Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Antonio Vidaković

Upravljivost LTI sustava

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike i računarstva

Antonio Vidaković

Upravljivost LTI sustava

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Zoran Tomljanović

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom završnom radu bavimo se temom upravljivosti linearno vremenski invarijantnih (LTI) sustava. Na početku ćemo navesti sve nužne definicije i teoreme potrebne za lakše razumijevanje gradiva. Definirat ćemo upravljivost i teoreme koje nam daju karakterizaciju te ju ilustrirati na primjeru. Na kraju ćemo objasniti regulatore i njihovu primjenu na LTI sustave.

Ključne riječi:
LTI, upravljivost, PBH test za upravljivost, Ljapunovljev test za upravljivost, regulatori

Abstract

In this final paper we deal with the subject of controllability of linear time invariant (LTI) systems. In the beginning we state all definitions and theorems necessary for easier understanding of the material. We will define controllability and theorems that give us characterization and illustrate it on example. In the end we will explain regulators and their application on LTI systems

Key words:
LTI, controllability, PBH test for controllability, Lyapunov test for controllability, regulators

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu razmatramo upravljivost linearno vremenski invarijantnih (LTI) sustava. LTI sustavi su sustavi koji su prisutni svuda oko nas u primijenjenoj matematici, električnim krugovima, teoriji upravljanja, robotici itd. Fizikalni sustavi se modeliraju po uzoru na matematičke jednadžbe. Za sustave koji ne sadrže uzorkovanje (kontinuirani sustavi), radije koristimo obične diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Za ovakve sustave je dostupno mnoštvo informacija za analizu i dizajn sustava ovakve vrste. Dobivene jednadžbe moraju točno modelirati fizikalne sustave koje reprezentiraju. Računanjem sila na pojedinim sustavima poput opruga, tijela u gibanju ili strujnim krugovima, gdje se koriste fizikalni zakoni za modeliranje, poput Newtonovog drugog zakona, dobivamo nelinearne sustave koje treba linearizirati. Cilj upravljivosti LTI sustava je dokazati da je s danim upravljanjem sustav moguće dovesti u željena stanja, dok je cilj regulatora dovesti upravljive sustave u ta stanja.

2 Osnovni pojmovi

U početku ćemo se usredotočiti na definicije i teoreme koji su potrebni za razumijevanje pojma upravljivosti.

2.1 Definicija LTI sustava

Definicija 2.1.1. Kontinuirani vremenski (state-space) linearni sustav je definiran s dvije jednadžbe:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^k, \\ y = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad y \in \mathbb{R}^m, \end{cases} \tag{1}$$

pri čemu $x : [0, +\infty >\to \mathbb{R}^n$ označava trenutno stanje sustava, $u : [0, +\infty >\to \mathbb{R}^k$ označava ulaz sustava, a $y : [0, +\infty >\to \mathbb{R}^m$ izlaz sustava.

Primjedba 1. Kada je ulaz skalar, tj. $(k = 1)$, sustav zovemo single-input (SI), a u suprotnom je sustav multi-input (MI). Slično, kada je izlaz skalar, tj. $(m = 1)$, sustav nazivamo single-output (SO), a u suprotnom multi-output (MO).

Definicija 2.1.2. U slučaju kada su $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ konstantne $\forall t \geq 0$, sustav (1) se zove linearno vremenski invarijantnim LTI sustavom, te vrijedi,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t), \\ y(t) = Cx(t) + Du(t). \end{cases} \tag{LTI}$$

U nastavku ćemo raditi s LTI sustavima.

Definicija 2.1.3. Homogene vremenski invarijantne sustave definiramo na sljedeći način:

$$\dot{x} = Ax(t),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Stabilnost LTI sustava se definira preko sustava (2).

Teorem 2.1.4. ***(Stabilnost sustava preko svojstvenih vrijednosti)*** *Sustav (2) je asimptotski stabilan ako i samo ako sve svojstvene vrijednosti matrice A imaju strogo negativne realne dijelove.*

Više informacija o stabilnosti možete pronaći u [1].

Teorem 2.1.5. ***(Ljapunovljeva stabilnost)*** *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Sustav (2) asimptotski stabilan.*
2. *Za svaku pozitivno definitnu matricu Q, postoji jedinstveno rješenje P sljedeće Ljapunovljeve jednadžbe*

   $$A^T P + PA = -Q.$$

   Štoviše, P je simetrična pozitivno definitna matrica.

Dokaz. Dokaz se može naći u [1]. □

Kako bi bolje shvatili LTI sustave važno nam je znati kako se slični sustavi ponašaju za slične ulaze.

2.2 Ekvivalencija sustava

Primjenom Laplaceove transformacije na LTI sustav dobivamo sustav

$$\begin{cases} s\hat{x}(s) - x(0) = A\hat{x}(s) + B\hat{u}(s) \\ \hat{y}(s) = C\hat{x}(s) + D\hat{u}(s) \end{cases}. \tag{3}$$

Rješavanjem jednadžbe sustava (3) dobivamo:

$$(sI - A)\hat{x}(s) = x(0) + B\hat{u}(s)$$
$$\hat{x}(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}B\hat{u}(s).$$

Uvrštavanjem danog izraza u drugu jednadžbu sustava (3) dobivamo:

$$\begin{aligned} \hat{y}(s) &= C(sI - A)^{-1}B\hat{u}(s) + C(sI - A)^{-1}x(0) + D\hat{u}(s) \\ &= \left[C(sI - A)^{-1}B + D\right]\hat{u}(s) + C(sI - A)^{-1}x(0) \end{aligned}$$

Iz ove jednadžbe vrijednost koji stoji uz $\hat{u}(s)$ nazivamo funkcijom prijenosa i označavamo s $\hat{G}$, tj.

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Definicija 2.2.1. (Realizacija) Za danu funkciju prijenosa $\hat{G}(s)$. Kažemo da je sustav

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

realizacija od $\hat{G}(s)$ ako je:

$$\hat{G}(s) = C(sI - A)^{-1}B + D.$$

Definicija 2.2.2. Reći ćemo da su dva sustava (u prostoru stanja) ekvivalentna s obzirom na stanje 0 ako realiziraju istu funkciju prijenosa $\hat{G}(s)$.

Definicija 2.2.3. Za dana dva LTI sustava:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t) \\ y(t) = Cx(t) + D(t) \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \bar{A}x(t) + \bar{B}(t) \\ y(t) = \bar{C}x(t) + \bar{D}u(t) \end{cases}$$

kažemo da su algebarski ekvivalentna ako postoji regularna matrica T tako da vrijedi

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB, \quad \bar{C} = CT^{-1}, \quad \bar{D} = D.$$

Svojstva algebarski ekvivalentnih sustava prema [1]:

1) Za proizvoljan ulaz u, oba sustava imat će isti skup izlaza.

2) Sustavi su ekvivalentni s obzirom na stanje 0, naime:

$$\bar{C}(sI - \bar{A})^{-1}\bar{B} = CT^{-1}(sI - TAT^{-1})^{-1}TB =$$

$$= CT^{-1}T(sI - A)^{-1}T^{-1}TB = C(sI - A)^{-1}B.$$

Više o funkciji prijenosa i ekvivalenciji sustava možete pronaći u [1].

Rješenje LTI sustava nam govori koje će vrijednosti sustav postići za dane ulaze.

2.3 Definicija rješenja LTI sustava

Definicija 2.3.1. Matrična eksponencijalna funkcija za $m \times m$ matricu M je dana s

$$e^M = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} M^k.$$

Svojstva:

i) Funkcija e^{tA} je jedinstveno rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}, \quad e^{0 \cdot A} = I, \forall t \geq 0$$

ii) $\forall t,\ \tau \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$e^{tA}e^{\tau A} = e^{A(t+\tau)}$$

iii) $\forall t \in \mathbb{R}$ e^{tA} je regularna i vrijedi

$$(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$$

iv)

$$e^{(A+B)t} = e^{tA}e^{tB} \iff AB = BA$$

v) Za regularnu matricu P vrijedi

$$e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^{A}P$$

Teorem 2.3.2. *(Rješenje LTI sustava) Rješenje problema LTI sustava:*

$$LTI \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + B(t), \quad x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) + D(t) \end{cases}$$

je dano sa:

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$$

$$y(t) = Ce^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{(t-\tau)A}Bu(\tau)d\tau + Du(t)$$

Teorem 2.3.3. *(**Hamilton-Cayley Teorem**) Za svaku $n \times n$ matricu A,*

$$\Delta(A) = A^n + a_1A^{n-1} + a_2A^{n-2} + \cdots + a_{n-1}A + a_nI_{n\times n} = 0_{n\times n}$$

gdje je

$$\Delta(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

karakteristični polinom matrice A. Dokaz navedenog teorema se može pronaći u [3].

Teorem 2.3.4. *Za proizvoljnu kvadratnu matricu A reda n postoji n skalarnih funkcija $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ takvih da vrijedi:*

$$e^{tA} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i(t)A^i, \forall t \in \mathbb{R}$$

Dokaz. Ako je karakteristični polinom dan jednadžbom:

$$\Delta(s) = s^n + a_1s^{n-1} + a_2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}s + a_n$$

Iz teorema 2.3.3. dobivamo:

$$A^n = -a_1A^{n-1} - a_2A^{n-2} - \cdots - a_{n-1}A - a_nI_{n\times n} / \cdot A$$

$$A^{n+1} = -a_1A^n - a_2A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}A^2 - a_nA$$

$$A^{n+1} = -a_1(-a_1A^{n-1} - a_2A^{n-2} - \cdots - a_{n-1}A - a_nI_{n\times n}) - a_2A^{n-1} - \cdots - a_{n-1}A^2 - a_nA$$

$$A^{n+1} = (a_1^2 - a_2)A^{n-1} + (a_1a_2 - a_3)A^{n-2} + \cdots + (a_1a_{n-1} - a_n)A + a_1a_nI_{n\times n}$$

Analogno A^k možemo zapisati kao:

$$A^k = \overline{a}_{n-1}^{(k)}A^{n-1} + \overline{a}_{n-2}^{(k)}A^{n-2} + \cdots + \overline{a}_1^{(k)}A + \overline{a}_0^{(k)}I_{n\times n}$$

Uvrstimo dobiveni izraz u definiciju od e^{tA}:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\overline{a_i}^{(k)}t^k}{k!}A^i \\ &= \sum_{i=0}^{n-1}(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_i}^{(k)}t^k}{k!})A^i. \end{aligned}$$

Traženi izraz dobivamo definiranjem funkcija:

$$\alpha_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\overline{a_i}^{(k)}t^k}{k!}, \forall i, 0 \leq i \leq n-1.$$

Time smo e^{tA} zapisali u traženom obliku:

$$e^{tA} = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(t)A^i.$$

□

3 Upravljivost sustava

U ovom poglavlju dajemo definiciju upravljivosti i dokazujemo važne teoreme koji nam daju karakterizaciju upravljivosti sustava.

3.1 Definicija upravljivosti

Definicija 3.1.1. Za sustav kažemo da je upravljiv ako iz počevši iz proizvoljnog stanja $x(0)$ sustav možemo dovesti u proizvoljno stanje $x_1 = x(t_1)$ u konstantnom vremenu t_1 uz pravilan odabir ulaza $u(t)$, $0 \leq t \leq t_1$.

Teorem 3.1.2. *Za matrice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $m \leq n$, sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

i) LTI je upravljiv.

ii) Matrica

$$C_M = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B],\ C_M \in \mathbb{R}^{n\times nm},$$

je punog ranga.

iii) Matrica

$$W_C = \int_{t_0}^{t_1} e^{At}BB^Te^{A^Tt}dt$$

je regularna za $\forall t_1 > 0$.

Dokaz. $t_0 = 0, x(t_0) = x_0$
$i) \Rightarrow ii)$. Pretpostavimo suprotno, tj. vrijedi $i)$ i $rang(C_M) < n$.
Iz Teorema 2.3.2. $\Rightarrow$ $x(t_1) = e^{t_1A}x_0 + \int_0^{t_1} e^{(t_1-\tau)A}Bu(\tau)d\tau$
Koristeći teorem 2.3.4. dobivamo:

$$x(t_1) = e^{t_1A}x_0 + \int_0^{t_1}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i(t_1-\tau)A^iBu(\tau)d\tau$$

$$x(t_1) = e^{t_1A}x_0 + \sum_{i=1}^{n-1}A^iB\int_0^{t_1}\alpha_i(t_1-\tau)u(\tau)d\tau$$

$$x(t_1) - e^{t_1A}x_0 = \sum_{i=1}^{n-1}A^iB\int_0^{t_1}\alpha_i(t_1-\tau)u(\tau)d\tau.$$

Iz ovoga vidimo $x(t_1) - e^{t_1A}x_0$ možemo zapisati kao linearnu kombinaciju blokova B, AB, A^2B, ..., $A^{n-1}B$. Blokovi B, AB, A^2B, ..., $A^{n-1}B$ su elementi matrice C_M, a matrica C_M nije punog ranga, iz tog zaključujemo da se neki $x(t_1)$ ne može dostići, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je LTI upravljiv.
$ii) \Rightarrow iii)$. Pretpostavimo suprotno, tj. $\mathrm{rang}(C_M) = n$ i W_C nije regularna.

$$\exists v \neq 0,\ W_Cv = 0 \Rightarrow v^TW_Cv = 0$$

$$\int_0^{t1} v^Te^{At}BB^Te^{A^Tt}vdt = 0, \quad C(t) = B^Te^{A^Tt}v$$

$$\int_0^{t1} C^T(t)C(t)dt = 0$$

$$\int_0^{t1} ||C(t)||^2\,dt = 0$$

Ovdje imamo integral nenegativne funkcije iz čega zaključujemo da mora vrijediti:

$$C^T(t) = 0, \quad 0 \leq t \leq t_1.$$

$$C^T(0) = 0 \Rightarrow v^TB = 0$$

$$\frac{d}{dt}C^T(t)\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow v^TAB = 0$$

$$\frac{d^2}{dt^2}C^T(t)\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow v^T A^2 B = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}C^T(t)\Big|_{t=0} = 0 \Rightarrow v^T A^{n-1} B = 0$$

Iz ovoga vidimo da je v okomit na $B, AB, \dots, A^{n-1}B$, a to se može dogoditi samo ako je $v = 0$. Prema tome, došli smo do suprotnosti s pretpostavkom, tj. zaista $ii) \Rightarrow iii)$.
$iii) \Rightarrow i)$: Trebamo pokazati da regularnost matrice W_C povlači upravljivost, tj. možemo odrediti upravljanje $u(t)$ takvo da vrijedi $x(t_1) = x_1$. Stoga, ako uvedemo upravljanje

$$u(t) = B^T e^{A^T(t_1-t)} W_C^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1),$$

tada vrijedi

$$x(t_1) = e^{t_1 A}x_0 + \int_0^{t_1} e^{(t_1-\tau)A} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} W_C^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1) d\tau$$

$$x(t_1) = e^{t_1 A}x_0 + \int_0^{t_1} e^{(t_1-\tau)A} B B^T e^{A^T(t_1-\tau)} d\tau W_C^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1), \quad \bar{t} = t_1 - \tau,\ d\bar{t} = -d\tau$$

$$x(t_1) = e^{t_1 A}x_0 - \int_{t_1}^{0} e^{\bar{t}A} B B^T e^{A^T \bar{t}} d\tau W_C^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1)$$

$$x(t_1) = e^{t_1 A}x_0 + W_C W_C^{-1}(-e^{t_1 A}x_0 + x_1)$$

$$x(t_1) = x_1$$

Time smo dokazali tvrdnju da pretpostavka $iii)$ povlači pretpostavku $i)$, tj, regularnost matrice W_C povlači uvjet upravljivosti. □

Primjedba 2.

1. Matrica W_c je simetrična pozitivno-semidefinitna matrica.

2. Upravljanje gledamo kao upravljivost para (A, B).

3. Ako postoji regularna matrica T takva da vrijedi definicija algebarska ekvivalencija sustava (definicija 2.2.3.), tj.

$$\bar{A} = TAT^{-1}, \quad \bar{B} = TB$$

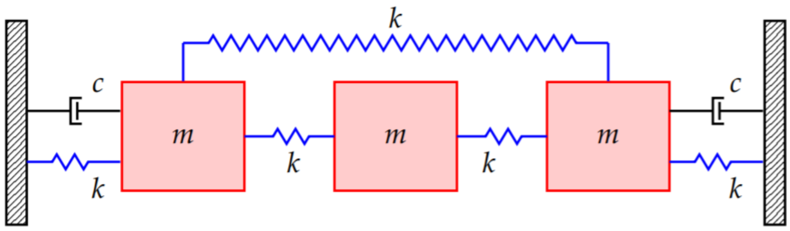
onda za upravljivost para vrijedi:

$$\bar{C_M} = [\bar{B},\ \bar{A}\bar{B},\ \bar{A}^2\bar{B},\ \dots,\ \bar{A^{n}}^{-1}\bar{B}] = [TB,\ TAB,\ TA^2B,\ \dots,\ TA^{n-1}B]$$

$$= T[B,\ AB,\ A^2B,\ \dots,\ A^{n-1}B].$$

Iz ovog vidimo da za algebarski ekvivalentne sustave vrijedi da ako je jedan sustav upravljiv onda je i drugi sustav upravljiv.

Primjer 1. *Pokažimo da je sustav sa slike*



Slika 1: Oscilator

gdje su $m = 1$, $c = 1$ i $k = 1$ konstante. Koristeći prethodni teorem možemo pokazati da je sustav:

a) neupravljiv ako je upravljanje $\vec{u_1}$ postavljeno na 1. i 3. masu

b) upravljiv ako svaka masa ima svoje upravljanje $\vec{u_i}$, $i = 1, 2, 3$.

Za ovaj LTI vrijedi:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix}, \quad \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow n = 6$$

x_1,x_2 i x_3 označavaju položaje masa, $\dot{x}_1$,$\dot{x}_2$ i $\dot{x}_3$ brzine masa, a $\ddot{x}_1$,$\ddot{x}_2$ i $\ddot{x}_3$ njihove akceleracije.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}P \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{6\times 6}, \quad M = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 3.0 & -1.0 & -1.0 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ -1.0 & -1.0 & 3.0 \end{bmatrix}, \quad P = \begin{bmatrix} 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

$$B_a = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.0 \\ 0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad B_b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1.0 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Gdje je B_a matrica za slučaj a), a B_b matrica za slučaj b).
Računanjem ranga matrice C_M u Matlabu koristeći naredbu $rank(crtb(A, B))$, dobivamo:

a) $rang(C_M) = 4 < n \Rightarrow$ sustav nije upravljiv,

b) $rang(C_M) = 6 = n \Rightarrow$ sustav je upravljiv.

3.2 Upravljivost pomoću svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora

Definicija 3.2.1. Neka je dana $n \times n$ matrica A i $\mathcal{V}$ potprostor od $\mathbb{R}^n$. Kažemo da je $\mathcal{V}$ A invarijantan ako $\forall v \in \mathcal{V} \Rightarrow Av \in \mathcal{V}$.

Lema 1. *Za $n \times n$ matricu A i ne nul potprostor $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$ koji je A invarijantan vrijedi:*

i) Ako stupci $n \times k$ matrice V razapinju bazu za $\mathcal{V}$, tada postoji matrica $\bar{A}$ takva da je $AV = V\bar{A}$.

ii) $\mathcal{V}$ sadrži barem jedan svojstveni vektor od A.

Dokaz. i) Neka je matrica $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{bmatrix}$ matrica čiji stupci razapinju bazu za $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^n$. Kako je $\mathcal{V}$ A invarijantan tada $\forall v_i$, $i = 1, 2, \dots, k$ vrijedi $Av_i \in \mathcal{V}$. Kako stupci matrice V razapinju bazu za $\mathcal{V}$ i $Av_i \in \mathcal{V}$, tada Av_i možemo prikazati kao linearnu kombinaciju vektora baze V:

$$Av_i = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{a}_{i1} \\ \bar{a}_{i2} \\ \dots \\ \bar{a}_{ik} \end{bmatrix} = V\bar{a}_i,\ i = 1, 2, \dots, k.$$

Ovo je ekvivalentno s činjenicom:

$$\begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 & \dots & Av_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V\bar{a}_1 & V\bar{a}_2 & \dots & V\bar{a}_k \end{bmatrix}.$$

Direktno iz matričnog množenja možemo izlučiti matrice A i V i time dobivamo:

$$A \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_k \end{bmatrix} = V \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \bar{a}_2 & \dots & \bar{a}_k \end{bmatrix}.$$

Iz preostalih matrica dobivamo:

$$AV = V\bar{A}.$$

Time smo dokazali tvrdnju *i)*.

ii) Neka je $\bar{v}$ svojstveni vektor matrice $\bar{A}$, tj. $A\bar{v} = \lambda\bar{v}$, $\bar{v} \neq 0$. Tada koristeći prethodnu tvrdnju pomnoženu s vektorom $\bar{v}$ vrijedi:

$$AV\bar{v} = V\bar{A}\bar{v} = \lambda V\bar{v}$$

Vektor $V\bar{v} \neq 0$ jer je dobiven linearnom kombinacijom vektora baze za $\mathcal{V}$ i ne nul vektora, $\bar{v}$, pa smo odredili svojstveni vektor od A koji se nalazi u $\mathcal{V}$.

□

Više detalja može se pronaći u [3].

Teorem 3.2.2. ***(Provjera upravljivosti pomoću svojstvenog vektora)*** *LTI sustav je upravljiv ako i samo ako ne postoji svojstveni vektor matrice A^T koji je u $Ker(B^T)$, tj.*

$$A^T x = \lambda x, x \neq 0 \Rightarrow B^T x \neq 0.$$

Dokaz. (⇒) Pretpostavimo suprotno, tj. LTI sustav je upravljiv i

$$\exists v : \; A^T v = \lambda v, \; v \neq 0, \; B^T v = 0.$$

Pogledajmo skalarnu funkciju $\alpha(t)$ definiranu na sljedeći način:

$$\alpha(t) = v^T x(t).$$

Derivacijom funkcije $\alpha(t)$ dobivamo:

$$\dot{\alpha}(t) = v^T \dot{x}(t) = v^T(Ax(t) + Bu(t)) = (A^T v)^T x + (B^T v)^T u(t)$$

$$A^T v = (Av^T)^T = \lambda v^T, \; v^T B = (B^T v)^T = 0$$

$$\dot{\alpha}(t) = \lambda v^T x(t) = \lambda \alpha(t).$$

Ovo je skalarna jednadžba pa možemo zapisati rješenje

$$\alpha(t_1) = e^{\lambda(t_1 - t_0)} \alpha(t_0).$$

Ako promotrimo x_{t_0} koji je okomit na v, $x_{t_0} \not\perp v$, tj.

$$v^T x(t_0) \neq 0.$$

Iz ovoga po definiciji funkcije α vrijedi

$$\alpha(t_0) = v^T x(t_0) \neq 0.$$

Iz čega, po skalabilnosti jednadžbe vrijedi

$$\alpha(t_1) = e^{t_1 - t_0} \alpha(t_0) \neq 0$$

I ponovnom primjenom definicije funkcije α vrijedi

$$v^T x(t_1) = \alpha(t_1) \neq 0.$$

Iz čega zaključujemo

$$x(t_1) \neq 0.$$

Dobiveni izraz je u kontradikciji s definicijom upravljanja jer sustav ne možemo u proizvoljno stanje $x(t_1) = 0$.

(⇐) Dokažimo ovu tvrdnju koristeći obrat po kontrapoziciji. Pretpostavimo da LTI nije upravljiv. Tada po teoremu 3.1.2. vrijedi

$$rang\, C_M < n \Rightarrow rang\, C_M^T < n$$

$$dim\, Ker\, C_M^T = n - rang\, C_M^T \geq 1$$

Dokažimo da je $Ker\, C_M^T\ A^T$ invarijantna:

$$v \in Ker\, C_M^T, \quad 0 = C_M^T v = \begin{bmatrix} B^T v \\ B^T A^T v \\ \vdots \\ B^T (A^T)^{n-1} v \end{bmatrix}$$

$$C_M^T A^T v = \begin{bmatrix} B^T A^T v \\ B^T (A^T)^2 v \\ \vdots \\ B^T (A^T)^n v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ B^T (A^T)^n v \end{bmatrix}$$

Kako se prema teoremu 2.3.3. $(A^T)^n$ može raspisati kao linearna kombinacija matrica I, A^T, ... , $(A^T)^{n-1}$, daljnjim raspisom dobivamo da je $B^T (A^T)^n v = 0$. Iz ovoga zaključujemo da je $C_M^T A^T v = 0$ i da je matrica C_M A invarijantna.
Ovime smo dokazali pomoćnu tvrdnju.

Budući da je $Ker\, C_M^T\ A^T$ invarijantna prema lemi 1. vrijedi da $Ker\, C_M^T$ sadrži barem jedan svojstveni vektor od A^T, tj.

$$\exists w \in Ker\, C_M^T \text{ takav da je } A^T w = \lambda w,\ w \neq 0$$

$$C_M^T w = 0 \Rightarrow B^T w = 0$$

Što znači da je vektor w svojstveni vektor od A^T koji je u jezgri od B^T i pokazali da naša tvrdnja ne vrijedi, tj. dokazali smo po obratu po kontrapoziciji. □

Teorem 3.2.3. ***(PBH test za upravljivost)*** *Sustav LTI je upravljiv ako i samo ako*

$$rang(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix}) = n, \forall \lambda \in \mathbb{C} \tag{4}$$

Dokaz. Prema teoremu o rangu i defektu vrijedi

$$dim\, Ker(\begin{bmatrix} A^T - \lambda I \\ B^T \end{bmatrix}) = n - rang(\begin{bmatrix} A - \lambda I & B \end{bmatrix})$$

$$(4) \iff dim\, Ker(\begin{bmatrix} A^T - \lambda I \\ B^T \end{bmatrix}) = 0, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$\iff Ker(\begin{bmatrix} A^T - \lambda I \\ B^T \end{bmatrix}) = \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : A^T x = \lambda x,\ B^T x = 0\}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

Kako ne postoji ne nul vektor x takav da je x svojstveni vektor od A^T koji je u jezgri od B^T, pa prema prethodnom teoremu možemo zaključiti da je sustav LTI upravljiv. □

Primjedba 3. Zbog teorema 3.2.2. dovoljno je provjeriti samo one λ koje odgovaraju svojstvenim svojstvenim vrijednostima matrice A, pa se uvjet $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ može zapisati jednostavnije kao $\forall \lambda \in \sigma(A)$, gdje $\sigma(A)$ označava spektar matrice A.

Primjer 2. *Provjerimo upravljivost Primjera 1. metodom provjere pomoću svojstvenog vektora i PBH testom. Izračunajmo svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore matrice A iz danog primjera. Svojstvene vrijednosti možemo izračunati Matlabovom funkcijom eig(A). Svojstvene vrijednosti i redom njima pridruženi svojstveni vektori:* $-0.5+1.9365\,\mathrm{i}$, $-0.5-1.9365\,\mathrm{i}$, $-0.2751+0.7534\,\mathrm{i}$, $-0.2751-0.7534\,\mathrm{i}$, $-0.2249+1.7489\,\mathrm{i}$, $-0.2249-1.7489\,\mathrm{i}$

$$\begin{bmatrix} -0.0791-0.3062\,\mathrm{i} \\ 0 \\ 0.0791+0.3062 \\ 0.6325 \\ 0 \\ -0.6325 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.0791+0.3062\,\mathrm{i} \\ 0 \\ 0.0791-0.3062\,\mathrm{i} \\ 0.6325 \\ 0 \\ -0.6325 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.3945+0.1084\,\mathrm{i} \\ -0.5232 \\ -0.3945+0.1084\,\mathrm{i} \\ 0.0268-0.327\,\mathrm{i} \\ 0.1439-0.3942\,\mathrm{i} \\ 0.0268-0.327\,\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0.3945-0.1084\,\mathrm{i} \\ -0.5232 \\ -0.3945-0.1084\,\mathrm{i} \\ 0.0268+0.327\,\mathrm{i} \\ 0.1439+0.3942\,\mathrm{i} \\ 0.0268+0.327\,\mathrm{i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1192+0.2013\,\mathrm{i} \\ -0.0467-0.3629\,\mathrm{i} \\ -0.1192+0.2013\,\mathrm{i} \\ -0.3252-0.2538\,\mathrm{i} \\ 0.6452 \\ -0.3252-0.2538\,\mathrm{i} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.1192-0.2013\,\mathrm{i} \\ -0.0467+0.3629\,\mathrm{i} \\ -0.1192-0.2013\,\mathrm{i} \\ -0.3252+0.2538\,\mathrm{i} \\ 0.6452 \\ -0.3252+0.2538\,\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

a) Za dano upravljanje B_a vrijednosti množenja sa svojstvenim vektorima pridruženim svojstvenim vrijednostima $-0.5+1.9365\,\mathrm{i}$ *i* $-0.5-1.9365\,\mathrm{i}$ *matrice A su jednake* 0, *tj.* $B_a^T v = 0$. *Ovo nam po teoremu* 3.2.2. *govori da sustav nije upravljiv. Dok za* $\lambda = -0.5-1.9365\,\mathrm{i}$ *vrijedi:* $\mathrm{rang}([A-\lambda, B]) = 5 \neq 6 = \mathrm{rang}(A)$, *i opet, prema teoremu* 3.2.3. *ovaj sustav nije upravljiv.*

b) Za dano upravljanje B_b rezultati množenja sa svojstvenim vektorima matrice A su svi različiti od nulvektora, tj. $B_b^T v \neq 0$ *za sve svojstvene vektore matrice A, pa nam teorem* 3.2.2. *govori da je sustav upravljiv. Za sve svojstvene vrijednosti λ od A rezultati od* $\mathrm{rang}([A-\lambda, B])$ *su jednaki* $6 = \mathrm{rang}(A)$, *i iz toga dobivamo upravljivost sustava prema teoremu* 3.2.3..

Teorem 3.2.4. ***(Ljapunovljev test za upravljivost)*** *Neka je A realna $n \times n$ matrica koja je stabilna. Sustav LTI je upravljiv ako i samo ako postoji jedinstvena pozitivno definitna matrica W koja rješava jednadžbu*

$$AW + WA^T = -BB^T \tag{5}$$

Štoviše,

$$W = \int_0^\infty e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} d\tau. \tag{6}$$

Dokaz. ($\Leftarrow$) Pretpostavimo da je $W > 0$, takva da vrijedi $AW + WA^T = -BB^T$. Pokažimo upravljivost LTI sustava.

$$x \neq 0,\ A^T x = \lambda x,$$

$$x^*(AW + WA^T)x = -x^* BB^T x = -\left\|B^T x\right\|^2,\ \left\|B^T x\right\|^2 > 0,$$

$$(A^T x)^* W x + x^* W A^T x = (\lambda x)^* W x + x^* W \lambda x = -\left\| B^T x \right\|^2,$$
$$(\lambda + \lambda^*) x^* W x = 2\Re(\lambda) x^* W x = -\left\| B^T x \right\|^2,$$
$$\Re(\lambda) < 0,\ x^* W x > 0 \ \Rightarrow\ B^T x \neq 0.$$

Stoga, prema teoremu 3.2.2. LTI sustav je upravljiv.
($\Rightarrow$) Neka je A realna stabilna matrica i LTI upravljiv sustav. Treba pokazati da $\exists! W$, $W > 0$, takav da je $AW + WA^T = -BB^T$.
Kako je A stabilna matrica onda je i A^T također stabilna te ako primijenimo supstitucije

$$\bar{A} = A^T \qquad \text{i} \qquad Q = BB^T$$

koristeći teorem 2.1.5.b) možemo zaključiti da je W uistinu jedinstveno rješenje ovog teorema.
Pokažimo pozitivnu definitnost matrice W. Neka je λ svojstvena vrijednost matrice A^T, te neka je $x \neq 0$ odgovarajući svojstveni vektor, tj. $A^T x = \lambda x$.
Onda

$$x^*(AW + WA^T)x = -x^* BB^T x = -\left\| B^T x \right\|^2, \left\| B^T x \right\|^2 > 0$$
$$(A^T x)^* W x + x^* W A^T x = \lambda^* x^* W x + \lambda x^* W x = -\left\| B^T x \right\|^2$$
$$2\Re(\lambda) x^* W x = -\left\| B^T x \right\|^2$$

$\Re(\lambda) < 0$, A stabilna matrica $\Rightarrow x^* W x > 0$, W je pozitivno definitna.

Još nam preostaje pokazati da je W rješenje jednadžbe

$$AW + WA^T = -BB^T.$$

Uvrstimo vrijednost W iz (6) u jednadžbu (5).

$$\begin{aligned} AW + WA^T &= \int_0^\infty A e^{A\tau} BB^T e^{A^T \tau} d\tau + \int_0^\infty e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau} A^T d\tau \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dt}(e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau}) dt \\ &= e^{A\tau} BB^T e^{A^T\tau}\Big|_{t=0}^{\infty} \\ &= 0 - BB^T = -BB^T \end{aligned}$$

□

Dodatna pojašnjenja pogledati u [1].

Primjer 3. *Na b) slučaju primjera 1. pokažimo primjer upravljivosti sustava preko teorema 2.2.4.. Matlabovom funkcijom* $lyap(A, B * B')$ *možemo izračunajmo matricu* W.

$$W = \begin{bmatrix} 0.5625 & 0.5000 & 0.4375 & -0.0000 & -0.2500 & 0.0000 \\ 0.5000 & 1.2500 & 0.5000 & 0.2500 & -0.0000 & 0.2500 \\ 0.4375 & 0.5000 & 0.5625 & -0.0000 & -0.2500 & 0.0000 \\ -0.0000 & 0.2500 & -0.0000 & 0.7500 & 0.0000 & 0.2500 \\ -0.2500 & -0.0000 & -0.2500 & 0.0000 & 1.5000 & -0.0000 \\ 0.0000 & 0.2500 & 0.0000 & 0.2500 & -0.0000 & 0.7500 \end{bmatrix}$$

Računanjem svojstvenih vrijednosti matrice W dobivamo vrijednosti 0.1250*,* 0.2750*,* 0.5000*,* 0.9576*,* 1.5000 *i* 2.0174*, sve svojstvenih vrijednosti su pozitivne što nam ilustrira tvrdnju prethodnog teorema.*

4 Regulatori

U ovom poglavlju govorit ćemo o tome što su regulatori i koji se regulatori često koriste u praksi. Cilj regulatora u smislu LTI sustava su upravljanja koja sustav dovode u željeno stanje u što manje vremena ili uz što manji utrošak energije.

4.1 PID (Proportional-Integral-Derivative) regulator

PID regulator može se razumjeti kao regulator koji u obzir uzima trenutnu, prošlu i buduću vrijednost pogreške u obzir. Regulator konstantno računa pogrešku i primjenjiva korekcije. Svrha regulatora je dovesti sustav iz trenutnog stanja $x(t)$ u traženo stanje r. Da dostignemo ovaj cilj, upravljanje koje manipuliramo, u, se mijenja na naredbu regulatora. Koja svojstva upravljanje u treba imati u PID regulatoru:

1. mala greška e daje mali u (nema pretjeranih reagiranja)

2. upravljanje u ne smije jako varirati

3. upravljanje u ne bi trebalo ovisiti o parametrima sustava (robusnost, npr. s obzirom na masu)

Grešku e definiramo kao razliku željene pozicije sustava, r, i trenutne pozicije sustava u vremenu t, $x(t)$.

$$e(t) = r - x(t)$$

P (proporcionalni) regulator definiramo kao:

$$P(t) = k_p e(t)$$

P regulator je proporcionalan trenutnoj pogrešci u trenutnom vremenu t.
I (integralni) regulator definiramo kao:

$$I(t) = k_i \int_0^t e(\tau) d\tau$$

I regulator je proporcionalan integralu pogreške do trenutnog vremena t.
D (derivativni) regulator definiramo kao:

$$D(t) = k_d \frac{de(t)}{dt}$$

D regulator je proporcionalan derivaciji pogreške u trenutnom vremenu t.
Gdje su k_p, k_i i k_d konstante.

Upravljanje u po PID regulatoru računamo:

$$u(t) = P + I + D = k_p e + k_i \int_0^t e(\tau)d\tau + k_d \frac{de(t)}{dt}.$$

Primjer jednog ovakvog sustava je bojler vode gdje bi x označavao trenutne temperature grijača i vode, a r željene topline grijača i vode. U ovakvom sustavu PID regulator mora prilagoditi grijanje s obzirom na temperaturu vode unutar bojlera, količinu vode koja protječe kroz njega i gubitak topline na okolinu.

4.2 Linearni kvadratični regulator (LQR)

Za LTI linearni kvadratični regulator je regulator kojem je problem odrediti upravljanje u tako da je kriterij

$$\int_0^\infty y^T(t)Qy(t) + u^T(t)Ru(t)dt \tag{7}$$

bude minimalan, pri čemu y i u su vektori koje zadaje LTI sustav, a Q i R su pozitivno definitne matrice. Energija ulaza se definira iz kriterija kao

$$\int_0^\infty u^T(t)Ru(t)dt,$$

a energija izlaza kao

$$\int_0^\infty y^T(t)Qy(t)dt.$$

Odnos Q i R se odnosi na energije ulaza i izlaza tako da ako je jedna od varijabli Q ili R puno veća od druge, onda za utjecaje energije ulaza i izlaza vrijedi obrnuto, to bi značilo da bismo za smanjenje utjecaja jedne od energija povećali utjecaj druge energije. Znači, ako želimo manji utjecaj energije ulaza sustava onda moramo povećati vrijednost R u odnosu na Q, dok ćemo pri tome povećati utjecaj energije izlaza sustava.

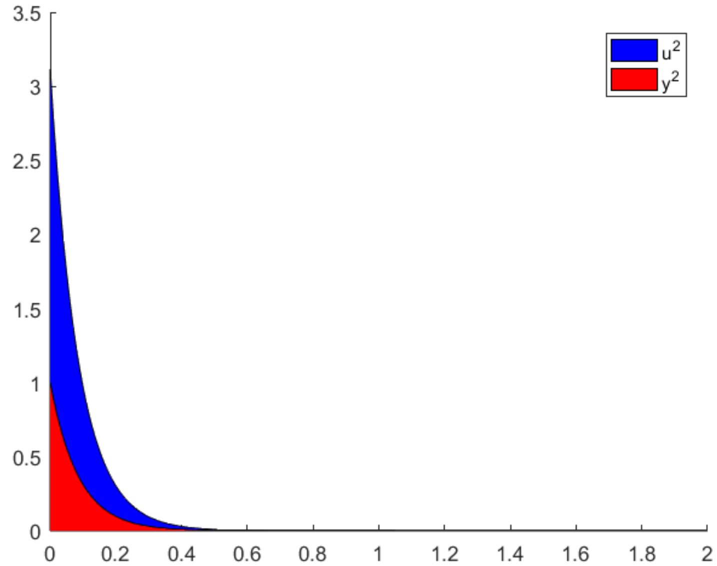
Primjer 4. *Za LTI*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 3x(t) + 5u(t) \\ y(t) &= x(t), \end{aligned}$$

pomoću Matlabove funkcije lqr možemo izračunati koeficijent K za optimalan ulaz LQR sustava uz matrice Q i R koje su jednake $Q = R = 1$. Optimalan ulaz LQR sustava za dani LTI sustav je jednak $u(t) = -Kx(t)$ pri čemu je $K = 1.7662$. Na kraju naš sustav izgleda:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -5.8310x(t) \\ y(t) &= x(t). \end{aligned}$$

Iz ovog sustava možemo izračunati energije optimalne energije ulaza i izlaza za dane vrijednosti Q i R:



Slika 2: Grafički prikaz za vrijednosti energija ulaza(plavo) i izlaza(crveno)

Plava površina označava energiju ulaza, a crvena površina energiju izlaza.

Primjer 5. *Promotrimo sustav iz primjera 1. uz primjenu PID regulatora. U sustavu želimo dovesti mase iz pozicija*

$$p_1 = 1, \qquad p_2 = 0, \qquad p_3 = 2,$$

gdje su p_1, p_2 *i* p_3 *redom početne pozicije masa s lijeva na desno, u pozicije željene pozicije masa*

$$p_1^{'} = 4, \qquad p_2^{'} = 6, \qquad p_3^{'} = 1.$$

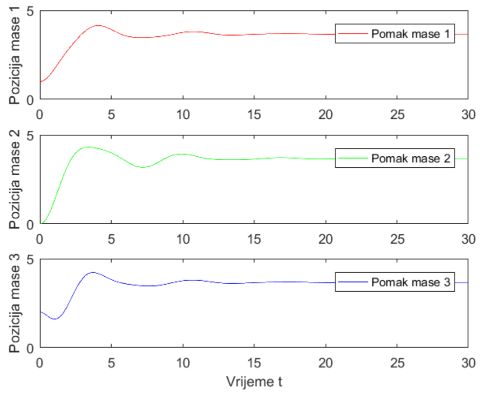
Prisjetimo se uvjeta koje smo imali:

a) upravljanje $\vec{u_1}$ *na 1. i 3. masu,*

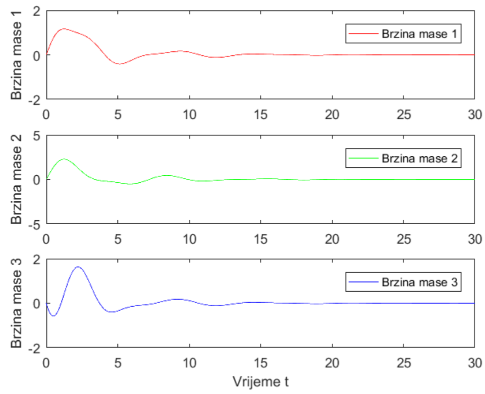
b) svaka masa ima zasebno upravljanje.

Prikazi položaja masa i njihovih brzina za dane slučajeve:

a)



(a) Pomaci masa za a)



(b) Promjene brzina za a)

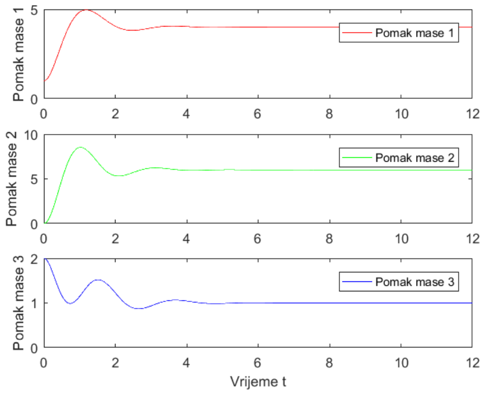
Slika 3: Promjene masa i brzina za slučaj a)

Iz slika 3.(*a*) *i* 3.(*b*) *vidimo kako se PID regulator s koeficijentima*

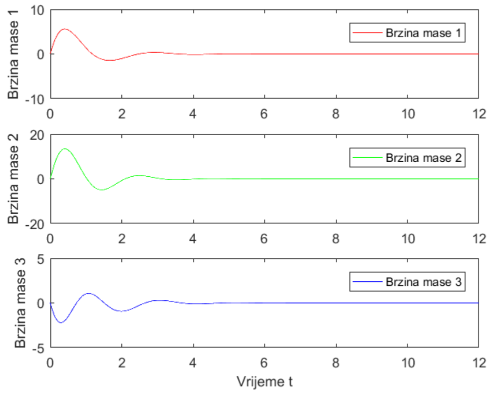
$$k_p = 1, \qquad k_i = 0.01, \qquad k_d = 1$$

zaustavio, ali ne na traženim vrijednostima p_1', p_2' *i* p_3', *što je i očekivano jer smo kroz prijašnje primjere pokazali da sustav nije upravljiv za dano upravljanje, pa regulator ne može dovesti sustav u sva željena stanja.*

b)



(a) Pomaci masa za b)



(b) Promjene brzina za b)

Slika 4: Promjene masa i brzina za slučaj b)

Iz slika 4.(*a*) *i* 4.(*b*) *vidimo kako se PID regulator s koeficijentima*

$$k_p = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{bmatrix}, \qquad k_i = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \qquad k_d = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix},$$

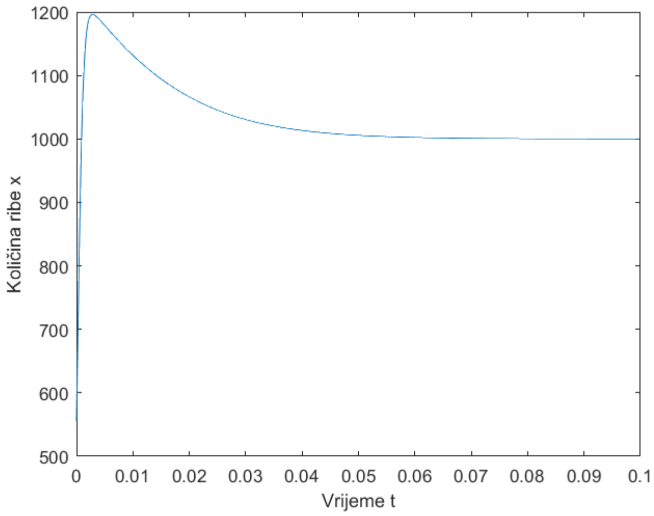
zaustavio na traženim vrijednostima $p_1^{'}$, $p_2^{'}$ i $p_3^{'}$, što je i očekivano jer smo kroz prijašnje primjere pokazali da je sustav upravljiv za dano upravljanje.

Primjer 6. *Primjer upravljanja logističkog modela (ekosustava ribe) zadanog formulom*

$$\dot{x}(t) = r(k - x(t))x(t) - u(t),$$

$$u(t) = P(t) + I(t) + D(t) = 17.5e(t) + 100000 \int_0^t e(\tau)d\tau + 0.004\frac{d}{dt}e(t),$$

pomoću PID regulatora. U ovom primjeru vrijednost k označava maksimalni broj riba u populaciji, r označava proporcionalan rast populacije, a x trenutni broj riba u populaciji



Slika 5: Graf kretanja količine riba u populaciji

Slika 5 prikazuje graf kretanja riba u populaciji ako je početna vrijednost populacije riba $x_0 = 500$, tražena vrijednost populacije $x = 1000$, maksimalna populacija $k = 1200$, a proporcionalan rast $r = 1.5$.

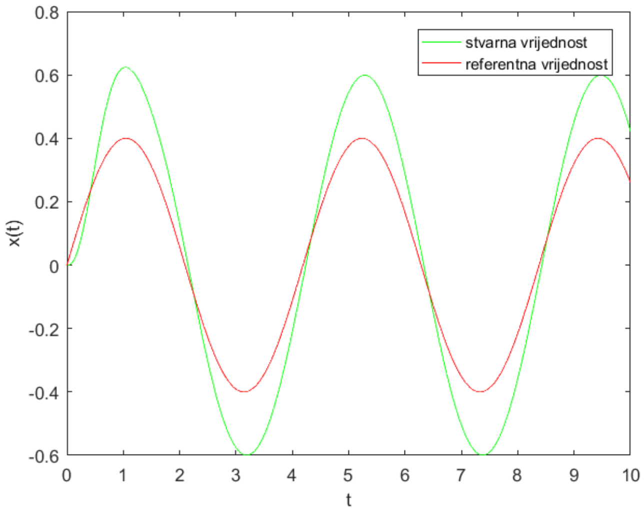
Primjer 7. *Prikaz PID regulatora sustava obrnutog njihala na kolicima čiji nagib prati sinusoidnu krivulju danu funkcijom $f(t) = 0.4\sin(1.5\,t)$ s korakom vremena 0.01. Matrice ovog sustava imaju vrijednosti:*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2gM}{2M+m} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{2g(M+m)}{2M+m} & 0 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{2M+m} \\ 0 \\ \frac{-1}{(2M+m)l} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad D = 0,$$

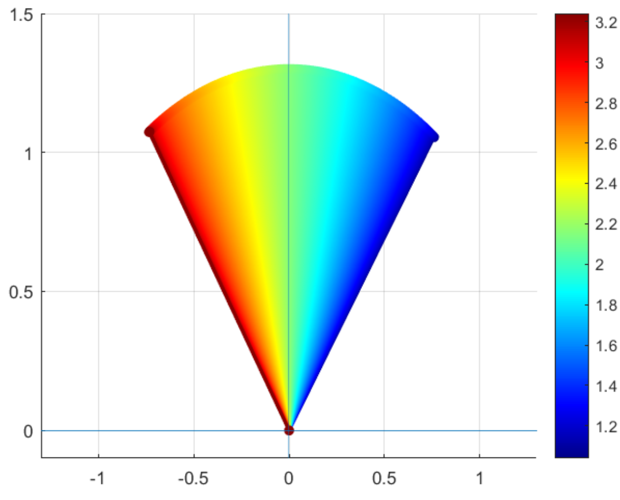
$$x = \begin{bmatrix} x_k \\ \dot{x}_k \\ \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}, \qquad u = \begin{bmatrix} u_1 \end{bmatrix},$$

za vrijednosti konstanti $k_p = -100$ $k_i = -0.001$ *i* $k_d = -10$. *U ovom primjeru* x_k *označava poziciju kolica,* $\dot{x}_k$ *brzinu kolica,* θ *kut odstupanja štapa od okomice na kolica,* $\dot{\theta}$ *kutnu brzinu štapa. Vrijednosti* g,M,m *i* l *su varijable sustava koje redom označavaju gravitacijsku konstantu,* 9.81, *masu kolica,* 1, *masu štapa,* 0.1 *i duljinu štapa,* 1.3.



Slika 6: Prikaz stvarnog kretanja štapa i funkcije koju bi trebao oponašati

Na slici 6. *zelena boja označava stvarnu poziciju sustava u vremenu* t, *a crvena boja označava sinusoidnu krivulju koju bi sustav trebao oponašati.*



Slika 7: Prikaz pozicija štapa u vremenu između amplitudnih vrijednosti

Na slici 7. *vidimo kretanje sustava između prvih amplitudnih vrijednosti u* $\frac{\pi}{4}$, *označenih plavom bojom, i* $\frac{3\pi}{4}$, *označenih crvenom bojom.*

Literatura

[1] J. P. Hespanha, Linear System Theory, Princeton University Press, 2009.

[2] B. N. Datta, Numerical Methods for Linear Control Systems, Northern Illinois University, 2003.

[3] D. Bakić, Linearna algebra, Zagreb, Školska knjiga, 2008.

[4] Heinz Unbehauen, CONTROL SYSTEMS, ROBOTICS AND AUTOMATION - Volume II: System Analysis and Control: Classical Approaches-II ,EOLSS Publications, 2009

[5] Charles L. Phillips; John H. Parr; Eve A. Riskin; Signals, Systems, and Transforms 4^{th} Edition, 2007.

[6] W. E. Boyce, R. C. DiPrima, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, 7^{th} edition, John Wiley and Sons, 2000.

[7] Mohammed Abdullah Saleh Salman, Dr. V.C.Borkar, Exponential Matrix and Their Properties, International Journal of Scientific and Innovative Mathematical Research (IJSIMR) Volume 4, Issue 1, January 2016, PP 53-63