

Konformna preslikavanja u stacionarnom provođenju topline

Bogut, Kristina

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:257443>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2021-09-21**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Department of Mathematics Osijek](#)



Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski sveučilišni studij matematike

Kristina Bogut

Konformna preslikavanja u stacionarnom provođenju topline

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J.Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Preddiplomski sveučilišni studij matematike

Kristina Bogut
Konformna preslikavanja u stacionarnom provođenju topline
Završni rad

Mentorica: izv.prof.dr.sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2020.

Sažetak

Cilj ovog rada je pokazati ulogu konformnih preslikavanja u stacionarnom provođenju topline. Konkretno, pokazat ćemo kako se konformna preslikavanja mogu koristiti u određivanju stacionarne raspodjele temperature na nekim dvodimenzionalnim objektima.

Ključne riječi: harmonijska funkcija, konformno preslikavanje, stacionarno provođenje topline, ploča

Abstract

This paper aims to show the role of conformal mapping in steady-state heat conduction. Concretely, we will show how to use conformal mappings in finding steady temperatures in various thin plates.

Key words: harmonic function, conformal mapping, steady-state heat conduction, plate

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Konformna preslikavanja	1
2.1	Osnovni pojmovi	1
2.2	Primjeri konformnih preslikavanja	3
3	Stacionarno provođenje topline	4
3.1	Stacionarna raspodjela temperature u gornjoj poluravnini . . .	7
3.2	Stacionarna raspodjela temperature ploče u trodimenzionalnom prostoru	8
3.3	Stacionarna raspodjela temperature u kvadrantu	10
4	Zaključak	11

1 Uvod

Provođenje topline ima veliku ulogu u dizajnu svega što nas okružuje. Primjerice, prilikom izgradnje kuće želimo koristiti materijale koji će nam osigurati ugodnu temperaturu u domu u svako doba godine uz minimalne troškove grijanja i hlađenja prostora. Stoga je bitno razumijeti koncept provođenja topline. U ovom radu ograničit ćemo se na stacionarno provođenje topline, tj. na provođenje koje ne ovisi o vremenu, te ćemo pretpostaviti da se toplinska energija ne gubi ni ne nastaje unutar čvrstog tijela, odnosno nema prisutnih izvora i ponora topline. Bavit ćemo se s dvodimenzionalnim problemom provođenja te pokazati kako se konformna preslikavanja mogu koristiti u određivanju stacionarne raspodjele temperature nekih dvodimenzionalnih objekata. Najprije ćemo navesti osnovne pojmove i rezultate iz kompleksne analize koje ćemo koristiti u glavnom dijelu rada, definirati konformno preslikavanje i navesti neke primjere. Zatim ćemo predstaviti formulu za gustoću toplinskog toka. Izvest ćemo Laplaceovu diferencijalnu jednadžbu za funkciju temperature u problemu dvodimenzionalnog stacionarnog toka topline, a onda izvesti formule za stacionarnu raspodjelu temperature u gornjoj poluravnini, na traci u trodimenzionalnom prostoru te u kvadrantu.

2 Konformna preslikavanja

Cilj ovog poglavlja je pojasniti pojmove iz kompleksne analize koje ćemo kasnije koristiti te nekoliko bitnih teorema na koje ćemo se pozvati. Dokazi se mogu pronaći u [1]. Također, detaljno ćemo objasniti konformna preslikavanja koja će nam trebati u izvodu formule za stacionarno provođenje topline.

2.1 Osnovni pojmovi

Objasnimo najprije što je to harmonijska funkcija, a što konformno preslikavanje. S Ω ćemo označiti jednostavno povezano područje u \mathbb{R}^2 ili u \mathbb{C} .

Definicija 1. Za funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je *harmonijska* ako je klase $C^2(\Omega)$ i zadovoljava Laplaceovu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Teorem 2.1. *Kompleksna funkcija $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ je derivabilna u točki $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ ako i samo ako su funkcije u i v , kao realne funkcije dviju realnih varijabli, diferencijabilne u (x_0, y_0) i zadovoljavaju Cauchy-Riemannove*

uvjete:

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial y} \quad i \quad \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0, y_0)}{\partial x}. \quad (2.1)$$

Korolar 2.2. Ako je $f = u + iv : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ derivabilna funkcija, a realne funkcije u i v klase $C^2(\Omega)$, onda su u i v harmonijske funkcije.

Funkcija $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zove se *harmonijski konjugat* funkcije $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ako je v klase $C^2(\Omega)$ i zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete (2.1). Funkcija v jedinstvena je do na konstantu i vrijedi da je funkcija $u + iv$ derivabilna na Ω .

Funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je *analitička funkcija* u $z_0 \in \Omega$ ako je derivabilna u svakoj točki iz okoline z_0 .

Promotrimo kompleksnu analitičku funkciju $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ koja točku a iz z -ravnine preslikava u točku $f(a)$ u w -ravnini. Pored toga, neka se krivulja l , kojoj pripada točka a preslika na krivulju L , kojoj pripada $f(a)$. Pretpostavimo da f ima derivaciju u točki a i $f'(a) \neq 0$. Broj $|f'(a)|$ zovemo *omjer preslikavanja*, a $\arg f'(a)$ zovemo *kut preslikavanja*. Ako se dvije glatke krivulje l_1 i l_2 u z -ravnini sijeku u točki a , a njihove slike L_1 i L_2 pod djelovanjem preslikavanja f se sijeku u $f(a)$, onda je kut između l_1 i l_2 jednak kutu između L_1 i L_2 .

Definicija 2. Za funkciju $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je *konformno preslikavanje* ako u svakoj točki domene čuva kuteve po veličini i orijentaciji.

Teorem 2.3. Neka je $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitička funkcija. Ako vrijedi $f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$, tada je f konformno preslikavanje.

Slijede teoremi koji će biti potrebni u izvođenju formule za stacionarnu raspodjelu temperature kojom ćemo se baviti u sljedećem poglavlju.

Teorem 2.4. Neka je $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ harmonijska funkcija koja preslikava područje D_z iz z -ravnine u područje D_w u w -ravnini. Ako je $h(u, v)$ harmonijska funkcija definirana na D_w , onda je funkcija $H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$ harmonijska na D_z .

Teorem 2.5. Pretpostavimo da je preslikavanje $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ konformno na glatkom luku C . Neka je $\Gamma = \{f(z) : z \in C\}$ i $H(x, y) = h(u(x, y), v(x, y))$. Ako za $h(u, v)$ vrijedi $h = h_0, h_0 \in \mathbb{R}$, onda za funkciju H vrijedi $H = h_0$.

Ako za $h(u, v)$ vrijedi $\frac{\partial h}{\partial n} = 0$, onda za funkciju H vrijedi $\frac{\partial H}{\partial N} = 0$, pri čemu su $\frac{\partial h}{\partial n}$ i $\frac{\partial H}{\partial N}$ derivacije u smjeru normale na luk C .

2.2 Primjeri konformnih preslikavanja

Za kompleksni broj $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi

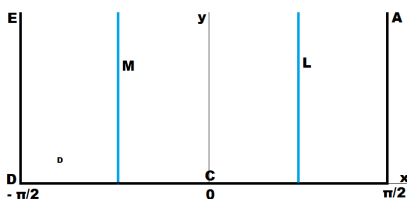
$$\sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Stoga su realni i imaginarni dio funkcije $\sin z$ dani

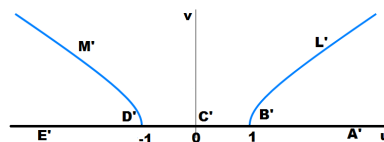
$$\begin{aligned} u &= \sin x \cosh y \\ v &= \cos x \sinh y. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Pokažimo kako djeluju preslikavanja koja ćemo kasnije koristiti.

Primjer 1. Preslikavanje $\omega = \sin z$ je bijekcija s beskonačne trake definirane s $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0$ u ravnini z na gornju poluravninu $v \geq 0$ ravnine ω .



Slika 1: $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0$



Slika 2: $v \geq 0$

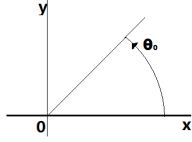
Sliku dobivamo uvrštavanjem u (2.2). Preslikajmo najprije rubove. Točke $(\frac{\pi}{2}, y)$ preslikavaju se u $(\cosh y, 0)$, točke $(x, 0)$ u $(\sin x, 0)$, a točke $(-\frac{\pi}{2}, y)$ u $(-\cosh y, 0)$. Svaka točka untrine $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ leži na nekom od horizontalnih pravaca $x = \text{const.}$, $y > 0$. Slike tih pravaca su međusobno disjunktne i u uniji daju poluravninu $v > 0$ (vidi slike 1 i 2).

Primjer 2. Preslikavanje $\omega = \log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)$, prilikom kojeg se koristi glavna grana logaritma, preslikava poluravninu $y > 0$ na traku $0 < v < \pi$.

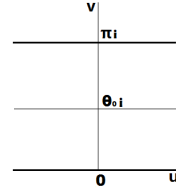
Preslikavanje ω je kompozicija preslikavanja $Z = \frac{z-1}{z+1}$ i $\omega_1 = \log z$.

Z preslikava gornju poluravninu $y > 0$ na poluravninu $Y > 0$, gdje je $z = x + iy$ te $Z = X + iY$.

Preslikavanje ω_1 ilustrirano je na slikama 3 i 4. Ono preslikava poluravninu $Y > 0$ na traku $0 < v < \pi$. Zapišemo li Z kao $Z = e^{i\theta}$, tada je $\log z = \ln R + i\theta$, pri čemu $R > 0$ i $-\pi < \theta < \pi$. Stoga možemo uočiti da slika ima koordinate $(\ln R, \theta_0)$, gdje θ_0 varira između 0 i π .



Slika 3: ravnina XY



Slika 4: ravnina uv

3 Stacionarno provođenje topline

Kao što smo spomenuli u uvodu, baviti ćemo se stacionarnim prijenosom topline, tj. pretpostaviti ćemo da temperatura bilo koje točke sredstva ne ovisi o vremenu, već samo o mjestu sredstva. Vođenje topline kroz homogeni materijal može se računati pomoću Fourierova zakona. Zamislimo vođenje topline kroz štap poprečnog presjeka S . Pretpostavimo da temperatura u štalu linearno pada od jednog kraja do drugog i da je u svakoj točki određenog presjeka ista. Promatramo dva presjeka na kojima su temperature T_1 i T_2 , a koja su međusobno udaljena za Δx . Tada je toplina Q koja u određenom vremenu t prođe kroz taj dio sredstva dana formulom

$$Q = -K \frac{\Delta T}{\Delta x} S t, \quad (3.1)$$

gdje je K koeficijent toplinske vodljivosti materijala, $\Delta T = T_2 - T_1$ razlika temperatura na krajevima sloja, S je površina kroz koju prolazi toplina. Veličina $\frac{\Delta T}{\Delta x}$ zove se temperaturni gradijent, a smjer mu je isti kao i smjer normale na plohu kroz koju prolazi toplina. Predznak minus nastaje zbog činjenice da toplina prelazi iz područja više u područje niže temperature. Fourierov zakon (3.1) možemo napisati i pomoću *toplinskog toka*, odnosno *gustoće toplinskog toka* Φ :

$$\Phi = -K \frac{\Delta T}{\Delta x} \quad (K > 0). \quad (3.2)$$

Općenito, gustoća toplinskog toka kroz neku plohu dana je s

$$\Phi = -K \frac{dT}{dN}, \quad (3.3)$$

pri čemu je $\frac{dT}{dN}$ derivacija funkcije T u smjeru normale N na zadanu plohu. SI jedinica za ovu fizikalnu veličinu je watt po metru kvadratnom (W/m^2). Koeficijent toplinske vodljivosti K toplinska je karakteristika određenog materijala, a ovisi o temperaturi i o tlaku. Materijal kojemu je K velik dobar je toplinski vodič. U tablici 1 navedene su vrijednosti K nekih materijala.

MATERIJAL	W/m^2
BETON	0.128
ASFALT	0.74-0.76
PROZORSKO STAKLO	0.810
SUHI PIJESAK	0.582
PLEKSI GLAS	0.195
CEMENT	1.047
GRANIT	3

Tablica 1: Koeficijenti toplinske vodljivosti nekih materijala

Svakoj točki nekog tijela možemo pridružiti tri koordinate x, y i z . Mi ćemo pretpostaviti da temperatura tijela ovisi samo o koordinatama x i y pa će tok topline biti dvodimenzionalan i paralelan s ravninom okomitom na XOY -ravninu. Nadalje, pretpostavimo da toplinska energija ne nastaje niti nestaje unutar tijela. tj. nema izvora niti ponora topline unutar tijela. Pretpostavimo da je funkcija topline T u točki (x, y) : $T(x, y)$ i njene prve i druge parcijalne derivacije $T_x(x, y)$, $T_y(x, y)$, $T_{xx}(x, y)$, $T_{yy}(x, y)$, $T_{xy}(x, y)$ neprekidne u svakoj točki nutrine čvrstog tijela. Promotrimo element volumena oblika uspravne pravokutne prizme koji se nalazi unutar čvrstog tijela. Uzmimo da je visina prizme okomita na XOY -ravninu, duljine je jedan, a duljine stranica baze prizme su Δx i Δy .

Brzina toka topline preko lijeve strane prizme na desno iznosi $-KT_x(x, y)\Delta y$, a preko desne strane na desno jednaka je $-KT_x(x + \Delta x, y)\Delta y$. Oduzimanjem tih izraza dobivamo formulu za brzinu gubitka topline iz elementa volumena kroz te dvije strane:

$$-K \left\{ \frac{T_x(x + \Delta x, y) - T_x(x, y)}{\Delta x} \right\} \Delta x \Delta y. \quad (3.4)$$

Za dovoljno male x i y dobivamo aproksimaciju

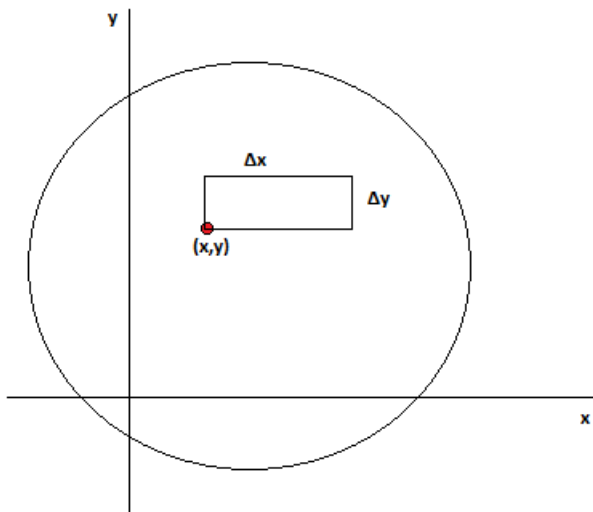
$$-KT_{xx}(x, y)\Delta x \Delta y, \quad (3.5)$$

čija se točnost povećava smanjivanjem Δx i Δy .

Na sličan način dobivamo formulu za brzinu gubitka topline kroz preostale dvije stranice prizme koje su okomite na ravninu XOY :

$$-KT_{yy}(x, y)\Delta x \Delta y. \quad (3.6)$$

Budući da toplina ulazi u i izlazi iz elementa volumena isključivo kroz te četiri stranice, a temperatura je stacionarna, suma izraza (3.5) i (3.6) je nula. Iz



Slika 5: Element volumena čvrstog tijela

jednadžbe

$$KT_{xx}(x, y)\Delta x\Delta y + KT_{yy}(x, y)\Delta x\Delta y = 0$$

slijedi

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) = 0, \quad (3.7)$$

pa funkcija temperature T zadovoljava Laplaceovu jednadžbu. Slijedi da je T harmonijska funkcija na području definicije koje je interior čvrstog tijela.

Primijetimo da su nivo-krivulje $T(x, y) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R}$ funkcije T *izoterme*. U tom slučaju $T(x, y)$ možemo interpretirati kao temperaturu u točki (x, y) tankog sloja materijala u ravnini, pri čemu su obje strane tog sloja toplinski izolirane. Gradijent funkcije T okomit je na izotermu u svakoj njenoj točki, a najveći tok topline u nekoj točki u smjeru je gradijenta funkcije T u toj istoj točki.

Ako je $T(x, y)$ temperatura tankog sloja materijala čvrstog tijela, a S harmonijski konjugat funkcije T , tada je nivo-krivulji $S(x, y) = c_2$, $c_2 \in \mathbb{R}$ gradijent funkcije T tangencijalni vektor u svakoj točki u kojoj je analitička funkcija $T(x, y) + iS(x, y)$ konformna. Krivulje $S(x, y) = c_2$ zovu se *strujnice*.

Ukoliko je $\frac{dT}{dN} = 0$ po nekom dijelu ruba tankog sloja materijala, onda je toplinski tok kroz taj dio ruba jednak nuli, tj. dio ruba je toplinski izoliran, odnosno on je strujnica.

3.1 Stacionarna raspodjela temperature u gornjoj poluravnini

Pronađimo izraz za temperaturu $T(x, y)$ tanke beskonačne ploče u ravnini XOY zadane jednadžbom $y \geq 0$. Pretpostavimo da su strane ploče toplinski izolirane, a temperatura ruba ploče $y = 0$ svugdje je nula osim na intervalu $(-1, 1)$, gdje je jednaka jedan. Funkcija $T(x, y)$ na toj je ploči ograničena, a s fizikalnog aspekta ima smisla pretpostaviti da se $T(x, y)$ približava nuli kako y teži u beskonačnost. Dobivamo sljedeći rubni problem:

$$\begin{aligned} T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) &= 0 \quad (-\infty < x < \infty, \quad y > 0) \\ T(x, 0) &= \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| > 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.8)$$

pri čemu je $|T(x, y)| < M$, za neku pozitivnu konstantu $M \in \mathbb{R}$.

Ovo je Dirichletov problem za gornju XOY -poluravninu. Riješit ćemo ga tako da ga transformiramo u novi Dirichletov problem za područje u UV -ravnini. To područje bit će slika XOY -poluravnine dobivena preslikavanjem $w = f(z)$ koje je analitičko na domeni $y > 0$ i konformno duž ruba $y = 0$, osim u točkama $(\pm 1, 0)$, gdje f nije definirano. Primjenom teorema 2.4 i 2.5, rješenje problema u ravnini UV preslikat ćemo u rješenje problema u ravnini XOY . Specijalno, harmonijsku funkciju u varijablama u i v preslikat ćemo u harmonijsku funkciju u varijablama x i y , a rubni uvjeti u UV -ravnini bit će sačuvani na odgovarajućim dijelovima ruba u XOY -ravnini.

Neka je $z - 1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z + 1 = r_2 e^{i\theta_2}$, uz $0 \leq \theta_k \leq \pi$ ($k = 1, 2$). Preslikavanje

$$\begin{aligned} \omega &= \log \frac{z - 1}{z + 1} \\ &= \ln \frac{r_1}{r_2} + i(\theta_1 - \theta_2) \quad \left(\frac{r_1}{r_2} > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta_1 - \theta_2 < \frac{3\pi}{2} \right) \\ &= \ln \left| \frac{z - 1}{z + 1} \right| + i \arg \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

je definirano na gornjoj poluravnini $y \geq 0$, osim u točkama $z = \pm 1$, zbog $0 < \theta_1 - \theta_2 < \pi$ za $y \geq 0$. Sada je vrijednost logaritma glavna grana logaritamske funkcije za $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$, pa se kao u primjeru 2 gornja poluravnina

$y \geq 0$ preslikava u horizontalnu traku $0 < v < \pi$ u ravnini ω . Segment na osi OX između $z = -1$ i $z = 1$, gdje je $\theta_1 - \theta_2 = \pi$ preslikava se u gornji rub trake, a ostatak osi OX , gdje je $\theta_1 - \theta_2 = 0$ se preslikava u donji rub. Cauchy-Riemannovi uvjeti su zadovoljeni pa je funkcija (3.9) analitička i harmonijska.

Harmonijska funkcija od u i v koja je jednaka nuli na rubu trake $v = 0$ i jedinična na rubu $v = \pi$ je funkcija

$$T = \frac{1}{\pi}v. \quad (3.10)$$

Ona je harmonijska budući da je imaginarna komponenta cijele funkcije $(1/\pi)\omega$. Prebacivanjem u koordinate x i y u jednadžbi (3.9) dobivamo

$$\begin{aligned} v &= \arg \left[\frac{(z-1)(\bar{z}+1)}{(z+1)(\bar{z}-1)} \right] = \arg \left[\frac{x^2 + y^2 - 1 + i2y}{(x+1)^2 + y^2} \right] \text{ ili} \\ v &= \arctan \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

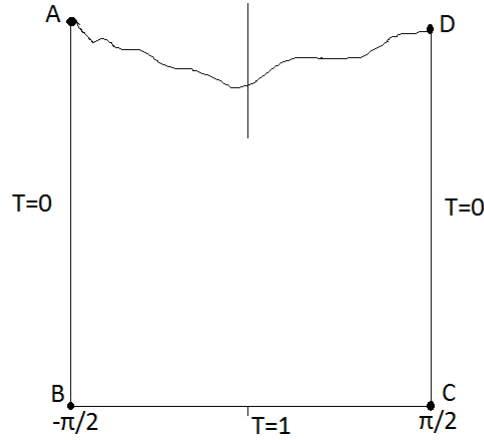
Zbog $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \theta_1 - \theta_2$ i $0 \leq \theta_1 - \theta_2 \leq \pi$, izraz (3.10) možemo pisati kao

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2y}{x^2 + y^2 - 1} \right) \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi). \quad (3.12)$$

Budući da je funkcija (3.10) harmonijska na traci $0 < v < \pi$ i da je funkcija (3.9) analitička na gornjoj poluravnini $y > 0$, po teoremu 2.4 možemo zaključiti da je (3.11) i harmonijska na toj poluravnini. Prema teoremu 2.5, rubni uvjeti za dvije harmonijske funkcije su isti na odgovarajućim dijelovima ruba jer su oblika $h = h_0$, pa je stoga funkcija (3.11) rješenje početnog problema.

3.2 Stacionarna raspodjela temperature ploče u trodimenzionalnom prostoru

Zamislimo beskonačnu ploču u trodimenzionalnom prostoru ograničenu ravninama $x = \pm\pi/2$ i $y = 0$. Temperatura ploha $x = \pm\pi/2$ jednaka je nuli, a temperatura plohe $y = 0$ jednaka je jedan. Želimo naći formulu za temperaturu $T(x, y)$ u proizvoljnoj točki nutrine ploče. Za ploču čije su strane savršeno izolirane, problem se svodi na problem pronalaska funkcije temperature na tankoj beskonačnoj ploči danoj izrazom $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, $y \geq 0$.



Slika 6: Ploča savršeno izoliranih strana

Rubni problem glasi

$$\begin{aligned}
 T_{xx}(x, y) + T_{yy}(x, y) &= 0 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, y > 0\right), \\
 T\left(-\frac{\pi}{2}, y\right) &= T\left(\frac{\pi}{2}, y\right) = 0 \quad (y > 0), \\
 T(x, 0) &= 1 \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right),
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

pri čemu je funkcija $T(x, y)$ ograničena. Kao u primjeru 1, preslikavanje $\omega = \sin z$ transformira dani problem u problem stacionarnog provođenja topline u gornjoj poluravnini. Prema pododjeljku 3.1, dobivamo

$$T = \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \right) \quad (0 \leq \arctan t \leq \pi). \tag{3.14}$$

Zamjenom varijabli $u = \sin x \cosh y$, $v = \cos x \sinh y$ dobivamo

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2 \cos x \sinh y}{\sin^2 x \cosh^2 y + \cos^2 x \sinh^2 y - 1} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2 \cos x \sinh y}{\sinh^2 y - \cos^2 x} \right) \\
 &= \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{2(\cos x / \sinh y)}{1 - (\cos x / \sinh y)^2} \right) \\
 &= \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{\cos x}{\sinh y} \right) \quad \left(0 \leq \arctan t \leq \frac{\pi}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Budući da je $\omega = \sin z$ analitička na cijeloj kompleksnoj ravnini, a funkcija (3.14) je harmonijska na poluravnini $v > 0$ i zadovoljava $T = 1$ za $|u| < 1$ i $v = 0$ te $T = 0$ za $|u| > 1$ i $v = 0$, slijedi da je (3.15) harmonijska funkcija na ploči $-\pi/2 < x < \pi/2, y > 0$ i zadovoljava granične uvjete u (3.13). Dodatno vrijedi $|T(x, y)| \leq 1$ pa smo našli traženu funkciju temperature.

3.3 Stacionarna raspodjela temperature u kvadrantu

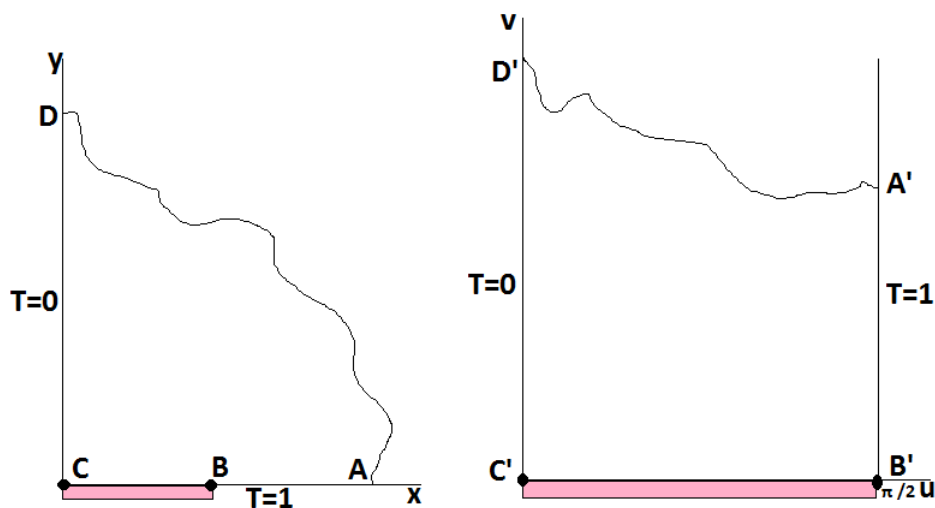
Pronađimo formulu za temperaturu tanke ploče u obliku kvadranta, ako je segment na kraju jednog ruba toplinski izoliran, ostatak tog ruba je na fiksnoj temperaturi, a drugi rub na je na nekoj drugoj fiksnoj temperaturi. Strane ploče su izolirane pa je problem dvodimenzionalan. Temperaturnu skalu i jedinicu duljine možemo odabrati na način da rubni problem za funkciju temperature T postane:

$$T_{xx}(x, y) + T_{yy} = 0 \quad (x > 0, y > 0), \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} T_y(x, 0) = 0, & \text{za } 0 < x < 1 \\ T(x, 0) = 1, & \text{za } x > 1, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$T(0, y) = 0 \quad (y > 0), \quad (3.18)$$

pri čemu je $T(x, y)$ ograničena unutar kvadranta.



Slika 7: Preslikavanje $z = \sin \omega$

Bijektivno preslikavanje $z = \sin \omega$ beskonačnu ploču $0 \leq u \leq \pi/2, v \geq 0$ preslikava na kvadrant $x \geq 0, y \geq 0$. Budući da je $z = \sin \omega$ konformno svugdje na traci osim u točki $\omega = \pi/2$, inverzno preslikavanje mora biti konformno na kvadrantu, osim u točki $z = 1$. Stoga, rješenje zadanog problema možemo naći tražeći funkciju koja je harmonijska na traci i zadovoljava granične uvjete prikazane na slici 7 desno.

Tražena funkcija temperature za novi rubni problem je

$$T = \frac{2}{\pi}u, \quad (3.19)$$

pri čemu je funkcija $(2/\pi)u$ realni dio funkcije $(2/\pi)\omega$. Za $0 < u < \pi/2$ vrijedi $\sin u \neq 0$ i $\cos u \neq 0$, pa zamjenom varijabli kao u (2.2)

$$x = \sin u \cosh v, \quad y = \cos u \sinh v, \quad (3.20)$$

dobivamo

$$\frac{x^2}{\sin^2 u} - \frac{y^2}{\cos^2 u} = 1. \quad (3.21)$$

Primijetimo da za svaki fiksni u hiperbola (3.21) ima fokuse u točkama $z = \pm\sqrt{\sin^2 u + \cos^2 u} = \pm 1$ i da duljina glavne osi iznosi $2 \sin u$. Tada je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti između oba fokusa i točke (x, y) koja leži na hiperboli u prvom kvadrantu jednaka

$$\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \sin u.$$

Iz (3.20) slijedi da jednakost vrijedi i za slučajeve $u = 0$ i $u = \pi/2$. Uvrštavanjem u (3.19) dobivamo da je tražena funkcija temperature dana formulom

$$T = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{\sqrt{(x+1)^2 + y^2} - \sqrt{(x-1)^2 + y^2}}{2}. \quad (3.22)$$

4 Zaključak

Problem provođenja topline vrlo je složen. No, ukoliko se ograničimo na dvodimenzionalni problem i izostavimo vremensku ovisnost, problem postaje jednostavniji. U slučaju da su geometrijska svojstva takvog problema komplicirana, primjenom konformnih preslikavanja možemo konstruirati novi problem čija su geometrijska svojstva jednostavna i poznata pa je lako doći do rješenja originalnog problema.

Literatura

- [1] J. W. Brown, R. V. Churchill, *Complex Variables and Applications*,
Eighth Edition, New York, 2009.
- [2] Š. Ungar, *Kompleksna analiza*, Skripta, PMF - matematički odjel,
Sveučilište u Zagrebu, 2009.
- [3] M. Mikoč, *Građevni materijali*,
Građevinski fakultet Sveučilišta J.J. Strossmayera u Osijeku, Osijek,
2006.