Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**David Runtić**

# Kromatski polinom

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**David Runtić**

# Kromatski polinom

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2020.

**Sažetak**

Ovaj završni rad bavi se kromatskim polinomom koji je nastao u pokušaju dokazivanja teorema o četiri boje. Definirat ćemo kromatski broj i kromatski polinom te navesti njihova osnovna svojstva. Navest ćemo i neke primjene kromatskog polinoma u svakodnevnom životu – pri izradi rasporeda sati i zagonetke sudoku.

**Ključne riječi:** bojenje grafa, kromatski polinom, sudoku, raspored sati

**Abstract**

This bachelor's thesis explores the concept of the chromatic polynomial which appeared in the attempt to prove the four color theorem. We will define chromatic number and chromatic polynomial and present their basic properties. We will demonstrate the application of the chromatic polynomial to creating class schedules and Sudoku puzzles.

**Key words:** graph coloring, chromatic polynomial, Sudoku, class schedule

# Sadržaj

# 1 Uvod

Kromatske polinome prvi je definirao George David Birkhoff 1912. godine dok je pokušavao riješiti problem četiri boje postavljen davne 1852. godine. Promatrajući zemljopisne karte kao planarne grafove, Birkhoff je pokušavao dokazati da se regije prikazane na proizvoljnoj karti mogu obojiti sa samo četiri boje, pri čemu susjedna područja nisu obojena istom bojom. Iako je njegov pokušaj bio bezuspješan, uočio je da broj načina na koje može obojiti takvu kartu koristeći najviše $k$ boja polinomno ovisi o $k$. Birkhoffovu definiciju kromatskog polinoma, koja je bila ograničena samo na planarne grafove, proširio je Hassler Whitney 1932. godine, tako da vrijedi za proizvoljne grafove. Whitneyev model značajno je utjecao na razvoj mnogih problema o bojenju grafova. Zahvaljujući njemu, kromatski polinomi postali su važan dio algebarske teorije grafova i još uvijek su predmet znanstvenog interesa. Kromatski polinom i njegove generalizacije primjenjuju se u statističkoj fizici, teoriji vjerojatnosti, topologiji, teoriji igara, ali i u svakodnevnom životu.

Osnovno svojstvo kromatskog polinoma nekog grafa je njegov rastav na kromatske polinome manjih grafova, što daje rekurzivni algoritam za njegovo računanje i eksplicitne formule za neke specijalne klase grafova. Koeficijenti i korijeni kromatskog polinoma snažno su povezani s raznim strukturnim svojstvima grafa [4]. Primjerice, cjelobrojni korijeni kromatskog polinoma odozgo su omeđeni najvećim stupnjem vrha u grafu, a algebarska kratnost korijena 0 jednaka je broju komponenata povezanosti grafa.

Postoje razni neriješeni problemi vezani uz kromatske polinome. Primjerice, koji su nužni i dovoljni uvjeti uz koje bi neki polinom bio kromatski polinom grafa? Koji su nužni i dovoljni uvjeti da dva neizomorfna grafa imaju iste kromatske polinome?

U sljedećem poglavlju navest ćemo najvažnije pojmove i tvrdnje iz moderne teorije grafova. Treće poglavlje bavi se kromatskim polinomom i njegovim osnovnim svojstvima. U tu svrhu najprije je definiran i objašnjen pojam kromatskog broja grafa, zatim su izvedeni kromatski polinomi nekih specijalnih vrsta grafova, a onda je iskazan i dokazan teorem o rekurzivnom računanju kromatskog polinoma. Kako je graf matematička struktura s brojnim primjenama, u posljednjem, četvrtom poglavlju pokazat ćemo dvije moderne primjene kromatskog polinoma – pri izradi zagonetke Sudoku i rasporeda sati.

# 2 Osnovni pojmovi i tvrdnje iz teorije grafova

Da bismo naveli i dokazali osnovne tvrdnje o kromatskom polinomu, potrebno je iznijeti odgovarajuću teorijsku podlogu o grafovima.

**Definicija 2.1** *Graf $G$ je uređena trojka $G = (V(G), E(G), \psi_G)$ nepraznog skupa $V(G)$ vrhova od $G$, skupa bridova $E(G)$, koji je disjunktan s $V(G)$ te funkcije incidencije $\psi_G$ koja svakom bridu od $G$ pridružuje neuređeni par vrhova od $G$.*

Radi jednostavnosti, umjesto oznake $\{v, w\}$, za brid koristimo oznaku $vw$ ili $wv$. Za dva vrha $v$ i $w$ kažemo da su *susjedni* ako postoji brid $vw$ koji ih povezuje. Još kažemo da su vrhovi $v$ i $w$ *incidentni* s bridom $vw$.

Neki brid može spajati vrh sa samim sobom. U tom slučaju govorimo o *petlji*. Također, neka dva različita vrha mogu biti spojena s više bridova. Tada govorimo o *višestrukim bridovima*. Grafovi koji sadrže petlje i višestruke bridove nazivaju se *pseudografovi*, a oni koji ne sadrže petlje ni višestruke bridove zovu se *jednostavni grafovi*. U ovome radu bavit ćemo se jednostavnim grafovima. Za jednostavne grafove vrijedi sljedeća definicija.

**Definicija 2.2** *Stupanj vrha $v$ u grafu $G$ je broj bridova incidentnih s vrhom $v$.*

Ukoliko u grafu postoji vrh stupnja nula, za njega kažemo da je *izolirani vrh*.
Navedimo neke jednostavne tipove grafova.

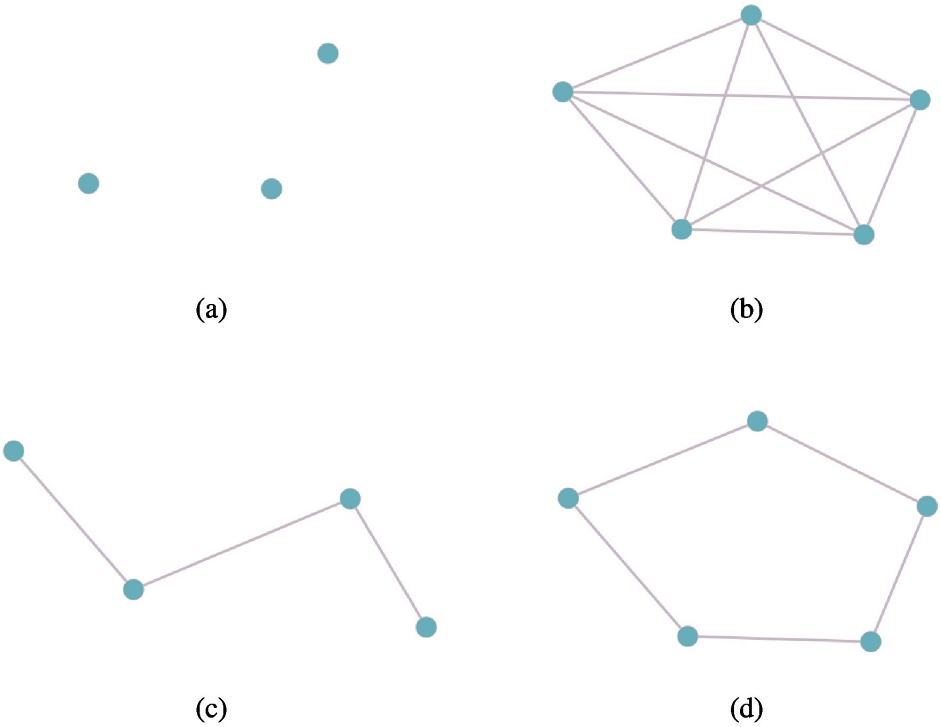
* *Prazan graf* je graf kojemu je $E(G)$ prazan skup.

* *Potpun graf* $K_n$ je jednostavan graf s $n$ vrhova kojemu je svaki par vrhova spojen bridom.

* *Put* $P_n$ je jednostavan graf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i bridovima $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$. Vrhove $v_1$ i $v_n$ zovemo krajevima puta $P_n$.

* *Ciklus* $C_n$ je jednostavan graf s vrhovima $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i bridovima $v_i v_{i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$ i $v_1 v_n$.

Neki primjeri ovih grafova prikazani su na slici 1.




Slika 1: (a) prazan graf s 4 vrha, (b) potpun graf $K_5$, (c) put $P_4$ i (d) ciklus $C_5$

Pri proučavanju pravilnog $k-$bojenja grafa, posebno su zanimljivi $k-$partitni grafovi. Slijedi njihova definicija.

**Definicija 2.3** *Neka je $k \geq 2$. Graf $G$ je $k-$partitan ako mu se skup vrhova $V(G)$ može particionirati u $k$ podskupova $V_1, V_2, \ldots, V_k$, pri čemu za svaki brid $e$ grafa $G$ postoje indeksi $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq j$, tako da $e$ ima jedan kraj u $V_i$, a drugi u $V_j$. Za $k = 2$ govorimo o bipartitnom, a za $k = 3$ o tripartitnom grafu.*

Primijetimo da definicija 2.3 ne implicira jedinstvenost broja $k$. To znači da za neke $k$ i $l$, $k \neq l$ postoji graf $G$ koji je istovremeno $k-$partitan i $l-$partitan. Često se u takvim slučajevima uzima najmanji $k$ za koji je $G$ $k-$partitan. Navedimo i definiciju podgrafa.

**Definicija 2.4** *Graf $H$ je podgraf od $G$, u oznaci $H \subseteq G$, ako je $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, a $\psi_H = \psi_G|_{E(H)}$ (tj. $\psi_H$ je restrikcija od $\psi_G$ na $E(H)$.*

**Definicija 2.5** *Graf $G$ je povezan ako su mu svaka dva vrha krajevi nekog puta u $G$. U suprotnom kažemo da je $G$ nepovezan.*

Nepovezan graf se sastoji od barem dva jedinstvena maksimalna povezana podgrafa koji se zovu *komponente povezanosti.* Maksimalan povezan podgraf grafa $G$ je podgraf koji je povezan, a dodavanjem najmanje jednog novog vrha iz $G$ prestaje biti povezan.

*Aciklički graf* je graf koji ne sadrži cikluse.

Spomenimo još stabla i šume.

* *Stablo* je povezan acikličan graf.
* *Šuma* je graf čije su komponente povezanosti stabla.

# 3 Kromatski broj i kromatski polinom

Zadan je jednostavan graf $G$ i prirodan broj $k$. Zanima nas je li moguće obojiti vrhove od $G$ koristeći $k$ različitih boja, pri čemu susjedni vrhovi nisu obojeni istom bojom. Je li moguće koristiti manje od $k$ boja? Ako je graf moguće pravilno obojiti s $k$ boja, na koliko načina to možemo ostvariti? Odgovore na ova pitanja daje kromatski broj i kromatski polinom.

## 3.1 Kromatski broj

Da bismo se bavili kromatskim polinomom, najprije trebamo razumjeti pojam pravilnog $k-$bojenja i pojam kromatskog broja grafa.

**Definicija 3.1** *Pravilno bojenje grafa $G$ je pridruživanje boja skupu $V(G)$ tako da je svakom vrhu pridružena točno jedna boja, a svaki par susjednih vrhova obojen je različitim bojama. Ako smo u takvom bojenju upotrijebili $k$ boja, onda govorimo o pravilnom $k-$bojenju.*

Za graf kažemo da je $k-$obojiv ako dopušta pravilno $k-$bojenje.

**Definicija 3.2** *Kromatski broj $\chi(G)$ grafa $G$ je najmanji broj različitih boja potrebnih za njegovo pravilno bojenje:*

$$\chi(G) = \min\{k \, : \, G \text{ je } k-\text{obojiv}\}.$$

Za graf čiji je kromatski broj jednak $k$ kažemo da je $k-$kromatski. Lako je uočiti da je $k-$kromatski graf $G$ ujedno i $l-$obojiv za svaki $l \geq k$.

Uočimo da graf koji sadrži petlje nije $k-$obojiv ni za jedan $k$. Nadalje, svako pravilno $k-$bojenje grafa $G$ koji sadrži višestruke bridove ujedno je i pravilno $k-$bojenje jednostavnog grafa $G'$ dobivenog iz grafa $G$ tako da je svaki višestruki brid zamijenjen jednostrukim. Ova razmatranja opravdavaju proučavanje pravilnog $k-$bojenja isključivo jednostavnih grafova.

Prazan graf je jedinstven $1-$obojiv graf. Graf je $2-$kromatski ako i samo ako je bipartitan. Nadalje, svaki $k-$partitan graf je $k-$obojiv. Štoviše, graf je $k-$partitan ako i samo ako je $k-$obojiv. Primijetimo da su skupovi koji čine $k-$particiju grafa $G$ jednobojni, tj. svi vrhovi unutar jednog skupa particije su obojeni istom bojom, s obzirom da unutar takvog skupa nema susjednih vrhova.

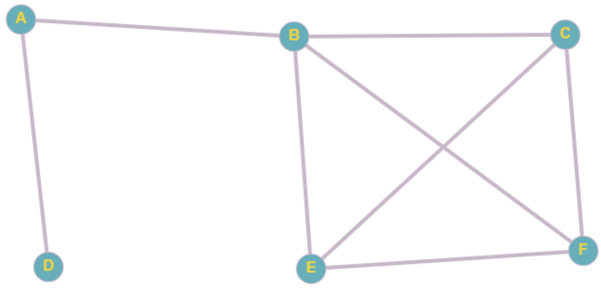
Lako je zaključiti da je svaki graf s $n$ vrhova $n-$obojiv pa je $\chi(G) \leq n$. No, takva gornja granica kromatskog broja nema veliki značaj jer je vrlo neprecizna. Određivanjem najmanje gornje granice kromatskog broja bavio se R.L. Brooks još 1941. godine. U nastavku ćemo navesti teorem koji nosi njegovo ime.

**Teorem 3.1 (Brooksov teorem)** *Neka je $G$ jednostavan povezan graf i neka je $\Delta$ najveći stupanj vrha u $G$. Tada je $\chi(G) \leq \Delta + 1$. Ako $G$ nije potpun graf ili neparan ciklus, tada je $\chi(G) \leq \Delta$.*

Dokaz Brooksova teorema se može provesti na više načina. Za svaki od njih potrebno je koristiti brojne pojmove i tvrdnje koji izlaze izvan okvira ovoga rada. Stoga ćemo uputiti čitatelja na [2].

**Definicija 3.3** *Za podskup $Cl(G)$ skupa vrhova $V(G)$ grafa $G$ kažemo da je klika ako je svaki par vrhova iz $Cl(G)$ spojen bridom.*

Često se klika $Cl(G)$ poistovjećuje s podgrafom grafa $G$ koji je potpun graf.
Postojanje klike u grafu pomaže u određivanju donje granice njegovog kromatskog broja. O tome govori sljedeći teorem.




Slika 2: Primjer klike $Cl_1$ s vrhovima B,C,E,F

**Teorem 3.2** *Neka je $G$ graf koji sadrži kliku s $k$ vrhova. Tada je potrebno barem $k$ boja za pravilno bojenje grafa $G$.*

**Dokaz**: Klika $Cl(G)$ je potpun podgraf od $G$ pa su svaka dva vrha iz $Cl(G)$ spojena bridom. Znamo da je kromatski broj potpunog grafa s $k$ vrhova jednak $k$. S obzirom da je $Cl(G)$ sadržan u $G$ kao podgraf, mora vrijediti $\chi(G) \geq \chi(Cl(G)) = k$ pa je $G$ $k-$obojiv. $\square$

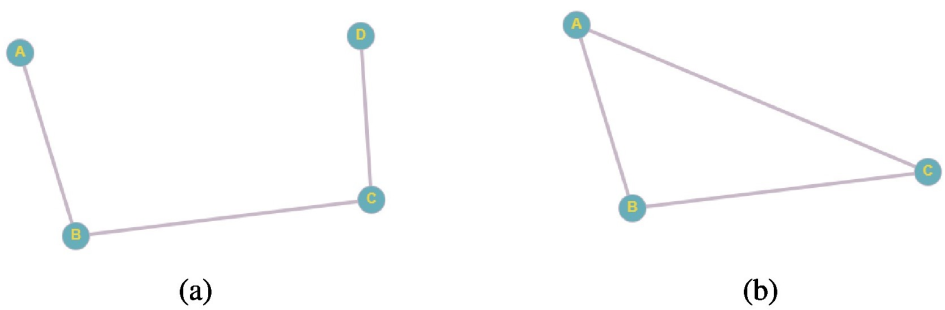
## 3.2 Kromatski polinom

Ako graf možemo pravilno obojiti s $k$ boja, na koliko načina je to moguće napraviti? Odgovor na ovo pitanje daje specijalna funkcija koju zovemo kromatski polinom. S obzirom da svojstvo polinomijalnosti nije trivijalno, najprije ćemo govoriti o kromatskoj funkciji, a potom pokazati da je kromatska funkcija ustvari polinom.

**Definicija 3.4** *Za graf $G$ i prirodan broj $k$ kromatska funkcija $P(G, k)$ je funkcija u varijabli $k$ koja računa broj različitih načina za pravilno $k-$bojenje grafa $G$.*

Iz definicije odmah slijedi da ako je $k < \chi(G)$, onda $P(G, k) = 0$. Za neke grafove kromatsku funkciju nije teško odrediti. Dovoljno je imati uvid u strukturu grafa i koristiti osnovne alate enumerativne kombinatorike. Slijedi primjer.

**Primjer 3.1** *Odredimo kromatsku funkciju grafova prikazanih na slici 3:*




Slika 3: (a) Put $P_4$ i (b) Ciklus $C_3$ ili potpun graf $K_3$

Odredimo najprije kromatsku funkciju od $P(P_4, k)$. Izaberemo jednu od $k$ boja i njome obojimo neki vrh, primjerice A. Ukupan broj načina na koji možemo obojiti vrh A jednak je $k$. Vrh B je susjed vrhu A pa ga ne možemo obojiti bojom koju smo upotrijebili za A. Stoga moramo uzeti neku drugu boju za B. Drugu boju možemo birati na $k-1$ načina. C je susjed vrhu B pa ga ne smijemo obojiti bojom koju smo uzeli za B, ali možemo uzeti boju iskorištenu za A. To znači da za bojenje vrha C imamo $k-1$ raspoloživih boja. C i D su susjedni vrhovi pa je opet jedini uvjet da za bojenje D ne koristimo boju kojom smo bojili C. Za bojenje vrha D imamo $k-1$ mogućnosti. Prema osnovnom principu prebrojavanja, ukupan broj načina da obojimo put $P_4$ jednak je $k(k-1)^3$ pa pišemo $P(P_4, k) = k(k-1)^3$.

Za bojenje ciklusa $C_3$ koristimo sličan pristup. Odaberemo neki vrh, primjerice A i obojimo ga s jednom od $k$ raspoloživih boja. S tom bojom ne možemo obojiti vrhove B i C jer su susjedi s A. No, vrhovi B i C su susjedni pa B možemo obojiti s jednom od preostalih $k-1$ boja, a C s nekom od preostalih $k-2$ boja. Slijedi $P(C_3, k) = k(k-1)(k-2)$.

**Propozicija 1**
*(i) Kromatska funkcija praznog grafa s n vrhova je G je* $P(G, k) = k^n$.
*(ii) Kromatska funkcija potpunog grafa* $K_n$ *je* $P(K_n, k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.

**Dokaz**:
$(i)$ U praznom grafu nema susjednih vrhova pa svaki njegov vrh možemo obojiti na $k$ načina. Kako imamo $n$ vrhova, slijedi $P(G, k) = k^n$.
$(ii)$ U potpunom grafu svaka dva vrha su spojena bridom. Ako izdvojimo jedan vrh $x \in V(K_n)$ i obojimo ga s jednom od $k$ boja, onda niti jedan od njegovih $n-1$ susjeda ne može biti obojen s tom bojom. Izaberemo jednog susjeda, recimo $y$ i obojimo ga s jednom od preostlih $k-1$ boja. S obzirom da $x$ i $y$ imaju sve susjede zajedničke, nekog susjeda od $y$ koji nije $x$ možemo obojiti s nekom od preostalih $k-2$ boja. Dakle, za svaki neobojeni vrh moramo uzeti novu boju. Slijedi $P(K_n, k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$. □

U praksi često imamo graf čija struktura nije jednostavna pa za određivanje kromatske funkcije ne možemo koristiti samo osnovne principe prebrojavanja. Zato su matematičari smislili način kako do kromatske funkcije doći rekurzivno. Prije nego predstavimo rekurziju, trebamo objasniti pojam kontrakcije brida u grafu.

*Kontrakcija brida* $e = uv$ u grafu $G$ je operacija nad $G$ kojom brišemo brid $e$, a njegove krajeve $u$ i $v$ identificiramo. Identifikaciju vrhova možemo protumačiti i kao njihovo sljepljivanje u jedan vrh.

**Teorem 3.3** *Neka je* $G$ *jednostavan graf te neka je* $G-e$ *graf dobiven iz* $G$ *brisanjem brida* $e$, *a* $G/e$ *graf dobiven iz* $G$ *kontrakcijom brida* $e$. *Tada vrijedi*

$$P(G, k) = P(G-e, k) - P(G/e, k). \tag{1}$$

**Dokaz**: Promotrimo $G-e$, gdje je $e = uv$. Pri proizvoljnom $k-$bojenju grafa $G-e$ imamo dva slučaja:
1° Vrhovi $u$ i $v$ obojeni su različitim bojama. Tada je $k-$bojenje od $G-e$ ujedno i $k-$bojenje od $G-e$.
2° Vrhovi $u$ i $v$ obojeni su istom bojom. Tada je $k-$bojenje od $G-e$ ujedno i $k-$bojenje od

$G/e$.
S obzirom da su ovi slučajevi međusobno isključivi, zaključujemo da se skup svih $k-$bojenja od $G-e$ može particionirati u dva podskupa obrazložena u slučajevima 1 i 2. Slijedi

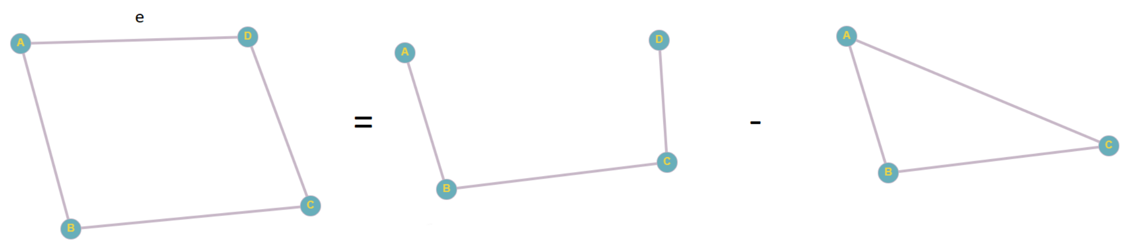
$$P(G-e,k) = P(G/e,k) + P(G,k),$$

odnosno

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G/e,k).$$

□

**Primjer 3.2** *Odredimo kromatsku funkciju ciklusa $C_4$ koristeći rekurziju (1).*




Slika 4: Određivanje $P(C_4,k)$ pomoću $P(P_4,k)$ i $P(C_3,k)$.

*Uklanjanjem proizvoljnog brida iz $C_4$ dobivamo put $P_4$, a kontrakcija poizvoljnog brida iz $C_4$ daje $C_3$. U primjeru 3.1 smo odredili kromatske funkcije od $P_4$ i $C_3$ pa ih samo treba uvrstiti u rekurziju (1). Imamo*

$$\begin{aligned} P(C_4,k) &= P(P_4,k) - P(C_3,k) \\ &= k(k-1)^3 - k(k-1)(k-2) \\ &= k(k-1)((k-1)^2 - (k-2)) \\ &= k^4 - 4k^3 + 6k^2 - 3k. \end{aligned}$$

Pokažimo da je kromatska funkcija polinom.

**Teorem 3.4** *Kromatska funkcija grafa $G$ je polinom.*

**Dokaz**: Prema teoremu 3.3, kromatsku funkciju grafa $G$ možemo rastaviti na sumu kromatskih funkcija dvaju manjih grafova. Graf $G-e$ je podgraf od $G$ s istim brojem vrhova, ali s bridom manje, dok $G/e$ nije podgraf od $G$, ali je graf s jednim vrhom i jednim bridom manje nego u $G$. Ako primijenimo rekurziju (1) na $G-e$ i $G/e$, opet ćemo doći u situaciju da računamo kromatske funkcije manjih grafova. Proces sukcesivnog uklanjanja i kontraktiranja bridova vodi do praznih grafova. Prema propoziciji 1 (i) kromatska funkcija praznog grafa s $n$ vrhova je $k^n$, što je polinom. Zbrajanjem takvih polinoma opet dobivamo polinom pa je kromatska funkcija polinom i zovemo ga *kromatski polinom.* □

Prilikom sukcesivnog korištenja rekurzije (1), a uz pažljiv izbor bridova za uklanjanje i kontraktiranje, često se dogodi da dobiveni, manji grafovi budu stabla ili ciklusi. Ako znamo kromatske polinome tih grafova, onda nije potrebno nastaviti s primjenom rekurzije pa se postupak traženja kromatskog polinoma početnog grafa može značajno skratiti.

**Teorem 3.5** *Kromatski polinom stabla $T_n$ s $n$ vrhova je*

$$P(T_n,k) = k(k-1)^{n-1}.$$

**Dokaz**: Koristimo metodu matematičke indukcije po broju $n$ vrhova stabla $T_n$.

*Baza*: Za $n = 2$ $T_2$ je put s dva vrha. Jedan vrh možemo obojiti na $k$ načina, a preostali, njemu susjedan, na $k-1$ načina. Zato imamo $P(T_2, k) = k(k-1)$ pa tvrdnja vrijedi.

*Pretpostavka*: Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sva stabla s $n-1$ vrhova, tj. vrijedi

$$P(T_{n-1}, k) = k(k-1)^{n-2}.$$

*Korak*: Neka je $T_n$ stablo s $n$ vrhova i neka je $e$ brid u $T_n$ čiji je jedan kraj vrh stupnja 1. Prema teoremu 3.3, kromatski polinom od $T_n$ možemo zapisati u obliku:

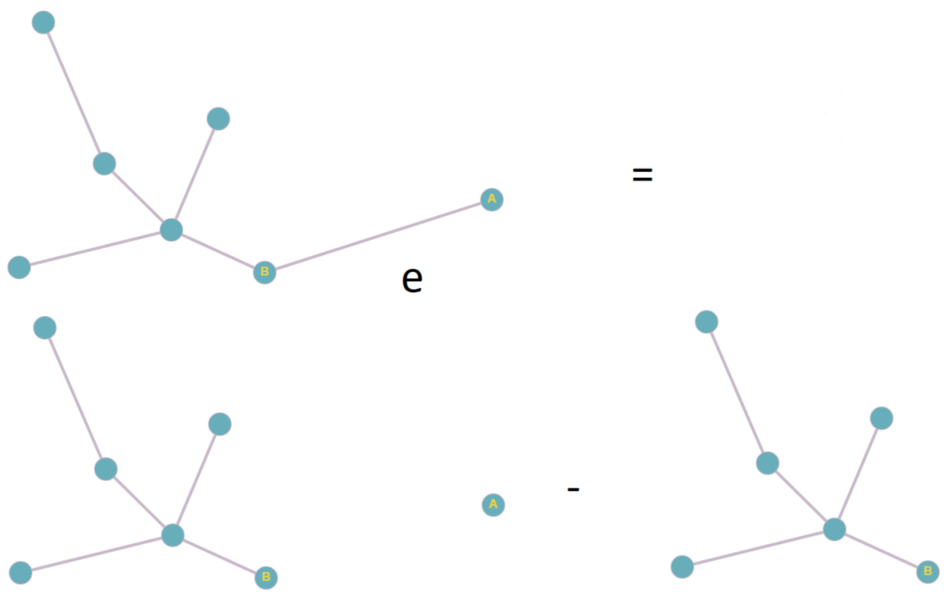
$$P(T_n, k) = P(T_n - e, k) - P(T_n/e, k). \tag{2}$$

Primijetimo da vrijedi $T_n/e = T_{n-1}$, dok je $T_n - e$ šuma s dvije komponente povezanosti. Jedna je $T_{n-1}$, a drugu čini jedan izolirani vrh. Pri $k-$bojenju grafa $T_n - e$, izolirani vrh možemo obojiti na $k$ načina, a neovisno o njemu, $T_{n-1}$ bojimo prema pretpostavci indukcije na $k(k-1)^{n-2}$ načina pa je $P(T_n - e, k) = kP(T_{n-1}, k)$. Uvrštavanjem u rekurziju (1) dobivamo:

$$\begin{aligned}
P(T_n, k) &= P(T_n - e, k) - P(T_n/e, k) \\
&= kP(T_{n-1}, k) - P(T_{n-1}, k) \\
&= (k-1)P(T_{n-1}, k) \\
&= (k-1)k(k-1)^{n-2} \\
&= k(k-1)^{n-1},
\end{aligned}$$

čime je dokaz završen. $\square$

Na slici 5 prikazani su primjeri grafova nastalih od stabla $T_n$ uklanjanjem i kontraktiranjem brida $e$.



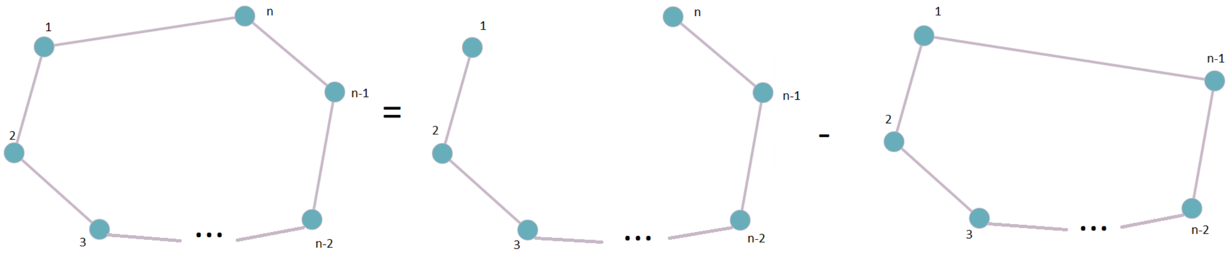

Slika 5: Stabla $T_7$ i $T_6$ te šuma s komponentama povezanosti $T_6$ i izoliranim vrhom $A$.

**Teorem 3.6** *Kromatski polinom ciklusa $C_n$ s $n$ vrhova je:*

$$P(C_n, k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1).$$

**Dokaz**: Primjenom teorema 3.3 imamo:

$$P(C_n, k) = P(C_n - e, k) - P(C_n/e, k).$$




Slika 6: Ciklus $C_n$ i grafovi $C_n - e$ i $C_n/e$

Primijetimo da za svaki $n \geq 2$ vrijedi $C_n - e = P_n$ i $C_n/e = C_{n-1}$. Ovdje treba istaknuti da je $C_2$ ciklus koji se satoji od dva vrha spojena dvostrukim bridom pa je $C_2 - e = P_2$. Nadalje, ciklus $C_1$ je graf koji se sastoji od jednog vrha i jedne petlje nad tim vrhom pa je $P(C_1, k) = 0$.

Pogledajmo slučajeve $n = 2, 3, 4$.

$$\begin{aligned}
P(C_2, k) =& P(P_2, k) - P(C_1, k) = P(P_2, k) - P(P_1, k) = P(P_2, k),\\
P(C_3, k) =& P(P_3, k) - P(C_2, k) = P(P_3, k) - P(P_2, k),\\
P(C_4, k) =& P(P_4, k) - P(C_3, k) = P(P_4, k) - P(P_3, k) + P(P_2, k).
\end{aligned}$$

Općenito, $P(C_n, k)$ je oblika:

$$P(C_n, k) = P(P_n, k) - P(P_{n-1}, k) + \cdots + (-1)^n P(P_2, k). \tag{3}$$

Budući da je svaki put ujedno i stablo kojemu je stupanj svakog vrha najviše dva, jednakost (3) možemo u skladu s prošlim teoremom zapisati ovako:

$$P(C_n, k) = k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + \cdots + (-1)^n k(k-1)$$

Primijetimo da je gornja formula geometrijski red s $n-1$ članova, pri čemu je prvi član $a = k(k-1)^{n-1}$, a kvocijent je $r = -(k-1)^{-1}$. Slijedi:

$$
\begin{aligned}
P(C_n,k) &= a\frac{1-r^{n-1}}{1-r} \\
&= \frac{k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-1}(-(k-1)^{-1})^{n-1}}{1+(k-1)^{-1}} \\
&= \frac{k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-1}\frac{(-1)^{n-1}}{(k-1)^{n-1}}}{1+(k-1)^{-1}} \\
&= \frac{k(k-1)^{n-1} + (-1)^n k}{1+(k-1)^{-1}} = \frac{k(k-1)^{n-1} + (-1)^n k}{\frac{k}{k-1}} \\
&= (k-1)^n + (-1)^n(k-1),
\end{aligned}
$$

pa je dokaz završen.

### 3.2.1 Osnovna svojstva

Kromatski polinom ima vrlo specifična svojstva. Njih ćemo navesti u sljedećem teoremu.

**Teorem 3.7** *Neka je*

$$P(G,k) = a_n k^n + a_{n-1}k^{n-1} + \cdots + a_0 \tag{4}$$

*kromatski polinom grafa G. Tada vrijedi:*

*(i) Stupanj kromatskog polinoma $P(G,k)$ jednak je $n$, pri čemu je $n$ broj vrhova grafa $G$.*

*(ii) Vodeći koeficijent kromatskog polinoma jednak je jedan: $a_n = 1$.*

*(iii) Slobodni koeficijent kromatskog polinoma jednak je nuli: $a_0 = 0$.*

*(iv) $a_{n-1} = -m$, gdje je $m$ broj bridova od $G$.*

*(v) Predznaci kromatskog polinoma alterniraju.*

**Dokaz**: Neka je $n$ broja vrhova, a $m$ broj bridova grafa $G$. Dokaze provodimo indukcijom po broju bridova.

(i),(ii),(iv) Pokažimo da je stupanj kromatskog polinoma jednak $n$ i da vrijedi $a_n = 1$, $a_{n-1} = -m$. Koristimo metodu matematičke indukcije po broju bridova $m$.

*Baza:* Neka je $m$ broj bridova, a $n$ broj vrhova grafa $G$. Za $m = 0$ graf $G$ je prazan, a znamo da je njegov kromatski polinom $P(G,k) = k^n$.

*Pretpostavka:* Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove koji imaju manje od $m$ bridova.

*Korak:* Neka je dan graf $G$ s $m$ bridova. Odaberimo proizvoljan brid iz $G$ i primijenimo teorem 3.3:

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G/e,k).$$

Grafovi $G - e$ i $G/e$ imaju $m - 1$ bridova, pri čemu $G/e$ ima $n - 1$ vrhova. Prema pretpostavci indukcije njihovi kromatski polinomi $P(G - e, k)$ i $P(G/e, k)$ su $n-$tog stupnja s vodećim koeficijentima jednakim 1. Pišemo:

$$\begin{aligned}
P(G_n,k) &= P(G-e,k) - P(G/e,k) \\
&= (k^n + b_{n-1}k^{n-1} + b_{n-2}k^{n-2} + \cdots + b_0) \\
&\quad - (k^{n-1} + c_{n-2}k^{n-2} + c_{n-3}k^{n-3} + c_0) \\
&= k^n + (b_{n-1} - 1)k^{n-1} + (b_{n-2} - c_{n-2})k^{n-2} + \cdots + (b_0 - c_0),
\end{aligned}$$

pa je polinom $P(G,k)$ zaista polinom $n-$tog stupnja čiji je vodeći član jednak 1. Prema pretpostavci indukcije imamo i $b_{n-1} = -(m-1)$ pa je $b_{n-1} - 1 = -(m-1) - 1 = -m$ pa smo dokazali i da je $a_{n-1} = -m$.

(iii) Znamo da je broj načina na koji možemo pravilno obojiti graf koristeći nula boja jednak nuli, tj. $P(G, 0) = 0$. Uvrštavanjem u (4) dobivamo $a_0 = 0$.

(v) Opet koristimo metodu matematičke indukcije po broju bridova $m$.

*Baza:* Graf s $m = 1$ bridova sastoji se od $n - 1$ komponenata povezanosti: imamo $n - 2$ izoliranih vrhova i put $P_2$. Slijedi da je kromatski polinom takvog grafa oblika $k^{n-2}k(k-1) = k^n - k^{n-1}$ pa je alternacija njegovih koeficijenata očita.

*Pretpostavka:* Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za sve grafove koji imaju manje od $m$ bridova.

*Korak:* Neka je dan graf $G$ s $m$ bridova. Opet koristimo teorem 3.3:

$$P(G, k) = P(G - e, k) - P(G/e, k)$$

da bismo iskoristili pretpostavku indukcije na grafove $G - e$ i $G/e$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} P(G - e, k) &= k^n - b_{n-1}k^{n-1} + b_{n-2}k^{k-2} - \cdots + (-1)^{n-1}b_1 k \\ P(G/e, k) &= k^{n-1} - c_{n-2}k^{n-2} + c_{n-3}k^{k-3} - \cdots + (-1)^{n-2}c_1 k. \end{aligned}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} P(G, k) &= P(G - e, k) - P(G/e, k) \\ &= k^n - b_{n-1}k^{n-1} + b_{n-2}k^{k-2} - \cdots + (-1)^{n-1}b_1 k \\ &\quad - (k^{n-1} - c_{n-2}k^{n-2} + c_{n-3}k^{k-3} - \cdots + (-1)^{n-2}c_1 k) \\ &= k^n - (b_{n-1} + 1)k^{n-1} + (b_{n-2} + c_{n-2})k^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}(b_1 + c_1). \end{aligned}$$

Vidimo kako predznaci zaista alterniraju pa je time tvrdnja dokazana. $\square$

# 4 Primjena kromatskog polinoma

## 4.1 Sudoku

Sudoku je logička zagonetka čije je osnove postavio švicarski matematičar Leonhard Euler još u 18. stoljeću kada je smislio Latinski kvadrat (Carré latin), koji se sastoji od $N \times N$ polja obilježenih s $N$ različitih simbola tako da se svaki simbol u svakom redu i svakom stupcu pojavljuje samo jednom.

Prvu objavu, koristeći koncept Latinskog kvadrata, imala je ova igrica u američkom časopisu Dell (Dell Math Puzzles & Logic Problems) 1979. godine, kada ju je Howard Garns u dobi od 74 godine nazvao "Number Place", odnosno "brojčano mjesto". Radilo se o kvadratnoj slagalici dimenzije $9 \times 9$ koja se sastojala od 9 manjih kvadrata dimenzije $3 \times 3$. Danas je takva slagalica poznata kao klasični sudoku. U Europi se u tim godinama igra nije proslavila, ali u Japanu jest. Japanci su joj dali naziv „Sudoku“, što je kratica od "Suuji wa dokushin ni kagiru" koja grubo prevedeno znači „brojevi moraju ostati jedinstveni“. Tek kasnije je sudoku postao popularan u Europi, najviše u Njemačkoj. Razvile su se brojne inačice sudokua (kao što je relativno nepoznati kružni sudoku ili takozvani „samurai sudoku“), a u Hrvatskoj se najčešće igra klasični sudoku. U njemu je već raspoređeno 2 do 5 brojeva. Što je više brojeva zadano, to je jednostavnije doći do rješenja. Cilj je igre popuniti sve prazne ćelije brojevima od 1 do 9 tako da se svaki broj u svakom stupcu (okomito), u svakom retku (vodoravno) i u svakom bloku ($3 \times 3$ ćelije) pojavljuje samo jednom.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 2 | 1 | | | | 4 | 7 |
| | | | | | | | | |
| | 5 | | 9 | | 8 | | 1 | |
| 8 | | 5 | | | 6 | | 2 | 3 |
| | 1 | 7 | | 8 | 9 | | | 5 |
| | 6 | | 5 | 2 | 7 | 1 | | |
| | 4 | | 6 | 5 | 2 | 9 | 7 | |
| 1 | 7 | | 8 | | | | | 6 |
| | 2 | 6 | 7 | 9 | 1 | 8 | 3 | |

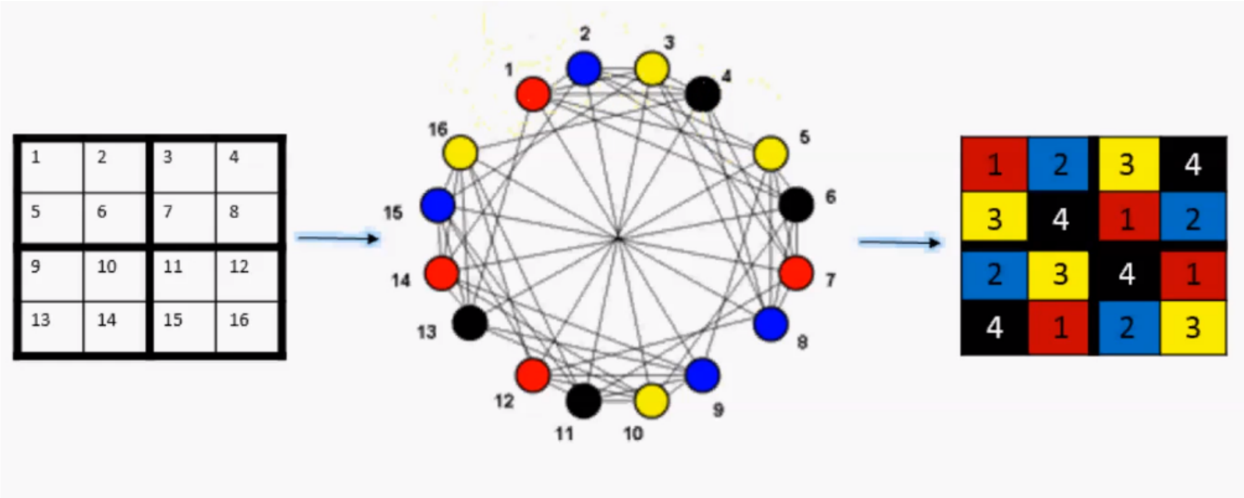
(a)

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 9 | 8 | 2 | 1 | 6 | 3 | 5 | 4 | 7 |
| 7 | 3 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 9 | 8 |
| 6 | 5 | 4 | 9 | 7 | 8 | 3 | 1 | 2 |
| 8 | 9 | 5 | 4 | 1 | 6 | 7 | 2 | 3 |
| 2 | 1 | 7 | 3 | 8 | 9 | 4 | 6 | 5 |
| 4 | 6 | 3 | 5 | 2 | 7 | 1 | 8 | 9 |
| 3 | 4 | 8 | 6 | 5 | 2 | 9 | 7 | 1 |
| 1 | 7 | 9 | 8 | 3 | 4 | 2 | 5 | 6 |
| 5 | 2 | 6 | 7 | 9 | 1 | 8 | 3 | 4 |

(b)

Slika 7: (a) Primjer zagonetke i (b) rješenje primjera

Problem egzistencije rješenja klasičnog sudokua može se postaviti kao problem bojenja grafa (pogledati [3, 5]). Ideja je napraviti graf s 81 vrhova tako da svaki vrh predstavlja jedno polje ploče. Svaki vrh mora biti spojen bridom s vrhom koji je u istom retku, stupcu ili podploči. Označimo takav graf sa $Sud(3)$. Ukoliko promatramo opći sudoku s pločom dimenzije $n^2 \times n^2$ i pridružimo mu graf $Sud(n)$, onda je rješavanje sudoku zagonetke ekvivalentno pravilnom bojenju grafa $Sud(n)$. Sudoku zagonetka će imati rješenje ako i samo ako postoji pravilno bojenje grafa $Sud(n)$ pomoću $n^2$ različitih boja, to jest, ako je $P(Sud(n), n^2) \geq 1$.



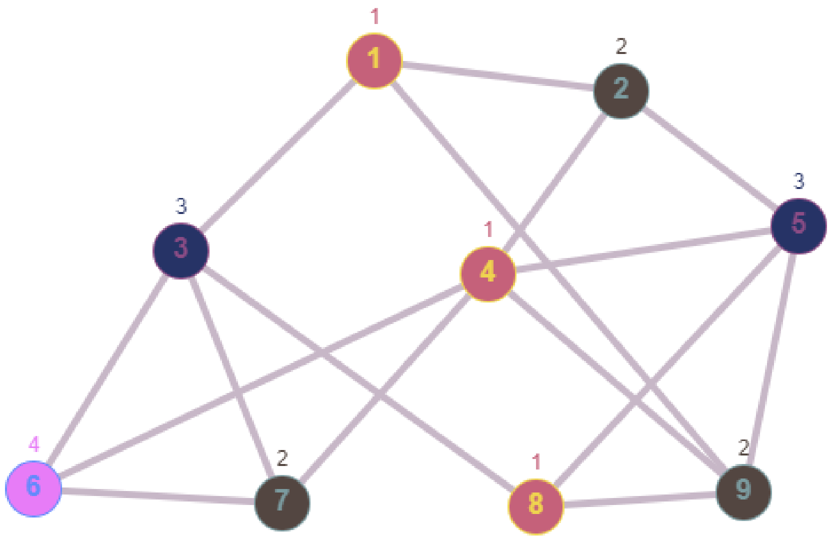

Slika 8: Sudoku ploča dimenzije $4 \times 4$ s pridruženim grafom $Sud(2)$ pravilno obojenim pomoću 4 boje te rješenje sudoku igre u kojemu svaka boja odgovara jednom broju.

## 4.2 Izrada rasporeda sati

Pretpostavimo da imamo popis od $n$ predmeta na fakultetu. Neki se predmeti ne mogu održavati u istom terminu jer ih slušaju isti studenti. Dakle, potrebno je sastaviti popis parova predmeta čiji se termini ne smiju podudarati. Konstruirajmo graf $G$ čiji su vrhovi predmeti, a dva vrha su spojena bridom ako i samo ako se predmeti ne smiju održavati u istom terminu. Pretpostavimo da postoji $k$ termina u tjednu kada se predmeti mogu održavati. Ukoliko graf $G$ možemo pravilno $k-$obojiti, odnosno ako je $P(G, k) > 0$, tada postoji raspored koji zadovoljava zadane uvjete.

**Primjer 4.1** *Izrada rasporeda sati u četiri termina tako da se predmeti u tablici ne podudaraju.*

| *Naziv predmeta:* | *Ne smije se podudarati s:* |
|---|---|
| *1. Elementarna matematika* | *2,3,9* |
| *2. Diferencijalni račun* | *1,4,5* |
| *3. Linearna algebra* | *1,6,8* |
| *4. Uvod u programiranje* | *2,5,6,7,9* |
| *5. Fizika I* | *2,4,8,9* |
| *6. Tjelesna i zdravstevna kultura* | *3,4,7* |
| *7. Objektno orijentirano programiranje* | *3,4,6* |
| *8. Strojno učenje* | *3,5* |
| *9. Integralni račun* | *1,4,5,8* |




Slika 9: Graf predmeta uz dane uvjete

| *Popis termina* | *Popis predmeta* |
|---|---|
| *1. Termin* | *1,4,8* |
| *2. Termin* | *2,7,9* |
| *3. Termin* | *3,5* |
| *4. Termin* | *6* |

# 5 Zaključak

Kromatski polinom jedan je od ključnih pojmova u teoriji grafova. Premda se znanstvenici njime bave više od stoljeća, on je još uvijek aktualan i podložan redefiniranju. Razni otvoreni problemi tiču se kromatskog polinoma. Primjerice, još uvijek se ne zna koji su nužni i dovoljni uvjeti uz koje bi neki polinom bio kromatski. Kromatski polinom je imao značajnu ulogu u dokazivanju teorema o četiri boje. Računanje kromatskog polinoma grafa komplicirano je čak i za slučaj tri boje.
Na primjeru izrade rasporeda sati i igre sudoku vidljivo je da je koncept kromatskog polinoma suvremen i primjenjiv u svakodnevnom životu.

# Literatura


[1] B. Cherowitzo, *Lectures: Chromatic Polynomials, University of Colorado at Denver*, 2013. http://www-math.ucdenver.edu/~wcherowi/courses/m4408/m4408f.html

[2] D.W. Cranston, L. Rabern, *Brooks' Theorem and Beyond*, Journal of Graph Theory, Vol. 80, No. 3 (2014), 1-25. https://arxiv.org/pdf/1403.0479.pdf

[3] M. Herzberg, M. R. Murty, *Sudoku Squares and Chromatic Polynomials*, Notices of the AMS, Vol. 54 No. 6 (2007), 708-717. https://www.ams.org/notices/200706/tx070600708p.pdf

[4] T. Hubai, *The Chromatic Polynomial*, magistarski rad. Eötvös Loránd University, 2009. https://web.cs.elte.hu/blobs/diplomamunkak/mat/2009/hubai_tamas.pdf

[5] J. Y. C. Leung, W. S. Lui, *The Application of Graph Theory to Sudoku*, Hang Lung Mathematics Awards, Vol. 6 (2014), 321-349.

[6] R. Lewis, *Applications of Graph Colouring* YouTube video, 2015. http://www.youtube.com/watch?v=y4RAYQjKb5Y

[7] R. Read, *An Introduction to Chromatic Polynomials*, Journal of combinatorial theory, Vol. 4 (1968), 52-71.

[8] J. Rehlicki, *Kromatski polinomi i njihovi korijeni*, diplomski rad. Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, 2016. http://repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf%3A5444/datastream/PDF/view

[9] D. White, *Math 4707: Chromatic Polynomials*, 2010, https://www.whitman.edu/Documents/Academics/Mathematics/fouts.pdf

[10] J. Zhang, *An Introduction to Chromatic Polynomials*, An Introduction to Chromatic Polynomials, 2018. https://math.mit.edu/~apost/courses/18.204_2018/Julie_Zhang_paper.pdf