga multinomnu distribuciju. Potom, procjenjuje multinomne parametre. Rezultati su pokazali da ovaj generalizirani model ugradnjom multinomnih parametara bolje aproksimira stvarne podatke od binomnog CRR modela. U [10] (46-50.) pokazano je da uz određene pretpostavke ovako definiran proces cijena rizične financijske imovine također konvergira ka geometrijskom Brownovom gibanju.

Literatura

[1] F. BLACK, M. SCHOLES, *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy 81(1973), 639-652.

[2] M. BENŠIĆ, N. ŠUVAK, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[3] N. BINGHAM, R. KIESEL, *Risk-Neutral Valuation, Pricing and Hedging of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, London, 2004.

[4] J. COX, S. ROSS, M. RUBINSTEIN, *Option pricing: A simplified approach*, The Journal of Financial Economics 7(1979), 229-263.

[5] M. CAPINSKI, T. ZASTAWNIAK, *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*, Springer-Verlag London Limited, 2003.

[6] P. CLIFFORD, O. ZABORONSKI *Pricing Options Using Trinomial Trees*, 2008.

[7] S.L. CHUNG, P.T. SHIH *Generalized Cox-Ross-Rubinstein Binomial Models*, Management Science 53(2007), 508-520.

[8] R. DURRETT, *Essentials of Stochastic Processes*, Springer, North Carolina, 2016.

[9] B. KAMRAD, P. RITCHKEN , *Multionomial approximating models for options with k state variables*, Management Science 37(1991), 1640-1652.

[10] N. KAN, *Generalized multinomial CRR option pricing model and its Black-Scholes type limit*, Doktorska disertacija, Sveučilište Georg-August-Universitat Gottingen, 2005.

[11] K. SIGMAN, *Geometric Brownian motion*, Columbia University, 2006.

[12] N. SARAPA, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 1986.

[13] Z. VONDRAČEK, *Financijsko modeliranje*, Predavanja, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2008.

Sažetak

Na početku diplomskog rada predstavljeni su osnovni ekonomski i matematički pojmovi koji se koriste pri trgovanju na financijskom tržištu. Za početak, opisan je model financijskog tržišta u diskretnom vremenu. Zatim je objašnjeno kako se trguje u okvirima jednoperiodnog binarnog modela koji će nam poslužiti kao temelj za modele predstavljene u nastavku. Pokazano je i pri kojim uvjetima jednoperiodni model financijskog tržišta ne dopušta arbitražu. Zatim, predstavljen je Cox-Ross-Rubinsteinov model i objašnjeno je kako su cijene u okvirima tog modela povezane s cijenama na financijskom tržištu u neprekidnom vremenu. U posljednjem poglavlju predstavljene su tri generalizacije Cox-Ross-Rubinsteinovog modela.

Ključne riječi: financijsko tržište, dinamički portfelj, arbitraža, ekvivalentna martingalna mjera, jednoperiodni binarni model, Cox-Ross-Rubinsteinov model, konvergencija binomnog modela, Black-Scholesov model, trinomni model, Kamrad-Ritchken model

Summary

This diploma thesis introduces basic economic and mathematical concepts used when trading at financial market. In the first part, discrete time financial market model is described. Then, it is explained how to trade within the framework of the one-period binary model that will serve as a basis for the models described in what follows. Moreover, conditions under which the one-period financial market model does not allow arbitrage are described. Next, Cox-Ross-Rubinstein model is presented and it is explained how the prices within the model are linked to the prices on the financial market in a continuous time. The last chapter presents three generalizations of the Cox-Ross-Rubinstein model.

Keywords: financial market, dynamic portfolio, arbitrage, equivalent martingale measure, one-period binary model, Cox-Ross-Rubinstein model, binomial model convergence, Black-Scholes model, trinomial model, Kamrad-Ritchken model

Životopis

Rođena sam 15. siječnja 1995. godine u Našicama. Obrazovanje sam započela 2001. godine u Osnovnoj školi Kralja Tomislava u Našicama. Nastavljam školovanje 2009. godine u Srednjoj školi Isidora Kršnjavoga u Našicama. Nakon završene srednje škole, 2013. godine upisujem Preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku. Akademski naziv *prvostupnice matematike* stječem 2017. godine uz mentorstvo izv. prof. dr. sc. Ivana Matića i završni rad *Kriptografija u prvom i drugom svjetskom ratu.* U rujnu iste godine upisujem Diplomski studij financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku.