Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Dražen Šokčević
Stabilizabilnost LTI sustava
Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Dražen Šokčević

Stabilizabilnost LTI sustava

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom završnom radu bavimo se temom stabilizabilosti linearnih vremenski invarijantnih sustava. U početku rada definirat ćemo linearan vremenski invarijantan sustav te dokazati teorem za rješenje sustava. Definirat ćemo matričnu eksponencijalnu funkciju i navesti neka njezina svojstva koja se koriste za rješenje sustava. Obradit ćemo svojstva stabilnosti i upravljivosti sustava i dokazati teoreme koji se koriste za njihovu provjeru te ih na primjerima demonstrirati. Definirat ćemo pojam stabilizabilnosti sustava i povezati ga sa svojstvima stabilnosti i upravljivosti. Modelirat ćemo sustav koji opisuje dvostruko obrnuto njihalo na kolicima. Navedeni sustav ćemo stabilizirati na dva pristupa: koristeći Ackermannovu formulu te Ljapunovljevu jednadžbu, a usporedbu stabilizacije ćemo ilustrirati na numeričkom primjeru.

Ključne riječi: linearni vremenski invarijantan sustav, matrična eksponencijalna funkcija, stabilnost, upravljivost, stabilizabilnost, dvostruko obrnuto njihalo na kolicima

Abstract

In this final paper we deal with the subject of stabilizability of linear time invariant systems. At the beginning of the paper, we will define a linear time invariant system and prove a theorem for the solution of the system. We will define a matrix exponential function and list some of its properties that are used to solve the system. We will study the properties of stability and controllability for linear time invariant system and prove the theorems used to check them. Considered properties will be illustrated on examples. Furthermore we will define stabilizability for system and relate it to the properties of stability and controllability. We will model a system describing a double inverted pendulum mounted on a cart. This system will be stabilized with two approaches: using Ackermann's formula and Lyapunov equation. On numerical example we will illustrate comparison of these two stabilization approaches.

Key words: linear time invariant system, matrix exponential function, stability, controllability, stabilizability, double inverted pendulum mounted on a cart

Sadržaj

1 Uvod

Linearne vremenski invarijantne sustave koristimo za modeliranje fizikalnih sustava tako da možemo promatrati kako se stanje sustava mijenja prolaskom vremena i našim upravljanjem. Modeliramo ih koristeći fizikalne zakone. Možemo ih koristiti za modeliranje robota, satelita, strujnih krugova i drugih fizikalnih modela. Modele koji nisu linearni možemo aproksimirati modelom linearno vremenski invarijantnog sustava oko nekog stanja. Sustavi mogu biti kontinuirani ili diskretni. U ovom radu bavit ćemo se kontinuiranim sustavima. Svaki sustav je zadan s dvije jednadžbe, početnim stanjem sustava i konstantnim parametrima sustava. Bitno svojstvo sustava je stabilnost koja osigurava da će svako stanje sustava težiti u nulu kako vrijeme teži u beskonačno, odnosno utjecaj početnog stanja sustava će nestati i sustav će doći u ravnotežni položaj neovisno o početnom stanju sustava. Stabilizabilnost sustava nam osigurava da možemo odrediti upravljanje kojim možemo stabilizirati susatav koji nije stabilan odnosno da možemo utjecati na sustav tako da ga dovedemo u ravnotežni položaj. Kod stabilizacije sustava možemo promatrati koliko energije i vremena je potrebno za stabilizaciju sustava nekom metodom i onda odabrati optimalnu stabilizaciju tako da minimiziramo vrijeme ili energiju.

2 Svojstva LTI sustava

2.1 Rješenje LTI sustava

U ovom poglavlju definirat ćemo linearni vremenski invarijantni sustav i matričnu eksponencijalnu funkciju koja se koristi za rješenje sustava. Nakon toga ćemo dokazati teorem koji daje formulu za rješenje sustava u bilo kojem trenutku.

Definicija 2.1.1 Linearni vremenski invarijantni (LTI) sustav definiran je s dvije jednadžbe

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, y \in \mathbb{R}^m \text{ (LTI)}$$

pri čemu je $u(t) : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^k$ ulaz, $x(t) : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^n$ stanje, $y(t) : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^m$ izlaz, a $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times k}, C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ i $D \in \mathbb{R}^{m\times k}$ su matrice sustava. U slučaju kada je ulaz skalar ($k = 1$) sustav zovemo single-input, a u suprotnom kažemo da je sustav multi-input. Kada je y skalar ($m = 1$) onda sustav zovemo single-output, a u suprotnom kažemo da je sustav multi-output.

Definirajmo matričnu eksponencijalnu funkcija koja se koristi za rješenje sustava i navedimo neka njena svojstva koja koristimo u dokazu teorema za rješenje sustava.

Definicija 2.1.2 Neka je A realna kvadratna matrica dimenzije $n \times n$. Za matricu A definiramo matričnu eksponencijalnu funkciju

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Lema 2.1.3 *Za matričnu eksponencijalnu funkciju vrijede sljedeća svojstva:*

i) $e^0 = I$.

ii) $\left(e^{At}\right)' = e^{At}A = Ae^{At}$.

iii) $e^A e^B = e^{A+B}$ *akko* $AB = BA$.

iv) $e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A}$.

v) Za regularnu matricu P *vrijedi* $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$.

Dokaz leme i primjere izračunavanja matrične eksponencijalne funkcije mogu se pronaći u [7]. Uvodimo lemu koju ćemo primijeniti u dokazivanju stabilnosti sustava.

Lema 2.1.4 *Za svaku kvadratnu matricu* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *postoji* n *skalarnih funkcija* $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$, ..., $\alpha_{n-1}(t)$ *takvih da*

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)A^i, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lema je posljedica Cayley-Hamilton teorema i njezin dokaz može se pogledati u [1]. Sljedeći teorem nam daje formulu za rješenje LTI sustava u kojem se koristi matrična eksponencijalna funkcija.

Teorem 2.1.5 *Rješenje LTI sustava uz početno vrijeme* $t_0 \geq 0$ *i početno stanje* $x(t_0) = x_0$ *dano je sa*

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

Dokaz. Množenjem lijeve i desne strane prve jednadžbe iz definicije 2.1.1 sa $e^{-A(t-t_0)}$ uz korištenje svojstava iz leme 2.1.3 dobivamo

$$e^{-A(t-t_0)}\dot{x}(t) = e^{-A(t-t_0)}Ax(t) + e^{-A(t-t_0)}Bu(t)$$

$$e^{-A(t-t_0)}\dot{x}(t) - e^{-A(t-t_0)}Ax(t) = e^{-A(t-t_0)}Bu(t)$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-A(t-t_0)}x(t)\right) = e^{-A(t-t_0)}Bu(t).$$

Integriranjem obje strane dobivamo

$$\int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau}\left(e^{-A(\tau-t_0)}x(\tau)\right)d\tau = \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau)d\tau$$

$$e^{A(t-t_0)} \cdot \Big/ \; e^{-A(t-t_0)}x(t) - x_0 = \int_{t_0}^{t} e^{-A(\tau-t_0)}Bu(\tau)d\tau$$

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza za $x(t)$ u drugu jednadžbu dobivamo

$$y(t) = Ce^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t} Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau + Du(t).$$

Pokažimo na primjeru jednog sustava kako možemo odrediti eksplicitnu formulu. Neka je sustav dan sa

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 5x(t) + 3u(t) \\ y(t) = 4x(t) - 7u(t) \end{cases}$$

uz početno vrijeme $t_0 = 0$ i početno stanje $x_0 = 2$ s konstantnim upravljenjem $u(t) = 10$. Odredimo funkciju koja modelira stanje sustava u proizvoljnom vremenu

$$x(t) = e^{5t}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{5(t-\tau)}30d\tau$$

$$x(t) = 2e^{5t} + 30e^{5t}\int_{0}^{t} e^{-5\tau}d\tau$$

$$x(t) = 2e^{5t} + 30e^{5t}\left(-\frac{e^{-5t}}{5}\right)\Bigg|_0^t$$
$$x(t) = 2e^{5t} - 6 + 6e^{5t}$$
$$x(t) = 8e^{5t} - 6.$$

Uvrštavanjem izraza u formulu za izlaz dobivamo

$$y(t) = 32e^{5t} - 24 - 70$$

$$y(t) = 32e^{5t} - 94.$$

Za sustave koji imaju matricu A dimenzije $n \times n$ matrična eksponencijalna funkcija e^{At} određuje se na sljedeći način. Ako je matrica A dijagonalna onda je matrična eksponencijalna funkcija jednaka dijagonalnoj matrici $\text{diag}(e^{\lambda_1}, e^{\lambda_2}, ..., e^{\lambda_n})$, kada matrica nije dijagonalna, ali je dijagonalizabilna onda je potrebno dijagonalizirati matricu. U općenitom slučaju kada matrica nije dijagonalizabilna, onda je potrebno odrediti Jordanovu formu matrice. Više detalja o rješenju sustava može se pogledati u [4].

2.2 Stabilnost sustava

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam asimptotske i eksponencijalne stabilnosti sustava. U nastavku rada za sustave koji su asimptotski stabilni reći ćemo da su stabilni. Želimo znati kako se stanje sustava mijenja kada $t \to \infty$. Zanima nas hoće li sustav doći u ravnotežni položaj, koji je postavljen u ishodištu, neovisno o početnom stanju sustava. Stabilnost sustava ovisi samo o matrici A pa je za provjeru dovoljno promatrati homogeni sustav $\dot{x} = Ax$. Kod homogenog sustava matrice B,C i D su nul matrice.

Definicija 2.2.1 Za LTI sustav kažemo da je

i) Asimptotski stabilan ukoliko za svaki početni uvjet $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ vrijedi da $x(t) \to 0$ kako $t \to \infty$.

ii) Eksponencijalno stabilan ukoliko postoje konstante $c, \lambda > 0$ takve da za svaki početni uvjet $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\|x(t)\| \leq ce^{\lambda(t-t_0)}\|x(t_0)\|, \quad \forall t_0 \geq 0.$$

iii) Nestabilan ukoliko nije asimptotski stabilan.

Definirajmo pomoćnu lemu koja nam je potrebna za dokazivanje teorema koji daje karakterizaciju stabilnosti sustava.

Lema 2.2.2 *Neka je $v(t)$ skalarna funkcija takva da je $\dot{v} \leq \mu v(t), \forall t \geq t_0$, za neki $\mu \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi $v(t) \leq e^{\mu(t-t_0)}v(t_0)$.*

Dokaz leme 2.2.2 može se pogledati u [5].

Teorem 2.2.3 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne za LTI sustav*

i) *Sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realan dio.*

ii) *Sustav je asimptotski stabilan.*

iii) *Sustav je eksponencijalno stabilan.*

iv) *Za svaku pozitivno definitnu matricu Q postoji jedinstvena simetrična pozitivno definitna matrica P koja zadovoljava Ljapunovljevu jednadžbu*

$$A^T P + PA = -Q. \tag{$**$}$$

v) *Postoji simetrična pozitivno definitna matrica P za koju vrijedi Ljapunovljevu nejednakost*

$$A^T P + PA < 0.$$

Dokaz. Asimptotska i eksponencijalna stabilnost su ekvivalentni pojmovi za LTI sustave. Više detalja o ekvivalenciji mogu se pogledati u [1]. Kako su ti pojmovi ekvivalentni znamo da *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)*.
Pokažimo ekvivalenciju *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)*. Dokažimo prvo da *i)* $\Rightarrow$ *ii)*, pretpostavimo da vrijedi *i)* odnosno da sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realan dio. Korištenjem svojstava matrične eksponencijalne funkcije i određivanjem Jordanove forme matrice A može se pokazati da onda $e^{At} \to 0$ kako $t \to \infty$ pa onda i $x(t) = e^{At}x_0 \to 0$ kako $t \to \infty$ što je po definicji 2.2.1 stabilan sustav. Za ekvivalenciju preostaje pokazati da *ii)* $\Rightarrow$ *i)*. Dokaz provodimo kontrapozicijom, odnosno trebamo pokazati da $\neg i) \Rightarrow \neg ii)$. Pretpostavimo da ne vrijedi *i)* odnosno postoji svojstvena vrijednost matrice A koja je pozitivna, tada $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) \neq 0$ time smo preko definicije 2.2.1 pokazali da takav sustav nije stabilan i dokazali ekvivalenciju *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)*. Iz ekvivalencija *i)* $\Leftrightarrow$ *ii)* i *ii)* $\Leftrightarrow$ *iii)* slijedi *i)* $\Leftrightarrow$ *iii)*.
Preostaje pokazati ekvivalencije za *iii)*, *iv)* i *v)* tvrdnju teorema. Za dokazivanje ekvivalencije *iii)* $\Leftrightarrow$ *iv)* i *iii)* $\Leftrightarrow$ *v)* dovoljno je dokazati da *iii)* $\Rightarrow$ *iv)*, *iv)* $\Rightarrow$ *v)* i *v)* $\Rightarrow$ *iii)*.
Dokažimo da *iii)* $\Rightarrow$ *iv)*, pretpostavimo da je sustav eksponencijalno stabilan. Pokažimo da ako vrijedi *iii)*, pa je i po *i)* $\Leftrightarrow$ *iii)* matrica A stabilna, onda je prema [1] jedinstvena pozitivno definitna matrica P koja zadovoljava Ljapunovljevu jednadžbu dana izazom

$$P = \int_0^\infty e^{A^T t} Q e^{At} dt.$$

Nepravi integral je konačan, to je posljedica pretpostavke da je sustav eksponencijalno stabilan koja osigurava da $\left\| e^{A^T t} Q e^{At} \right\|$ konvergira prema nuli eksponencijalna brzo kada $t \to \infty$ što za posljedicu ima apsolutnu konvergenciju integrala. Pokažimo da P rješava Ljapunovljevu jednadžbu $(**)$

$$A^T P + PA = \int_0^\infty A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A dt$$

$$\text{budući da je } \frac{d}{dt}\left(e^{A^T t} Q e^{At}\right) = A^T e^{A^T t} Q e^{At} + e^{A^T t} Q e^{At} A$$

uz korištenje $\lim\limits_{t\to\infty} e^{At} = 0$ dobivamo

$$A^TP + PA = \int_0^\infty \frac{d}{dt}\left(e^{A^Tt}Qe^{At}\right)dt = \left(\lim_{t\to\infty} e^{A^Tt}Qe^{At}\right) - e^{A^T0}Qe^{A0} = -Q.$$

Pokažimo da je matrica P simetrična korištenjem $Q^T = Q$

$$P^T = \int_0^\infty \left(e^{A^Tt}Qe^{At}\right)^T dt = \int_0^\infty \left(e^{At}\right)^T Q^T \left(e^{A^Tt}\right)^T dt = \int_0^\infty e^{A^Tt}Qe^{At}dt = P.$$

Pokažimo da je matrica P pozitivno definitna, odaberimo konstantan vektor $z \neq 0 \in \mathbb{R}^n$

$$z^TPz = \int_0^\infty z^Te^{A^Tt}Qe^{At}zdt$$

$$w(t) = e^{At}z, \forall t \geq 0$$
$$z^TPz = \int_0^\infty w(t)^TQw(t)dt.$$

Matrica Q je pozitivno definitna pa vrijedi $z^TPz \geq 0$, a $z^TPz = 0$ samo onda kada je $z = 0$. Štoviše, matrica e^{At} je regularna pa je matrica P pozitivno definitna. Dokaz jedinstvenosti provodimo kontradikcijom. Pretpostavimo da postoji još jedno rješenje Ljapunovljeve jednadžbe i označimo ga sa $\bar{P}$. Uvrstimo ga u Ljapunovljevu jednadžbu $(**)$ pa dobivamo

$$A^TP + PA = A^T\bar{P} + \bar{P}A$$
$$e^{A^Tt}\cdot \Big/ A^T\left(P - \bar{P}\right) + \left(P - \bar{P}\right)A = 0 \Big/ \cdot e^{At}$$
$$e^{A^Tt}A^T\left(P - \bar{P}\right)e^{At} + e^{A^Tt}\left(P - \bar{P}\right)Ae^{At} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(e^{A^Tt}\left(P - \bar{P}\right)e^{At}\right) = e^{A^Tt}A^T\left(P - \bar{P}\right)e^{At} + e^{A^Tt}\left(P - \bar{P}\right)Ae^{At} = 0.$$

Ovo za posljedicu ima da je $e^{A^Tt}\left(P - \bar{P}\right)e^{At}$ konstantan, ali zbog pretpostavke da je sustav eksponencijalno stabilan mora konvergirati u nulu za $t \to \infty$, slijedi da je izraz konstantan i jednak nuli. Kako je matrica e^{At} regularna to je moguće samo kada je $P = \bar{P}$.
Dokažimo da $iv) \Rightarrow v)$. Ako odaberemo matricu $Q = -I$ tada će matrica P koja je rješenje Ljapunovljeve jednadžbe zadovoljavati Ljapunovljevu nejednakost. Ostaje još pokazati da $v) \Rightarrow iii)$. Neka je P simetrična pozitivno definitna matrica za koju vrijedi Ljapunovljeva nejednakost i neka je

$$Q = -\left(A^TP + PA\right) > 0$$

i skalarna funkcija

$$v(t) = x^T(t)Px(t) \geq 0, \quad \forall t \geq 0.$$

Deriviranjem dobivamo

$$\dot{v} = \dot{x}^TPx(t) + x^TP\dot{x} = x^T\left(A^TP + PA\right)x = -x^TQx \leq 0.$$

Derivacija od $v(t)$ je manja ili jednaka nuli, posljedica toga je

$$v(t) = x^T(t)Px(t) \leq v(0) = x^T(0)Px(0), \quad \forall t \geq 0$$

$$\text{S druge strane prema [6] } v(t) = x^T(t)Px(t) \geq \lambda_{min}(P) \left\| x(t) \right\|^2 \Rightarrow \left\| x(t) \right\|^2 \leq \frac{v(t)}{\lambda_{min}(P)}$$

$$\dot{v} = -x^T(t)Qx(t) \leq -\lambda_{min}(Q) \left\| x(t) \right\|^2 \leq -\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{min}(P)} v(t).$$

Primjenom leme 2.2.2 dobivamo $v(t) \leq e^{-\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{min}(P)}(t-t_0)} v(t_0)$ stoga jer je $-\frac{\lambda_{min}(Q)}{\lambda_{min}(P)} < 0$. Skalarna funkcija $v(t)$ konvergira prema nuli eksponencijalnom brzinom pa onda i $x(t)$ konvergira prema nuli eksponencijalnom brzinom.

Pokažimo na primjeru stabilnog homogenog sustava povezanost rješenja sustava i stabilnosti preko kriterija svojstvenih vrijednosti matrice A.
Neka je sustav dan sa

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} x(t).$$

Odredimo svojstvene vrijednosti sustava

$$\det (A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -7-\lambda & 3 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 7)(\lambda + 3) + 3 = 0$$

$$\lambda^2 + 10\lambda + 24 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -4, \lambda_2 = -6.$$

Sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju negativan realan dio pa prema teoremu 2.2.3 znamo da je sustav stabilan. Odredimo rješenje sustava. Za rješenje sustava potrebno je izračunati e^{At}. Matrica A nije dijagonalna, ali su joj sve svojstvene vrijednosti različite pa je dijagonalizabilna. Za računanje matrične eksponencijalne funkcije kada je matrica dijagonalizabilna potrebno je odrediti regularnu matricu P takvu da je $A = P\Lambda P^{-1}$ gdje je Λ dijagonalna matrica koja na dijagonali ima svojstvene vrijednosti matrice A. Za određivanje matrice P potrebno je izračunati svojstvene vektore matrice A. Odredimo svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_1

$$(A - \lambda_1 I)\vec{v}_1 = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Odredimo svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost λ_2

$$(A - \lambda_2 I)\vec{v}_2 = 0$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 3\\ -1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = 3x_2$$

$$\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = x_2\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}.$$

Stupci matrice P su svojstveni vektori matrice A

$$P = \begin{bmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Inverznu matricu P^{-1} možemo dobiti preko formule za inverznu matricu dimenzije 2×2

$$P^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\end{bmatrix}.$$

Rješenje matrične eksponencijalne funkcije dano je sa

$$e^{At} = Pe^{\Lambda t}P^{-1} = P\begin{bmatrix}e^{-4t} & 0\\ 0 & e^{-6t}\end{bmatrix}P^{-1}.$$

Prema teoremu 2.1.5 rješenje sustava za $t_0 = 0$ dano je sa

$$x(t) = e^{At}x_0 = P\begin{bmatrix}e^{-4t} & 0\\ 0 & e^{-6t}\end{bmatrix}P^{-1}x_0.$$

Provjerimo kako se stanja sustava mijenjaju kako $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(P\begin{bmatrix}e^{-4t} & 0\\ 0 & e^{-6t}\end{bmatrix}P^{-1}x_0\right) = P\lim_{t\to\infty}\left(\begin{bmatrix}e^{-4t} & 0\\ 0 & e^{-6t}\end{bmatrix}\right)P^{-1}x_0$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = P\begin{bmatrix}\lim_{t\to\infty}\left(e^{-4t}\right) & 0\\ 0 & \lim_{t\to\infty}\left(e^{-6t}\right)\end{bmatrix}P^{-1}x_0$$

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = P\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}P^{-1}x_0 = \begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}.$$

Pokazali smo da će stanja sustava doći u nulu neovisno o početnom stanju sustava.

2.3 Upravljivost sustava

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam upravljivosti sustava. Pitamo se možemo li odrediti upravljanje tako da sustav tim upravljenjem dovedemo u stanje koje želimo. Svojstvo upravljivosti će nam biti korisno kod stabilizabilnosti sustava jer ako sustav možemo dovesti u proizvoljno stanje onda ga možemo dovesti u stanje u kojem su sva stanja sustava jednaka nuli odnosno da je sustav stabilan.

Definicija 2.3.1 Za LTI sustav kažemo da je upravljiv ako počevši iz proizvoljnog stanja x_0 sustav možemo dovesti u proizvoljno stanje $x_1 = x(t_1)$ u konačnom vremenu t_1 uz pravilan odabir ulaza $u(t)$, za $0 \leq t \leq t_1$.

Sljedeći teorem služi za provjeru svojstva upravljivosti LTI sustava koje ovisi o matricama A i B preko ranga matrice upravljivosti.

Teorem 2.3.2 *Za matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, m \leq n$ sljedeće tvrdnje su ekvivalentne*

i) LTI je upravljiv.

ii) Matrica upravljivosti $C_m = [B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B]$ je punog ranga n.

iii) Matrica $W_c = \int_0^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt$ je regularna $\forall t_1 > 0$.

Dokaz. Dokaz da $i) \Rightarrow ii)$ provodimo kontradikcijom. Pretpostavimo da je sustav upravljiv i da je $\text{rang}(C_m) < n$. Rješenje sustav dano je sa

$$x(t_1) = e^{t_1A}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Pema lemi 2.1.4 znamo da postoje skalarne funkcije $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ takve da

$$x(t_1) = e^{t_1A}x_0 + \int_0^{t_1} \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t_1,\tau)A^iBu(\tau)d\tau$$

$$x(t_1) = e^{t_1A}x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} A^iB \int_0^{t_1} \alpha_i(t_1,\tau)u(\tau)d\tau$$

$$x(t_1) - e^{t_1A}x_0 = \sum_{i=0}^{n-1} A^iB \int_0^{t_1} \alpha_i(t_1,\tau)u(\tau)d\tau.$$

Matrica $x(t_1) - e^{t_1A}x_0$ je linearna kombinacija matrica $B, AB, \ldots, A^{n-1}B$ koje su linearno zavisne pa postoji $x(t_1) \in \mathbb{R}^n, x(t_1) \neq 0$ koji se ne može dobiti linearnom kombinacijom tih matrica, a to je u kontradikciji s pretpostavkom da je sustav upravljiv.
Dokaz da $ii) \Rightarrow iii)$ provodimo kontradikcijom. Pretpostavimo suprotno tj. da je $\text{rang}(C_m) = n$ i W_c nije regularna. Onda postoji $v \neq 0$ takav da je

$$W_cv = 0 \Rightarrow v^TW_cv = 0$$

$$\int_0^{t_1} v^Te^{At}BB^Te^{A^Tt}vdt = 0.$$

Definiramo $C(t) = B^Te^{A^Tt}v$ i uvrštavanjem u integral dobivamo

$$\int_0^{t_1} C^T(t)C(t)dt = 0 \Rightarrow C^T(t) = 0, 0 \leq t \leq t_1.$$

$$
\begin{aligned}
C^T(t) = 0 &\Rightarrow v^T B = 0 \\
\frac{d}{dt}\Big(C^T(t)\Big) = 0 &\Rightarrow v^T AB = 0 \\
&\vdots \\
\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\Big(C^T(t)\Big) = 0 &\Rightarrow v^T A^{n-1} B = 0
\end{aligned}
$$

Kako je matrica C_m punog ranga to se može dogoditi samo kada je $v^T = 0$ što je u kontradikciji s pretpostavkom da postoji $v \neq 0$ za koji to vrijedi.
Ostalo je pokazati da $iii) \Rightarrow i)$. Pretpostavimo da je W_c regularna i pokažimo da je onda sustav upravljiv preko definicije odnosno da možemo odabrati upravljanje koje će sustav dovesti u proizvoljno stanje $x_1 \in \mathbb{R}^n$. Pokažimo da sljedeće upravljanje $u(t)$ dovodi sustav u željeno stanje

$$
\begin{aligned}
u(t) &= B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1) \\
x(t_1) &= e^{t_1 A}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-t)} W_c^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1) d\tau \\
x(t_1) &= e^{t_1 A}x_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B B^T e^{A^T(t_1-t)} d\tau W_c^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1)
\end{aligned}
$$

Uvodimo supstituciju $\bar{t} = t_1 - \tau, d\bar{t} = -d\tau$

$$
x(t_1) = e^{t_1 A}x_0 - \int_{t_1}^{0} e^{\bar{t}A} B B^T e^{A^T \bar{t}} d\bar{t} W_c^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1)
$$

$$
\begin{aligned}
x(t_1) &= e^{t_1 A}x_0 W_c W_c^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1) \\
x(t_1) &= x_1.
\end{aligned}
$$

Za takav odabir kontrole dobivamo proizvoljno odabrano stanje sustava. Sljedeće teoreme koristimo u dokazivanju stabilizabilnosti sustava, a njihovi dokazi mogu se pogledati u [1].

Teorem 2.3.3 *LTI sustav je upravljiv ako i samo ako ne postoji svojstveni vektor matrice A^T koji je u jezgri matrice B^T.*

Teorem 2.3.4 *LTI sustav je upravljiv ako i samo ako*

$$
\text{rang} \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix} = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.
$$

Teorem 2.3.5 *LTI sustav je upravljiv ako i samo ako postoji jedinstveno pozitivno definitno rješenje W Ljapunovljeve jednadžbe*

$$
AW + WA^T = -BB^T.
$$

3 Stabilizabilnost

3.1 Stabilizabilni LTI sustavi

U ovom poglavlju definirati ćemo svojstvo stabilizabilnosti LTI sustava. Definirali smo pojam stabilnih sustava i kriterij za provjeru preko svojstvenih vrijednosti i upravljivost sustava. Pitamo se možemo li odrediti upravljanje kojim trebamo djelovati na nestabilan sustav za svaki početni uvjet tako da on bude stabilan odnosno da ga dovedemo u ravnotežni položaj.

Definicija 3.1.1 Za LTI sustav kažemo da je stabilizabilan ako za svaki početni uvjet $x_0 \in \mathbb{R}^n$ postoji ulaz u$(\cdot)$ tako da

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = 0.$$

Kod stabilizabilnih sustava možemo odrediti upravljanje koje će ga stabilizirati. Ukoliko odaberemo upravljanje $u = -Kx$ jednadžba sustava koja opisuje promjenu stanja $\dot{x} = Ax + Bu$ postaje $\dot{x} = Ax - BKx$ što se jednostavnije može zapisati $\dot{x} = (A - BK)x$. Odabirom matrice K stabilnost sustava ovisi o svojstvenim vrijednostima matrice $A-BK$. Kada je sustav upravljiv matricu K možemo odabrati tako da sve svojstvene vrijednosti matrice $A - BK$ imaju negativan realan dio i tako postignemo stabilnost sustava. Sljedeći teorem možemo koristiti za određivanje matrice K tako da upravljanjem $u = -Kx$ možemo stabilizirati sustav.

Teorem 3.1.2 *Neka je LTI sustav upravljiv. Za svaki $\mu > 0$ možemo odrediti ulaz $u = -Kx$ koji smješta sve svojstvene vrijednosti sustava $\dot{x} = (A - BK)x$ u kompleksni dio poluravnine tako da je $Re(\lambda) \leq -\mu, \forall\lambda \in \sigma(A - BK)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je sustav upravljiv, onda za svojstveni vektor matrice A^T, označimo ga s x prema teoremu 2.3.3 znamo da nije u jezgri od B^T

$$A^T x = \lambda x, x \neq 0 \Rightarrow B^T x \neq 0$$

$$-A^T x = -\lambda x / - \mu x, \mu > 0$$

$$(-\mu I - A)^T x = (-\mu - \lambda)x, x \neq 0.$$

Prema teoremu 2.3.4 znamo da je sustav $(-\mu I - A, B)$ je upravljiv. Prema teoremu 2.3.3 znamo da ako je x svojstveni vektor matrice $(-\mu I - A)^T$ onda nije u jezgri od B^T. Sustav će biti stabilan ako odaberemo $\mu > |\lambda_{max}(A)|$ jer će sve svojstvene vrijednosti sustava imati negativan realan dio. Pokažimo stabilnost sustava preko *iv*) tvrdnje teorema 2.3.5. Pokažimo da postoji pozitivno definitna matrica $W > 0$ koja je rješenje Ljapunovljeve jednadžbe

$$(-\mu I - A)W + W(-\mu I - A)^T = -BB^T.$$

Definiramo $P = W^{-1}$, matrica P je dobro definirana jer je matrica W pozitivno definitna prema *iv*) tvrdnji teorema 2.2.3 pa je i regularna i njezina inverzna matrica je pozitivno definitna matrica.

$$P/AW + WA^T - BB^T = -2\mu W/P$$

$$\begin{gathered}
PA + A^T P - PBB^T P = -2\mu P \\
P\left(A - \frac{1}{2}BB^T P\right) + \left(A - \frac{1}{2}BB^T P\right)^T P = -2\mu P \\
K = \frac{1}{2}B^T P \qquad (*) \\
P(A - BK) + (A - BK)^T P = -2\mu P.
\end{gathered}$$

Pokazali smo da za sustav $\dot{x} = (A - BK)x$ vrijedi $iv)$ tvrdnja teorema 2.3.2 što za posljedicu ima da je sustav stabilan.

Sljedeća lema daje formulu preko koje možemo odrediti matricu K iz teorema 3.1.2 i tako dobiti upravljanje sustava koje će mu pridružiti odabrane svojstvene vrijednosti koje su zatvorene na konjugiranje. Lemu možemo koristiti kada je sustav SI. Ako odaberemo sve svojstvene vrijednosti tako da imaju negativan realan dio onda smo sigurni da će to upravljanje stabilizirati sustav. Lemu koristimo za stabilizaciju sustava koji modelira dvostruko obrnuto njihalo na kolicima.

Lema 3.1.3 *(Ackermmanova formula) Za slučaj kada je LTI sustav upravljiv i SI(Single Input) možemo odrediti matricu K iz formule*

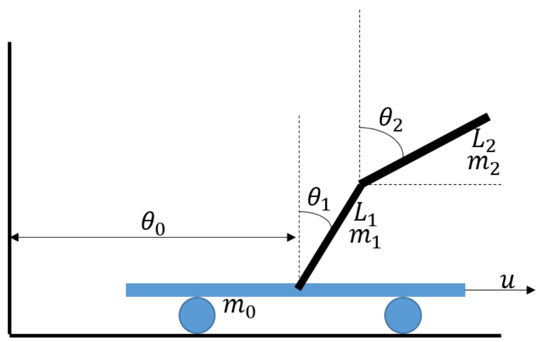
$$K = e_n^T C_m^{-1} P(A)$$

$$P(A) = (A - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (A - \lambda_n)$$

pri čemu su $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ proizvoljne svojstvene vrijednosti koje želimo pridružiti sustavu $\dot{x} = (A - BK)x$, a e_n n-ti kanonski vektor.

3.2 Dvostruko obrnuto njihalo na kolicima

U ovom poglavlju modeliramo LTI sustav za dvostruko obrnuto njihalo na kolicima. Sustav se sastoji od kolica, kuglice koja je povezana na kolica i druge kuglice koje je povezana na prvu kuglicu. Upravljati možemo kolicima tako da ih pomičemo lijevo ili desno. Stanja sustava koja želimo promatrati su brzina i akceleracija kolica te kut i kutna brzina kuglica pri čemu gledamo kut između kolica i položaja mase. Konstantni parametri sustava su mase kolica i kuglica te duljina užeta kojim su povezane kuglice.



Slika 1: Dvostruko obrnuto njihalo na kolicima

Slika 1. prikazuje skicu dvostrukog obrnutog njihala pri čemu stanja sustava imaju pozitivnu vrijednost ako su desno od ishodišta, a negativnu kada su lijevo od ishodišta. Slika je preuzeta iz [2].
Jednadžba koja opisuje sustav dana je sa

$$D(\theta)\theta'' + C(\theta, \theta') + G(\theta) = Hu$$

gdje je

$$D(\theta) = \begin{bmatrix} d_1 & d_2\cos(\theta_1) & d_3\cos(\theta_2) \\ d_2\cos(\theta_1) & d_4 & d_5\cos(\theta_1-\theta_2) \\ d_3\cos(\theta_2) & d_5\cos(\theta_1-\theta_2) & d_6 \end{bmatrix}$$

$$C(\theta, \theta') = \begin{bmatrix} 0 & -d_2\sin(\theta_1)\theta_1' & -d_3\sin(\theta_2)\theta_2' \\ 0 & 0 & d_5\sin(\theta_1-\theta_2)\theta_2' \\ 0 & -d_5\sin(\theta_1-\theta_2)\theta_1' & 0 \end{bmatrix}$$

$$G(\theta) = \begin{bmatrix} 0 \\ -f_1\sin(\theta_1) \\ -f_2\sin(\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Pri tome su $d_1 = m_0 + m_1 + m_2, d_2 = (\frac{m_1}{2} + m_2)L_1, d_3 = \frac{m_2 L_2}{2}, d_4 = (\frac{m_1}{3} + m_2)L_1^2, d_5 = \frac{m_2 L_1 L_2}{2}, d_6 = \frac{m_2 L_2^2}{3}, f_1 = (\frac{m_1}{2} + m_2)L_1 g, f_2 = \frac{m_2 L_2 g}{2}$, a g je ubrzanje gravitacije i iznosi $9.81ms^{-2}$. Oznake su m_0-masa kolica, m_1-masa povezana s kolicima, m_2-druga masa koja je povezana s prvom masom, L_1-duljina veze koja povezuje kolica i prvu masu, L_2-duljina veze između prve i druge mase, θ_1-kut otklona prve mase od ravnotežnog položaja, θ_2-kut otklona druge mase od ravnotežnog položaja, a θ_1' i θ_2' su pripadne kutne brzine, θ_0 je udaljenost kolica od ishodišta, a θ_0' brzina kolica. Mase su izražene u kg, kutovi u rad, kutne brzine u rad/s, duljine u m i brzina kolica u m/s. Ova jednadžba nije linearna, ali možemo ju linearizirati oko točke ekvilibrijuma $(\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_0', \theta_1', \theta_2') = (0, 0, 0, 0, 0, 0)$ kako bi dobili LTI sustav koji opisuje dvostruko obrnuto njihalo na kolicima oko točke ekvilibrijuma. Sustav je tada dan sa

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = x(t) \end{cases}$$

gdje su matrice A, B dane po blokovima

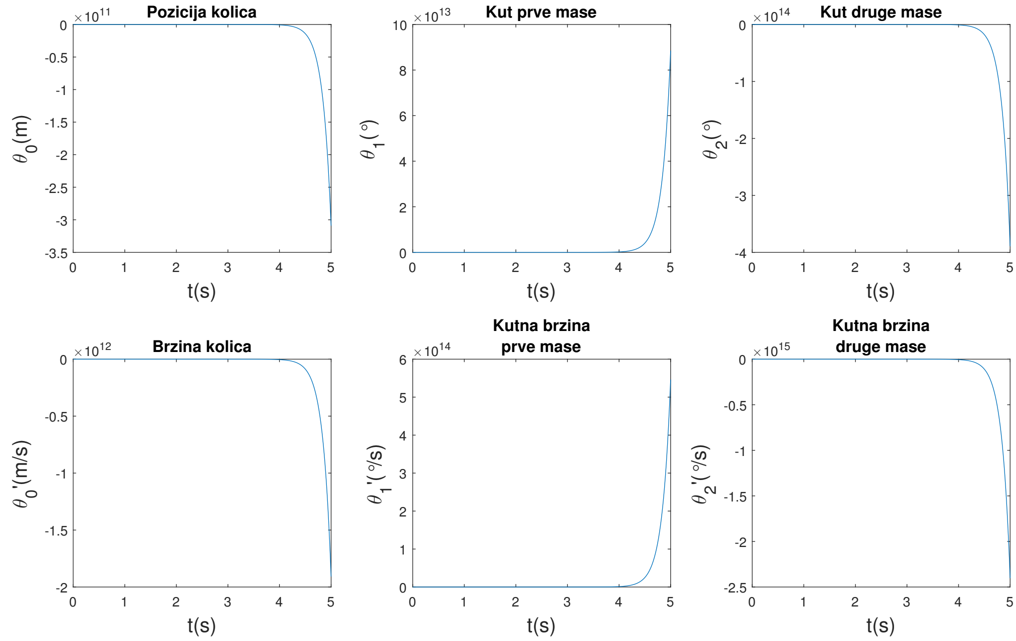
$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ D(0)^{-1}\frac{dG(0)}{d\theta} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ D(0)^{-1}H \end{bmatrix}.$$

Više detalja o modeliranju sustava može se pogledati u [2]. Ako odaberemo $m_0 = 4kg, m_1 = 1.5kg, m_2 = 1kg, L_1 = 2m, L_2 = 1m$ onda je LTI sustav dan sa

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ 0 & -5.183 & 0.5553 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 14.9 & -5.275 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -36.93 & 29.71 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0.2264 \\ 0.1509 \\ -0.1132 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x(t).$$

Za provjeru stabilnosti sustava koristit ćemo teorem 2.2.3 preko svojstvenih vrijednosti matrice A. Svojstvene vrijednosti matrice A su $\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -6.1728, \lambda_4 = 6.1728, \lambda_5 = -2.5505$ i $\lambda_6 = 2.5505$. Postoji svojstvena vrijednost koja ima realan dio veći od 0 pa sustav nije stabilan. Svako stanje sustava odnosno pozicija kolica, kutovi i brzine rasti će prema beskonačno kada $t \to \infty$ što ćemo i pokazati na slici 2.



Slika 2: Promjena stanja sustava u prvih 5 sekundi

Slika 2. prikazuje promjenu stanja sustava u prvih 5 sekundi koji ima početno stanje $\theta_0 = 0, \theta_1 = 20°, \theta_2 = -10°, \theta_0' = 0m/s, \theta_1' = 0°/s, \theta_2' = 0°/s$. Sva stanja sustava teže u beskonačno. Provjerimo upravljivost sustava preko matrice upravljivosti iz teorema 2.3.2.

$$C_m = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B & A^4B & A^5B \end{bmatrix}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} 0 & -0.2264 & 0 & -0.8451 & 0 & -19.71 \\ 0 & 0.1509 & 0 & 2.846 & 0 & 89.55 \\ 0 & -0.1132 & 0 & -8.937 & 0 & -370.6 \\ -0.2264 & 0 & -0.8451 & 0 & -19.71 & 0 \\ 0.1509 & 0 & 2.846 & 0 & 89.55 & 0 \\ -0.1132 & 0 & -8.937 & 0 & -370.6 & 0 \end{bmatrix}$$

$\text{rang}(C_m) = 6$ matrica upravljivosti je punog ranga pa je sustav upravljiv. Sustav je upravljiv pa prema teoremu 3.1.2 znamo da je sustav stabilizabilan. Sustav ćemo stabilizirati preko teorema 3.1.2 i preko Ackermmanove formule. Za odabrani $\mu = 3.5$ matricu K možemo odrediti preko $(*)$ iz dokaza teorema 3.1.2

$$K = \begin{bmatrix} -297.5331 & -429.8576 & -3224.3273 & -565.2856 & -1291.181 & -776.5034 \end{bmatrix}.$$

Za tako dobivenu matricu K matrica $A - BK$ ima svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -3.5 + 12.02i, \lambda_2 = -3.5 - 12.02i, \lambda_3 = -6.16, \lambda_4 = -3.5 + 1.33i, \lambda_5 = -3.5 - 1.33i, \lambda_6 = -0.84$. Sustav $\dot{x} = (A - BK)x$ je stabilan jer sve svojstvene vrijednosti matrice $A - BK$ imaju negativan realan dio.

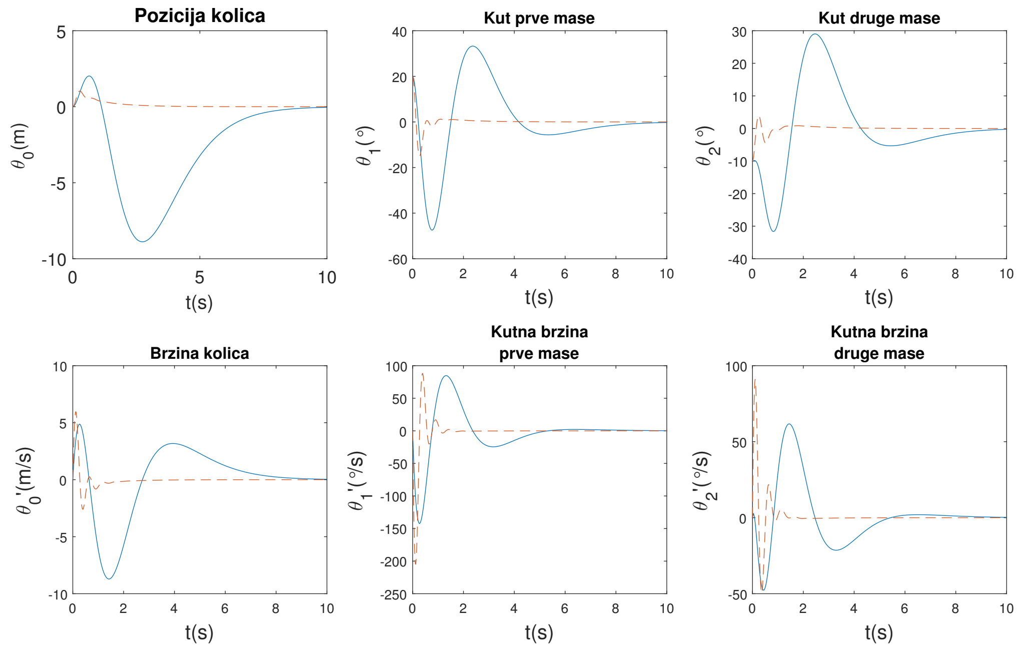
$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ -67.366 & -102.5089 & -729.4811 & -127.9892 & -292.3429 & -175.8121 \\ 44.9107 & 79.7843 & 481.4157 & 85.3261 & 194.8952 & 117.2081 \\ -33.683 & -85.5894 & -335.3105 & -63.9946 & -146.1714 & -87.906 \end{bmatrix} x.$$

Stabilizirajmo sustav za odabrane svojstvene vrijednosti $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -1.5, \lambda_3 = -1.7, \lambda_4 = -2, \lambda_5 = -2.2, \lambda_6 = -2.4$. Matricu K možemo odrediti preko Ackermmanove formule

$$K = \begin{bmatrix} -0.7062 & 360.5 & -335.6 & -2.561 & 23.74 & -58.62 \end{bmatrix}.$$

Matrica A stabiliziranog sustav $\dot{x} = (A - BK)x$ ima svojstvene vrijednosti koje smo odabrali tako da su sve negativne i prema teoremu 2.2.3 znamo da je taj sustav stabilan.

$$\dot{x} = (A - BK)x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0 \\ -0.1599 & 76.43 & -75.42 & -0.5798 & 5.376 & -13.27 \\ 0.1066 & -39.51 & 45.37 & 0.3865 & -3.584 & 8.849 \\ -0.07995 & 3.882 & -8.279 & -0.2899 & 2.688 & -6.636 \end{bmatrix} x.$$



Slika 3: Promjena stanja sustava u prvih 10 sekundi

Slika 3. prikazuje promjenu stanja sustava u prvih 10 sekundi za koji smo odredili upravljanje preko teorema 3.1.2 i Ackermmanove formule tako da je sustav stabilan odnosno sva stanja sustava nakon 10 sekundi jednaka su nuli. Isprekidanim linijama je prikazana promjena stanja sustava stabiliziranog preko teorema 3.1.2, a punim linijama je prikazana promjena stanja sustava stabiliziranog preko Ackermmanove formule. Sustav se brže stabilizira primjenom teorema 3.1.2.

Literatura

[1] J. P. Hespanha, Linear System Theory, Princeton University Press, 2009.

[2] L. Moysis, Balancing a double inverted pendulum using optimal control and Laguerre functions, Lazaros Moysis Aristotle University of Thessaloniki, 2016.

[3] G. L. Plett, http://mocha-java.uccs.edu/ECE5520/ECE5520-CH04.pdf, Multivariable Control Systems I, 2015., rujan 2020.

[4] D. Rowell, http://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/StateSpaceResponse.pdf, Time-Domain Solution of LTI State Equations, 2002., rujan 2020.

[5] D. Sanand, http://www.facweb.iitkgp.ac.in/~sanand/linearsystems.pdf, Short notes on Linear systems theory, rujan 2020.

[6] R. Scitovski, N. Truhar, Z. Tomljanović, Metode optimizacije, Odjel za matematiku, 2014.

[7] E. Wahlén, http://www.ctr.maths.lu.se/media11/MATC12/2014ht2014/exp_6.pdf, The matrix exponential, 2014., rujan 2020.