

Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky nejednakost: primjene

Kulić, Toni

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:907804>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2022-06-30**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Department of Mathematics Osijek](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Toni Kulić

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i primjene

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Toni Kulić

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i primjene

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2020.

Sažetak

U završnom radu prezentirat će se Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i prikazati njen dokaz na više mogućih načina. Bit će pokazano i nekoliko generalizacija Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti te će se kroz ilustrativne zadatke pokazati njena primjena.

Ključne riječi

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost, primjena Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti, Jensenova nejednakost, aritmetičko-geometrijska nejednakost

CSB inequalities and applications

Summary

In this final work the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality is presented and its proof is shown in a few different ways. Some generalisations of the inequality are also presented and through illustrative examples the use of the inequality is shown.

Key words

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality, application of Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality, Jensen's inequality, arithmetic-geometric inequality

Sadržaj

1	Uvod	4
1.1	Povijesni pregled	4
1.2	Osnovni pojmovi i rezultati	5
2	Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i dokazi	7
3	Poopćenja	13
4	Primjene CSB u zadacima	14
	Literatura	20

1 Uvod

U završnom radu promatrat ćemo Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost koja je u matematičkoj literaturi poznata i pod nazivom Cauchyjeva nejednakost ili Cauchy-Schwarzova nejednakost. Nakon što se upoznamo s njom i potrebnim definicijama prezentirat ćemo različite dokaze te nejednakosti i prikazati njenu primjenu u zadacima.

1.1 Povijesni pregled

Augustin-Louis Cauchy(1789-1857) je davne 1821. godine objavio svoju svjetski poznatu nejednakost(CSB nejednakost) u knjizi *Cours d'Analyse Algèbrique* koja je jedna od prvih strogo matematičkih knjiga. Koristio ju je u nekoliko ilustrativnih primjera ne pokazujući još njen puni potencijal. Godine 1829. Cauchy ju je prvi puta upotrijebio pri istraživanju Newtonove metode za izračunavanje korijena algebarskih i transcendentnih jednadžbi. Cauchyjeva nejednakost bila je izražena u obliku konačne sume:

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Ruski matematičar Victor Bunyakovsky (1804-1889) studirao je u Parizu zajedno s Cauchyjem i bio je upoznat s njegovim radom na nejednakostima. U svojoj knjizi *Memoire* objavljenj 1859. godine zamijenio je sume u CSB nejednakosti s integralima i tako dobio integralni oblik CSB nejednakosti:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Iako je knjiga bila štampana u Francuskoj nije bila poznata u zapadnoj Europi.

Matematičar Hermann Schwarz (1843-1921) nije bio upoznat s njom.

Schwarz je imao potrebu za nejednakosti sa dvodimenzionalnim integralima koja bi bila analogna Cauchyjevoj nejednakosti. Trebao je pokazati da ako je $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : S \rightarrow \mathbb{R}$ tada dvostruki integrali $A = \iint_S f^2$, $B = \iint_S fg$,

$C = \iint_S g^2$ moraju zadovoljavati nejednakost $\|B\| < \sqrt{A}\sqrt{C}$, pri čemu vrijedi stroga nejednakost osim ako su funkcije f i g proporcionalne.

Pristup ovoj nejednakosti preko Cauchyjeve nejednakosti bio je nezahvalan jer se strogost diskretne nejednakosti može izgubiti u ograničavajućem prijelazu prema integralima. Schwarz je tražio drugačiji put i pronašao odgovarajući dokaz. Pokazao je da je realni polinom

$$p(t) = \iint_S (tf(x, y) + g(x, y))^2 dx dy = At^2 + 2Bt + C,$$

nenegativan, tj. $p(t) > 0$ osim kada su f i g proporcionalne. Tada koeficijenti moraju zadovoljavati $B^2 \leq AC$, osim ako su f i g proporcionalne, tada vrijedi stroga nejednakost $B^2 < AC$.

Schwarz je ponovno otkrio Buniakowskyjev oblik nejednakosti.

1.2 Osnovni pojmovi i rezultati

Promatrimo realni vektorski prostor \mathbb{R}^n .

Definicija 1 Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -torka pozitivnih realnih brojeva. Aritmetička sredina od x definirana je izrazom

$$A(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Definicija 2 Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -torka pozitivnih realnih brojeva. Geometrijska sredina od x definirana je izrazom

$$G(x) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Definicija 3 Za funkciju $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je konveksna na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ ako $\forall x_1, x_2 \in I$ i $\forall \alpha \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

Teorem 1 (Aritmetičko-geometrijska nejednakost)

Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -torka pozitivnih brojeva. Tada vrijedi

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Dokaz se može vidjeti u [1].

Teorem 2 (Diskretna Jensenova nejednakost)

Funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ je konveksna na $I \subseteq \mathbb{R}$ ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n \in I$ i $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$ takve da je $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Dokaz se može vidjeti u [7].

2 Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i dokazi

Sad, kada smo naveli bitne definicije i teoreme, iskazat ćemo Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky nejednakost i nekoliko njezinih dokaza.

Teorem 3 (*Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky (CSB) nejednakost*)

Za bilo koje dvije n -torke realnih brojeva $a = (a_1, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, \dots, b_n)$ vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (1)$$

Pri tome jednakost (1) vrijedi onda i samo onda ako su n -torke a i b proporcionalne.¹

Korolar 1 (*Engel forma CSB*) Neka su $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ i $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ dvije n -torke realnih brojeva i $v_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$. Tada vrijedi nejednakost

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n u_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n v_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{v_i},$$

Prethodna nejednakost je direktna posljedica CSB nejednakosti.

Dokaz iste se može pogledati u [1].

¹Postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\lambda a = b$

U nastavku slijede različiti dokazi CSB nejednakosti.

Dokaz 1

Dokaz provodimo raspisivanjem suma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{j=1}^n a_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \sum_{j=1}^n b_j a_j \\ &= 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \end{aligned}$$

Zato što je lijeva strana jednakosti suma kvadrata realnih brojeva ona je veća ili jednaka od nule, stoga

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

□

Dokaz 2

Funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, je strogo konveksna na \mathbb{R} , pa za nju vrijedi Jensenova nejednakost

$$\left(\frac{1}{S} \sum_{i=1}^n s_i x_i \right)^2 \leq \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n s_i x_i^2.$$

Ako pomnožimo sa S^2 dobijemo

$$\left(\sum_{i=1}^n s_i x_i \right)^2 \leq S \sum_{i=1}^n s_i x_i^2.$$

S pomoću supstitucije $x_i = a_i/b_i$ i $s_i = b_i^2$ za $i = 1, \dots, n$ dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su a i b proporcionalne.

□

Dokaz 3

Dokazat ćemo CSB nejednakost pomoću matematičke indukcije.

Slučaj $n = 1$ je trivijalan, tj. $a_1^2 \cdot b_1^2 \geq (a_1 b_1)^2$.

Baza indukcije: $n = 2$:

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Dakle, vrijedi baza indukcije.

Pretpostavka: Pretpostavimo da (1) vrijedi za bilo koji $n \in \mathbb{N}$, tj.

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Korak indukcije: Imamo

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) + a_{n+1} b_{n+1} \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)^{\frac{1}{2}} + a_{n+1} b_{n+1} \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

U prvoj nejednakosti koristimo pretpostavku indukcije, a u drugoj nejednakosti koristimo bazu, gdje koristimo izraz

$$\alpha \beta + a_{n+1} b_{n+1} \leq (\alpha^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}} (\beta^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}},$$

uz supstituciju

$$\alpha = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}, \beta = (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle, nejednakost (1) vrijedi i za $n + 1$. □

Dokaz 4

Neka su $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ n -torke realnih brojeva.

Tada za proizvoljan broj $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(a + tb) \cdot (a + tb) = a \cdot a + 2(a \cdot b)t + (b \cdot b)t^2 \iff |a|^2 + 2(a \cdot b)t + |b|^2 t^2 = |a + tb|^2 \geq 0.$$

Dakle,

$$(a \cdot b)^2 - |a|^2 |b|^2 \leq 0.$$

Koristeći izraze: $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$, $|a|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $|b|^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$.

Dobivamo

$$0 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

To jest, dobivamo nejednakost (1). \square

Dokaz 5

Neka je $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$ i $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$, iz aritmetičko-geomtrijske nejednakosti vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{AB} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^2}{A^2} + \frac{b_i^2}{B^2} \right) = 1.$$

Imamo

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2},$$

Stoga,

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Čime smo dobili nejednakost (1). \square

Dokaz 6

Promotrimo sljedeći polinom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 \\ &= (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2. \end{aligned}$$

Budući da je $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, diskriminanta D od $f(x)$ nije pozitivna tj.

$$D = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

Čime je dokazana nejednakost (1).

□

Dokaz 7

Neka su

$$\begin{aligned} A_n &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \\ B_n &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n, \\ C_n &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2. \end{aligned}$$

Iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti slijedi:

$$\frac{A_n C_n}{B_n^2} + 1 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 C_n}{B_n^2} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{C_n} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_i^2 C_n}{B_n^2} + \frac{b_i^2}{C_n} \right) \geq 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{B_n} = 2$$

Stoga, $A_n C_n \geq B_n^2$, to jest

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

□

Dokaz 8

Koristeći aritmetičko-geometrijsku nejednakost, za $\lambda > 0$ imamo

$$|a_i b_i| \leq \frac{1}{2} \left(\lambda a_i^2 + \frac{b_i^2}{\lambda} \right).$$

Ako biramo $\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$, gornja nejednakost nam daje

$$|a_i b_i| \leq \left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}} a_i^2 + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}} b_i^2 \right].$$

Stoga,

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \sum_{i=1}^n b_i^2} \right].$$

Što je ekvivalentno

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Iz čega slijedi nejednakost (1). □

Dokaz 9

Definirajmo niz (S_n) ,

$$S_n = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Onda,

$$S_{n+1} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1})^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + b_{n+1}^2),$$

Promotrimo razliku

$$S_{n+1} - S_n = - [(a_1 b_{n+1} - b_1 a_{n+1})^2 + (a_2 b_{n+1} - b_2 a_{n+1})^2 + \dots + (a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1})^2]$$

Dakle, $S_{n+1} \leq S_n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Stoga imamo:

$$S_n \leq S_{n-1} \leq \dots \leq S_1 = 0.$$

Iz čega slijedi nejednakost (1). □

3 Poopćenja

Za kompleksne brojeve na sljedeći način izražavamo CSB nejednakost.

Teorem 4 *Neka su $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ i $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ n -torke kompleksnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right) \geq \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2.$$

Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako su n -torke a i \bar{b} proporcionalne.

Dokaz

Neka je $\lambda \in \mathbb{C}$. Vrijedi jednakost

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 &= \sum_{i=1}^n (a_i - \lambda \bar{b}_i)(\bar{a}_i - \lambda b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - 2 \operatorname{Re} \left(\bar{\lambda} \sum_{i=1}^n a_i b_i \right). \end{aligned}$$

U jednakost uvrstimo

$$\lambda = \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)^{-1},$$

gdje je $b \neq 0$, stoga imamo

$$\sum_{i=1}^n |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 - \frac{\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} \geq 0,$$

što dokazuje CSB nejednakost za kompleksne brojeve. □

Teorem 5 (Težinska CSB nejednakost)

Neka su $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ n -torke realnih brojeva i $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$, $m_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ n -torka pozitivnih realnih brojeva. Tada vrijedi

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i m_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 m_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 m_i \right).$$

Jednakost vrijedi kao i samo ako su a i b proporcionalne.

Dokaz se može pogledati u [1].

4 Primjene CSB u zadatcima

U zadatcima ćemo koristiti i Engel formu CSB nejednakosti i AG nejednakost.

Zadatak 1.

Dokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi:

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

Rješenje:

U CSB nejednakosti stavimo $a_1 = \sqrt{x}$, $a_2 = \sqrt{y}$, $a_3 = \sqrt{z}$ te $b_1 = \frac{1}{x}$, $b_2 = \frac{1}{y}$, $b_3 = \frac{1}{z}$. Uvrštavanjem dobijemo:

$$\left(\sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \leq (x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right),$$

odnosno upravo ono što se trebalo pokazati, tj.

$$(x + y + z) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq (1 + 1 + 1)^2 = 9.$$

Zadatak 2.

Neka su x_1, \dots, x_n pozitivni realni brojevi za koje je $x_1 + \dots + x_n = 1$.

Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

Rješenje:

Stavimo li u CSB nejednakost $a_i = \sqrt{x_i}$ i $b_i = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$ dobivamo

$$(\sqrt{x_1} \cdot 1 + \dots + \sqrt{x_n} \cdot 1)^2 \leq (\sqrt{x_1}^2 + \dots + \sqrt{x_n}^2) \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ puta}},$$

odnosno

$$(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n})^2 \leq n(x_1 + \dots + x_n).$$

Kako je po uvjetu zadatka $x_1 + \dots + x_n = 1$, slijedi $(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n})^2 \leq n$, iz čega korjenovanjem dobijamo nejednakost.

Zadatak 3.

Dokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq x + y + z.$$

Rješenje:

Tvrdnja slijedi direktno iz CSB nejednakosti ako pažljivo odaberemo što su a_i , odnosno b_i . Kako s lijeve strane CSB nejednakosti imamo sumu produkata $a_i b_i$, očito nam primjerice a_1 i b_1 u produktu moraju dati x , dok kvadrat jednog od njih treba biti $\frac{x^2}{z}$ jer je to jedan od faktora s desne strane tražene nejednakosti. Neka su stoga:

$$a_1 = \frac{x}{\sqrt{z}}, \quad b_1 = \sqrt{z}, \quad a_2 = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad b_2 = \sqrt{x}, \quad a_3 = \frac{z}{\sqrt{y}}, \quad b_3 = \sqrt{y}.$$

Iz CSB nejednakosti (uz promjenu poretka nakon primjene iste) sada slijedi:

$$(x + y + z)^2 \leq \left(\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \right) (x + y + z).$$

Podijelimo li prethodnu nejednakost s $x + y + z > 0$ dobivamo traženu nejednakost.

Zadatak 4.

Neka su $x, y, z \in [-1/4, \infty)$ takvi da je $x + y + z = 1$. Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}.$$

Rješenje:

Treba razmisliti kako s desne strane nejednakosti dobiti broj 21. Kako je $21 = 7 \cdot 3$ potpun rastav broja 21 na proste faktore, ne nameće se puno mogućnosti. Očito ćemo 3 dobiti kao sumu jedinica, što znači da stavljamo

$$a_1 = \sqrt{4x+1}, \quad a_2 = \sqrt{4y+1}, \quad a_3 = \sqrt{4z+1}, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 1.$$

Sada iz CSB nejednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} (\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1})^2 &\leq (4x+1 + 4y+1 + 4z+1)(1+1+1) \\ &= (4(x+y+z) + 3) \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21 \end{aligned}$$

Korjenovanjem prethodne nejednakosti slijedi:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}.$$

Zadatak 5.

Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Rješenje:

Primijenimo CSB nejednakost u Engel formi na desnu stranu nejednakosti:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{(a+b)^2}{a+2b+c} = a+b - \frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}.$$

Iz kvadrirane AG nejednakosti i odgovarajuće primjene svojstva asocijativnosti dobivamo:

$$\left(\frac{a+2b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\right)^2 \geq (a+b)(b+c).$$

Iz čega dijeljenjem s $a+2b+c$ slijedi da je:

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \leq \frac{a+2b+c}{4}. \quad (2)$$

Sad kada uvrstimo u Engel formu CSB (2) i svedemo sve na zajednički nazivnik dobivamo upravo ono što smo trebali i pokazati, tj.

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq a+b - \frac{a+2b+c}{4} = \frac{3a+2b-c}{4}.$$

Zadatak 6.

Neka su a i b duljine kateta, a c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi:

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

Rješenje:

Lijeva strana nejednakosti koju želimo dokazati produkt je dvaju binoma, pa slutimo da možemo koristiti CSB nejednakost.

U tu svrhu neka je $n = 2$, $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$, $b_2 = \sqrt{\frac{c}{b}}$. Uvrštavanjem u CSB nejednakost slijedi:

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq \left(1 + \sqrt{\frac{c^2}{ab}}\right)^2.$$

Kako je prema uvjetu zadatka trokut pravokutan, iz Pitagorinog teorema² uvrštavanjem slijedi:

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq \left(1 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{ab}}\right)^2.$$

Iz nejednakosti $(a+b)^2 \geq 0$ tj. $a^2 + b^2 \geq 2ab$ uvrštavanjem se pokradi razlomak i dobivamo upravo ono što se trebalo pokazati, tj.

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

²Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad obje katete, tj. u našim oznakama $c^2 = a^2 + b^2$.

Zadatak 7.

Neka su x_1, \dots, x_n pozitivni realni brojevi takvi da je $x_1 + \dots + x_n = 1$.

Dokažite da vrijedi:

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Rješenje:

Lijeva strana nejednakosti suma je razlomaka čiji su brojnici kvadrati brojeva x_i , dok se u nazivnicima ne pojavljuju kvadrati. Pogledamo li izraz s lijeve strane CSB nejednakosti u Engel formi uočavamo sličnosti. Stavimo li $a_i = x_i$, $b_i = x_i + x_{i+1}$, $i = 1, \dots, n$ pri čemu smatramo da je $x_{n+1} = x_1$ te uvrstimo u CSB nejednakost u Engel formi, slijedi

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}.$$

Kako je $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$, slijedi tražena nejednakost

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

Zadatak 8.

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 6z &= 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 49. \end{aligned}$$

Rješenje:

Uvrstimo li u CSB nejednakost dobivamo

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq (2^2 + 3^2 + 6^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

tj.

$$\begin{aligned} (2x + 3y + 6z)^2 &\leq 49(x^2 + y^2 + z^2) \\ 49^2 &\leq 49 \cdot 49 \end{aligned}$$

Dakle, $49 = 49$.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

tj. $x = 2k$, $y = 3k$, $z = 6k$, $k \in \mathbb{R}$. Tada iz $2x + 3y + 6z = 49$ slijedi $4k + 9k + 36k = 49$, pa je $k = 1$. Dakle, uređena trojka $(2, 3, 6)$ je rješenje traženog sustava.

Zadatak 9.

Odredite realne brojeve a, b, c tako da vrijedi

$$\begin{aligned}a + b + c &= 6, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 12.\end{aligned}$$

Rješenje:

Prema CSB nejednakosti vrijedi

$$6^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Dakle, $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$.

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$, tj. za $a = b = c = 2$.

Primjeri su preuzeti iz [3] i [4].

Literatura

- [1] Z. CVETKOVSKI, *Inequalities*, Springer, Berlin, 2012.
- [2] S.S.DRAGOMIR, *A survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type discrete inequalities*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4 (3) (2003), 1-142.
- [3] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena Cauchy-Schwartz-Buniakowsky-jeve nejednakosti u geometriji*, Osječki matematički list, 5 (2) (2005), 77-84.
- [4] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi*, Osječki matematički list, 12 (1) (2012), 1-10.
- [5] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika 1*, Odjel za matematiku, Osijek, 1998.
- [6] D. S. MITRINOVIĆ, J. E. PEČARIĆ, A. M. FINK, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [7] M. R. PENAVALA, K. BOŠNJAK, *Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje*, Osječki matematički list, 16 (1) (2016), 15-25.
- [8] J. M. STEELE, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, University of Pennsylvania, 2004.
- [9] H. H. WU, S. WU, *Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality*, Octagon mathematical magazine, 17 (1) (2009), 221-229.