Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Monika Đuzel

Nejednakosti za svojstvene vrijednosti

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Monika Đuzel

Nejednakosti za svojstvene vrijednosti

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Darija Marković

Osijek, 2020.

Sažetak

Tema ovog rada su nejednakosti za svojstvene vrijednosti. Najprije ćemo navesti pojmove koji će nam biti potrebni u kasnijim računima i dokazima. Govorit ćemo o svojstvenim i singularnim vrijednostima te dokazati teorem koji ih povezuje nejednakostima. Nakon toga dokazat ćemo teorem o monotonosti za singularne i svojstvene vrijednosti. Dotaknut ćemo se i teme teorema o ispreplitanju za singularne i svojstvene vrijednosti. Također, dokazat ćemo i Courant-Fischerov teorem za svojstvene i singularne vrijednosti. Iskazat ćemo Poincareov teorem, Hornov teorem i Von Neumannov teorem. Dokazat ćemo da je $\operatorname{tr}(AX) = 0$ za sve hermitske matrice X ako i samo ako je $A = 0$ te da je $\operatorname{tr}(AX)$ realna za sve hermitske matrice X ako i samo ako je A hermitska.

Ključne riječi: svojstvene vrijednosti, svojstveni vektori, monotonost, teorem o ispreplitanju, Courant-Fischerov teorem, Poincareov teorem,Hornov teorem, Von Neumannov teorem.

Abstract

The subject of this paper are inequalities for eigenvalues. First of all, we will define terms that will be used in this paper. We are going to discuss eigenvalues, singular values and prove a theorem that relates specified values to inequalities. Afterwards, monotonicity theorems for singular and eigenvalues will be proven. We will also refer to a subject of interlace theorems for singular and eigenvalues. Furthermore, the Courant-Fischer theorem for eigenvalues and singular values will be proven. We will state Poincare's theorems, Horn's and Von Neumann's theorem. It will be shown that $\operatorname{tr}(AX) = 0$ for all Hermitian matrices if and only if $A = 0$ and also that $\operatorname{tr}(AX) = 0$ for all Hermitian matrices X if and only if A is Hermitian.

Key words: eigenvalues, singular values, monotonicity, interlace teorem, Courant-Fischer theorem, Poincare theorem, Horn's theorem, Von Neumann's theorem.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu bavit ćemo se nejednakostima za svojstvene vrijednosti. Računanje svojstvenih vrijednosti može biti vrlo zahtjevno, posebno kod matrica velikog reda. S druge strane, za riješiti pojedine probleme ponekad će biti dovoljno samo ih približno locirati. Primjerice, ako želimo zaključiti da je matrica regularna, dovoljno je utvrditi da spektar matrice ne sadrži nulu. Za neke druge primjene dovoljno je saznati jesu li svojstvene vrijednosti po modulu manje od 1 ili imaju li negativan realni dio ili neko drugo svojstvo. Hermitski svojstveni problem je, zbog svojih lijepih svojstava i specijaliziranih efikasnih metoda za njegovo rješavanje, jedan od najvažnijih svojstvenih problema za matrice. U prvom dijelu ponovit ćemo već poznate pojmove koji će biti korišteni u radu. Kasnije ćemo navesti važne teoreme za svojstvene i singularne vrijednosti te teoreme u kojima su te vrijednosti povezane razičitim nejednakostima. Sljedeći pojmovi potrebni su nam za razumijevanje ovog rada. Sve definicije i tvrdnje preuzete su iz [1] i [4].

Napomena 1.1. *U radu ćemo koristiti sljedeće oznake:*

- M_n *skup svih kvadratnih matrica n-tog reda*
- M_{mn} *vektorski prostor matrica tipa* $m \times n$
- I_n *jedinična matrica n-tog reda*
- $\det A$ *determinanta matrice* A
- $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *svojstvene vrijednosti matrice* A
- $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ *singularne vrijednosti matrice* A*, gdje je* $\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$
- *span ili linearna ljuska nepraznog skupa - skup svih linearnih kombinacija elemenata nepraznog skupa*

Definicija 1.1 (Determinanta)**.** *Pod determinantom matrice drugog reda možemo podrazumijevati funkciju koja svakoj kvadratnoj matrici* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *drugog reda pridružuje realan broj A definiran s* $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Funkciju koja matrici A pridružuje njenu determinantu $(\det A)$ *definirat ćemo induktivno:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix};$$

$$\dots$$

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + \cdots + (-1)^{n-1} a_{1n} \det A_{1n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_{1k},$$

gdje je A_{1k} kvadratna matrica $(n-1)$-og reda koja se dobiva iz matrice A ispuštanjem prvog retka i k-tog stupca. Posebno, za $A = [a]$ definiramo $\det A = a$.

Definicija 1.2. *Neka je $\mathbb{F}$ polje i $A \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijedost matrice A ako postoji $x \in M_{n1}(\mathbb{F})$, $x \neq 0$ takav da je $Ax = \lambda x$. Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se spektar matrice A i označava sa $\sigma(A)$.*
Skup $V_A(\lambda) = \{x : Ax = \lambda x\}$ naziva se svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ.

Vektor x iz navedene definicije naziva se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda \in \sigma(A)$ kao nultočke svojstvenog polinoma nazivamo algebarska kratnost od λ. Svojstvene vrijednosti čija je algebarska kratnost jednaka 1 nazivaju se jednostavnim svojstvenim vrijednostima.

Napomena 1.2. *Svojstvene vrijednosti matrice A se mogu dobiti rješavanjem jednadžbe:*

$$|A - \lambda \cdot I_n| = 0.$$

Primjer 1.1. *Neka je* $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $\det(A - \lambda I) = (-2-\lambda)(5-\lambda) \implies \sigma(A) = \{5, -2\}$.

Napomena 1.3. *Uočimo kako za $m \neq n$ pojam svojstvenih vrijednosti nema smisla. Svojstvene vrijednosti se pišu u padajućem redosljedu veličina.*

Definicija 1.3. *(prema [5]) Neka je $A \in M_{mn}$, za $m, n \in \mathbb{N}$. Rastav matrice*

$$A = U\Sigma V^*$$

zovemo dekompozicija na singularne vrijednosti A, ako su $U \in M_m$ i $V \in M_n$ unitarne, a $\Sigma \in M_{mn}$ dijagonalna $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \sigma_2 \ldots, \sigma_{\min(m,n)})$, pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_{\min(m,n)}$, a brojeve $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{\min(m,n)}$ zovemo singularne vrijednosti matrice A. Stupce matrice U zovemo lijevi, a stupce matrice V desni singularni vektori matrice A.

Napomena 1.4. *Svi rezultati će biti prikazani u vektorskom prostoru $\mathbb{C}^n$ s produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiranim na način:*

$$\langle x, y \rangle = \textstyle\sum_{i=1}^n x_i \cdot \overline{y_i} = y^* \cdot x$$

za $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ i $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.

Definicija 1.4. *Zbroj elemenata na glavnoj dijagonali kvadratne matrice A zovemo trag matrice i pišemo* $\operatorname{tr}(A)$*, tj.*

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Primjer 1.2. *Neka je $A = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, tada je* $\operatorname{tr}(A) = 8 + 4 = 12$.

Definicija 1.5. *Neka je V unitaran prostor. Kaže se da je vektor $x \in V$ normiran ako je $||x|| = 1$.*

Napomena 1.5. *Neka je V unitaran prostor. Za dva vektora $x, y \in V$ kažemo da su ortogonalna ($x \perp y$) ako i samo ako vrijedi $\langle x, y \rangle = 0$ ili $y^* \cdot x = 0$.*
Za skup $\{a_1, \ldots, a_n\}$ kažemo da je ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $||a_i|| = 1$.

Definicija 1.6. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrica $A^* \in M_{nm}(\mathbb{F})$ se naziva hermitski adjungirana (kompleksno transponirana) matrica matrice A ako vrijedi*

$$a_{ij}^* = \overline{a_{ji}}, \text{ za sve } 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m.$$

Napomena 1.6. *Matrica A je hermitska ako je $A^* = A$.*

Primjer 1.3. $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^* = A.$

Teorem 1.1. *Neka su S_1 i S_2 dva potprostora vektorskog prostora V. Tada je*

$$\dim(S_1 + S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 \cap S_2).$$

Dokaz teorema se može pronaći u [1].

2 Neki od važnih teorema za svojstvene i singularne vrijednosti

Sve tvrdnje i teoremi preuzeti su iz [3].

2.1 Teorem o ispreplitanju

U ovom poglavlju će biti opisana veza između svojstvenih vrijednosti matrice i njihove submatrice. Neka je A hermitska matrica reda m podjeljena kao:

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ C^* & D \end{bmatrix},$$

gdje je B reda n, za neki $n < m$. Očito je da je i B hermitska matrica.

Teorem 2.1. *(Teorem o ispreplitanju za svojstvene vrijednosti) Neka su:*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_m \text{ i } \mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$$

svojstvene vrijednosti od A i B redom. Tada je

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_{m-n+1}; \mu_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_{m-n+2}; \ldots; \lambda_n \geqslant \mu_n \geqslant \lambda_m.$$

Posebno, ako je $m = n + 1$, onda je

$$\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2;\ \lambda_2 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_3; \ldots; \lambda_n \geqslant \mu_n \geqslant \lambda_{n+1}.$$

Dokaz. Neka su $u_1, u_2, \ldots, u_m$ i $v_1, v_2, \ldots, v_n$ odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori od matrica A i B. Prvo ćemo pokazati da je $\lambda_k \geqslant \mu_k$, za svaki $k = 1, 2, \ldots, n$. Za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ zadat ćemo prošireni vektor

$$w_i = \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix},$$

tipa $m \times n$. Fiksiramo $1 \leq k \leq n$. Neka je $S_1 = span\{u_k, u_{k+1}, \ldots, u_m\}$ i neka je $S_2 = span\{w_1, w_2, \ldots, w_k\}$. Oba su podprostori od $\mathbb{R}^n$. Primijetimo da je $\dim(S_1) = m - k + 1$, a $\dim(S_2) = k$.

$$\dim(S_1 \cap S_2) = \dim(S_1) + \dim(S_2) - \dim(S_1 + S_2) \geqslant (m - k + 1) + k - m = 1.$$

Prema tome, postoji vektor x iz $S_1 \cap S_2$ takav da je $x^* \cdot x = 1$. Za $x \in S_1$ slijedi da je $\lambda_k \leq x^* \cdot A \cdot x$. Za $x \in S_2$ možemo pisati $x = a_1 \cdot w_1 + \cdots + a_k \cdot w_k$, gdje su $a_1, \ldots, a_k$ skalari. Nadalje, imamo

$$1 = x^* \cdot x = \textstyle\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2 \cdot v_i^* \cdot v_i = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2,$$

$$\lambda_k \geqslant x^* \cdot A \cdot x = \textstyle\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2 \cdot [v_i|0] \cdot \begin{bmatrix} B & C \\ C^* & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_i \\ 0 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{k} |a_i|^2 \cdot v_i^* \cdot B \cdot v_i$$

$$\geqslant \mu_k \cdot \textstyle\sum_{i=1}^{k} |a_i|^2 = \mu_k.$$

Da bismo utvrdili ostale skupine nejednakosti teorema, pogledajmo matricu

$$-A = \begin{bmatrix} -B & -C \\ -C^* & -D \end{bmatrix}.$$

Svojstvene vrijednosti od $-A$ i $-B$ su

$$-\lambda_m \geqslant -\lambda_{m-1} \geqslant \cdots \geqslant -\lambda_1 \ i - \mu_n \geqslant -\mu_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant -\mu_1$$

iz kojih slijede željene nejednakosti. $\square$

Napomena 2.1. *Neka je $A \in M_{mn}$, q=min$\{m, n\}$, $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_q \ (\geqslant 0)$ singularne vrijednosti matrice A i definirajmo*

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je $\widetilde{A}$ reda $(m + n)$. Nadalje, $\widetilde{A}$ je hermitska matrica.

Teorem 2.2. *(Teorem o ispreplitanju za singularne vrijednosti) Neka je $A \in M_{mn}$ takav da je*

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix},$$

gdje je B matrica tipa $p \times q$, za neki $p \leq m$ i $q \leq n$. Neka su $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r (\geqslant 0)$ i $\tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_r (\geqslant 0)$ singularne vrijednosti od A i B redom, gdje je $r = min\{m, n\}$ i $s = min\{p, q\}$. Tada je $\tau_i \leq \sigma_i$, za $i = 1, 2, \ldots, s$.

Dokaz. Pretpostavimo da je $s \leq r$. Neka je

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix}, \widetilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & B^* \\ B & 0 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je $\widetilde{B}$ hermitska submatrica od $\widetilde{A}$. Svojstvene vrijednosti matrice $\widetilde{A}$ su

$$\sigma_1 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r \geqslant 0 = 0 = \cdots = 0 \geqslant -\sigma_r \geqslant \cdots \geqslant -\sigma_1,$$

a od matrice $\widetilde{B}$ su

$$\tau_1 \geqslant \cdots \geqslant \tau_s \geqslant 0 = \cdots = 0 \geqslant -\tau_s \geqslant \cdots \geqslant -\tau_1.$$

Uspoređujući prvih s svojstvenih vrijednosti matrica $\widetilde{A}$ i $\widetilde{B}$, dobivamo željene nejednakosti. □

Napomena 2.2. *Teorem o ispreplitanju uspoređuje svojstvene vrijednosti hermitske matrice i njezine pripadne submatrice.*

2.2 Svojstvene i singularne vrijednosti

Teorem 2.3. *Neka je $A \in M_n$. Neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A raspoređene na takav način da je*

$$|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \cdots \geqslant |\lambda_n|.$$

Neka su $\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_n$ singularne vrijednosti matrice A. Tada je

$$|\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_i| \leq \sigma_1 \cdot \sigma_2 \ldots \sigma_i, \; i = 1, 2, \ldots, n$$

s jednakošću za $i = n$.

Dokaz. Po Schurovom teoremu koji kaže da je svaka unitarna matrica jednaka trokutastoj matrici, postoje unitarne matrice U i V reda n takve da je $U^*AV = \Delta$, gdje je Δ gornje trokutasta matrica kojoj su na dijagonali $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $1 \leq i \leq n$. Pišemo $U = [U_1|U_2]$ i $V = [V_1|V_2]$, gdje su U_1 i V_1 tipa $n \times i$. Primijetimo da je

$$U^* \cdot A \cdot V = \begin{bmatrix} U_1^* \\ U_2^* \end{bmatrix} \cdot A[V_1|V_2] = \begin{bmatrix} U_1^*AV_1 & U_1^*AV_2 \\ U_2^*AV_1 & U_2^*AU_2 \end{bmatrix} = \Delta = \begin{bmatrix} \Delta_i & C \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

Sada je jasno da je $U_1^*AV_1$ gornje trokutasta s elementima $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i$ na dijagonali. To je doista podmatrica od U^*AV. Prema teoremu o ispreplitanju slijedi da je

$$\sigma_j[U_1^*AV1] \leq \sigma_j[U^*AV], \ j = 1, 2, \ldots, i.$$

Računajmo singularne vrijednosti od U^*AV. Trebamo pronaći svojstvene vrijednosti od $[U^*AV]^*[U^*AV] = V^*A^*AV$. Svojstvene vrijednosti od A^*A i V^*A^*AV su identične. Stoga, $\sigma_j[U^*AV] = \sigma_j(A) = \sigma_j, \ j = 1, 2, \ldots, n$. Konačno,

$$|\det(U_1^*AV_1)| = |\det(\Delta_i)| = |\textstyle\prod_{j=1}^i \alpha_j| = \prod_{j=1}^i \sigma_j(U_1^*AV_1^*) \leq \prod_{j=1}^i \sigma_j.$$

Za $i = n$, jednakost vrijedi. □

2.3 Teorem o monotonosti

Teorem 2.4. *(Teorem o monotonosti za svojstvene vrijednosti) Neka su* $\lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$, $\mu_1 \geqslant \cdots \geqslant \mu_n$ *i* $\nu_1 \geqslant \cdots \geqslant \nu_n$ *svojstvene vrijednosti matrica* A, B *i* C *redom tako da je* $C = A + B$. *Tada je*

(1)

$$\lambda_1 + \mu_1 \geqslant \nu_1 \geqslant \begin{cases} \lambda_1 + \mu_n \\ \lambda_2 + \mu_{n-1} \end{cases} ;$$

(2)

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 + \mu_2 \\ \lambda_2 + \mu_1 \end{matrix}\right\} \geqslant \nu_2 \geqslant \begin{cases} \lambda_2 + \mu_n \\ \lambda_3 + \mu_{n-1} \\ \cdots \\ \lambda_n + \mu_1 \end{cases} ;$$

(3)

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 + \mu_3 \\ \lambda_2 + \mu_2 \\ \lambda_3 + \mu_1 \end{matrix}\right\} \geqslant \nu_3 \geqslant \begin{cases} \lambda_3 + \mu_n \\ \lambda_4 + \mu_{n-1} \\ \cdots \\ \lambda_n + \mu_1 \end{cases} ;$$

$$\cdots$$

(n)

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 + \mu_n \\ \lambda_2 + \mu_{n-1} \\ \cdots \\ \lambda_n + \mu_1 \end{matrix}\right\} \geqslant \nu_n \geqslant \lambda_n + \mu_n.$$

Dokaz. Navedene nejednakosti s lijeve strane mogu se napisati kao:

$$\lambda_j + \mu_{i-j+1} \geqslant \nu_i, \text{ za } j = 1, 2, \dots, i;\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.4.1.}$$

Navedene nejednakosti s desne strane mogu se napisati kao:

$$\nu_i \geqslant \lambda_j + \mu_{n-j+i}, \text{ za } j = i, i+1, \dots, n;\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{2.4.2.}$$

Koristeći jednostavne argumente, pokazat ćemo da nejednakosti (2.4.2.) slijede iz (2.4.1.). Neka su

$$u_1, u_2, \dots, u_n;\ v_1, v_2, \dots, v_n;\ w_1, w_2, \dots, w_n$$

odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori matrica A, B i C redom. Fiksiramo $1 \leq i \leq n$ i $1 \leq j \leq i$. Neka je

$$\begin{aligned}
S_1 &= span\{u_j, u_{j+1}, \dots, u_n\},\\
S_2 &= span\{v_{i-j+1}, v_{i-j+2}, \dots, v_n\},\\
S_3 &= span\{w_1, w_2, \dots, w_i\}.
\end{aligned}$$

Primijetimo da je $\dim(S_1) = n - j + 1$, $\dim(S_2) = n - i + j$ i $\dim(S_3) = i$. Prema Teoremu 1.1. slijedi

$$\begin{aligned}
\dim(S_1 \cap S_2 \cap S_3) &= \dim(S_1) + \dim(S_2 \cap S_3) - \dim(S_1 + (S_2 \cap S_3))\\
&= \dim(S_1) + \dim(S_2) + \dim(S_3) - \dim(S_2 + S_3) - \dim(S_1 + (S_2 \cap S_3))\\
&\geqslant \dim(S_1) + \dim(S_2) + \dim(S_3) - n - n\\
&= n - j + 1 + n - i + j + i - n - n = 1.
\end{aligned}$$

Stoga, postoji vektor $x \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$ takav da je $x^*x = 1$. Za $x \in S_1$, možemo pisati $x = a_j u_j + \dots + a_n u_n$ za neke kompleksne brojeve $a_j, a_{j+1}, \dots, a_n$. Svojstvo $x^*x = 1$ implicira da je $\sum_{r=j}^{n} |a_r|^2 = 1$. Slijedi

$$\begin{aligned}
x^*Ax = (\textstyle\sum_{r=j}^{n} \overline{a}_r u_r^*) A (\sum_{r=j}^{n} a_r u_r) &= (\textstyle\sum_{r=j}^{n} \overline{a}_r u_r^*)(\sum_{r=j}^{n} a_r \lambda_r u_r)\\
&= \textstyle\sum_{r=j}^{n} |a_r|^2 \lambda_r.
\end{aligned}$$

Iskoristit ćemo činjenicu da su u_r ortonormirane svojstvene vrijednosti. Svojstvene vrijednosti λ_i napisane su odgovarajućim redosljedom veličina pa slijedi da je $\lambda_j \geqslant x^*Ax \geqslant \lambda_n$. Za naš slučaj potrebne su nam samo nejednakosti $\lambda_j \geqslant x^*Ax \geqslant$. Na sličan način to možemo pokazati kao

$$\begin{gathered}
\mu_{i-j+1} \geqslant x^*Bx \geqslant \mu_n,\ \nu_1 \geqslant x^*Cx \geqslant \nu_i,\\
\Rightarrow \lambda_j + \mu_{i-j+1} \geqslant x^*Ax + x^*Bx = x^*Cx \geqslant \nu_i.
\end{gathered}$$

Nejednakost na desnoj strani teorema se može provesti na sljedeći način. Primijetimo da je

$$(-A) + (-B) = -C,$$

za svojstvene vrijednosti

$$-\lambda_n \geqslant \cdots - \lambda_1; \ -\mu_n \geqslant \cdots \geqslant -\mu_1, \text{ i } -\nu_n \geqslant \cdots \geqslant -\nu_1$$

matrica $(-A)$, $(-B)$ i $(-C)$ redom. Iz ranije pokazanog slijedi da za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ i $j = i, i+1, \ldots, n$ vrijedi

$$(-\lambda_j) + (-\mu_{n-(j-i)}) \geqslant -\nu_i,$$

za koje imamo

$$\nu_i \geqslant \lambda_j + \mu_{n-(j-i)}.$$

□

Definicija 2.1. *Kažemo da je vektor x majoriziran vektorom y (ili y majorizira x) uz oznaku $x \ll y$ ako je :*

$$x_{(1)} + \cdots + x_{(i)} \leq y_{(1)} + \cdots + y_{(i)}, \ i = 1, \ldots, n-1$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = y_1 + y_2 + \cdots + y_n.$$

Vektor $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'$ je slabo majoriziran vektorom $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)'$ u oznaci $x \ll_w$ ako

$$\textstyle\sum_{j=1}^{i} x_{(j)} \leq \sum_{j=1}^{i} y_{(j)}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Napomena 2.3. *Nejednakosti iz prethodnog teorema možemo jednostavnije zapisati kao:*

$$\Lambda(C) \ll (\Lambda(A) + \Lambda(B))$$

gdje je $\Lambda(C) = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, $\Lambda(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\Lambda(B) = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$.

Teorem 2.5. *Svojstvene vrijednosti hermitske matrice $\widetilde{A}$ su:*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_q \geqslant 0 = \cdots = 0 \geqslant -\lambda_q \geqslant -\lambda_{q-1} \geqslant \cdots \geqslant -\lambda_1.$$

(s $|m-n|$ nula u sredini)

Dokaz. Koristeći dekompoziciju na singularne vrijednosti od A, dobit ćemo spektralnu dekompoziciju matrice $\widetilde{A}$.
Radi jednostavnosti, pretpostavimo da je $m \leq n$. Neka je $A = P\Delta Q$ dekompozicija na singularne vrijednosti od A, gdje su P i Q unitarne matrice odgovarajućeg reda i $\Delta = [D|0]$, gdje je $D = \text{diag}\,\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ i 0 je nulmatrica tipa $m \times (n-m)$. Podijelimo Q kao: $Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$, gdje je Q_1 tipa $m \times n$, a Q_2 tipa $(n-m) \times n$. Kako je $Q^* \cdot Q = I_n$, podrazumijeva se da je i $Q_1^* \cdot Q_1 + Q_2^* \cdot Q_2 = I_n$. Dekompozicija na singularne vrijednosti matrice A možemo napisati kao: $A = P \cdot D \cdot Q_1$. Konstruiramo matricu

$$U = \begin{bmatrix} \frac{Q_1}{\sqrt{2}} & \frac{P^*}{\sqrt{2}} \\ \frac{-Q_1}{\sqrt{2}} & \frac{P^*}{\sqrt{2}} \\ Q_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je U matrica reda $(m+n)$. U je zaista unitarna matrica. Naime,

$$\widetilde{A} = U^* \cdot \begin{bmatrix} D & 0 & 0 \\ 0 & -D & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot U.$$

Dobili smo spektralnu dekompoziciju hermitske matrice $\widetilde{A}$. Vrijednosti na dijagonali matrice $\widetilde{A}$ predstavljaju svojstvene vrijednosti matrice $\widetilde{A}$. □

Teorem 2.6. *(Teorem o monotonosti za singularne vrijednosti)Neka su* $\sigma_1 \geqslant \dots \geqslant \sigma_q$, $\tau_1 \geqslant \dots \geqslant \tau_q$ *i* $\upsilon_1 \geqslant \dots \geqslant \upsilon_q$ *singularne vrijednosti matrica* A, B *i* C *redom. Matrice* A *i* B *su tipa* $m \times n$, $C = A + B$ *i* $q = min\,\{m, n\}$. *Tada dobivamo sljedeći rezultat:*

(1)

$$\upsilon_q \leq \begin{cases} \sigma_1 + \tau_q \\ \sigma_2 + \tau_{q-1} \\ \dots \\ \sigma_q + \tau_1 \end{cases} ;$$

(2)

$$\upsilon_{q-1} \leq \begin{cases} \sigma_1 + \tau_{q-1} \\ \sigma_2 + \tau_{q-2} \\ \dots \\ \sigma_{q-1} + \tau_1 \end{cases} ;$$

(3)

$$\upsilon_{q-2} \leq \begin{cases} \sigma_1 + \tau_{q-2} \\ \sigma_2 + \tau_{q-3} \\ \dots \\ \sigma_{q-2} + \tau_1 \end{cases} ;$$

$$\dots$$

(q)

$$\upsilon_1 \leq \sigma_1 + \tau_1.$$

Dokaz. Teorem ćemo dokazati koristeći teorem 2.3. Za svaku od matrica A, B i C konstruirat ćemo $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ i $\widetilde{C}$. Primijetimo da je $\widetilde{C} = \widetilde{A} + \widetilde{B}$. Svojstvene vrijednosti matrica $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ i $\widetilde{C}$ su redom:

$$\begin{gathered} \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \cdots \geqslant \sigma_q \geqslant 0 = \cdots = 0 \geqslant -\sigma_q \geqslant -\sigma_{q-1} \geqslant \cdots \geqslant -\sigma_1; \\ \tau_1 \geqslant \tau_2 \geqslant \cdots \geqslant \tau_q \geqslant 0 = \cdots = 0 \geqslant -\tau_q \geqslant -\tau_{q-1} \geqslant \cdots \geqslant -\tau_1; \\ \upsilon_1 \geqslant \upsilon_2 \geqslant \cdots \geqslant \upsilon_q \geqslant 0 = \cdots = 0 \geqslant -\upsilon_q \geqslant -\upsilon_{q-1} \geqslant \cdots \geqslant -\upsilon_1. \end{gathered}$$

Koristeći pažljivo prvih q svojstvenih vrijednosti matrice $\widetilde{C}$ i teorem 2.3. može se utvrditi nejednakost:

$$\upsilon_i \geqslant \sigma_j + \tau_{i-j+1},\ j = 1, 2, \dots, i;\ \ i = 1, 2, \dots q;$$

s desne strane predstavljene u teoremu 2.3. Koristit ćemo matrice $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$ i $\widetilde{C}$

$$\begin{gathered} (\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_q, 0, 0, \dots, 0, -\upsilon_q, -\upsilon_{q-1}, \dots, -\upsilon_1) \ll \\ (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q, 0, 0, \dots, 0, -\sigma_q, -\sigma_{q-1}, \dots, -\sigma_1) + \\ (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q, 0, 0, \dots, 0, -\tau_q, -\tau_{q-1}, \dots, -\tau_1). \end{gathered}$$

Iz toga, dobivamo

$$(\upsilon_1, \upsilon_2, \dots, \upsilon_q) \ll_w (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_q) + (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_q).$$

□

Napomena 2.4. *Teorem o monotonosti uspoređuje zbroj svojstvenih vrijednosti matrica A i B sa svojstvenim vrijednostima zbroja.*

2.4 Courant-Fischer teorem

Teorem 2.7 (Courant-Fischer teorem za svojstvene vrijednosti)**.** *Neka je $A \in M_n$ hermitska matrica sa svojstvenim vrijednostima*

$$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n.$$

Tada za svaki $1 \leq k \leq n$,

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \max_{\mathbf{S}\subset\mathbb{C}^n, \dim(\mathbf{S})=k} \cdot \min_{x\in\mathbf{S}, x^*\cdot x=1} (x^* \cdot A \cdot x) \\ &= \min_{\mathbf{T}\subset\mathbb{C}^n, \dim(\mathbf{T})=n-k+1} \cdot \max_{x\in\mathbb{T}, x^*\cdot x=1} (x^* \cdot A \cdot x).\end{aligned}$$

Posebno,

$$\lambda_1 = \max_{x\in\mathbb{C}^n, x^*\cdot x=1} x^* \cdot A \cdot x, \lambda_n = \min_{x\in\mathbb{C}^n, x^*\cdot x=1} x^* \cdot A \cdot x.$$

Dokaz teorema može se pronaći u [3].

Teorem 2.8 (Courant-Fischer teorem za singularne vrijednosti)**.** *Neka je $A \in M_n$ i*

$$\sigma_1(A) \geqslant \sigma_2(A) \geqslant \ldots.$$

singularne vrijednosti. Tada za svaki $k \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\sigma_k(A) &= \min_{\mathbf{S}\subset\mathbb{C}^n, \dim(\mathbf{S})=n-k+1} \cdot \max_{x\in\mathbf{S}, x^*\cdot x=1} (x^*(A^* \cdot A)x)^{\frac{1}{2}} \\ &= \max_{\mathbf{T}\subset\mathbb{C}^n, \dim(\mathbf{T})=k} \cdot \min_{x\in\mathbb{T}, x^*\cdot x=1} (x^*(A^* \cdot A)x)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Dokaz teorema može se pronaći u [3].

Korolar 2.1 (Teorem o ispreplitanju)**.** *Neka je $A \in M_n$ hermitska matrica sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Neka su B submatrica od A dobivena brisanjem nekih $n-r$ redaka i odgovarajućih stupaca od A. Neka su $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_r$ svojstvene vrijednosti od B. Tada je*

$$\lambda_k \geqslant \mu_k \geqslant \lambda_{k+n-r}, \;\; k = 1, 2, \ldots, r.$$

Dokaz. Primijetimo da je B hermitska matrica reda r. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je matrica B dobivena iz matrice A brisanjem zadnjih $n-r$ stupaca i zadnjih $n-r$ redaka matrice A. Za $1 \leq k \leq r$, prema Courant-Fischer teoremu,

$$\begin{aligned}
\lambda_k &= \min_{\mathbf{T}\subset\mathbb{C}^n, \dim(\mathbf{T})=n-k+1} \cdot \max_{x\in\mathbf{T}, x^*\cdot x=1} (x^*Ax) \\
&\geqslant \min_{\mathbf{T}\subset\mathbb{C}^n, \dim(\mathbf{T})=n-k+1} \cdot \max_{z\in\mathbf{T}, z^*\cdot z=1} (z^*Az) \\
&= \min_{\mathbf{T}\subset\mathbb{C}^r, \dim(\mathbf{T})=r-k+1} \cdot \max_{y\in\mathbf{T}, y^*\cdot y=1} (y^*By) = \mu_k
\end{aligned}$$

gdje je z u sredini jednakosti vektor zadnjih $(n-r)$ komponenata nula. Za $1 \leq k \leq r$, prema Courant-Fischer teoremu,

$$\begin{aligned}
\lambda_{k+n-r} &= \max_{\mathbf{S}\subset\mathbb{C}^n, \dim(\mathbf{S})=k+n-r} \cdot \min_{x\in\mathbf{S}, x^*\cdot x=1} (x^*Ax) \\
&\leq \max_{\mathbf{S}\subset\mathbb{C}^n, \dim(\mathbf{S})=k+n-r} \cdot \min_{z\in\mathbf{S}, z^*\cdot z=1} (z^*Az) \\
&= \max_{\mathbf{S}\subset\mathbb{C}^r, \dim(\mathbf{S})=k} \cdot \min_{y\in\mathbf{S}, y^*\cdot y=1} (y^*By) = \mu_k.
\end{aligned}$$

□

2.5 Poincareov i Hornov teorem

Napomena 2.5. *Teorem o monotonosti, teorem o ispreplitanju i Courant-Fischerov teorem čine trojstvo teorema o svojstvenim i singularnim vrijednostima matrice.*

Teorem 2.9 (Poincareov teorem o razdvajanju za svojstvene vrijednosti)**.** *Neka je $A \in M_n$ hermitska matrica sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n$. Neka je B bilo koja matrica tipa $n \times k$ takva da je $B^* \cdot B = I_k$, tj. stupci od B predstavljaju skup ortonormiranih vektora. Neka je $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \cdots \geqslant \mu_k$ svojstvena vrijednosti od matrice B^*AB. Tada je*

$$\lambda_i \geqslant \mu_i \geqslant \lambda_{i+n-k}, i = 1, 2, \ldots, k.$$

Dokaz teorema može se pronaći u [3].

Teorem 2.10 (Poincareov teorem o razdvajanju za singularne vrijednosti). *Neka je $A \in M_{m,n}$ sa singularnim vrijednostima*

$$\sigma_1(A) \geqslant \sigma_2(A) \geqslant \dots .$$

Neka su U i V dvije matrice tipa $m \times p$, odnosno $n \times q$, takve da je $U^* \cdot U = I_p$ i $V^* \cdot V = I_q$. Neka je $B = U^* \cdot A \cdot V$ sa singularnim vrijednostima

$$\sigma_1(B) \geqslant \sigma_2(B) \geqslant \dots .$$

Tada je $r = (m-p) + (n-q)$,

$$\sigma_i(A) \geqslant \sigma_i(B) \geqslant \sigma_{i+r}(A), i = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}.$$

Teorem 2.11 (Hornov teorem). *Neka je $A \in M_{mn}$ i $B \in M_{np}$. Neka je $q = \min\{m, n, p\}$, $r = \min\{m, n\}$, $s = \min\{n, p\}$ i $t = \min\{m, p\}$. Neka su*

$$\sigma_1(A) \geqslant \sigma_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_r(A) \ (\geqslant 0),$$

$$\sigma_1(B) \geqslant \sigma_2(B) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_s(B) \ (\geqslant 0),$$

$$\sigma_1(AB) \geqslant \sigma_2(AB) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_t(AB) \ (\geqslant 0),$$

singularne vrijednosti od A, B i AB redom. Tada

$$\textstyle\prod_{j=1}^{i} \sigma_j(AB) \geqslant \prod_{j=1}^{i} \sigma_j(A)\sigma_j(B), \ i = 1, 2, \dots, q.$$

Ako su A i B kvadratne matrice istog reda, tj. $m = n = p$, tada jednakost vrijedi za $i = n$.

Dokaz. Dokaz se provodi u par koraka.

1. Neka je $AB = P\Delta Q^*$ dekompozicija na singularne vrijednosti od AB za neke unitarne matrice P i Q reda m i n redom. Element na poziciji (k, k) matrice Δ jednak je $\sigma_k(AB)$, $k = 1, 2, \dots, t$, a ostali unosi matrice Δ su nula.

2. Neka je $1 \geqslant i \geqslant q$. Pišemo $P = [P_1|P_2]$ i $Q = [Q_1|Q_2]$, gdje su P_1 i Q_1 tipa $m \times i$ i $p \times i$ redom. Promotrimo, $P_1^*(AB)Q_1$ reda i je glavna submatrica od $P^*(AB)Q$. Stoga, $P_1^*(AB)Q_1 = \operatorname{diag}\{\sigma_1(AB), \sigma_2(AB), \dots, \sigma_i(AB)\}$, i

$$\det(P_1^* ABQ_1) = \textstyle\prod_{j=1}^{i} \sigma_j(AB).$$

3. Želimo se fokusirati na matricu BQ_1, tipa $n \times i$. Prema teoremu o polarnoj dekompoziciji, možemo pronaći dvije matrice X tipa $n \times i$ i W reda i takve da X ima ortonormirane stupce, W je pozitivno definitna matrica i $BQ_1 = XW$. Primijetimo da $W^2 = (BQ_1)^*(BQ_1) = Q_1^* B^* B Q_1$. Stoga,

$$\begin{aligned}\det(W^2) =& \text{produkt korijena svojstvenih vrijednosti od W} \\ =& \text{produkt svojstvenih vrijednosti od } Q_1^* B^* B Q_1 \\ =& \prod_{j=1}^{i} \sigma_j(Q_1^* B^* B Q_1).\end{aligned}$$

(Singularne i svojstvene vrijednosti su iste za pozitivno semidefinitnu matricu). Prema Poincareovom teoremu slijedi

$$\prod_{j=1}^{i} \sigma_j[Q_1^* B^* B Q_1] \geqslant \prod_{j=1}^{i} \sigma_j(B^* B) = \prod_{j=1}^{i} \sigma_j^2(B).$$

4. Fokus je na matrici $P_1^* AX$. To je kvadratna matrica reda i. Prema teoremu 2.3. i Poincareovom teoremu,

$$|\det(P_1^* AX)| = \prod_{j=1}^{i} \sigma_j(P_1^* AX) \geqslant \prod_{j=1}^{i} \sigma_j(A).$$

5. Kombinacijom svih koraka imamo

$$\prod_{j=1}^{i} \sigma_j(AB) = \det(P_1^* ABQ_1) = |\det(P_1^* ABQ_1)| = |\det((P_1^* AX)(W))|$$

$$= |\det(P_1^* AX)||\det(W)| \geqslant \prod_{j=1}^{i} \sigma_j(A)\sigma_j(B).$$

6. Za $m = n = p$, imamo

$$\prod_{j=1}^{i} \sigma_j(AB) = |\det(AB)| = |\det(A)| \cdot |\det(B)| = \prod_{j=1}^{i} \sigma_j(A)\sigma_j(B).$$

□

2.6 Von Neumannov teorem

Napomena 2.6. *Za kvadratnu matricu su trag matrice i suma svih svojstvenih vrijednosti iste.*

Propozicija 2.1. *Neka je $A \in M_{mn}$. Tada je $\operatorname{tr}(AX) = 0$ za svaku matricu X tipa $n \times m$ ako i samo ako je $A = 0$.*

Teorem 2.12. *Neka je $A \in M_n$. Tada je $\operatorname{tr}(AX) = 0$ za sve hermitske matrice X ako i samo ako je $A = 0$.*

Dokaz teorema se može pronaći u [3].

Teorem 2.13. *Neka je $A \in M_n$. Tada je $\operatorname{tr}(AX)$ realan za sve hermitske matrice X ako i samo ako je A hermitska.*

Dokaz. $\Leftarrow$ Pretpostavimo da su $A = [a_{ij}]$ i $X = [x_{ij}]$ hermitske. Promotrimo

$$\operatorname{tr}(AX) = \textstyle\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_{ji}.$$

Za A i X hermitske, a_{ii} i x_{ii} su realni za svaki i. Stoga, $a_{ii}x_{ii}$ su realni za svaki i. Neka je $i \neq j$. Pišemo $a_{ij} = a + \mathrm{i}b$ i $x_{ji} = c + \mathrm{i}d$, gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Tada je

$$a_{ij}x_{ji} + a_{ji}x_{ij} = a_{ij}x_{ji} + \overline{a}_{ij}\overline{x}_{ji} = (a + \mathrm{i}b)(c + \mathrm{i}d) + (a - \mathrm{i}b)(c - \mathrm{i}d) = \\ 2(ac - bd) + \mathrm{i}(ad + bc) - \mathrm{i}(ad + bc) = 2(ac - bd)$$

što je i očito. Dakle, $\operatorname{tr}(AX)$ je realan.
$\Rightarrow$ Obratno, pretpostavimo da je $\operatorname{tr}(AX)$ realan za svaku hermitsku matricu X. Tada je

$$\operatorname{tr}(AX) = \overline{\operatorname{tr}(AX)} = \operatorname{tr}((AX)^*) = \operatorname{tr}(X^*A^*) = \operatorname{tr}(XA^*) = \operatorname{tr}(A^*X) \\ \Rightarrow \operatorname{tr}((A - A^*)X) = 0$$

za sve hermitske matrice X. Prema Teoremu 2.12., imamo $A - A^* = 0$, tj. A je hermitska. $\square$

Teorem 2.14. *Neka je $A \in M_m$ hermitska. Ako je $\operatorname{tr}(A) \geqslant \operatorname{Re}\operatorname{tr}(AU)$ za sve unitarne matrice U, tada je A pozitivno definitna matrica.*

Dokaz. Izvest ćemo spektralnu dekompoziciju matrice A. Neka je

$$A = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* + \cdots + \lambda_m u_m u_m^*,$$

gdje su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ svojstvene vrijednosti od A i $u_1, u_2, \ldots, u_m$ odgovarajući ortonormirani svojstveni vektori matrice A. To trebamo dokazati za svaki $\lambda_i \geqslant 0$. Pretpostavimo suprotno. Neka su neke od svojstvenih vrijednosti negativne. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \geqslant 0 \text{ i } \lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \ldots, \lambda_m < 0,$$

za neki $1 \leq r \leq n$. Neka je

$$B = \lambda_1 u_1 u_1^* + \lambda_2 u_2 u_2^* + \cdots + \lambda_r u_r u_r^*,$$
$$C = -\lambda_{r+1} u_{r+1} u_{r+1}^* - \lambda_{r+2} u_{r+2} u_{r+2}^* - \cdots - \lambda_m u_m u_m^*,$$
$$U = u_1 u_1^* + u_2 u_2^* + \cdots + u_r u_r^* - u_{r+1} u_{r+1}^* - u_{r+2} u_{r+2}^* - \cdots - u_m u_m^*.$$

Primijetimo da su B i C pozitivno definitne, $C \neq 0$, $A = B - C$, U je hermitska i unitarna. Inače, $AU = B + C$. Također,

$$\mathrm{tr}\,(A) = \mathrm{tr}\,(B) - \mathrm{tr}\,(C) \geqslant \mathrm{tr}\,(AU) = \mathrm{tr}\,(B) + \mathrm{tr}\,(C).$$

Ta nejednakost je moguća samo ako je $\mathrm{tr}\,(C) = 0$. Budući da je C pozitivno definitna, to je moguće samo ako je $C = 0$. Time dolazimo do kontradikcije. $\square$

Teorem 2.15. *Neka je $A \in M_m$ sa singularnim vrijednostima*

$$\sigma_1(A) \geqslant \sigma_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_m(A),$$

i dekompozicijom na singularne vrijednosti $A = P\Delta Q$, gdje su P i Q unitarne matrice, a $\Delta = \mathrm{diag}\,\{\sigma_1(A), \sigma_2(A), \ldots, \sigma_m(A)\}$. Neka je $\mathbb{U}_m$ skup svih unitarnih matrica reda m. Tada je

$$\max_{U \in \mathbb{U}_m} Re\ tr(AU) = \textstyle\sum_{i=1}^m \sigma_i(A)$$

i postiže se maksimum na $U_0 = Q^* P^*$. (U_0 ne mora biti jedintven)

Dokaz. Neka je $U \in \mathbb{U}_m$. Izračunajmo

$$\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(AU) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(P\Delta QU) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(\Delta QUP) = \mathrm{Re}\textstyle\sum_{i=1}^m \sigma_i(A)[QUP]_{ii},$$

gdje je $[QUP]_{ii}$ i-ti dijagonalni element matrice QUP. Budući da je unitarna matrica $|[QUP]_{ii}| \leq 1$ za svaki i. Stoga,

$$|\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(AU)| \leq \textstyle\sum_{i=1}^m \sigma_i(A)|[QUP]_{ii}| \leq \sum_{i=1}^m \sigma_i(A).$$

Izračunajmo posebno,

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(AU_0) &= \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(P\Delta QQ^*P^*) = \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(\Delta QQ^*P^*P) \\ &= \mathrm{Re}\,\mathrm{tr}\,(\Delta) = \sum_{i=1}^m \sigma_i(A).\end{aligned}$$

Stoga, $AU_0 = P\Delta P^*$ je očito pozitivno definitna matrica. $\square$

Teorem 2.16 (Von Neumannov teorem)**.** *Neka su* $A \in M_{mn}$ *i* $B \in M_{nm}$ *takve da je* AB *i* BA *pozitivno definitne matrice. Neka je* $p = \min\{m, n\}$, $q = \max\{m, n\}$,

$$\sigma_1(A) \geqslant \sigma_2(A) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_p(A) \ i \ \sigma_1(B) \geqslant \sigma_2(B) \geqslant \cdots \geqslant \sigma_p(B)$$

singularne vrijednosti od A *i* B *redom. Neka je*

$$\sigma_{p+1}(A) = \sigma_{p+2}(A) = \cdots = \sigma_q(A) = 0;$$
$$\sigma_{p+1}(B) = \sigma_{p+2}(B) = \cdots = \sigma_q(B) = 0.$$

Tada postoji permutacija τ *od* $\{1, 2, \ldots, q\}$ *takva da je*

$$\mathrm{tr}\,(AB) = \mathrm{tr}\,(BA) = \textstyle\sum_{i=1}^{q} \sigma_i(A)\sigma_{\tau(i)}(B).$$

Dokaz teorema može se pronaći u [3].

Literatura

[1] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] Z. Franušić, J. Šiftar, Linearna algebra 1, skripta za nastavničke studije na PMF-MO

[3] C. R. Rao, M. B. Rao Matrix Algebra and Its Applications to Statistics and Econometrics, World Scientific Publishing, Singapore, 2004.

[4] R. Scitovski, Geometrija ravnine i prostora, recenzirani nastavni materijali dostupni na web stranici Odjela za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2011.

[5] N. Truhar, Numerička linearna algebra, Odjel za matematiku, Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku, 2010.