Primjene diferencijalnog i integralnog računa u prirodnim znanostima

Rupčić, Lucija

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Lucija Rupčić

Primjene diferencijalnog i integralnog računa u prirodnim znanostima

Diplomski rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Diplomski studij matematike
Financijska matematika i statistika

Lucija Rupčić

Primjene diferencijalnog i integralnog računa u prirodnim znanostima

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2020.

Sadržaj

Uvod

Od samih početaka čovječanstva, čovjek je nailazio na razne probleme i prepreke u svakodnevnom životu. Iz tih raznih problema i nastojanja da ih razriješi, razvila se svima dobro poznata znanost – matematika. Razvoj matematike kao znanosti može se predočiti kao stalno rastući niz apstrakcija. Prvi i temeljni u nizu bio je broj kojim se čovjek koristio za jednostavna računanja. Nakon broja se u polju interesa pojavilo proučavanje oblika i gibanja različitih čestica. Proučavanjem gibanja i promjena razvio se diferencijalni i integralni račun, a samim tim je nastala i podloga diferencijalnih jednadžbi. Matematika je stoga nazvana kraljicom znanosti i jezikom kojim govore sve ostale znanosti, a koji ju posljedično i povezuje s njima. Mnogi matematički alati primijenjene matematike koriste se za rješavanje konkretnih problema u prirodnim, kao i u ostalim znanostima.

U ovom radu navest ćemo neke od mogućih primjena tih alata na područjima fizike, biologije, kemije i medicine. Počevši od temeljnih stavki, na početku rada objašnjen je pojam derivacije i parcijalne derivacije. Nakon ovih pojmova, u drugom poglavlju, slijedi i uvođenje Riemannovog integrala kao i osnovnih svojstava integrala. Zatim, u trećem poglavlju opisuju se obične diferencijalne jednadžbe te metoda separacije varijabli. Po završetku opisa temeljnih postavki diferencijalnog i integralnog računa, naglasak se stavlja na njihovu primjenu u prirodnim znanostima. U fizici proučavamo povezanost sile s radom i tlakom te složeno gibanje na primjeru kosog hitca. Na području biologije opisujemo 2 modela rasta populacije, eksponencijalni i logistički. Zatim, na području kemije proučavamo brzinu kemijske reakcije te gradijent gustoće glukoze. Naposljetku, primjenu u medicini opisujemo kroz primjere brzine protoka krvi kroz krvnu žilu i volumena koji kroz nju protekne te kroz mjerenje srčanog minutnog volumena.

1 Diferencijalni račun

Diferencijalni račun je najvažniji alat u matematičkoj analizi. U 17. stoljeću, počeli su ga razvijati Isaac Newton[1] i Gottfried W. Leibniz[2]. Newton se bavio proučavanjem brzine materijalne točke, a Leibniz geometrijskim problemom traženja tangente u nekoj točki na zadanu krivulju. Njegovo otkriće omogućilo je rješavanje problema koji do tada nisu mogli biti riješeni. Diferencijalni račun opisuje mnogo prirodnih pojava važnih za bolje razumijevanje svijeta oko nas.

1.1 Uvod

Definicija 1.1 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na intervalu $I = \langle a, b\rangle \subseteq \mathbb{R}$. Kažemo da funkcija f ima* ***derivaciju*** *u točki $x_0 \in I$, oznaka $f'(x_0)$, ako postoji granična vrijednost*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

i ona je jednaka

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

Kažemo da je funkcija f derivabilna na intervalu I ako ima derivaciju u svim točkama iz intervala I.

Napomena: Ako za derivabilnu funkciju f vrijedi još i svojstvo da je funkcija njene derivacije $f'(x)$ neprekidna na intervalu I, tada za funkciju f kažemo da je klase C^1 na intervalu I.
Oznaka $f \in C^1(I)$.

Napomena: Derivaciju u točki x_0 drugačije možemo označiti kao $\frac{df}{dx}(x_0)$.

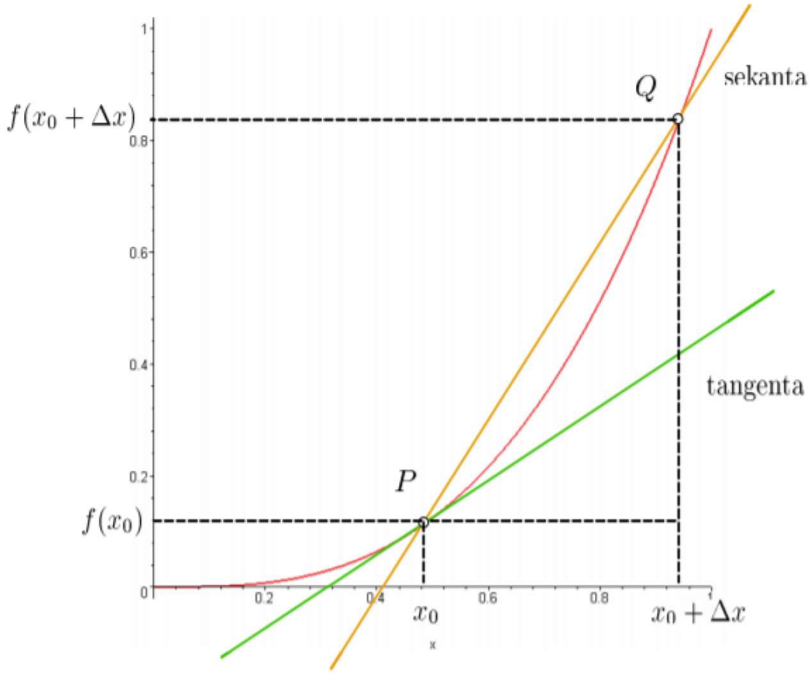
Ekvivalentni način zapisa definicije derivacije je

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \left| \begin{array}{c} x_0 + h = x \\ x \to x_0 \end{array} \right| = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

[1]Isaac Newton, 1642 - 1718, engleski matematičkar, fizičar i astronom
[2]Gottfried W. Leibniz, 1646 - 1716, njemački matematičar i filozof

1.2 Geometrijska interpretacija derivacije

Za bolje shvaćanje derivacija, pogledajmo geometrijsku interpretaciju. Neka je C krivulja dana jednadžbom $y = f(x)$. Ucrtajmo tangentu na krivulju u točki $P = (x_0, f(x_0))$ i sekantu kroz danu točku P i novu točku $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (vidi Sliku 1).



Slika 1: Tangenta i sekanta na krivulju y=f(x)

Primijetimo da je koeficijent smjera sekante jednak

$$k(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Ukoliko $x \to x_0$, točka Q se približava točki P. Zbog toga, u limesu sekanta prelazi u tangentu. Točnije, koeficijent smjera sekante prelazi u koeficijent smjera tangente. To možemo pisati kao

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} k(x).$$

Geometrijska interpretacija derivacije funkcije f u točki x_0 govori da je derivacija zapravo koeficijent smjera tangente na krivulju $y = f(x)$ u točki $(x_0, f(x_0))$.

Pogledajmo još jednu interpretaciju derivacije koja se najviše koristi u fizici.
Neka se materijalna čestica giba po pravcu danom jednadžbom $s = s(t)$, pri čemu je $s(t)$ prijeđeni put u trenutku t. U intervalu $[t_0, t_0 + \Delta t]$ čestica prijeđe put $s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. To možemo označiti sa

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0).$$

Tada je prosječna brzina dana izrazom

$$\Delta\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \tag{2}$$

Kada stavimo da $\Delta t \to 0, \overline{v}$ sve bolje aproksimira trenutnu brzinu v i dobivamo

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \tag{3}$$

Ako limes (3) postoji, trenutna brzina je derivacija puta po vremenu.

Općenito, ako fizikalna veličina f ovisi o nekoj drugoj veličini x u obliku funkcije $f(x)$, tada vrijedi

$$\frac{df}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Ovaj izraz predstavlja trenutnu brzinu promjene veličine f u točki x_0.

1.3 Pravila deriviranja

Osim deriviranja funkcija pomoću definicije, možemo derivirati i pomoću tablice i pravila za deriviranje.

Teorem 1.1 ***(Pravila deriviranja)***
Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$ funkcije derivabilne u točki $x \in I$. Tada vrijedi:

1. *Neka je $a \neq 0$. Tada je*

$$(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x).$$

2. *$f \pm g$ je derivabilna u x i vrijedi*

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x).$$

3. *$f \cdot g$ je derivabilna u x i vrijedi*

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

4. *Ako je $g(x) \neq 0, \forall x \in I$, onda je $\left(\frac{f}{g}\right)'$ derivabilna u x i vrijedi*

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Teorem 1.2 ***(Derivacija složene funkcije)***
Neka su f i g realne funkcije, takve da je kompozicija $f \circ g$ definirana. Neka je g derivabilna u x_0, a f u točki $g(x_0)$. Tada vrijedi:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

Dokazi tvrdnji ovih teorema mogu se pogledati u [2].

1.4 Funkcije više varijabli

Diferencijalni račun funkcija jedne varijable pokazuje kako promjena nezavisne varijable utječe na promjenu zavisne varijable. U prirodnim znanostima se najčešće koriste modeli s funkcijama više varijabli. Zato ćemo promatrati kako nezavisne varijable $x_1, x_2, ..., x_n$ utječu na zavisnu varijablu $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

1.4.1 Parcijalne derivacije

Pojam derivacije funkcije jedne varijable iz prethodnog poglavlja može se generalizirati na slučaj funkcija više varijabli $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$. Promatrat ćemo vrijednost funkcije f u točki $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ te kako se ta vrijednost funkcije mijenja kada se mijenja jedna od neovisnih varijabli x_i, pri čemu ostale ostaju fiksne. Zbog toga što se radi o djelomičnoj promjeni, ovaj postupak nazivamo parcijalna derivacija funkcije f po varijabli x_i.

Definicija 1.2 *Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $I \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $\mathbf{x}_0 = (x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) \in I$. Ako postoji limes*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_i{}^0 + h, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)}{h},$$

tada taj limes nazivamo ***parcijalna derivacija funkcije*** *f u odnosu na x_i i označavamo*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1^0, ..., x_i^0 + h, ..., x_n^0) - f(x_1^0, ..., x_i^0, ..., x_n^0)}{h}. \tag{4}$$

Mogu se koristiti i druge oznake: ∂f_{x_i} i ∂f_i.

Definicija 1.3 *Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ definirana na otvorenom skupu $I \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka je $\mathbf{x}_0 \in I$. Kažemo da je funkcija f* ***diferencijabilna*** *u točki $\mathbf{x}_0$ ukoliko postoji $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tako da za $H = (h_1, \ldots, h_n)$ vrijedi*

$$\lim_{H \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + H) - f(\mathbf{x}_0) - \vec{\alpha} \cdot H}{||H||} = 0.$$

Linearni operator $df(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takav da je $df(x_0)(H) = \vec{\alpha} \cdot H = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k h_k$ nazivamo ***diferencijal*** *funkcije f u točki $\mathbf{x}_0$.*

Napomena: Ako je funkcija f diferencijabilna u svakoj točki intervala I, tada je f diferencijabilna na cijelom intervalu I.

Teorem 1.3 *Ako u točki $x_0 \in I$ postoji parcijalna derivacija po svakom x_i, $i = 1, \ldots, n$ i ako su one neprekidne u točki x_0, onda je funkcija f diferencijabilna u točki x_0.*

Napomena: Ako su sve parcijalne derivacije $\frac{\partial f}{\partial x_i}, i = 1, ..., n$ neprekidne funkcije za diferencijabilnu funkciju f, tada kažemo da je f klase C^1 na intervalu I.
Oznaka: $f \in C^1(I)$.

Sve parcijalne derivacije funkcije f u točki $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ prikazujemo vektorom

$$grad f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

kojeg nazivamo **gradijent**.

Definicija 1.4 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, pri čemu je $I \subseteq \mathbb{R}^n$ i neka postoje parcijalne derivacije drugog reda u točki $\mathbf{x}$. Tada matricu drugih parcijalnih derivacija funkcije f nazivamo **Hesseova matrica** i ona je oblika*

$$H_f(\mathbf{x}) = \nabla^2 f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial^2_{x_1} f(\mathbf{x}) & \dots & \partial^2_{x_1,x_n} f(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2_{x_n,x_1} f(\mathbf{x}) & \dots & \partial^2_{x_n} f(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

Pri traženju parcijalnih derivacija funkcije f po varijabli x_i primjenjujemo sva pravila deriviranja koja vrijede i za funkcije jedne varijable iz prethodnog poglavlja. Samo je bitno da se sve varijable osim x_i ostavljaju fiksnima.

Teorem 1.4 ***(Schwarzov[3] teorem)*** *Neka je $y = f(x_1, ..., x_n)$ funkcija klase C^2 definirana na otvorenom skupu $I \subseteq \mathbb{R}^n$. Tada za svaku točku domene $\mathbf{x} \in I$ vrijedi:*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x}), \tag{5}$$

za sve $i, j = 1, ..., n$.

Sukladno prethodnom teoremu može se pokazati da ako je $f \in C^2(I)$, onda je $H = H^T$, tj. H je simetrična matrica.

Naveli smo da derivacija funkcije jedne varijable $y = f(x)$ opisuje brzinu promjene jedne varijable s obzirom na drugu. Analogno, parcijalne derivacije funkcije više varijabli također opisuju brzinu promjene na sljedeći način. Neka imamo funkciju dvije varijable $z = f(x, y)$. Parcijalna derivacija $\frac{\partial z}{\partial x}$ opisuje promjenu brzine zavisne varijable z s obzirom na promjenu nezavisne varijable x, pri čemu y ostaje stalan, u promatranoj točki (x, y). Slično, $\frac{\partial z}{\partial y}$ opisuje promjenu brzine zavisne varijable z s obzirom na promjenu nezavisne varijable y, pri čemu x ostaje stalan, u promatranoj točki (x, y).

[3]Hermann Amandus Schwarz, 1843 - 1921, njemački matematičar

2 Integralni račun

Zajedno sa diferencijalnim računom, integralni račun počinje se razvijati u 17. stoljeću. Otada integrali imaju sve veću i veću ulogu u raznim prirodnim i tehničkim znanostima. Razlikujemo određene i neodređene integrale pa ćemo navesti njihove definicije i svojstva. Za primjenu ćemo više koristiti određene integrale.

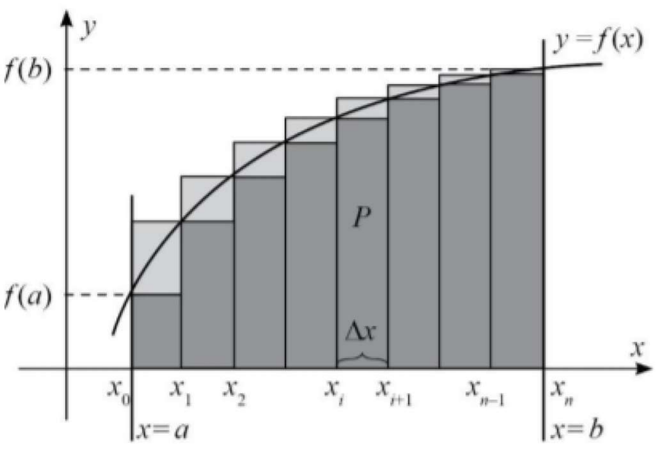
2.1 Riemannov integral

Integralni račun pojavljuje se kao posljedica problema o izračunu površine ispod krivulje $f(x)$. Da bi odredili tu površinu, morat ćemo ju aproksimirati upisivanjem (opisivanjem) pravokutnika te razdiobom segmenta $[a,b]$ na kojem je krivulja $f(x)$ definirana.

Neka je $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena i bez smanjenja općenitosti rastuća funkcija te neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Najprije napravimo razdiobu ρ segmenta $[a,b]$ na n jednakih dijelova takvih da je

$$\rho : a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b.$$

Vrijedi da je $\Delta x = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ duljina svakog podintervala (vidi Sliku 3).



Slika 2: Površina ispod krivulje $y = f(x)$

Promotrimo pravokutnike širine Δx i visine jednake vrijednosti funkcije u lijevim krajevima podintervala ("upisani" pravokutnici). Sumu tih pravokutnika nazivamo **donjom Darbouxovom[4] sumom** i vrijedi

$$s(f,\rho) = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\Delta x. \tag{6}$$

Nadalje, promotrimo pravokutnike širine Δx i visine jednake vrijednosti funkcije u desnim krajevima podintervala ("opisani" pravokutnici). Sumu tih pravokutnika nazivamo **gornjom Darbouxovom sumom** i vrijedi

$$S(f,\rho) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x. \tag{7}$$

[4]Jean-Gaston Darboux, 1842 - 1917, francuski matematičar

Definirajmo minimume i maksimume podintervala na način:

$$m_i := \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$
$$M_i := \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.$$

Sada (6) i (7) možemo zapisati i na drugi način:

$$s(f,\rho) := \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$
$$S(f,\rho) := \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}).$$

Definicija 2.1 *Neka je $\mathcal{R}$ skup svih razdioba segmenta $[a,b]$. Broj*

$$I^* = \inf\{S(f,\rho) : \rho \in \mathcal{R}\} \tag{8}$$

*nazivamo **gornji Riemannov integral**, a*

$$I_* = \sup\{s(f,\rho) : \rho \in \mathcal{R}\} \tag{9}$$

*nazivamo **donji Riemannov integral**.*

Teorem 2.1 *Ako je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena na $[a,b]$ onda je*

$$I_* \leq I^*.$$

2.2 Određeni i neodređeni integral

Definicija 2.2 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija na $[a,b]$. Ako je $I_* = I^*$, onda za funkciju f kažemo da je **integrabilna u Riemannovom**[5] **smislu** ili **R-integrabilna** na $[a,b]$, a realan broj*

$$I = I_* = I^*$$

*nazivamo **određenim integralom** funkcije f na segmentu $[a,b]$ i označavamo sa*

$$\int_a^b f(x)dx. \tag{10}$$

Kažemo da je f podintegralna funkcija, a segment [a,b] područje integracije.

Teorem 2.2 *Ako je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija, tada vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\Delta x,$$

pri čemu je $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + i\Delta x$ i $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

[5]Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826 - 1866, njemački matematičar

Definicija 2.3 *Neka je I jedan od skupova: $\langle a,b\rangle, [a,b], \langle a,b], [a,b\rangle$. Primitivnu funkciju funkcije f na skupu I definiramo kao*

$$F'(x) = f(x),$$

za svaki $x \in I$.

Za funkciju f kažemo da je integrabilna na I ako ima primitivnu funkciju na I.

Definicija 2.4 *Skup svih primitivnih funkcija od f označavamo sa*

$$\int f(x)dx = \Big\{F(x) + c, c \in \mathbb{R}\Big\}$$

*i nazivamo **neodređeni integral** funkcije f.*

Sada ćemo iskazati formulu koja povezuje primitivnu funkciju (diferencijalni račun) i Riemannov integral (integralni račun).

Teorem 2.3 ***(Newton-Leibnizova formula)***
Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija na segmentu [a,b].
Tada vrijedi Newton-Leibnizova formula

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{11}$$

pri čemu je $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ bilo koja primitivna funkcija funkcije f.

Napomena:
Newton-Leibnizova formula se može primijeniti ako je f neprekidna funkcija na segmentu $[a,b]$ osim u konačno mnogo točaka $x_i \in [a,b]$ (f po dijelovima neprekidna funkcija na $[a,b]$).

2.2.1 Svojstva neodređenih integrala

Teorem 2.4 ***(Svojstva neodređenih integrala)***

1. *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ derivabilna na I onda vrijedi*

$$\int f'(x)dx = f(x) + C$$

2. *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I onda vrijedi*

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = f(x).$$

3. *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ integrabilna na I i neka je $\lambda \in \mathbb{R}$, onda je λf integrabilna na I i vrijedi*

$$\int \lambda f(x)dx = \lambda \int f(x)dx.$$

4. *Ako su funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ integrabilne na I, onda je i funkcija $f \pm g$ integrabilna na I i vrijedi*

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Navedena svojstva neodređenih integrala vrijede i za određene integrale.

3 Obične diferencijalne jednadžbe

Diferencijalnim jednadžbama modeliramo razne prirodne i fizičke zakone. Kako je derivacija mjera promjene, diferencijalnim jednadžbama možemo opisivati probleme procjene budućnosti. Zbog toga, oduvijek imaju veliku primjenu i u ostalim prirodnim znanostima.

Diferencijalne jednadžbe povezuju nezavisnu varijablu x i nepoznatu funkciju $y = f(x)$ tako da se u njima pojavljuju i neke njene derivacije. Ako diferencijalna jednadžba ne sadrži parcijalne derivacije, ona se naziva **obična diferencijalna jednadžba**. U suprotnom, govorimo o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama.

Definicija 3.1 *Neka je $\Omega \in \mathbb{R}^{n+2}$ otvoren skup i $F : \Omega \to \mathbb{R}$ dana funkcija.* ***Obična diferencijalna jednadžba n-tog reda*** *za nepoznatu funkciju $y(x)$ je jednadžba oblika*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \tag{12}$$

Definicija 3.2 *Neka je $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ dana neprekidna funkcija. Za funkciju $u : I \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***rješenje obične diferencijalne jednadžbe*** *(12) ukoliko vrijedi*

1. *$I \subseteq \mathbb{R}$ je otvoreni interval*
2. *$u \in C^n(I)$*
3. *$(\forall x \in I) \quad (x, u(x), \dots, u^{(n)}(x)) \in \Omega$*
4. *$(\forall x \in I) \quad F(x, u(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0$*

Definicija 3.3 *Za funkciju $u \in C^1(I)$, za I otvoreni interval, kažemo da je rješenje Cauchyjeve[6] zadaće*

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{13}$$

ako je u rješenje diferencijalne jednadžbe (13) i vrijedi

1. *$x_0 \in I$*
2. *$u(x_0) = y_0$.*

Jednakost $y(x_0) = y_0$ nazivamo **početni uvjet**. Drugim riječima, Cauchyjev problem je problem traženja rješenja diferencijalne jednadžbe koje zadovoljava početni uvjet.

[6] Augustin Louis Cauchy, 1789 - 1857, francuski matematičar

3.1 Metoda separacije varijabli

Diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$F(x, y, y') = 0$$

želimo svesti na oblik

$$P(x)Q(y)y' = M(x)N(y), \tag{14}$$

kako bi mogli separirati varijable.
Zamjenu

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

uvrstimo u (14) i dobivamo

$$P(x)Q(y)\frac{dy}{dx} = M(x)N(y),$$

odnosno

$$P(x)Q(y)dy = M(x)N(y)dx.$$

Nadalje, dijeljenjem se dobiva izraz

$$\frac{Q(y)}{N(y)}dy = \frac{M(x)}{P(x)}dx. \tag{15}$$

Ovim načinom su svi izrazi koji ovise o y premješteni na jednu stranu, dok su svi izrazi koji ovise o x premješteni na drugu stranu.
Integriranjem (15) dobiva se

$$\int \frac{Q(y)}{N(y)}dy = \int \frac{M(x)}{P(x)}dx,$$

odnosno opće rješenje polazne diferencijalne jednadžbe.
Ovaj postupak naziva se **metoda separacije varijabli**.

4 Primjena u fizici

Matematika se bavi proučavanjem količina, struktura, prostora i promjena. Proučavanje promjena potaknuto je fizikom. Jedan od važnih pojmova u fizici je gibanje, odnosno promjena položaja tijela u odnosu na neko drugo tijelo. Promatranjem gibanja čestica, razvijao se diferencijalni i integralni račun, pa samim time i primjena diferencijalnih jednadžbi. U radu ćemo se fokusirati na sile i njihovu povezanost s radom i tlakom te složeno gibanje poput kosog hitca.

4.1 Rad i sila

Drugi Newtonov zakon gibanja govori da sila masi daje ubrzanje, što možemo zapisati kao

$$F = m\frac{d^2s}{dt^2}, \tag{16}$$

pri čemu je gibanje po pravcu dano funkcijom $s(t)$.

Rad možemo definirati na 2 načina u ovisnosti o sili.

1. Kada je sila F konstantna
Tada jednostavno koristimo formulu za rad koja glasi

$$W = Fd, \tag{17}$$

pri čemu d označava prijeđeni put.

2. Kada sila F nije konstantna
Tada imamo gibanje tijela duž x-osi od točke $x = a$ do $x = b$. Neka u točki x na tijelo djeluje sila $f(x)$. Nadalje, podijelimo segment $[a, b]$ na n jednakih dijelova $x_0, x_1, ..., x_n$ tako da vrijedi $x_i - x_{i-1} = \Delta\text{x}, i = 1, ..., n$. Funkcija f je neprekidna i za što veći n, duljina podintervala Δx je sve manja, stoga možemo pretpostaviti da je f gotovo konstantna na podintervalu $[x_{i-1}, x_i]$, za sve $i = 1, ..., n$. S ε_i označimo točku u tom podintervalu. Slijedi da je rad obavljen na tom podintervalu približno jednak

$$W_i \approx f(\varepsilon_i)\Delta x. \tag{18}$$

Ukupan rad približno je jednak

$$W \approx \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x. \tag{19}$$

Što je n sve veći, to je ova aproksimacija sve bolja. Zbog integralne sume, rad izvršen prilikom pomicanja tijela od točke $x = a$ do točke $x = b$ možemo definirati kao

$$W = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx. \tag{20}$$

Primjer 4.1 *Na tijelo koje se nalazi x metara od ishodišta djeluje sila $f(x) = x^2 + x$. Koliki se rad izvrši kada se tijelo pomakne od točke $x = 1$ do točke $x = 4$?*

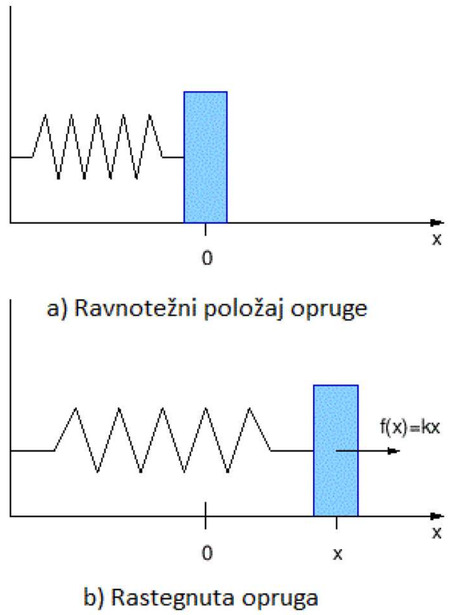
Rješenje: Budući da sila nije konstantna, koristimo 2. slučaj. Prema prethodno izvedenoj formuli (20) imamo

$$W = \int_1^4 (x^2 + x)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\Big|_1^4 = 28.5J.$$

Primjer 4.2 *Prema Hookeovom[7] zakonu, ako se tijelo na elastičnoj opruzi pomakne iz ravnotežnog položaja, djelovat će povratna sila koja će nastojati vratiti tijelo u ravnotežni položaj. Iznos te sile F proporcionalan je pomaku x iz ravnotežnog položaja. To zapisujemo kao*

$$F = kx, \tag{21}$$

pri čemu je k konstanta opruge.



Slika 3: Hookeov zakon produljenja opruge

Na primjer, kako bi rastegnili oprugu iz ravnotežnog položaja 10 cm do 15 cm potrebna je sila od 30 N. Izračunajmo rad koji je potreban da se ista opruga rastegne na duljinu od 18 cm.
Iz zadanih podataka i formule (6) možemo izračunati konstantu opruge k

$$k = \frac{30}{0.05} = 600N/m.$$

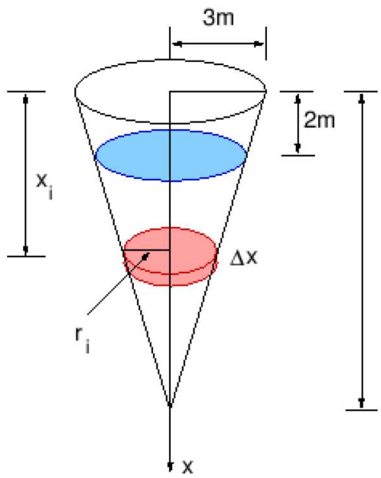
Nadalje, funkciju $f(x) = 600x$ uvrstimo u (20) i dobivamo

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 600x dx = 600\frac{x^2}{2}\Big|_{0.05}^{0.08} = 300(0.08^2 - 0.05^2) = 1.17J.$$

Rad potreban da se opruga rastegne na duljinu od 18 cm jednak je 1.17 J.

[7]Robert Hooke, 1635 - 1703, britanski fizičar, matematičar i izumitelj

Primjer 4.3 *Rezervoar oblika invertiranog stošca visine $h = 10$ m i radijusa baze $r = 3$ m napunjen je vodom do visine 8 m (vidi Sliku 6). Izračunajmo rad koji je potreban za pražnjenje rezervoara i to tako da se voda ispumpa preko gornjeg ruba.*



Slika 4: Rezervoar s vodom

Rješenje: Voda se nalazi od dubine 2 m do dubine 10 m. Napravimo razdiobu segmenta $[2, 10]$ takvu da su svi podintervali jednake duljine. Slijedi da je $x_i - x_{i-1} = \Delta x, i = 1, \ldots, n$. Tako smo i vodu u rezervaru podijelili na n jednakih dijelova pri čemu je i -ti dio približno jednak cilindru visine Δx i radijusa baze r_i. Primijenimo li sličnost trokuta uočavamo da vrijedi:

$$\frac{r_i}{10 - x_i} = \frac{3}{10},$$

iz čega slijedi da je

$$r_i = \frac{3}{10}(10 - x_i).$$

Ako pogledamo volumen i-tog dijela vode, on će biti približno jednak

$$V_i \approx r_i^2 \Delta x \pi = \frac{9}{100}(10 - x_i)^2 \Delta x \pi.$$

Masu i-tog dijela ćemo dobiti iz formule $m = \rho V$, pri čemu je gustoća vode ρ jednaka 1000 kg/m^3:

$$m_i \approx 90(10 - x_i)^2 \Delta x \pi.$$

Sila potrebna za podizanje i-tog dijela vode mora nadvladati silu težu pa je

$$F_i = m_i \cdot g \approx 9.81 \cdot 90(10 - x_i)^2 \Delta x \pi \approx 2774(10 - x_i)^2 \Delta x.$$

Svaka čestica u i-tom dijelu vode prelazi put x_i. Sada rad potreban za ispumpavanje i-tog dijela vode možemo pisati kao

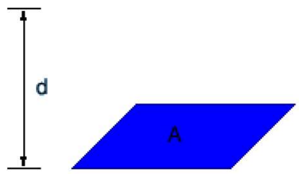
$$W_i \approx F_i x_i \approx 2774(10 - x_i)^2 x_i \Delta x.$$

Ukupan rad potreban za ispumpavanje čitavog rezervoara dobivamo na način

$$
\begin{aligned}
W &\approx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2774(10-x_i)^2 x_i \Delta x \\
&= 2774 \int_2^{10} (10-x)^2 x dx \\
&= 2774 \left(50x^2 - 20\frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right) \Bigg|_2^{10} \approx 1.90 \cdot 10^6 J.
\end{aligned}
$$

4.2 Hidrostatski tlak i sila

Neka je tanka horizontalna ploča površine A zaronjena u tekućinu gustoće ρ na dubinu d metara od površine tekućine.



Slika 5: Zaronjena tanka ploča

Volumen stupca tekućine iznad ploče možemo izračunati kao

$$V = Ad,$$

a masu

$$m = \rho V = \rho A d.$$

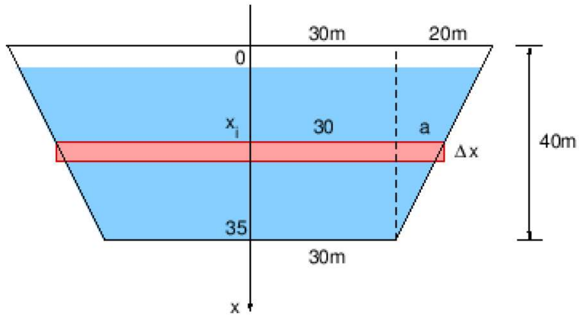
Nadalje, sila kojom voda djeluje na ploču jednaka je

$$F = mg = \rho g A d,$$

pri čemu je g ubrzanje Zemljine sile teže.
Tlak definiramo kao omjer sile F i površine A

$$P = \frac{F}{A} = \rho g d. \tag{22}$$

Primjer 4.4 *Izračunaj tlak vode na branu ukoliko je poznato da je oblika jednakokračnog trapeza, visoka 40 m, široka na vrhu 100 m, a na dnu 60 m. Zrcalo vode se nalazi 5 m ispod vrha brane.*



Slika 6: Hidrostatski tlak na branu

Rješenje: Ako postavimo x-os tako da je ishodište na površini vode, dubina vode je 35 m. Napravimo razdiobu segmenta [0,35] na podintervale jednake duljine, $x_i - x_{i-1} = \Delta x, i = 1, ..., n$. Sada je i-ti podjeljak približno jednak pravokutniku visine Δx i širine $2y_i$, pri čemu je $y_i = 30 + a$.
Pogledajmo dva pravokutna trokuta desno na slici, jedan do površine vode, a drugi do kraja brane. Iz sličnosti, imamo omjer

$$\frac{a}{35 - x_i} = \frac{20}{40}.$$

Slijedi da je

$$a = \frac{35 - x_i}{2},$$

pa možemo i y_i izraziti preko x_i

$$2y_i = 2(30 + a) = 2\left(30 + \frac{35 - x_i}{2}\right) = 95 - x_i.$$

Sada možemo izračunati površinu i-tog podjeljka brane

$$A_i = 2y_i \Delta x = (95 - x_i)\Delta x.$$

Budući da je Δx mali, pretpostavljamo da je tlak na i-tom podjeljku brane konstantan i jednak

$$P_i = \rho g d_i = 1000 \cdot 9.81 \cdot x_i = 9810 x_i.$$

Možemo izračunati hidrostatsku silu koja djeluje na i-ti podjeljak iz (22):

$$F_i = P_i A_i = 1000 \cdot 9.81 \cdot x_i(95 - x_i)\Delta x.$$

Ukupna hidrostatska sila računa se kada imamo $n \to \infty$ i slijedi:

$$\begin{aligned} F &\approx \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 9810 x_i (95 - x_i)\Delta x \\ &= 9810 \int_0^{35} x(95 - x)dx \\ &= 9810\left(95\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^{35} \approx 4.31 \cdot 10^8 N. \end{aligned}$$

4.3 Kosi hitac

Gibanje čestica u polju sile $\vec{F}$ opisujemo drugim Newtonovim zakonom gibanja

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Vektor sile $\vec{F}$ možemo zapisati pomoću Kartezijevih[8] komponenti u trodimenzionalnom prostoru

$$F_x, F_y, F_z.$$

Znamo da za akceleracije vrijedi

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2},\ a_y = \frac{d^2y}{dt^2},\ a_x = \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Ako raspišemo po komponentama, za sile dobivamo

$$F_x = m\frac{d^2x}{dt^2},\ F_y = m\frac{d^2y}{dt^2},\ F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}.$$

Dobili smo linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda koje opisuju položaj čestice $(x(t), y(t), z(t))$. Promotrit ćemo slučaj u ravnini, gdje sustav rješavamo za dvije varijable i položaj čestice $(x(t), y(t))$.

Slika 7: Ispaljivanje projektila s početnom brzinom V_0 u ravnini xy

Ispaljujemo projektil početnom brzinom V_0 u trenutku $t = 0$ pod kutom α koji zatvara s x-osi. Budući da nam je apscisa vodoravna, za diferencijalnu jednadžbu vrijedi

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = 0. \tag{23}$$

S obzirom da je ordinata usporedna sa silom teže $F_g = mg$, za diferencijalnu jednadžbu vrijedi

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -mg. \tag{24}$$

Za uvjete $x(0) = 0$ i $y(0) = 0$, sa slike možemo uočiti

$$x'(0) = \frac{dx}{dt}(0) = V_0\ \cos(\alpha), \tag{25}$$

$$y'(0) = \frac{dy}{dt}(0) = V_0\ \sin(\alpha). \tag{26}$$

[8]René Descartes, 1596 - 1650, francuski filozof, fizičar, matematičar i utemeljitelj analitičke geometrije

Ako (23) i (24) podijelimo s m dobivamo sljedeće diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \tag{27}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g. \tag{28}$$

Dvostrukim integriranjem (27) dobivamo izraz

$$x(t) = ct + d, \tag{29}$$

pa za $t = 0$ vrijedi $x(0) = c \cdot 0 + d$. Iz uvjeta $x(0) = 0$ i prethodne jednadžbe slijedi da je $d = 0$. Vratimo $d = 0$ u (29) i dobivamo izraz

$$\frac{dx}{dt}(0) = c.$$

Slijedi da je

$$x(t) = V_0\ t\ \cos(\alpha). \tag{30}$$

Jednakim postupkom, integriranjem (28) dobivamo

$$\frac{dy}{dt} = -gt + c_1,$$

a ponovnim integriranjem

$$y(t) = -g \cdot \frac{t^2}{2} + c_1 t + d_1. \tag{31}$$

Uvrštavajući uvjet $y(0) = 0$ slijedi $d_1 = 0$. Vratimo $d_1 = 0$ u (31) i dobivamo

$$\frac{dy}{dt}(0) = -g \cdot 0 + c_1 = c_1.$$

Slijedi da je

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0\ t\ \sin(\alpha). \tag{32}$$

Rješenja (30) i (32) diferencijalnih jednadžbi drugog reda opisuju gibanje projektila u ravnini xy. Kako bi zaključili po kojoj putanji se giba projektil, možemo iz (30) izraziti

$$t = \frac{x}{V_0\ \cos(\alpha)}$$

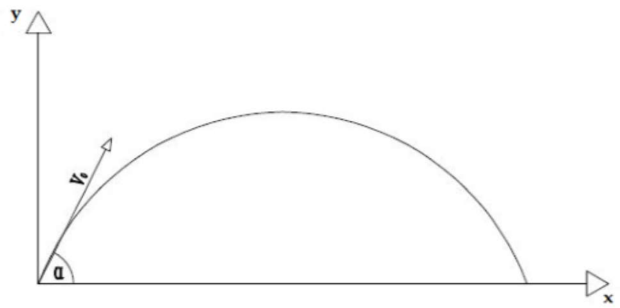
i uvrstiti u (32)

$$y = -\frac{g}{2V_0^2 \cos^2(\alpha)}x^2 + tg(\alpha)x.$$

Dobili smo da je jednadžba putanje upravo parabola.
Ako promatramo slučaj pravocrtnog gibanja i ako x-os postavimo u pravac gibanja, onda imamo samo jednu diferencijalnu jednadžbu koja glasi

$$F = m\frac{d^2x}{dt},$$

pri čemu je $y(t) = 0$ i $z(t) = 0$.



Slika 8: Kosi hitac

5 Primjena u biologiji

Pojam populacije često spominjemo kada želimo opisati prirodne modele rasta i pada pomoću matematičkih modela. Populacija je skupina jedinki određene vrste u više uzastopnih generacija koje žive na određenom prostoru. U ovome radu proučavat ćemo dinamiku populacije nekih vrsta koje uz određene uvjete podliježu različitim promjenama. Te promjene možemo modelirati običnim diferencijalnim jednadžbama uz određene početne uvjete.

5.1 Eksponencijalni model rasta populacije

Eksponencijalni model rasta populacije često možemo naći i pod nazivom **Malthusov**[9] **model rasta populacije.**

Neka je $P(t)$ veličina populacije u trenutku t. Stoga je $\frac{dP}{dt}$ izraz kojim opisujemo stopu rasta populacije po vremenu t. Glavna pretpostavka ovog modela je:

"Stopa rasta populacije je proporcionalna veličini populacije."

Matematički to možemo zapisati kao

$$\frac{dP}{dt} = kP(t), \tag{33}$$

za neku konstantu $k \neq 0$. Ovo je diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju rješavamo na način

$$\begin{aligned} \frac{dP}{P} &= kdt, \\ \int \frac{dP}{P} &= k \int dt, \\ \ln|P| &= kt + \ln|C|, \\ P(t) &= Ce^{kt}. \end{aligned} \tag{34}$$

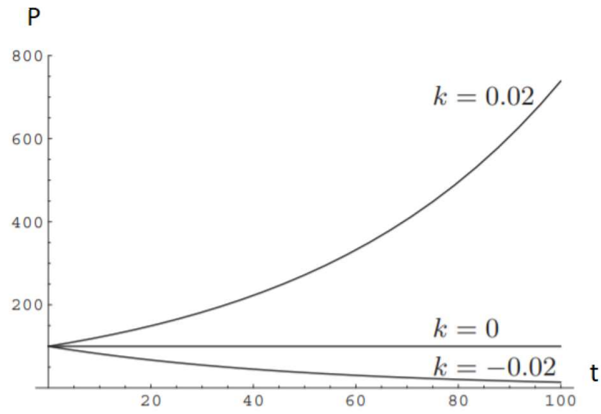
Rast populacije je opisan eksponencijalnom funkcijom $P(t) = Ce^{kt}$ uz početni uvjet $P_0 = P(0)$.

[9]Thomas Robert Malthus, 1766 -1834., engleski demograf i politički ekonomist

Promjena populacije ovisi o konstanti k:

1. Ako je $k > 0$ radi se o rastu populacije.
2. Ako je $k < 0$ radi se o padu populacije.
3. Ako je $k = 0$ radi se o ravnotežnom stanju populacije.

Što je $|k|$ veći, to je rast/pad brži.



Slika 9: Graf eksponencijalne funkcije $P(t) = Ce^{kt}$ za $P_0 = 100$

Primjer 5.1 ***(Masa stabla)*** *Masa stabla u trenutku $t = 0$ iznosi 1600 kg. Odredite masu stabla nakon 6 mjeseci ako znamo da je godišnji koeficijent prirasta k= 0.03.*

Rješenje:
Stopu promjene mase M s obzirom na vrijeme t možemo modelirati pomoću (33). Stopa promjene mase je proporcionalna trenutnoj masi i vrijedi

$$\frac{dM}{M} = 0.03dt.$$

Rješavamo običnu diferencijalnu jednadžbu sa separiranim varijablama:

$$\int \frac{dM}{M} = 0.03 \int dt,$$

$$\ln |M| = 0.03t + \ln |C|,$$

$$M(t) = Ce^{0.03t}.$$

Masu M nakon vremena t modeliramo izrazom $M(t) = Ce^{0.03t}$, pri čemu je početni uvjet $M_0 = M(0) = 1600$ kg. Slijedi,

$$M(t) = 1600e^{0.03t}.$$

Budući da vrijeme t računamo u godinama, vrijedit će

$$M(0.5) = 1600e^{0.03 \cdot 0.5} = 1600e^{0.015} = 1624.18.$$

Masa stabla nakon 6 mjeseci bit će približno 1624.18 kg.

Primjer 5.2 ***(Razmnožavanje bakterija)*** *Bakterije se razmnožavaju na sljedeći način:*

1. *Nakon sat vremena postoji 2000 bakterija*
2. *Nakon 3 sata postoji 5000 bakterija*

Odredite promjenu broja bakterija u ovisnosti o vremenu t te odredite broj bakterija u trenutku $t = 0$.

Rješenje:
Označimo sa $N(t)$ količinu bakterija u vremenu t i neka je k konstanta. Uvrstimo to u (33) i dobivamo

$$\frac{dN}{dt} = kN.$$

Rješenje ove diferencijalne jednadžbe dobivamo iz (34) i ono glasi

$$N(t) = Ce^{kt}.$$

Sada možemo iskoristiti uvjete iz zadatka

$$N(1) = 2000, N(3) = 5000.$$

Uvrštavanjem uvjeta u rješenje jednadžbe dobivamo

$$Ce^{k} = 2000, Ce^{3k} = 5000,$$

iz čega rješavanjem sustava 2 jednadžbe s 2 nepoznanice dobivamo

$$k = \frac{1}{2} ln(2.5) \approx 0.458, C = \frac{2000}{e^{0.458}} \approx 1265.095.$$

Kada to uvrstimo u početnu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$N(t) = 1265.095\, e^{0.458t}.$$

Kako bi dobili početni broj bakterija u trenutku $t = 0$, uvrstimo u prethodni izraz

$$N(0) = 1265.095\, e^{0.458 \cdot 0} = 1265.095 \approx 1265.$$

Početni broj bakterija je bio 1265.

5.2 Logistički model rasta populacije

Logistički model bolje opisuje rast populacije od eksponencijalnog modela jer uzima u obzir činjenicu da populacija ne može rasti konstantno, što bi dovelo do neograničenog rasta. Model se temelji na tome da će sigurno doći do zasićenosti nekog resursa (hrana, prostor,...) i tada stopa rasta više neće biti konstantna nego opadajuća funkcija veličine populacije. Ovaj model prvi put je predložio Pierre Verhulst[10] 1838. godine, stoga se naziva i Verhulstov model rasta populacije.

Neka je n_0 početna stopa nataliteta i m_0 početna stopa mortaliteta. Sa $r = n_0 - m_0$ označavamo početnu stopu rasta populacije.
Uvodimo još oznaka:

P - veličina populacije
dR - broj rođenih u vremenskom intervalu $[t, t + \Delta t]$
dU - broj umrlih u vremenskom intervalu $[t, t + \Delta t]$

$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt}$ - stopa rasta populacije
$\frac{1}{P}\frac{dR}{dt}$ - stopa rođenih (natalitet)
$\frac{1}{P}\frac{dU}{dt}$ - stopa umrlih (mortalitet)

Glavne pretpostavke ovog modela su:

1. Stopa nataliteta opada proporcionalno veličini populacije

$$n = \frac{1}{P}\frac{dR}{dt} = n_0 - \alpha P$$

2. Stopa mortaliteta raste proporcionalno veličini populacije

$$m = \frac{1}{P}\frac{dU}{dt} = m_0 + \beta P$$

$\alpha > 0$ i $\beta > 0$ su konstante rasta, odnosno pada. Uvrštavanjem slijedi:

$$dP = dR - dU$$

$$dP = ((n_0 - \alpha P) - (m_0 + \beta P))Pdt$$

$$dP = (n_0 - m_0)\left(1 - \left(\frac{\alpha + \beta}{n_0 + m_0}\right)P\right)Pdt$$

$$dP = r\left(1 - \frac{P}{K}\right)Pdt$$

$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right). \tag{35}$$

[10]Pierre Verhulst, 1804-1849, belgijski matematičar

Nova konstanta

$$K = \frac{n_0 + m_0}{\alpha + \beta}$$

naziva se **nosivi kapacitet**. To je maksimalna količina koju populacija može doseći. Što je populacija bliža K, ona sporije raste.

Jednadžbu (35) nazivamo **Verthulsov ili logistički model rasta populacije**. Ona se rješava metodom separacije varijabli na sljedeći način:

$$\frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)P} = rdt$$

$$\int \frac{dP}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)P} = \int rdt$$

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{K - P}\right) dP = rt + C_1$$

$$\ln P - \ln(K - P) = rt + C_1$$

$$\ln\left(\frac{P}{K - P}\right) = rt - \ln C$$

$$\left(\frac{P}{K - P}\right) = \frac{1}{C}\, e^{rt}. \tag{36}$$

Rješavanjem (36) po P dobivamo rješenje diferencijalne jednadžbe:

$$P(t) = \frac{K}{1 + C\, e^{-rt}}. \tag{37}$$

Konstantu C možemo dobiti iz početnih uvjeta:

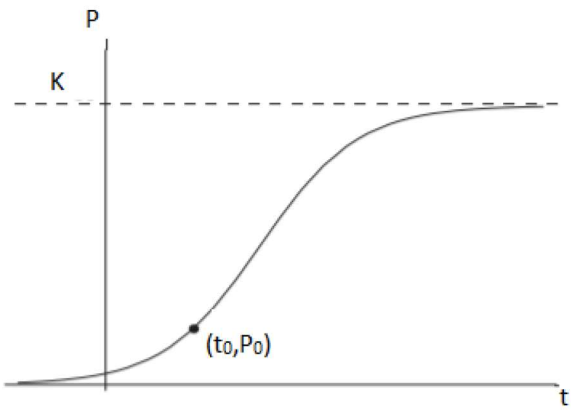
$$P(t_0) = P_0$$

i ona glasi

$$C = \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{rt_0}.$$

Analitičko rješenje logističkog modela (35) s početnim uvjetom $P(t_0) = P_0$, pri čemu je $0 < P_0 < K$, dano je izrazom

$$P(t) = \frac{K}{1 + \left(\frac{K - P_0}{P_0}\right) e^{-r(t - t_0)}}. \tag{38}$$



Slika 10: Logistički model funkcije $P(t)$

Primjer 5.3 ***(Širenje zaraze)*** *U populaciji od 500 miševa njih 5 je zaraženo zaraznom bolešću kako bi se mogao testirati model širenja zaraze čija je pretpostavka da je brzina promjene broja zaraženih miševa proporcionalna umnošku broja zdravih miševa i broja zaraženih. Poznato je da je 24 sata nakon eksperimenta ustanovljeno da je još 5 miševa zaraženo. Odredite koliko je vremena potrebno da se zarazi pola populacije.*

Rješenje:
Neka je $M(t)$ broj zaraženih miševa u trenutku t. Početni broj zdravih miševa je $M_0 = 5$. S $500 - M(t)$ možemo označiti broj zdravih miševa u trenutku t. Pretpostavku zadatka da je brzina promjene broja zaraženih miševa proporcionalna umnošku broja zdravih miševa i broja zaraženih možemo matematički zapisati kao

$$\frac{dM}{dt} = kM(500 - M),$$

pri čemu je k konstanta proporcionalnosti.
Ova jednadžba je obična diferencijalna jednadžba sa separiranim varijablama koju možemo riješiti na sljedeći način:

$$\frac{dM}{M(500 - M)} = kdt,$$

$$\int \frac{dM}{M(500 - M)} = k \int dt,$$

$$\frac{1}{500}\left(\int \frac{dM}{M} + \int \frac{dM}{500 - M} \right) = k \int dt,$$

$$\frac{1}{500}\Big(\ln\, M - \ln(500 - M) \Big) = kt + \frac{1}{500} \ln |C|,$$

$$\ln \left(\frac{M}{500 - M} \right) = 500kt + \ln |C|,$$

$$\frac{M}{500-M} = |C|\, e^{500kt},$$

$$M(t) = \frac{500|C|\, e^{500kt}}{1+|C|e^{500kt}}.$$

Za $C > 0$ dobivamo ovisnost broja zaraženih miševa o vremenu t

$$M(t) = \frac{500Ce^{500kt}}{1+Ce^{500kt}}. \tag{39}$$

Sada možemo izračunati koliko je vremena potrebno da se zarazi pola populacije (250 miševa). Uvrštavanjem početnih uvjeta $M(0) = 5$ i $M(24) = 10$ u (39) dobivamo

$$C = \frac{1}{99},\ k = \frac{1}{12000}\ \ln\frac{99}{49}.$$

Uvrštavanjem dobivenih C i k u (25) dobivamo

$$M(t) = \frac{\frac{500}{99}\cdot\left(\frac{99}{49}\right)^{\frac{t}{24}}}{1+\frac{1}{99}\cdot\left(\frac{99}{49}\right)^{\frac{t}{24}}}.$$

Ukoliko za M uvrstimo 250 dobivamo vrijeme $t \approx 156.808$ h koje predstavlja vrijeme nakon kojega će se zaraziti pola populacije.

6 Primjena u kemiji

Primjena matematike važna je bez obzira na granu kemije koju proučavamo, bilo da se radi o anorganskoj, organskoj kemiji, biokemiji ili kemiji okoliša. Najviše ćemo promatrati obične diferencijalne jednadžbe za predviđanje brzine kemijske reakcije. Kemijske reakcije se ne odvijaju jednako brzo. Kemičari su došli do zaključka kako na brzinu kemijske reakcije utječe temperatura, koncentracija reaktanta i produkta, građa čestice i katalizator.

6.1 Brzina kemijske reakcije

Neka je kemijska reakcija dana sa

$$aA + bB \to cC.$$

To znači da iz a molekula reaktanta A i b molekula reaktanta B dobivamo c molekula produkta C.
Nadalje, množinsku koncentraciju reaktanata i produkata mjerimo u molima po litri (mol/L) i označavamo s $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$. Množinska koncentracija je omjer množine tvari i volumena otopine. Tijekom kemijske reakcije, koncentracije reaktanata se smanjuju, dok se koncentracije produkata povećavaju.

Brzinu kemijske reakcije u trenutku t možemo definirati kao

$$[C]'(t) = \frac{d[C]}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta[C]}{\Delta t}.$$

Odnosno,

$$v = \frac{1}{V_I} \frac{[I]}{dt},$$

pri čemu je V_I za reaktante negativnog predznaka, a za produkte pozitivnog.

Primjer 6.1 *Neka kemijska reakcija ima jednadžbu*

1. $2H_2 + 0_2 \to 2H_2O$
2. $Zn + 2HCl \to ZnCl_2 + H_2$.

Postavite jednadžbu za brzinu kemijske reakcije.

Rješenje:
1. Brzina kemijske reakcije definira se na sljedeći način

$$v = -\frac{1}{2}\frac{d[H_2]}{dt} = -\frac{d[0_2]}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d[H_2O]}{dt}.$$

Brzina kojom se troši vodik jednaka je brzini kojom se stvara voda, ali je brzina kojom se troši kisik dvostruko manja od brzine kojom se stvara voda.
2. Brzina kemijske reakcije definira se na sljedeći način

$$v = -\frac{d[Zn]}{dt} = -\frac{1}{2}\frac{d[HCl]}{dt} = \frac{d[ZnCl_2]}{dt} = \frac{d[H_2]}{dt}.$$

Brzina kojom se troši cink jednaka je brzini kojom se stvara cinkov klorid, ali je brzina kojom se troši klorovodična kiselina dvostruko veća od brzine kojom se stvara cinkov klorid.

Primjer 6.2 *Promotrimo kemijsku reakciju*

$$2NO_2 \to 2NO + O_2.$$

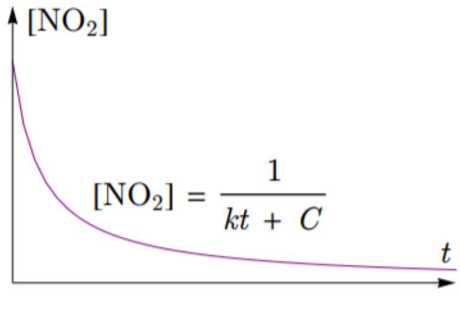
Budući da ova reakcija zahtijeva 2 molekule NO_2, brzina kojom se reakcija događa proporcionalna je kvadratu koncentracije NO_2. Odnosno vrijedi:

$$\frac{d[NO_2]}{dt} = -k[NO_2]^2,$$

pri čemu je $[NO_2]$ koncentracija od NO_2, a k je konstanta.
Ovu jednadžbu možemo riješiti separacijom varijabli. Slijedi

$$\frac{d[NO_2]}{[NO_2]^2} = -kdt$$
$$\int [NO_2]^{-2} d[NO_2] = -k \int dt$$
$$-[NO_2]^{-1} = -kt + C$$
$$[NO_2] = \frac{1}{kt + C},$$

pri čemu je konstanta C promijenjena.

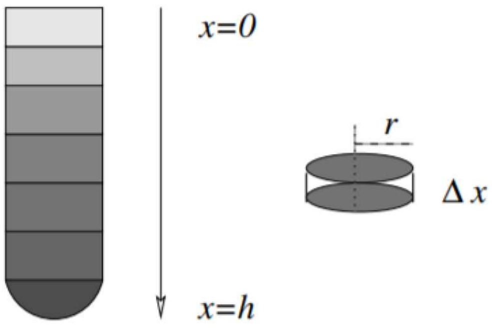


Slika 11: Graf koncentracije NO_2

S grafa možemo uočiti kako se koncentracija smanjuje vrlo brzo na početku, ali vrlo sporo nakon toga (ovisno o veličinama k i C).

6.2 Gradijent gustoće glukoze

Epruveta radijusa r i visine h sadrži pripremljenu otopinu glukoze čija je koncentracija najveća na dnu te se postepeno smanjuje prema vrhu epruvete. To se naziva **gradijent gustoće**. Neka je $c(x)$ funkcija koja opisuje koncentraciju u ovisnosti o dubini x u gramima po cm^3.
Na vrhu epruvete je $x = 0$, a na dnu $x = h$.



Slika 12: Gradijent glukoze

Odredimo ukupnu količinu glukoze u epruveti (u gramima). Zanemarit ćemo donji okrugli dio epruvete i pretpostaviti da je u pitanju valjak.

Podijelimo epruvetu (valjak) na niz jednakih segmenata $[x_{i-1}, x_i]$, pri čemu je $\Delta x = x_{i-1} - x_i$ debljina svakog segmenta.
Volumen svakog segmenta možemo računati kao

$$V_i = r^2 \pi \Delta x.$$

Količina glukoze u segmentu približno je dana formulom

$$G_i = r^2 \pi \Delta x c(x),$$

pri čemu je $c(x)$ koncentracija.
Kako bi sumirali ukupnu količinu svih segmenata, koristimo određeni integral

$$G = r^2 \pi \int_0^h c(x) dx. \tag{40}$$

Primjer 6.3 *Ako nam je poznato da je visina epruvete $h = 10$ cm, a radijus $r = 1$ cm, odredite ukupnu količinu glukoze u epruveti. Funkcija koncentracije $c(x)$ dana je formulom*

$$c(x) = 0.1 + 0.5x.$$

Rješenje: Prvo uvrstimo koncentraciju $c(x)$ u (40):

$$\begin{aligned} G &= r^2 \pi \int_0^h (0.1 + 0.5x)\, dx \\ &= r^2 \pi \left(0.1x + \frac{0.5x^2}{2} \right) \Big|_0^h \\ &= r^2 \pi \left(0.1h + \frac{0.5h^2}{2} \right). \end{aligned}$$

Nadalje, uvrstimo $h = 10$ cm i $r = 1$ cm

$$\begin{aligned} G &= 1^2\pi\left(0.1\cdot 10 + \frac{0.5\cdot 10^2}{2}\right) \\ &= \pi(1+25) = 26\pi\ g \\ &\approx 81.64\ g. \end{aligned}$$

Dobili smo da je ukupna količina glukoze u epruveti visokoj 10 cm radijusa 1 cm jednaka 81.64 g.

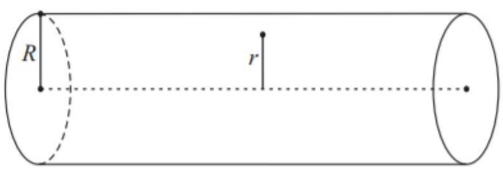
7 Primjena u medicini

Matematika igra relevantnu ulogu u napretku medicine. Tehnološki napredak koji zdravstveni djelatnici primjenjuju u svakidašnjem radu proizvod je zajedničkih snaga znanstvenika, inženjera i matematičara. Jedna od sveprisutnih primjena matematike u medicini je kroz uporabu derivacija i integrala. U ovom radu usredotočit ćemo se na brzinu protoka krvi kroz krvnu žilu te na volumen koji kroz nju protekne. Također, objasnit ćemo postupak za mjerenje srčanog minutnog volumena pomoću metode razrjeđivanja boja.

7.1 Brzina protoka krvi kroz krvnu žilu

Krv je nekompresibilan viskozan fluid što znači da ne bi promijenio svoj obujam ukoliko bi došlo do njegovog tlačenja. Također, zbog različite brzine gibanja slojeva fluida, postoji trenje nastalo njegovim strujanjem.

Promatrat ćemo protok krvi kroz cilindričnu krvnu žilu polumjera R.



Slika 13: Cilindrična krvna žila polumjera R

Prvi model je napravio Poiseuille[11] 1840. godine, pri čemu je postavio 3 glavne pretpostavke:

1. Cijev (krvna žila) mora biti ravna i konstantnog presjeka
2. Viskoznost je konstantna
3. Strujanje je laminarno i jednoliko

[11] Jean Léonard Marie Poiseuille, 1797-1869, francuski fizičar

Model se zasniva na tome da brzina protoka u zadanoj točki ovisi o udaljenosti r od središta krvne žile i dan je izrazom

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2). \tag{41}$$

P - razlika tlakova na krajevima krvne žile
η - koeficijent viskoznosti
l - duljina žile
r - vertikalna udaljenost točke od središta krvne žile, $r \in [0, R]$
Iz (41) možemo uočiti kako je brzina protoka najveća ukoliko je $r = 0$, tj. na sredini žile. Na rubovima žile gdje je $r = R$, brzina je jednaka 0.
Deriviramo

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}R^2 - \frac{P}{4\eta l}r^2$$

i dobivamo gradijent brzine

$$\frac{dv}{dr} = v'(r) = \frac{-Pr}{2\eta l}.$$

Na ovaj način možemo promatrati kako se mijenja brzina protoka krvi na udaljenosti r od središta krvne žile.

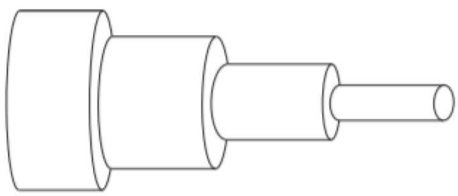
7.1.1 Fluks

Fluks se definira kao volumen fluida koji protekne kroz poprečni presjek po jedinici vremena.

Napravimo subdiviziju polumjera R

$$\rho : 0 = r_0 < r_1 < ... < r_n = R.$$

Nadalje, označimo duljinu podintervala s $\Delta r = r_i - r_{i-1}$. Brzinu fluida na podintervalu $[r_{i-1}, r_i]$ aproksimiramo s konstantom $v(r_i)$. Približni volumen fluida koji protječe kroz poprečni presjek po jedinici vremena jednak je volumenu tijela na slici.



Slika 14: Tijelo za aproksimaciju volumena fluida

Površinu prstena na podintervalu $[r_{i-1}, r_i]$ možemo računati kao

$$P_i = (r_i^2 - r_{i-1}^2)\pi = (r_i - r_{i-1})(r_i + r_{i-1})\pi = \Delta r(r_i + r_{i-1})\pi \approx 2\pi r_i \Delta r.$$

Sada je ukupni volumen jednak

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} P_i \, v(r_i) = \sum_{i=1}^{n} 2\pi r_i \Delta r \, v(r_i).$$

Fluks možemo računati kao

$$
\begin{aligned}
F &= \int_0^R 2\pi r v(r) dr \\
&= \int_0^R 2\pi r \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) dr \\
&= 2\pi \frac{P}{4\eta l} \int_0^R (R^2 r - r^3)\, dr \\
&= \frac{P\pi}{2\eta l}(R^2 \cdot \frac{r^2}{2}\Big|_0^R - \frac{r^4}{4}\Big|_0^R) \\
&= \frac{P\pi}{2\eta l}(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4}) \\
&= \frac{P\pi}{8\eta l} R^4.
\end{aligned}
$$

Prethodni izraz poznat je pod nazivom **Poiseuilleov zakon**. Povezuje fluks s razlikom tlaka P, polumjerom R i duljinom l krvne žile te koeficijentom viskoznosti.

7.2 Metoda razrjeđivanja boje

U medicini, metoda razrjeđivanja boje se koristi za mjerenje srčanog minutnog volumena. To je volumen krvi koju srce ispumpa u jedinici vremena. Postupak se svodi na to da se boja ubrizga u desnu pretklijetku odakle odlazi u pluća, a zatim lijevom pretklijetkom i lijevom klijetkom dolazi u aortu u koju je uveden senzor. Taj senzor mjeri koncentraciju boje u jednakim vremenskim razmacima u aorti dok se ne postigne koncentracija približno jednaka nuli u određenom vremenu T.

Označimo sa $c(t)$ koncentraciju boje u trenutku $t \in [0, T]$. Nadalje, napravimo subdiviziju segmenta $[0, T]$ na jednake podintervale

$$\rho : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T,$$

pri čemu vrijedi $\Delta t = t_i - t_{i-1}$.
Masu boje na podintervalu $[t_{i-1}, t_i]$ možemo zapisati kao

$$m_i \approx c(t_i) F \Delta t,$$

pri čemu je F fluks (srčani minutni volumen) na segmentu $[0, T]$.
Ukupnu masu možemo prikazati kao integralnu sumu

$$\sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} c(t_i) F \Delta t. \tag{42}$$

Količinu boje A (ukupnu masu boje) računamo pomoću integrala

$$A = F \int_0^T c(t) dt. \tag{43}$$

Primjer 7.1 *U desnu pretklijetku srca ubrizgali smo 4 mg boje. Koncentracija boje (mg/L) dana je formulom:*

$$c(t) = 10te^{-0.6t},$$

pri čemu je $t \in [0, 15]$*, t mjereno u sekundama. Odredite srčani minutni volumen.*

Rješenje: Poznato nam je da je ukupna količina boje $A = 4$ i $T = 15$. Srčani minutni volumen dobit ćemo po (43)

$$F = \frac{A}{\int_0^T c(t)dt}.$$

Odredimo prvo koncentraciju boje

$$\int_0^T c(t)dt = 10\int_0^{15} te^{-0.6t}dt = \left(\frac{t \cdot e^{-0.6t}}{-0.6}\bigg|_0^{15} - \int_0^{15} \frac{e^{-0.6t}}{-0.6}dt \right) = \frac{10}{0.36}(-10e^{-9} + 1)mgs/L.$$

Sada računamo srčani minutni volumen

$$F = \frac{4}{\frac{10}{0.36}(-10e^{-9} + 1)} = 0.1442L/s = 8.652L/min.$$

Primjer 7.2 *U desnu pretklijetku srca ubrizgali smo 6 mg boje. Koncentracija boje (mg/L) u svakoj sekundi dana je tablicom:*

t u sec	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
c(t) u mg/L	*0*	*0.3*	*3.1*	*7.2*	*9.3*	*7.8*	*5.9*	*4.0*	*2.1*	*0.8*	*0*

Tablica 6.1 Koncentracija boje u krvi

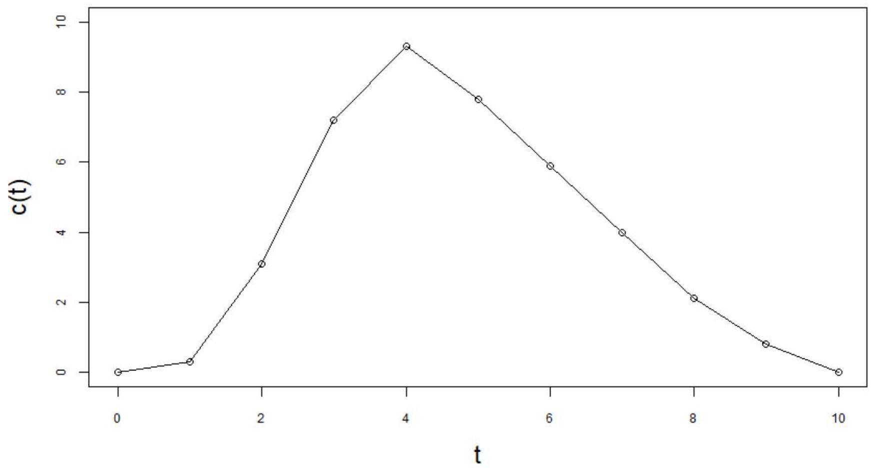
Odredimo srčani minutni volumen.

Rješenje: Poznato nam je da je ukupna količina boje $A = 6$ mg i $T = 10$ s. Iz tablice 6.1 možemo izračunati približnu vrijednost integrala

$$\int_0^{10} c(t)\, dt \approx \sum_{i=0}^{n} c(t_i) = 40.5 mgs/L.$$

Dobiveni broj je zapravo površina ispod grafa funkcije $c(t)$.
Nadalje, srčani minutni volumen dobivamo kao

$$F = \frac{A}{40.5} = \frac{6}{40.5} = 0.1481 L/s = 8.89 L/min.$$



Slika 15: Graf funkcije $c(t)$

Literatura

[1] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, Matematika I, Odjel za matematiku, Osijek, 2000.

[3] Š. Ungar, Matematička analiza u R^n, Golden marketing-Tehnička knjiga, Zagreb, 2005.

[4] J. Stewart, Calculus 7th Edition, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.

[5] S. Kurepa, Matematička analiza 1 (diferenciranje i integriranje), Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.

[6] S. Kurepa, Matematička analiza 2 (funkcije jedne varijable), Tehnička knjiga, Zagreb, 1990.

[7] B. Guljaš, Matematička analiza 1 i 2, PMF-MO, Zagreb

[8] Z. Lukač, Matematika za ekonomske analize, Element, Zagreb, 2014.

[9] A. Corn, Brzina u prirodnim i društvenim znanostima, Osječki matematički list 18, 2018.

[10] Z. Šikić, Eksponencijalni i logistički rast, Zagreb

[11] L. Edelsten-Keshet, Integral calculus with applications to the life sciences, Vancouver, 2014.

[12] A. Cunningham, R. Whelan, Maths for Chemists, University of Birmingham, 2014.

Sažetak

U ovom diplomskom radu upoznali smo se s pojedinim primjenama diferencijalnog i integralnog računa u prirodnim znanostima. Na samom početku opisana je teorija diferencijalnog i integralnog računa nakon koje slijedi teorija običnih diferencijalnih jednadžbi. Kroz odabrane primjere povezanosti sile s radom i tlakom te složenog gibanja poput kosog hitca, opisali smo moguće primjene navedenih računa u fizici. Na području biologije opisali smo eksponencijalni i logistički model rasta populacije. Također, na primjerima brzine kemijske reakcije i gradijenta gustoće glukoze proučili smo primjenu i u kemiji. Naposljetku, na području medicine objasnili smo primjere brzine protoka krvi kroz krvnu žilu i volumena koji kroz nju protekne te metodu razrjeđivanja boje kao jednu od glavnih metoda za mjerenje srčanog minutnog volumena.

Ključne riječi: derivacija, integral, obična diferencijalna jednadžba, brzina, nosivi kapacitet, početni uvjet, fluks, Poiseuilleov zakon.

Summary

In this thesis we introduced certain applications of differential and integral calculus in natural sciences. In the beginning, theory regarding derivatives and integrals, as well as the concept of ordinary differential equations, were discussed. Through selected examples of the relation of force to work and pressure, and complex motion such as an oblique shot, we described the possible applications of calculus in physics. In the field of biology, we described the exponential and logistic model of population growth. We also studied the application of chemistry through the examples of chemical reaction rate and glucose density gradient. Finally, in the field of medicine, we explained examples of the blood flow rate through the blood vessel as well as the volume that passes through it, and the dye dilution method as one of the main ones for the measurement of cardiac minute volume.

Key words: derivation, integral, ordinary differential equation, velocity, load capacity, initial condition, flux, Poiseuille law.

Životopis

Rođena sam 25. listopada 1995. godine u Osijeku. Nakon završene Osnovne škole Mladost, upisujem III. gimnaziju u Osijeku. 2014. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Preddiplomski studij završila sam 2017. godine uz završni rad na temu Konformno preslikavanje i Möbiusova transformacija. Iste godine upisujem diplomski studij Financijske matematike i statistike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Stručnu praksu odradila sam u Vestigu u Zagrebu.