Newtonova metoda za rješavanje nelinearnih jednadžbi

Šolić, Valentina

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Valentina Šolić

Newtonova metoda za rješavanje nelinearnih jednadžbi

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Valentina Šolić

Newtonova metoda za rješavanje nelinearnih jednadžbi

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se s iterativnom Newtonovom metodom za rješavanje nelinearnih jednadžbi kao i njezinim modifikacijama koje ćemo ilustrirati primjerom. Također, primjerom ćemo ilustrirati i generalizaciju Newtonove metode na sustav nelinearnih jednadžbi. Na kraju ćemo spomenuti Kvazi - Newtonove metode.

Ključne riječi

Newtonova metoda, metoda tangenti, metoda sekanti, Regula falsi, Kvazi - Newtonove metode

Newton's method for solving nonlinear equations

Summary

In this paper, we will introduce the iterative Newton method for solving nonlinear equations as well as its modifications, which we will illustrate with an example. Also, we will illustrate by example the generalization of Newton's method to a system of nonlinear equations. Finally, we will mention Quasi - Newton methods.

Keywords

Newton's method, tangent method, secant method, Regula falsi, Quasi - Newton methods

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu bavit ćemo se jednom od iterativnih metoda za rješavanje jednadžbe

$$f(x) = 0. \tag{1}$$

Funkcija f je realna i neprekidna funkcija definirana na zatvorenom intervalu $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ukoliko je funkcija f neprekidna na intervalu $I = [a, b]$ i na rubovima intervala I poprima suprotne vrijednosti ($f(a) \cdot f(b) < 0$), tada postoji barem jedna točka ξ iz intervala I za koju vrijedi $f(\xi) = 0$. Ako je još uz to prva derivacija funkcije f stalnog predznaka na intervalu I, onda je točka ξ jedina nultočka funkcije f na intervalu I. Tako se traženje rješenja jednadžbe (1) svodi na:

- separaciju intervala I
- određivanje aproksimacije nultočke ξ s unaprijed zadanom točnošću nekom iterativnom metodom.

Napomena 1. *Sredimo li* (1) *tako da s lijeve i desne strane dobijemo funkcije čije grafove znamo nacrtati*

$$\varphi(x) = \psi(x),$$

onda su nultočke funkcije f apscise točaka sjecišta grafova funkcija φ i ψ. Tako nećemo dobiti dobre aproksimacije nutočaka, ali ćemo moći izolirati intervale u kojima se nalaze nutočke.

U sljedećem poglavlju upoznat ćemo se s iterativnom Newtonovom metodom kojom rješavamo jednadžbu (1). Dokazat ćemo teorem koji nam govori o ocjeni apsolutne pogreške i brzini konvergencije Newtonove metode. Kako sama Newtonova metoda zahtijeva puno računanja (računanje vrijednosti funkcije i njene derivacije) navest ćemo modifikacije Newtonove metode kod kojih je broj operacije manji nego kod Newtonove metode. Također ćemo navesti primjere u kojima ćemo primijeniti navedene metode i sami algoritam Newtonove metode.

U trećem poglavlju ćemo generalizirati metode spomenute u drugom poglavlju, na slučaj sustava nelinearnih jednadžbi. Prvo ćemo generalizirati Newtonovu metodu pomoću koje ćemo riješiti i primjer, dok ćemo za metode nastale generalizacijom metode sekanti samo navesti rekurzivne formule pomoću kojih se dolazi do aproksimacije.

2 Newtonova metoda (metoda tangenti)

Pretpostavimo da smo odredili interval $I = [a, b]$ u kojem se nalazi jedinstvena nultočka funkcije f za koju vrijedi $f'(x) \neq 0, \forall x \in I$. Neka je $x_0 \in I$ početna aproksimacija. Koristeći razvoj funkcije f u Taylorov red u okolini točke x_0 (promatramo samo linearan član) funkciju f aproksimiramo linearnom funkcijom [1]

$$g(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0).$$

Umjesto rješavanja jednadžbe (1), rješavat ćemo jednadžbu $g(x) = 0$. Kako umjesto traženja sjecišta grafa funkcije f s osi x, tražimo sjecište tangente s osi x, ovu metodu zovemo metoda tangenti.
Kako je

$$g(x) = 0 \tag{2}$$

slijedi

$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) = 0.$$

Sređivanjem dobivamo

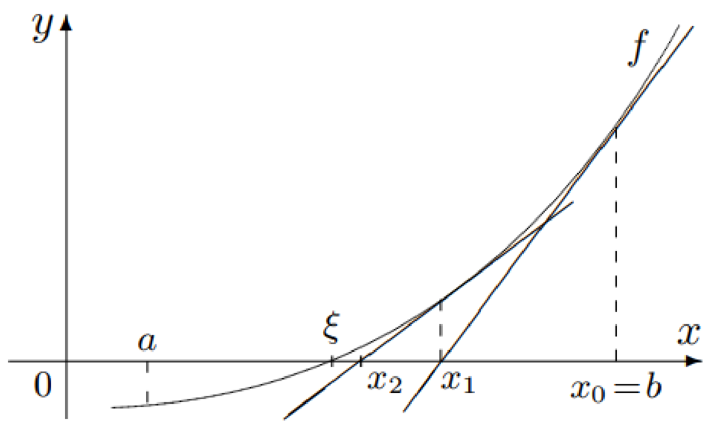
$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ukoliko označimo sa x_1 rješenje jednadžbe (2) imamo

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Ponavljajući gore navedeni postupak dobivamo niz $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ koji je zadan rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3}$$



Slika 1: Newtonova metoda tangenti

[1] Graf funkcije g je tangenta na graf funkcije f u točki $(x_0, f(x_0))$.

Napomena 2. *Primijetimo da u svakoj iteraciji konstruiramo lokalni aproksimand funkcije f i tražimo nultočku tog aproksimanda.*

Kako rješenje (1) tražimo iterativnom metodom postavlja se pitanje kada se taj proces zaustavlja. Neka je x_n aproksimacija nultočke ξ na intervalu I i neka je f derivabilna funkcija za koju je $|f'(x)| > 0, \forall x \in I$. Tada za ocjenu apsolutne pogreške vrijedi

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \qquad m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Ako prilikom traženja rješenja iterativnim postupkom zahtijevamo da apsolutna pogreška aproksimacije[2] x_n ne bude veća od unaprijed zadane vrijednosti $\epsilon > 0$ kao zaustavni kriterij može nam poslužiti izraz $\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \epsilon$.
Ponekad je teško odrediti konstantu m_1, pa onda umjesto zaustavnog kriterija $\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \epsilon$ koristimo

$$|x_n - x_{n-1}| < \alpha \quad i \quad |f(x_n)| < \beta,$$

gdje su α i β unaprijed zadani brojevi.

Definicija 1. *Neka niz (x_n), dobiven nekom iterativnom metodom, konvergira prema ξ i neka je $e_n = \xi - x_n$ pogreška n-te aproksimacije. Ako postoje dvije pozitivne konstante $A, r \in \mathbb{R}_+$ takve da vrijedi*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = A,$$

onda kažemo da metoda ima red konvergencije r (ili brzinu konvergencije r).

Za $r = 1$ kažemo da metoda ima linearnu brzinu konvergencije, a za $r = 2$ kvadratnu brzinu konvergencije. Iz Definicije 1 vidimo da će niz (x_n) konvergirati brže prema ξ za veći r. Isto tako vidimo da metoda ima red konvergencije r ako postoje $A \in \mathbb{R}_+$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq A|\xi - x_n|^r, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Teorem 1. *Neka funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ima neprekidnu drugu derivaciju na intervalu $I = [a, b]$. Neka je nadalje $f(a) \cdot f(b) < 0$, a prva i druga derivacija funkcije f na intervalu I imaju stalan predznak. Ako je $x_0 \in I$ izabran tako da je*

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0, \tag{4}$$

onda niz definiran s (3) konvergira prema jedinstvenom rješenju ξ jednadžbe $f(x) = 0$. Pri tome vrijedi ocjena pogreške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2, \tag{5}$$

gdje je

$$m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|, \qquad M_2 = \max_{x \in I} |f''(x)|,$$

a metoda ima kvadratnu brzinu konvergencije, odnosno vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2. \tag{6}$$

[2] Apsolutna vrijednost razlike stvarne vrijednosti i njezine aproksimacije.

Dokaz:
U dokazu ćemo razmotriti slučaj kada je $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ za sve $x \in I$. Ostali slučajevi se dokazuju analogno.
Najprije primijetimo da postoji jedinstveni $\xi \in I$ takav da je $f(\xi) = 0$ i izaberimo $x_0 \in I$ tako da je ispunjeno (4). Kako je po pretpostavci $f''(x_0) > 0$, onda je i $f(x_0) > 0$, pa je $x_0 > \xi$ jer je f rastuća funkcija.
Matematičkom indukcijom pokazat ćemo da je niz definiran s (3) monotono padajući i ograničen odozdo s ξ.

* Pretpostavimo da je $x_n > \xi$. Prema Taylorovoj formuli je

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (x - x_n) + \frac{1}{2} \cdot f''(c) \cdot (x - x_n)^2,$$

gdje je c između x i x_n. Specijalno, za $x = \xi$ imamo

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n) \cdot (\xi - x_n) + \frac{1}{2} \cdot f''(d) \cdot (\xi - x_n)^2,$$

gdje je d između ξ i x_n. Kako je $f''(d) > 0$ i $(\xi - x_n) \neq 0$ (jer je $x_n > \xi$), onda je

$$f(x_n) + f'(x_n) \cdot (\xi - x_n) < 0. \tag{7}$$

Iz (7) slijedi

$$\xi < x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Iskoristimo li formulu zadanu s (3) slijedi da je i $x_{n+1} > \xi$. Dakle, niz x_n je odozgo ograničen sa ξ.

* Kako je $x_n > \xi$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda zbog strogog monotonog rasta funkcije f mora biti $f(x_n) > f(\xi) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Osim toga, po pretpostavci je i $f'(x_n) > 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato iz (3) slijedi

$$x_n - x_{n+1} = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0,$$

tj. $x_n > x_{n+1}$ što znači da je niz (x_n) monotono padajući.

Kako je niz (x_n) ograničen odozdo i monotono padajući slijedi da je taj niz konvergentan i nalazi se u I, pa zbog toga postoji realan broj $\theta \in I$, takav da je $\theta = \lim_{n\to\infty} x_n$. Pustimo li sada $n \to \infty$ u (3) dobivamo

$$\theta = \theta - \frac{f(\theta)}{f'(\theta)}. \tag{8}$$

Budući da je $f'(\theta) > 0$ iz (8), slijedi $f(\theta) = 0$. Pošto je θ jedinstvena nultočka funkcije f na intervalu I, mora biti $\theta = \xi$.

Dokažimo sada ocjenu (5). Prema Taylorovoj formuli postoji realan broj ω između x_n i x_{n-1} za koji vrijedi

$$f(x_n) = f(x_{n-1}) + f'(x_{n-1}) \cdot (x_n - x_{n-1}) + \frac{1}{2} \cdot f''(\omega) \cdot (x_n - x_{n-1})^2.$$

Zbog (3) ostaje nam samo

$$f(x_n) = \frac{1}{2} \cdot f''(\omega) \cdot (x_n - x_{n-1})^2,$$

odakle slijedi

$$|f(x_n)| \leq \frac{M_2}{2}(x_n - x_{n-1})^2. \tag{9}$$

Kako je

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}$$

korištenjem (9) dobivamo ocjenu

$$|\xi - x_n| \leq \frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2.$$

Preostaje nam još dokazati (6), odnosno dokazati da metoda ima kvadratnu brzinu konvergencije. Prema Taylorovoj formuli postoji realan broj ω između x_n i ξ za koji vrijedi

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(\xi) \cdot (\xi - x_n) + \frac{1}{2} \cdot f''(\omega) \cdot (\xi - x_n)^2.$$

Podijelimo li prethodnu jednakost s $f'(x_n)$ dobivamo

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + \xi - x_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\omega)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2.$$

Iskoristimo li (3) dobivamo

$$x_{n+1} - \xi = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(\omega)}{f'(x_n)}(\xi - x_n)^2,$$

iz čega slijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq \frac{M_2}{2m_1}(\xi - x_n)^2.$$

□

Napomena 3. *Koristeći ocjenu (5) možemo izvesti kriterij koji osigurava da je $|\xi - x_n| < \epsilon$, gdje je ϵ unaprijed zadana točnost.*
Imamo

$$\frac{M_2}{2m_1}(x_n - x_{n-1})^2 \leq \epsilon,$$

odnosno

$$(x_n - x_{n-1})^2 \leq \frac{2\epsilon m_1}{M_2}.$$

Nakon korjenovanja prethodne nejednakosti dobivamo

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\epsilon m_1}{M_2}}.$$

Algoritam - Newtonova metoda tangenti

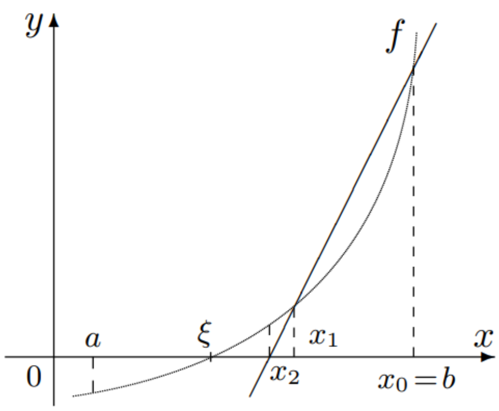
Input: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$;
Input: a, b, ϵ, m_1, M_2, IT;
Stavi $n = 0$
if $f(a) \cdot f''(a) > 0$ **then**
    $x_0 = a$
else
    $x_0 = b$
while do
    $n = n + 1$
    $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$
    $\Delta x_n = \frac{|f(x_n)|}{m_1}$
    Print(n, x_n, $f(x_n)$, Δx_n)
    $\Delta x_n > \epsilon$ & $n > IT$
    $x_{n-1} = x_n$
end while
Output: $\{x_n, n\}$

2.1 Modifikacije Newtonove metode

Računanje vrijednosti funkcije i njene derivacije u svakom koraku Newtonove metode ponekad otežava primjenu metode. Kako bi se smanjio broj operacija često se koriste modifikacije Newtonove metode u kojima se izbjegava računanje derivacije u svakoj iteraciji.

- **Metoda sekanti** je najvažnija modifikacija. Na intervalu $I = [a,b]$ izabiremo dvije početne aproksimacije x_0 i x_1 te povučemo seknatu grafa kroz točke $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1))$. Slijedeću aproksimaciju x_2 dobivamo kao sjecište sekante s osi x

$$x_2 = \frac{x_0 f(x_1) - x_1 f(x_0)}{f(x_1) - f(x_0)}, \qquad \text{ako je} \quad f(x_1) \neq f(x_0).$$



Slika 2: Metoda sekanti

Ponavljajući postupak dolazimo do niza definiranog rekurzivnom formulom

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, \qquad f(x_n) \neq f(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Ukoliko su početne aproksimacije x_0 i x_1 birane dovoljno blizu rješenja ξ, tada će niz iteracija x_n konvergirati prema ξ s brzinom konvergencije $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

◇ **Regula falsi** (metoda krivih položaja) je varijanta metode sekanti. Pretpostavimo da je funkcija f neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Označimo s $x_0 := a$ i $b_0 := b$ i povucimo pravac kroz točke $(x_0, f(x_0)), (b_0, f(b_0))$. Jednadžba pravca glasi

$$y - f(x_0) = \frac{f(b_0) - f(x_0)}{b_0 - x_0}(x - x_0).$$

Ako pravac siječe os x u točki c_1 $(x_0 < c_1 < b_0)$, onda je $y = 0$ te vrijedi

$$0 = \frac{f(b_0) - f(x_0)}{b_0 - x_0}(c_1 - x_0) + f(x_0).$$

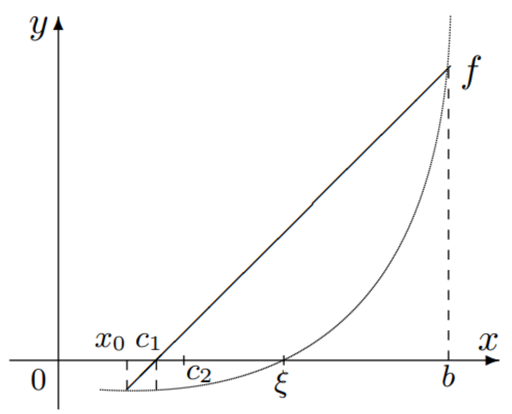
Rješavanjem prethodne jednakosti dobijemo da pravac siječe os x u točki

$$c_1 = \frac{x_0 f(b_0) - b_0 f(x_0)}{f(b_0) - f(x_0)}. \tag{10}$$

Ukoliko je $f(c_1) = 0$ nultočka je pronađena. U suprotnom,

$$\text{ako je } f(c_1) \cdot f(x_0) > 0, \quad \begin{array}{l} x_1 = c_1 \\ b_1 = b_0 \end{array} \quad \text{inače} \quad \begin{array}{l} x_1 = c_1 \\ b_1 = x_0 \end{array}$$

i povucimo pravac kroz točke $(x_1, f(x_1)), (b_1, f(b_1))$. Ponavljajući postupak dolazimo do niza (x_n) koji linearnom brzinom konvergira prema jednom korijenu jednadžbe $f(x) = 0$ na intervalu $[a, b]$.



Slika 3: Regula falsi

2.2 Primjeri

Primjer 1. ***(Newtonova metoda)***
Odredite pozitivnu nultočku funkcije $f(x) = e^{-x} + x^2 - 2$ *s točnošću* $\epsilon = 0.00005$.

Rješenje:
Sa slike (Slika 4b) vidimo da funkcija f ima dva rješenja. Jedno rješenje nalazi se na intervalu $I_1 = [-1, 0]$, a drugo na intervalu $I_2 = [1, 2]$. Kako trebamo odrediti pozitivnu nultočku fokusirat ćemo se na interval I_2. Kako je

$$f(1) = -0.63 \quad \text{i} \quad f(2) = 2.13$$

ispunjen je uvjet $f(a) \cdot f(b) < 0$ pa se nultočka nalazi u intervalu I_2.
Provjerimo sada imaju li prva i druga derivacija stalan predznak na intervalu I_2. Za svaki $x \in I_2$ vrijedi

$$f'(x) = -e^{-x} + 2x > 0 \quad \text{i} \quad f''(x) = e^{-x} + 2 > 0,$$

te možemo zaključiti kako prva i druga derivacija imaju stalan predznak.
Kako je $f(2) \cdot f''(2) > 0$ za početnu aproksimaciju uzimamo $x_0 = 2$. Sljedeće što je potrebno izačunati su

$$m_1 = \min_{x \in I_2} |f'(x)| \quad \text{i} \quad M_2 = \max_{x \in I_2} |f''(x)|.$$

Budući da je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in I_2$, f' je rastuća funkcija na I_2 (Slika 4c), te se minimum od f' postiže u lijevom rubu, odnosno

$$m_1 = f'(1) = 1.6.$$

Maksimum f'' postiže se u lijevom rubu jer je $f''' < 0$ i f'' pada (Slika 4d) pa imamo

$$M_2 = f''(1) = 2.4.$$

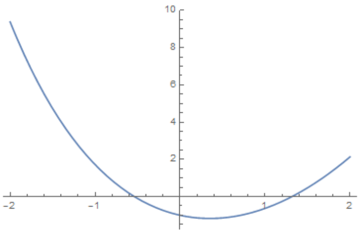
Sada za $n - tu$ aproksimaciju mora vrijediti

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \sqrt{\frac{2\epsilon m_1}{M_2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0.00005 \cdot 1.6}{2.4}} \approx 0.0081649.$$

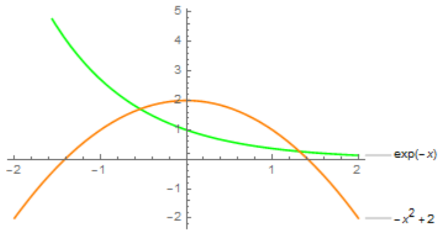
Aproksimaciju nultočke računamo koristeći (3) te dobivamo

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$	$f(x_n)$
0	2	-	2.135
1	1.4475	0.5524	0.3304
2	1.3233	0.1242	0.0173
3	1.316	0.0073	0.00006

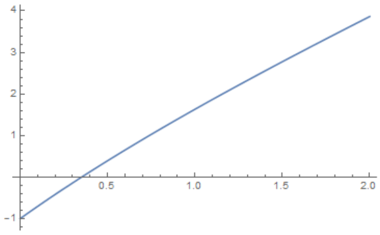
Tablica 1: Tijek iterativne metode



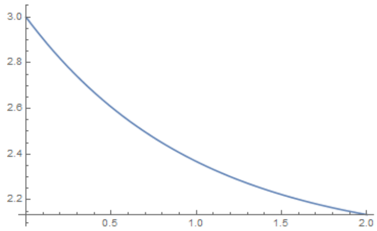
(a) Graf funkcije f



(b) Separacija intervala



(c) Prva derivacija



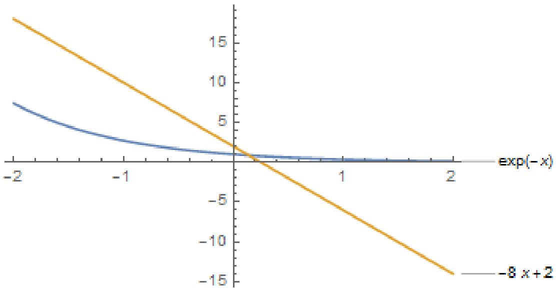
(d) Druga derivacija

Slika 4: Grafički prikaz

Kako je $|x_3 - x_2|$ manje od 0.0081649 zaustavljamo se te tražena nultočka iznosi $x_3 = 1.316$.

Primjer 2. ***(Metoda sekanti)***
S točnošću 0.0005 *odredite rješenje jednadžbe* $e^{-x} + 8x - 2 = 0$.

Rješenje:
Označimo s $f(x) = e^{-x} + 8x - 2$. Tada rješavamo $f(x) = 0$. Pogledamo li sjecište grafova (Slika 5) $y = e^{-x}$ i $y = -8x + 2$ te kako je $f(0) \cdot f(1) < 0$ možemo zaključiti da na intervalu $I = [0, 1]$ funkcija f ima rješenje.



Slika 5: Separacija intervala

Za početne aproksimacije uzimamo $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$. Koristeći rekurzivnu formulu

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1} f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \tag{11}$$

dobivamo

$$x_2 = \frac{0 \cdot f(1) - 1 \cdot f(0)}{f(1) - f(0)} = 0.1357.$$

Kako imamo zadanu točnost potrebno je izračunati m_1, odnosno $\min_{x \in I} |f'(x)|$. Prva derivacije postiže minimum za $x = 0$ pa imamo

$$m_1 = |f'(0)| = 7.$$

Koristeći (11) dobivamo vrijednosti navedene u sljedećoj tablici:

n	x_n	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m_1}$
0	0	-
1	1	-
2	0.1357	0.005899
3	0.14126	0.000236

Tablica 2: Tijek iterativne metode

Tražena aproksimacija nultočke iznosi $x_3 = 0.14126$.

Primjer 3. ***(Regula falsi)***
Riješite jednadžbu $x^3 - 2x - 2 = 0$ s točnošću $\epsilon = 0.0005$.

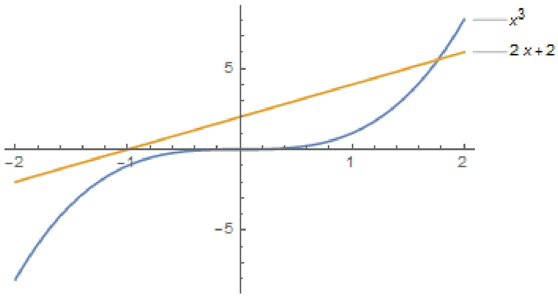
Rješenje:
Sa slike (Slika 6) vidimo da se nultočka nalazi na intervalu $[1, 2]$. Iako je $f(1) \cdot f(2) < 0$ možemo promatrati i uži interval. Kako je $f(\frac{3}{2}) \cdot f(2) < 0$ za interval uzimamo $I = [\frac{3}{2}, 2]$. Tada je $x_0 = \frac{3}{2}$ i $b_0 = 2$. Za zaustavni kriterij je potrebno izračunati m_1 i on u ovom slučaju iznosi

$$m_1 = \left| f'\left(\frac{3}{2}\right) \right| = 4.75.$$

Koristeći (10) dobivamo sljedeću tablicu, iz koje se vidi da je traženo rješenje $c_4 = 1.76914$.

n	x_n	b_n	c_{n+1}	$\text{sign} f(x_n)$	$\text{sign} f(b_n)$	$\text{sign} f(c_{n+1})$	$\frac{\lvert f(c_{n+1})\rvert}{m_1}$
0	$\frac{3}{2}$	2	1.72414	-	+	-	0.068
1	1.72414	2	1.76250	-	+	-	0.0105
2	1.76250	2	1.76829	-	+	-	0.0015
3	1.76829	2	1.76914	-	+	-	0.0002

Tablica 3: Tijek iterativne metode



Slika 6: Separacija intervala

3 Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Newtonova metoda koju smo opisali u prethodnom poglavlju može se generalizirati na rješavanje sustava $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, gdje je $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ neprekidna diferencijabilna funkcija.

Definicija 2. *Neka je* $\mathbf{F} = (f_1, \ldots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *neprekidna diferencijabilna funkcija i* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$*. Matricu*

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

nazivamo Jacobijeva matrica.

Za rješavanje sustava $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0$ izaberemo početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})^T$ te svaku funkciju $f_i, i = 1, 2, \ldots, n$ razvijemo u Taylorov red u okolini $\mathbf{x}^{(0)}$ (promatramo samo linearni član). Linearnu aproksimaciju funkcije f_i označimo s g_i te rješavamo sustav

$$g_i(\mathbf{x}) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

gdje je

$$g_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{x}^{(0)}) + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_k}(x_k - x_k^{(0)}), \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Prethodni izraz može se zapisati ovako:

$$\mathbf{J}^{(0)}\mathbf{s} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}), \tag{12}$$

gdje je

$$\mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^{(0)})}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{s} = \begin{bmatrix} x_1 - x_1^{(0)} \\ \vdots \\ x_n - x_n^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}^{(0)}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}^{(0)}) \end{bmatrix}.$$

Sljedeću aproksimaciju dobivamo kao

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)},$$

pri čemu je $\mathbf{s}^{(0)}$ rješenje sustava (12). Ponavljajući postupak dolazimo do

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdje $\mathbf{s}^{(k)}$ dobivamo rješavajući sustav

$$\mathbf{J}^{(k)}\mathbf{s} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}).$$

Napomena 4. *Pretpostavimo li da je Jacobijan* $\mathbf{J}^{(k)}$ *regularan, iterativni postupak možemo zapisati u obliku*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - \left(\mathbf{J}^{(k)}\right)^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

te možemo primijetiti da gore navedeni iterativni postupak podsjeća na Newtonov iterativni postupak (3)*.*

3.1 Kvazi - Newtonove metode

Kvazi - Newtonove metode nastale su kao generalizacija metoda sekanti, a uvedene su kako bismo aproksimirali Jacobijan pošto ga je jako skupo računati u svakoj iteraciji Newtonove metode.

(1) **Broydenova metoda**
Rješavamo sustav

$$\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{s} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

te sljedeću aproksimaciju računamo kao

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{s}^{(k)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Matrice $\mathbf{B}^{(k)}$ računamo pomoću rekurzivne formule

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} + \frac{(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{B}^{(k)}\mathbf{s}^{(k)})(\mathbf{s}^{(k)})^T}{(\mathbf{s}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdje je

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k+1)}) - \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \qquad \mathbf{s}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}.$$

(2) **Davidon-Fletchher-Powellova metoda**
Iterativna metoda zadana s

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{H}^{(k)}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdje je

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \mathbf{H}^{(k)} + \frac{\mathbf{s}^{(k)}(\mathbf{s}^{(k)})^T}{(\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)})} - \frac{\mathbf{H}^{(k)}\mathbf{y}^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)})^T\mathbf{H}^{(k)}}{(\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{H}^{(k)}\mathbf{y}^{(k)})}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

(3) **Broyden-Fletcher-Goldfarb-Schanoova metoda**
Iterativna metoda zadana s

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{H}^{(k)}\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)}), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

gdje se matrica $H^{(k)}$ računa kao

$$\mathbf{H}^{(k+1)} = \left(I - \frac{\mathbf{s}^{(k)}(\mathbf{y}^{(k)})^T}{(\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)})}\right)\mathbf{H}^{(k)}\left(I - \frac{\mathbf{y}^{(k)}(\mathbf{s}^{(k)})^T}{(\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)})} + \frac{\mathbf{s}^{(k)}(\mathbf{s}^{(k)})^T}{(\mathbf{y}^{(k)}, \mathbf{s}^{(k)})}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Primjer 4. *Koristeći Newtonovu metodu odredite prve dvije aproksimacije rješenja sustava:*

$$\begin{aligned} x_2(x_1 - 1) - 1 &= 0 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 &= 0 \end{aligned}$$

uz početnu aproksimaciju $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 0)^T$.

Rješenje:
Zapišemo li sustav u matričnom obliku imamo

$$\mathbf{F}(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} x_2(x_1 - 1) - 1 \\ x_1^2 - x_2^2 - 1 \end{bmatrix}.$$

Jacobijan sustava iznosi

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 - 1 \\ 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}.$$

Kako je početna aproksimacija $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 1)^T$, dobivamo

$$\mathbf{J}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

te rješavamo sustav

$$\mathbf{J}^{(0)}\mathbf{s} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Rješenje prethodnog sustava iznosi

$$\mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ 1 \end{bmatrix}$$

te za aproksimaciju dobivamo

$$\mathbf{x}^{(1)} = \mathbf{x}^{(0)} + \mathbf{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Sljedeću aproksimaciju računamo kao

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}^{(1)}$$

te je potrebno izračunati $\mathbf{s}^{(1)}$. Njega dobivamo kao rješenje sustava

$$\mathbf{J}^{(1)}\mathbf{s} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}),$$

gdje je

$$\mathbf{J}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{7}{16} \end{bmatrix}$$

pa imamo

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ \frac{5}{2} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{7}{16} \end{bmatrix},$$

odnosno

$$\mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{103}{168} \\ \frac{23}{42} \end{bmatrix}$$

te druga aproksimacija iznosi

$$\mathbf{x}^{(2)} = \mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.86 \\ 1.55 \end{bmatrix}.$$

Tražene apoksimacije iznose

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1.25 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 1.86 \\ 1.55 \end{bmatrix}.$$

Literatura

[1] M. Milinčević, Quasi - Newtonove metode, Završni rad, Odjel za matematiku, Osijek, 2016.

[2] G.V. Milovanović, NUMERIČKA ANALIZA, I. deo, Univerzitet u Nišu, Niš, 1979.

[3] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer, S. Singer, Numerička analiza, Predavanja i vježbe, PMF - Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2003., dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf`

[4] R. Scitovski, NUMERIČKA MATEMATIKA, Izmijenjeno i dopunjeno izdanje, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2015.

[5] `https://rudar.rgn.hr/~rrajic/nids_rajnarajic/predavanjaNM.pdf`