Algebra matrica i sustav linearnih jednadžbi

Živko, Petra

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:244354

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-21**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Informatics

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Petra Živko

Algebra matrica i sustav linearnih jednadžbi

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Petra Živko

Algebra matrica i sustav linearnih jednadžbi

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2020.

Sažetak: U ovome ćemo se radu baviti svojstvima matrica i sustavom linearnih jednadžbi. Najprije ćemo definirati što je matrica, kako ih zovemo prema njihovom obliku, te koje sve operacije možemo raditi s njima. Definirat ćemo što je rang i determinanta matrice i navesti neka njihova svojstva. Na kraju ćemo se malim dijelom upoznati sa sustavom linearnih jednadžbi, gdje ćemo objasniti što je sustav linearnih jednadžbi i pokazati kako riješiti najosnovniji sustav linearnih jednadžbi s m jednadžbi i n nepoznanica.

Ključne riječi: matrica, kvadratna matrica, dijagonalna matrica, donje trokutasta matrica, gornje trokutasta matrica, transponirana matrica, regularna matrica, singularna matrica, inverz, trag, rang, determinanta, elementarne transformacije, sustav linearnih jednadžbi, koeficijent, homogeni sustav, proširena matrica.

Abstract:

In this paper, we will deal with the properties of matrices and the system of linear equations. We will first define what a matrix is, what we call them according to their form, and what all operations we can do with them. We will define what is the rank and determinant of a matrix and list some of their properties. Finally, we will get acquainted in small part with the system of linear equations, where we will explain what the system of linear equations is and show how to solve the most basic system of linear equations with m equations and n unknowns.

Key words: matrix, quadratic matrix, diagonal matrix, lower triangular matrix, upper triangular matrix, transposed matrix, regular matrix, singular matrix, inverse, trace, rank, determinant, elementary transformations, system of linear equations, coefficient, homogeneous system, extended matrix.

Sadržaj

1 Uvod

Jedan od najosnovnijih pojmova na kojemu se temelji linearna algebra su upravo matrice. Također, matrice se koriste sve više i u programiranju upravo zbog njihove jednostavnosti. One nam uveliko olakšavaju i skraćuju postupak traženja željenog rezultata. Postojanje brojnih oblika matrica može nam uvelike pomoći u rješavanju različitih matričnih problema. Standardne operacije na realnim brojevima možemo definirati i na matricama. Uz standardne operacije moramo navesti i važna svojstva svake matrice koji se dobivaju pomoću ranga i determinante. Najčešća primjena matrica je u rješavanju sustava jednadžbi. U sljedećem dijelu rada ćemo obraditi najpoznatije i najefikasnije metode za rješavanje sustava.

2 Matrice

2.1 Matrica

Definicija 2.1. ***Matrica reda (m,n)*** *je preslikavanje*

$$A : \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\} \to \mathbb{F}$$

gdje su $m, n \in \mathbb{N}$, *a* $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *polje.*

Vrijednosti $A(i, j) \in \mathbb{F}$ nazivamo **elementi** (koeficijenti) matrice A i označavamo s a_{ij} ili $[A]_{ij}$, odnosno $a_{i,j}$ kako ne bi došlo do zabune.

Matricu s m redaka i n stupaca standardno pišemo u obliku

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

i označavamo s A_{mn}.

Horizontalni niz brojeva u matrici nazivamo **red matrice**, a uspravni niz brojeva nazivamo **stupac matrice**.

Glavnu dijagonalu matrice A čine elementi $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \ldots$.

Definicija 2.2. *Neka je* $A \in M_{mn}$ *i* $B \in M_{rs}$. *Kažemo da su matrice* A *i* B ***ulančane*** *ako je* $n = r$.

Primjer 2.1. *Neka je* $A \in M_{25}$ *i* $B \in M_{54}$.

Uočimo kako su matrice A *i* B *ulančane, a* B *i* A *nisu.*

2.2 Vrste matrica

Obzirom na izgled matrica, razlikujemo nekoliko vrsta matrica.

2.2.1 Kvadratna matrica

Definicija 2.3. ***Kvadratna matrica*** M *je matrica reda* (n, n), *te ju označujemo s* M_n.

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

2.2.2 Nul-matrica

Definicija 2.4. ***Nul-matrica*** *je matricu za koju vrijedi:* $a_{ij} = 0, \forall i, j$

2.2.3 Jedinična matrica

Definicija 2.5. *Kvadratna matrica koja na glavnoj dijagonali ima jedinice, a ostale elemente jednake nuli, nazivamo* ***jedinična matrica****.*

Jediničnu matricu zapisujemo i pomoću Kroneckerovog simbola

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \text{ ako } i = j \\ 0 & , \text{ ako } i \neq j \end{cases}.$$

Jediničnu matricu označujemo s $I = [\delta_{ij}] \in M_n$.

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.4 Dijagonalna matrica

Definicija 2.6. *Kvadratna matrica reda (n, n) čiji su elementi izvan glavne dijagonale jednaki nuli nazivamo* ***dijagonalna matrica****.*

Dijagonalnu matricu označavamo s $D = diag(d_1, d_2, \dots, d_n)$, gdje su $d_1, d_2, \dots, d_n$ elementi glavne dijagonale.

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Definicija 2.7. ***Trag matrice*** *A je realan broj koji dobijemo kao zbroj elemenata glavne dijagonale, tj. vrijedi*

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn},$$

gdje je $tr(A)$ oznaka za trag matrice A.

2.2.5 Gornje i donje trokutasta matrica

Definicija 2.8. *Matrica reda (m, n) čiji su svi elementi ispod glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $u_{ij} = 0, \forall i > j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, nazivamo* ***gornje trokutasta matrica*** *i označujemo ju s U_{mn}.*

Definicija 2.9. *Matrica reda (m, n) čiji su svi elementi iznad glavne dijagonale jednaki nuli, tj. $l_{ij} = 0, \forall i < j, i = 1, \ldots, m, j = 1, \ldots, n$, nazivamo* ***donje trokutasta matrica*** *i označujemo ju s L_{mn}.*

$$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & u_{m-1,n-1} & u_{m-1,n} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & u_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & l_{m-1,n-1} & 0 \\ l_{m1} & l_{m,2} & \ldots & l_{m,n-1} & l_{mn} \end{pmatrix}$$

2.2.6 Simetrična i antisimetrična matrica

Definicija 2.10. ***Simetrična matrica*** *je kvadratna matrica za koju vrijedi:*

$$a_{ij} = a_{ji}, \qquad \forall i, j, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Definicija 2.11. ***Antisimetrična matrica*** *je kvadratna matrica za koju vrijedi:*

$$a_{ij} = -a_{ji}, \qquad \forall i, j, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

$$A_{simetrčna} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A_{antisimetrična} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ -a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2.2.7 Transponirana matrica

Definicija 2.12. ***Transponiranu matricu*** *je matrica dobivena zamjenom redaka i stupaca. Označavamo ju s A^T.*

$$\mathbf{A^T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{2n} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Napomena 2.1.

1. *Za simetrične matrice vrijedi da je $A = A^T$, a za antisimetrične $A = -A^T$.*

2. *Ako je A dijagonalna matrica, onda je $A^T = A$.*

3. *Ako je A gornje trokutasta matrica, onda je A^T donje trokutasta matrica i obrnuto.*

4. *Za svaku matricu A vrijedi $(A^T)^T = A$.*

2.2.8 Jednake matrice

Definicija 2.13. *Za matrice $A, B \in M_m$ kažemo da su* ***jednake*** *ako su istog tipa i ako vrijedi $a_{ij} = b_{ij}, \forall i, j, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.*

2.3 Operacije matrica

Matrice možemo zbrajati, oduzimati i množiti dok dijeljenje matrica ne postoji.

2.3.1 Zbrajanje i oduzimanje matrica

Postupak zbrajanja i oduzimanja matrica je sličan. Kod zbrajanja koristimo operaciju $+$, a kod oduzimanja $-$.

Neka su $A, B \in M_{mn}$ proizvoljne matrice. **Zbroj matrica** $A + B$ je matrica $C \in M_{mn}$ s elementima $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

Primjer 2.2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

2.3.2 Množenje matrica skalarom

Neka je $A \in M_{mn}$ i $\lambda \in \mathbf{F}$. Tada je

$$\lambda A = [d_{ij}] \in M_{mn}(\mathbf{F}),$$

gdje je $d_{ij} = \lambda a_{ij}$, $\forall i = 1, 2 \ldots, m$, $\forall j = 1, 2, \ldots, n$.

Primjer 2.3. *Neka je dana matrica*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

i skalar $\lambda = 3$.
Tada imamo $\lambda A = 3A = 3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$

2.3.3 Množenje matrica

Element umnoška dviju matrica i-tog retka i j-tog stupca dobivamo kao sumu elementa umnožaka elemenata i-tog retka i j-tog stupca, drugim riječima imamo:

$$a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Definicija 2.14. *Neka su $A = [a_{ij}] \in M_{mn}$ i $B = [b_{ij}] \in M_{ns}$ ulančane matrice. Tada je produkt AB definiran kao matrica*

$$AB = [c_{ij}] \in M_{ms}$$

pri čemu je

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \qquad \forall i = 1, \ldots, m, \forall j = 1, \ldots, s.$$

Uočimo da množenje matrice skalarom pridružuje skalaru i matrici matricu, a faktori skalar i matrica nisu istoga tipa.

Primjer 2.4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

Napomena 2.2. *Svojstva množenja matrica:*

1. Množenje matrica je preslikavanje

$$\cdot : M_{mn} \times M_{ns} \to M_{ms} \qquad m, n, s \in \mathbf{N}.$$

Posebno ako je $m = n = s$ *tada je*

$$\cdot : M_n \times M_n \to M_n$$

binarna operacija na skupu M_n*.*

2. Ne vrijedi komutativnost množenja matrica.

3. Jedinična matrica je neutralni element za množenje matrica, pri čemu odgovarajuća matrica i jedinična matrica moraju biti ulančane. Vrijedi $AI = IA = A$*.*

4. Umnožak matrice s ulančanom nul-matricom jednak je nul-matrici, tj. $A0 = 0A = 0$*.*

Teorem 2.1. *Skup svih kvadratnih matrica* M_n *za koju vrijedi sljedećih pet svojstava nazivamo* ***asocijativna algebra s jedinicom****:*

(1) $A(B + C) = AB + AC$

(2) $(A + B)C = AC + BC$

(3) $(\alpha A)B = A(\alpha B) = \alpha(AB), \qquad \forall \alpha \in \mathbf{F}$

(4) $(AB)C = A(BC)$

(5) $IA = AI = A$

Dokaz. Budući da se dokaz svojstava svodi na direktnu provjeru, dokazat ćemo samo svojstvo (4).

Neka je $\qquad A = [a_{ij}] \in M_{mn}, \qquad B = [b_{ij}] \in M_{ns}, \qquad C = [c_{ij}] \in M_{st}.$

Kako je produkt $(AB) \in M_{ms}$, tada je $(AB)C \in M_{mt}$. Analogno se pokaže da je i $A(BC) \in M_{mt}$. Potrebno je samo pokazati da su matrice $(AB)C$ i $A(BC)$ jednake, odnosno da su im odgovarajući elementi jednaki. Uzmimo proizvoljne $1 \le i \le m$ i $1 \le j \le t$.

$$[(AB)C]_{ij} = \sum_{k=1}^{s} [AB]_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{s} \Big(\sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lk} \Big) c_{kj}$$

S druge strane imamo

$$[A(BC)]_{ij} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} [BC]_{pj} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \Big(\sum_{r=1}^{s} b_{pr} c_{rj} \Big) = \sum_{r=1}^{s} \Big(\sum_{p=1}^{n} a_{ip} b_{pr} \Big) c_{rj}$$

Dakle, umnožak matrica je jednak do na izbor indeksa sumacije. $\square$

2.3.4 Regularna i singularna matrica

Definicija 2.15. *Kažemo da je matrica $A \in M_n(\mathbf{F})$* ***regularna*** *ako postoji matrica $B \in M_n(\mathbf{F})$ takva da vrijedi*

$$AB = BA = I.$$

Matricu B nazivamo ***multiplikativni inverz*** *ili* ***inverz matrice*** *od A i označujemo s A^{-1}. Za matricu $A \in M_n$ koje nema multiplikativni inverz, nazivamo* ***singularna matrica****.*

Napomena 2.3. *(1) Svaka matrica $A \in M_n$ ima najviše jedan inverz.*

(2) Jedinična matrica je regularna i sama sebi inverz jer vrijedi $I \cdot I = I$

(3) Ako je A regularna, vrijedi $(A^{-1})^{-1} = A$

(4) Ako su $A, B \in M_n$ regularne, onda je i umnožak AB regularna matrica i vrijedi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Dokaz. Koristeći asocijativnost množenja matrica imamo

$$(AB)B^{-1}A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I$$

$$\implies \qquad B^{-1}A^{-1}(AB) = I \qquad / \cdot (AB)^{-1}$$

$$\implies B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$$

□

(5) Skup svih regularnih matrica n-tog reda s koeficijentima iz polja F označujemo s $GL(n, \mathbf{F})$. $GL(n, \mathbf{F})$ se naziva ***opća linearna grupa*** *reda n nad poljem F.*

3 Rang i determinanta matrica

Neka je $A \in M_{mn}$. Stupce matrice A možemo zapisati u obliku:

$$A = [a_{ij}] = [\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \ldots, \mathrm{a}_n],$$

gdje su

$$\mathrm{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} \quad , \ldots , \quad \mathrm{a}_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Retke matrice A možemo zapisati:

$A = [a_{ij}] = (a^1, \ldots, a^m)$, gdje su $a^1 = (a_{11}, \ldots, a_{1n}), \ldots, a^m = (a_{m1}, \ldots, a_{mn})$.

Stupce i retke matrica možemo promatrati kao vektore i ispitivati njihovu linearnu nezavisnost.

Definicija 3.1. *Neka je $R(A) = L(a_1, \ldots, a_n)$ vektorski prostor razapet stupcima matrice A i $R^*(A) = L(a^1, \ldots, a^m)$ vektorski prostor razapet retcima matrice A. Maksimalni broj linearno nezavisnih stupaca matrice A zovemo **rang matrice A po stupcima**, dim(R(A)), a maksimalni broj linearno nezavisnih redaka matrice A zovemo **rang matrice A po retcima**, dim($R^*(A)$).*

*Rang matrice po retcima jednak je rangu matrice po stupcima i označavamo ga s r(A) i nazivamo **rang matrice A**. Posebno, rang od nul-matrice je 0, a jedinične matrice reda (n,n) jednak je n.*

Primjer 3.1. $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

Prva dva retka matrice A su linarno nezavsina, dok je treći linarna kombinacija prva dva retka, tj. $a^3 = 2a^1 + a^2$. prema tome, rang matrice A jednak je dva, $r(A) = 2$. Analogno vrijedi i da smo promatrali stupce matrice A jer je $a_3 = 2a_2 + a_1$.

Determinanta matrice je preslikavanje koje kvadratnu matricu preslika u cijeli broj.

$$\text{A}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \det \text{A} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \text{ad-bc} \tag{3.1}$$

Za matricu reda 3 imamo

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Sada, koristeći izraz (3.1) dolazimo općenito do determinante kvadratne matrice reda n. Ako imamo kvadratnu matricu reda n, onda je

$$detA = a_{11}detA_{11} - a_{12}detA_{12} + \cdots + (-1)^n a_{1n}detA_{1n} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_{1k}detA_{1k}, \tag{3.2}$$

gdje su A_{1k} matrice $(n-1)$ reda koje dobivamo ispuštanjem prvog retka i $k-$tog stupca od matrice A. Ovakav postupak traženja determinante nazivamo **Laplaceov razvoj** matrice po prvom retku. Takav razvoj je mogući po bilo kojem retku $r, r \in \{1, 2, \dots, m\}$ i glasi:

$$detA = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{r+k} a_{rk} detA_{rk}.$$

Analogno se provodi i Laplaceov razvoj deteminante po k-tom stupcu, $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ i glasi:

$$detA = \sum_{r=1}^{m} (-1)^{r+k} a_{rk} detA_{rk}.$$

Ova dva Laplaceova razvoja determinante po retku, odnosno stupcu, preslikaju se u isti cijeli broj. Drugim riječima, prilikom računanja determinante gledamo po čemu (retku ili stupcu) nam je pogodnije razvijati. Najčešće se uzimaju retci ili stupci koji sadrže element s najviše nula ili jedinica jer je $0 \cdot detA_{rk} = 0$ i $1 \cdot detA_{rk} = detA_{rk}$.
U nastavku ćemo navesti neka svojstva ranga i determinante koja nam pomažu u računanju.

3.1 Svojstva determinante

(1) Determinanta trokutaste matrice $A \in M_n$ jednaka je produktu elemenata glavne dijagonale.

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$$

Dokaz. Dokaz provodimo indukcijom. Za $n = 2$ očito vrijedi. Pretpostavimo da vrijedi i za matricu (n-1)-og reda. Trebamo pokazati da vrijedi i za M_n.
Neka je A donje trokutasta matrica. Tada prema tvrdnji (3.2) vrijedi $detA = a_{11}A_{11}$, a kako je $A_{11} \in M_{n-1}$ i donje trokutasta matrica tvrdnja je dokazana.
Nadalje, neka je A gornje trokutasta matrica. Tada prema tvrdnji da ako svi elementi iščezavaju, odnosno ako imamo nul-matricu, onda je $detA = 0$, tj. vrijedi
$detA_{12} = \cdots = detA_{1n} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad$ detA=a$_{11}detA_{11}$.
Budući da je $A \in M_{n-1}$ gornje trokutasta, imamo prema pretpostavci indukcije da je

$$detA = a_{11} \cdot a_{22} \dots a_{nn}$$

što zajedno s prethodnom jednakošću daje traženu formulu. □

(2) Ako dva stupca determinante zamijene mjesta, tada se mijenja predznak determinante.

(3) Ako matrica $A \in M_n$ ima dva jednaka stupca, onda je $detA = 0$.

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom.

Za n=2 tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da vrijedi i za skup matrica M_{n-1}. Pokažimo da vrijedi i za skup matrica M_n.

Neka je $A \in M_n$. Pretpostavimo da su $r-ti$ i $k-ti$ stupac matrice A jednaki. Tada je $A = AP_{rk}$ [1] , što prema prethodnom svojstvu povlači da je

$$detA = det(AP_{rk}) = -detA \qquad \Longrightarrow \qquad detA = 0$$

. □

(4) Ako je stupac a_j matrice $A \in M_n$ linearna kombinacija nekih vektora stupaca $b, c \in M_{n1}$, vrijedi svojstvo linearnosti determinante:

$$detA = det[\dots \lambda b + \mu c \dots] = \lambda det[\dots b \dots] + \mu det[\dots c \dots].$$

Dokaz. Dokaz matematičkom indukcijom. Za M_2, tvrdnja vrijedi. Pretpostavimo da vrijedi i za M_{n-1}. Pokažimo da vrijedi i za $A \in M_n$.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je prvi stupac linearna kombinacija vektora $b, c \in M_{n1}$, tj. $a_1 = \lambda b + \mu c$. Sada imamo

$$\begin{vmatrix} \lambda b_1 + \mu c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \lambda b_2 + \mu c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_n + \mu c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ c_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ako bi neki drugi stupac, npr. $a_3 = \lambda b + \mu c$, tada bi primjenom Svojstva (2) pokazali da vrijedi željena tvrdnja i za treći stupac bi vrijedilo:

$$\begin{aligned} detA &= -det[a_3 a_2 a_1 a_4 \dots] = -det[(\lambda b + \mu c) a_2 a_1 a_4 \dots] \\ &= -\lambda det[b a_2 a_1 a_4 \dots] - \mu det[c a_2 a_1 a_4 \dots] \\ &= \lambda det[a_1 a_2 b a_4 \dots] + \mu det[a_1 a_2 c a_4 \dots] \end{aligned}$$

[1] $P_{rk} \in M_n$ je matrica koja se iz jedinične matrice I dobiva permutacijom r-tog i j-tog stupca. Ako neku matricu $A \in M_{mn}$ zdesna pomnožimo nekom matricom $P_{rk} \in M_n$, u matrici A zamijeniti će mjesta i-ti i j-ti stupac.

Stoga, ovo svojstvo ćemo dokazati za stupac a_1. Označimo s $\tilde{a}_k$ $(k \geq 2)$ k-ti stupac matrice A kojemu je ispušten prvi element. Analogno označimo i $\tilde{b}, \tilde{c}$. Laplaceovim razvojem determinante po prvom retku imamo:

$$\begin{aligned} detA &= (\lambda b_1 + \mu c_1) det[\tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_n] \\ &+ \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \begin{bmatrix} \lambda b_2 + \mu c_2 & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda b_n + \mu c_n & \ldots & a_{n,k-1} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Nadalje, prema pretpostavci indukcije, prethodnu sumu možemo zapisati kao

$$\lambda det[\tilde{b} \ldots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \ldots \tilde{a}_n] + \mu det[\tilde{c} \ldots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \ldots \tilde{a}_n],$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} detA &= (\lambda b_1 + \mu c_1) det[\tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_n] \\ &+ \lambda \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} det[\tilde{b} \ldots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \ldots] + \mu \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} det[\tilde{c} \ldots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \ldots] \\ &= \lambda (b_1 det[\tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_n] + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} det[\tilde{b} \ldots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \ldots]) \\ &+ \mu (c_1 det[\tilde{a}_2 \ldots \tilde{a}_n] + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} det[\tilde{c} \ldots \tilde{a}_{k-1} \tilde{a}_{k+1} \ldots]) \\ &= \lambda det[b, a_2 \ldots a_n] + \mu det[c, a_2 \ldots a_n]. \end{aligned}$$

□

(5) Determinanta se množi skalarom λ tako da bilo koji njezin stupac pomnožimo s λ.

Dokaz. Koristeći prethodno svojstvo imamo:

$$det[\ldots \lambda a_j \ldots] = \lambda det[\ldots a_j \ldots] = \lambda detA.$$

□

(6) Ako matricu $A \in M_{mn}$ pomnožimo nekim skalarom $\lambda \in \mathbf{F}$, tada vrijedi

$$det(\lambda A) = \lambda detA.$$

(7) Ako nekom stupcu dodamo linearnu kombinaciju ostalih stupaca, determinanta se ne mijenja.

Dokaz. Dokaz matematičkom indukcijom. Tvrdnja očito vrijedi za n=2. Pretpostavimo da vrijedi i za M_{n-1}. Pokažimo da vrijedi i za $A \in M_n$.
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je a_1 linearna kombinacija ostalih stupaca. Koristeći prethodna svojstva (najprije svojstvo (4), pa svojstvo (3)) imamo :

$$det[a_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k, a_2 \dots a_n] = det[a_1, a_2 \dots a_n] + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k det[a_k, a_2 \dots a_n] = detA.$$

□

(8) Ako je neki stupac linearna kombinacija ostalih stupaca matrice, onda je determinanta jednaka nuli.

Dokaz. Dokaz matematičkom indukcijom. Tvrdnja očito vrijedi za n=2. Pretpostavimo da vrijedi i za M_{n-1}. Pokažimo da vrijedi i za $A \in M_n$.
Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a_1 = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k$. Korištenjem svojstva (4), pa svojstva (3) imamo:

$$det[a_1 \dots n] = det[\sum_{k=2}^{n} \lambda_k a_k, a_2 \dots a_n] = \sum_{k=2}^{n} \lambda_k det[a_k, a_2 \dots a_n] = 0.$$

□

(9) Ako je matrica singularna, onda je $detA = 0$ i $detA^T = 0$.

Dokaz. Ako je A singularna matrica, onda su njezini stupci linearno zavisni pa prema prethodnom svojstvu je $detA = 0$. Prilikom transponiranja, retci postaju stupci pa je dokaz za A^T analogno. □

(10) (Binet-Cauchyjev teorem)
Za bilo koje dvije matrice $A, B \in M_n$ vrijedi

$$det(AB) = detA \cdot detB.$$

(11) Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je

$$detA \neq 0.$$

Dodatno, tada je

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{detA}.$$

3.2 Svojstva ranga

(1) Za svaku matricu $A \in M_{mn}$ vrijedi

$$r(A) = r(A^T).$$

Također ako je A' dobivena iz matrice $A \in M_{mn}$ primjenom nekih elementarnih transformacija[2], onda je

$$r(A') = r(A).$$

(2) Za dvije ekvivalentne matrice [3] $A, B \in M_{mn}$ vrijedi

$$A \sim B \Longleftrightarrow r(A) = r(B).$$

(3) Matrica $A \in M_n$ je regularna ako i samo ako je

$$r(A) = n.$$

[2]vidi Definicija 4.4 na 17. stranici

[3]Kažemo da je matrica $B \in M_{mn}$ ekvivalentna matrici $A \in M_{mn}$ (i pišemo $A \sim B$) ako se B može dobiti iz A primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija redaka ili stupaca.

4 Sustav linearnih jednadžbi

Linearna jednadžba nad poljem F u nepoznanicama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je jednadžba oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

pri čemu su $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbf{F}$.

Definicija 4.1. ***Sustav linearnih jednadžbi*** *nad poljem F sastoji se od m linearnih jednažbi s n nepoznanica,* $m, n \in \mathbf{N}$*:*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.1}$$

Pri tome, skalari $a_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$ *zovu se* ***koeficijenti sustava****,* $b_1, b_2, \ldots, b_m$ ***slobodni članovi****.*

Uočimo kako prvi indeks i u a_{ij} označuje redni broj jednadžbe, a indeks j redni broj nepoznanice uz koji se taj koeficijent nalazi.

Definicija 4.2. ***Rješenje sustava*** *(4.1) je svaka uređena n-torka*

$$(x_1', \ldots, x_n') \in \mathbf{F}_n$$

za koju supstitucija

$$x_1 = x_1', \qquad x_2 = x_2', \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n'$$

zadovoljava sve jednadžbe.

Za sustav (4.1) kažemo da je **homogen** ako su svi slobodni članovi jednaki nuli, tj. ako je $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$. U suprotnom ako je barem jedan slobodan član različit od nule, kažemo da je linearni sustav jednadžbi (4.1) **nehomogen**.

Sustav (4.1) možemo zapisati u matričnom zapisu:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad A_p = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

Matricu A_p nazivamo **proširena matrica** matrice A.

Sada sustav (4.1) kraće možemo zapisati kao:

$$AX = B. \tag{4.2}$$

Napomena 4.1. *Sustav (4.1) i matrična jedndžba (4.2) su ekvivalentne.*

To znači da uređena n-torka $(x_1', \ldots, x_n')$ zadovoljava (4.1) ako i samo ako $\begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}$ zadovoljava (4.2).

4.1 Egzistencija rješenja

Da bi rješenje postojalo, sustav (4.1) mora zadovoljavati neke nužne i dovoljne uvjete koje ćemo iskazati u sljedećim tvrdnjama.

Propozicija 4.1. *Uređena n-torka $(x_1', \ldots, x_n')$ je rješenje sustava (4.1) ako i samo ako je*

$$B = x_1'a_1 + x_2'a_2 + \cdots + x_n'a_n,$$

gdje je $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ stupčana reprezentacija matrice A.

Dokaz. Tvrdnja izlazi direktno iz definicije operacija s matricama. □

Teorem 4.1. *(Kronecker-Capelli) Sustav $AX = B$ je rješiv ako i samo ako vrijedi*

$$r(A) = r(A_p).$$

Dokaz. Prema definiciji ranga imamo:

$$r(A) = dimR(A) = dimL(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

$$r(A_p) = dimL(a_1, a_2, \ldots, a_n, B).$$

Uočimo da vrijedi sada

$$r(A) \leq r(A_p).$$

Sada imamo sljedeći niz ekvivalentnih tvrdnji:

$$\begin{aligned} r(A) = r(A_p) &\iff L(a_1, a_2, \dots, a_n) = L(a_1, a_2, \dots, a_n, B) \\ &\iff B \in L(a_1, a_2, \dots, a_n) \\ &\iff \exists (x_1', \dots, x_n') \in \mathbf{F} \text{ takva da je } B = x_1' a_1 + x_2' a_2 + \dots + x_n' a_n \\ &\iff \text{prema } \mathit{Propoziciji} \text{ (4.1) postoji rješenje sustava.} \end{aligned}$$

□

4.2 Skup svih rješenja

Propozicija 4.2. *Homogeni sustav je uvijek rješiv. Skup svih rješenja homogenog sustava* $AX = 0$ *je vektorski prostor.*

Dokaz. Prvi dio tvrdnje vrijedi jer svaki homogeni sustav ima barem trivijalno rješenje

$$x_1' = 0, \qquad x_2' = 0, \qquad \dots, \qquad x_n' = 0.$$

Označimo s $\Omega \subseteq M_{n1}$ skup svih rješenja homogenog sustava $AX = 0$. Za $R_1, R_2 \in \Omega$ i $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{F}$ sada, zbog distributivnosti i kvaziasocijativnosti množenja matrica i $AR_1 = AR_2 = 0$ imamo da je

$$A(\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2) = \lambda_1 A R_1 + \lambda_2 A R_2 = 0.$$

Dakle, $\lambda_1 R_1 + \lambda_2 R_2 \in \Omega$ pa je prema kriteriju za vektorski potprostor i Ω vektorski prostor.

□

4.3 Gaussova metoda eliminacije

Gaussova metoda eliminacije je jedna od metoda rješavanja sustava linearnih jednadžbi. U Gaussovoj metodi nije potrebno unaprijed utvrđivati je li zadani sustav uopće rješiv jer ona u sebi ima računanje ranga matrice sustava te će eventualna nerješivost sustava biti očita.

Definicija 4.3. *Dva sustava linarnih jednadžbi nad poljem* F *su ekvivalentna ako imaju isti broj nepoznanica i isti skup rješenja.*

Definicija 4.4. ***Elementarne transformacije sustava*** *linearnih jednadžbi su:*

(I) zamjena poretka dviju jednadžbi

(II) množenje neke jednadžbe skalarom $\lambda \neq 0$

(III) pribrajanje neke jednadžbe pomnožene skalarom λ *nekoj drugoj jednadžbi sustava.*

Napomena 4.2. *Primjenom konačno mnogo elementarnih transformacija na dani sustav linearnih jednadžbi dobiva se ekvivalentni sustav.*

Gaussova metoda eliminacije radi na principu da se proširena matrica (A_p) elementarnim transformacijama sustava svede na gornje trokutastu matricu te nakon toga povratnom supstitucijom dobijemo rješenja linearnog sustava jednadžbi.

Neka je dan sustav

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.3}$$

Elementarnim transformacijama sustava u konačno mnogo koraka dobijemo matricu

$$A'_p = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & & b'_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & & b'_r \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & b'_{r+1} \\ \vdots & \ddots & & 0 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & & b'_m \end{array}\right]$$

odnosno sustav

$$\begin{array}{rcl}
x_1 + \qquad \dots \qquad + a'_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{1n}x_n & = & b'_1 \\
x_2 + \qquad \dots \qquad + a'_{2,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{2n}x_n & = & b'_2 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
x_r + a'_{r,r+1}x_{r+1} + \dots + a'_{rn}x_n & = & b'_r \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r + 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_n & = & b'_{r+1} \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_r + 0 \cdot x_{r+1} + \dots + 0 \cdot x_n & = & b'_m
\end{array} \tag{4.4}$$

Primjenom propozicije (4.2) dobiveni sustav (4.4) je ekvivalentan sustavu (4.3). Prema Kronecker-Capelli teoremu, sustav (4.4) ima rješenje ako i samo je

$$b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0.$$

Ako za bar jedan $i, r+1 \le i \le m$, vrijedi $b'_i \neq 0$, zadani sustav nema rješenja.
Pretpostavimo da vrijedi

$$b'_{r+1} = \dots = b'_m = 0.$$

Tada dobivena matrica A'_p ima oblik

$$A'_p = \left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\
0 & 1 & \ddots & \vdots & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\
 & & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right]$$

Odavde slijedi da je $x_0 = (b'_1, b'_2, \dots, b'_r, 0, \dots, 0)^T$ jedno partikularno rješenje.
Kako bi pronašli bazne vektore $u_1, \dots, u_{n-r} \in \Omega$ promatrat ćemo ekvivalentnu matricu polaznoj matrici proširenog homogenog sustava.

$$
A'_p = \left[\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \dots & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & 0 \\
0 & 1 & \ddots & \vdots & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & 0 \\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & 0 \\
 & & & & & & & \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & \ddots & & 0 & \vdots & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right]
$$

Uvrštavanje $u_1, \dots, u_{n-r}$ možemo pokazati da su zaista rješenje pripadnog homogenog sustava.

$$
\mathrm{u}_1 = \begin{bmatrix} -a'_{1,r+1} \\ -a'_{2,r+1} \\ \dots \\ -a'_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} -a'_{1,r+2} \\ -a'_{2,r+2} \\ \dots \\ -a'_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \dots, \qquad u_{n-r} = \begin{bmatrix} -a'_{1n} \\ -a'_{2n} \\ \vdots \\ -a'_{rn} \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Opće rješenje sustava može se zapisati:

$$
x = x_0 + \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i u_i, \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_{n-r} \in \mathbf{R}.
$$

Primjer 4.1. *Riješite sustav*

$$
\begin{aligned}
5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 29 \\
3x_1 - x_2 + x_3 &= 10 \\
1x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 31.
\end{aligned}
$$

Rješenje:

$$
\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 31 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & -9 & -18 & -126 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 7 & 11 & 83 \end{array}\right] \sim
$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow \textit{Povratnom supstitucijom: } (x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 5).$$

Primjer 4.2. *Riješite sustav*

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13. \end{aligned}$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \rightarrow \qquad x_4 = 1$$

Iz prvog retka dobijemo jednadžbu:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2 &= 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &= 1 \\ 3x_1 &= -4x_2 - x_3 + 1 \\ x_1 &= -\frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dakle, rješenje sustava je: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{4}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}, x_2, x_3, 1)$.

4.4 Gauss-Jordanova metoda

Ova metoda provodi se analogno kao i Gaussova metoda eliminacije, ali umjesto na gornje trokutastu matricu, sustav se svodi na dijagonalnu matricu odakle direktno iščitavamo rješenja polaznog sustava.

Primjer 4.3. *Riješimo Primjer (4.1) Gauss-Jordanovom metodom.*

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 2 & 29 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 4 & 31 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ 5 & 1 & 2 & 29 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & -9 & -18 & -126 \\ 0 & -7 & -11 & -83 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 7 & 11 & 83 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 31 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & -3 & -15 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right] \qquad \Longrightarrow (x_1, x_2, x_3) = (3, 4, 5).$$

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Osijek, 2017.

[3] Element.hr, *Definicija i neki primjeri matrica*, javno dostupno na: https://element.hr/artikli/file/1406/em-13-matrice-i-determinante/14121

[4] L. Budin, D. Jakobović, *APR, radni matrijali (v. 2013-10-03)*, javno dostupno na: https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/matrice.pdf

[5] R. Scitovski, D. Marković, D. Brajković, *Linearna algebra I*, javno dostupno na: https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/scitowsk/LA1.pdf