

# Cauchy-Schwartz-Bunyakovsky nejednakost: primjene

---

**Kulić, Toni**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:907804>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-22**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Toni Kulić**

**Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i primjene**

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

**Toni Kulić**

**Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i primjene**

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2020.

## Sažetak

U završnom radu prezentirat će se Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i prikazati njen dokaz na više mogućih načina. Bit će pokazano i nekoliko generalizacija Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti te će se kroz ilustrativne zadatke pokazati njena primjena.

## Ključne riječi

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost, primjena Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti, Jensenova nejednakost, aritmetičko-geometrijska nejednakost

# CSB inequalities and applications

## Summary

In this final work the Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality is presented and its proof is shown in a few different ways. Some generalisations of the inequality are also presented and through illustrative examples the use of the inequality is shown.

## Key words

Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality, application of Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality, Jensen's inequality, arithmetic-geometric inequality

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>4</b>
1.1	Povijesni pregled . . . . .	4
1.2	Osnovni pojmovi i rezultati . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i dokazi</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Poopćenja</b>	<b>13</b>
<b>4</b>	<b>Primjene CSB u zadacima</b>	<b>14</b>
	<b>Literatura</b>	<b>20</b>

# 1 Uvod

U završnom radu promatrat ćemo Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost koja je u matematičkoj literaturi poznata i pod nazivom Cauchyjeva nejednakost ili Cauchy-Schwarzova nejednakost. Nakon što se upoznamo s njom i potrebnim definicijama prezentirat ćemo različite dokaze te nejednakosti i prikazati njenu primjenu u zadacima.

## 1.1 Povijesni pregled

Augustin-Louis Cauchy(1789-1857) je davne 1821. godine objavio svoju svjetski poznatu nejednakost(CSB nejednakost) u knjizi *Cours d'Analyse Algèbrique* koja je jedna od prvih strogo matematičkih knjiga. Koristio ju je u nekoliko ilustrativnih primjera ne pokazujući još njen puni potencijal. Godine 1829. Cauchy ju je prvi puta upotrijebio pri istraživanju Newtonove metode za izračunavanje korijena algebarskih i transcendentnih jednadžbi. Cauchyjeva nejednakost bila je izražena u obliku konačne sume:

$$\left( \sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Ruski matematičar Victor Bunyakovsky (1804-1889) studirao je u Parizu zajedno s Cauchyjem i bio je upoznat s njegovim radom na nejednakostima. U svojoj knjizi *Memoire* objavljenj 1859. godine zamijenio je sume u CSB nejednakosti s integralima i tako dobio integralni oblik CSB nejednakosti:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Iako je knjiga bila štampana u Francuskoj nije bila poznata u zapadnoj Europi.

Matematičar Hermann Schwarz (1843-1921) nije bio upoznat s njom.

Schwarz je imao potrebu za nejednakosti sa dvodimensionalnim integralima koja bi bila analogna Cauchyjevoj nejednakosti. Trebao je pokazati da ako je  $S \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $f : S \rightarrow \mathbb{R}$  i  $g : S \rightarrow \mathbb{R}$  tada dvostruki integrali  $A = \iint_S f^2$ ,  $B = \iint_S fg$ ,

$C = \iint_S g^2$  moraju zadovoljavati nejednakost  $\|B\| < \sqrt{A}\sqrt{C}$ , pri čemu vrijedi stroga nejednakost osim ako su funkcije  $f$  i  $g$  proporcionalne.

Pristup ovoj nejednakosti preko Cauchyjeve nejednakosti bio je nezahvalan jer se strogost diskretne nejednakosti može izgubiti u ograničavajućem prijelazu prema integralima. Schwarz je tražio drugačiji put i pronašao odgovarajući dokaz. Pokazao je da je realni polinom

$$p(t) = \iint_S (tf(x, y) + g(x, y))^2 dx dy = At^2 + 2Bt + C,$$

nenegativan, tj.  $p(t) > 0$  osim kada su  $f$  i  $g$  proporcionalne. Tada koeficijenti moraju zadovoljavati  $B^2 \leq AC$ , osim ako su  $f$  i  $g$  proporcionalne, tada vrijedi stroga nejednakost  $B^2 < AC$ .

Schwarz je ponovno otkrio Buniakowskyjev oblik nejednakosti.

## 1.2 Osnovni pojmovi i rezultati

Promatrimo realni vektorski prostor  $\mathbb{R}^n$ .

**Definicija 1** *Neka je  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -torka pozitivnih realnih brojeva. Aritmetička sredina od  $x$  definirana je izrazom*

$$A(x) = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

**Definicija 2** *Neka je  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -torka pozitivnih realnih brojeva. Geometrijska sredina od  $x$  definirana je izrazom*

$$G(x) = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}.$$

**Definicija 3** *Za funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je konveksna na intervalu  $I \subseteq \mathbb{R}$  ako  $\forall x_1, x_2 \in I$  i  $\forall \alpha \in [0, 1]$  vrijedi*

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2).$$

**Teorem 1 (Aritmetičko-geometrijska nejednakost)**

*Neka je  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$   $n$ -torka pozitivnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n}.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ .*



Dokaz se može vidjeti u [1].

**Teorem 2 (Diskretna Jensenova nejednakost)**

Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je konveksna na  $I \subseteq \mathbb{R}$  ako i samo ako za svaki  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $x_1, \dots, x_n \in I$  i  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in [0, 1]$  takve da je  $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$  vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

Dokaz se može vidjeti u [7].

## 2 Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakost i dokazi

Sad, kada smo naveli bitne definicije i teoreme, iskazat ćemo Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky nejednakost i nekoliko njezinih dokaza.

### **Teorem 3** (*Cauchy-Schwarz-Bunyakowsky (CSB) nejednakost*)

Za bilo koje dvije  $n$ -torke realnih brojeva  $a = (a_1, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, \dots, b_n)$  vrijedi

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (1)$$

Pri tome jednakost (1) vrijedi onda i samo onda ako su  $n$ -torke  $a$  i  $b$  proporcionalne.<sup>1</sup>

**Korolar 1** (*Engel forma CSB*) Neka su  $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  i  $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  dvije  $n$ -torke realnih brojeva i  $v_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ . Tada vrijedi nejednakost

$$\frac{\left( \sum_{i=1}^n u_i \right)^2}{\sum_{i=1}^n v_i} \leq \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{v_i},$$

Prethodna nejednakost je direktna posljedica CSB nejednakosti.

Dokaz iste se može pogledati u [1].

---

<sup>1</sup>Postoji  $\lambda \in \mathbb{R}$  takav da je  $\lambda a = b$

U nastavku slijede različiti dokazi CSB nejednakosti.

### Dokaz 1

Dokaz provodimo raspisivanjem suma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (a_i b_j - a_j b_i)^2 &= \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{j=1}^n b_j^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2 \sum_{j=1}^n a_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i b_i \sum_{j=1}^n b_j a_j \\ &= 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \end{aligned}$$

Zato što je lijeva strana jednakosti suma kvadrata realnih brojeva ona je veća ili jednaka od nule, stoga

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2.$$

□

### Dokaz 2

Funkcija  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2$ , je strogo konveksna na  $\mathbb{R}$ , pa za nju vrijedi Jensenova nejednakost

$$\left( \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n s_i x_i \right)^2 \leq \frac{1}{S} \sum_{i=1}^n s_i x_i^2.$$

Ako pomnožimo sa  $S^2$  dobijemo

$$\left( \sum_{i=1}^n s_i x_i \right)^2 \leq S \sum_{i=1}^n s_i x_i^2.$$

S pomoću supstitucije  $x_i = a_i/b_i$  i  $s_i = b_i^2$  za  $i = 1, \dots, n$  dobivamo

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su  $a$  i  $b$  proporcionalne.

□

**Dokaz 3**

Dokazat ćemo CSB nejednakost pomoću matematičke indukcije.

Slučaj  $n = 1$  je trivijalan, tj.  $a_1^2 \cdot b_1^2 \geq (a_1 b_1)^2$ .

Baza indukcije:  $n = 2$  :

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 = a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2 \leq a_1^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 + a_2^2 b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$$

Dakle, vrijedi baza indukcije.

Pretpostavka: Pretpostavimo da (1) vrijedi za bilo koji  $n \in \mathbb{N}$ , tj.

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Korak indukcije: Imamo

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1} &= (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) + a_{n+1} b_{n+1} \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)^{\frac{1}{2}} + a_{n+1} b_{n+1} \\ &\leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

U prvoj nejednakosti koristimo pretpostavku indukcije, a u drugoj nejednakosti koristimo bazu, gdje koristimo izraz

$$\alpha \beta + a_{n+1} b_{n+1} \leq (\alpha^2 + a_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}} (\beta^2 + b_{n+1}^2)^{\frac{1}{2}},$$

uz supstituciju

$$\alpha = (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)^{\frac{1}{2}}, \beta = (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dakle, nejednakost (1) vrijedi i za  $n + 1$ . □

**Dokaz 4**

Neka su  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$   $n$ -torke realnih brojeva.

Tada za proizvoljan broj  $t \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$(a + tb) \cdot (a + tb) = a \cdot a + 2(a \cdot b)t + (b \cdot b)t^2 \iff |a|^2 + 2(a \cdot b)t + |b|^2 t^2 = |a + tb|^2 \geq 0.$$

Dakle,

$$(a \cdot b)^2 - |a|^2 |b|^2 \leq 0.$$

Koristeći izraze:  $a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n$ ,  $|a|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ ,  $|b|^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2$ .

Dobivamo

$$0 \geq \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

To jest, dobivamo nejednakost (1).  $\square$

### Dokaz 5

Neka je  $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$  i  $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2}$ , iz aritmetičko-geomtrijske nejednakosti vrijedi

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{AB} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i^2}{A^2} + \frac{b_i^2}{B^2} \right) = 1.$$

Imamo

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq AB = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2},$$

Stoga,

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Čime smo dobili nejednakost (1).  $\square$

### Dokaz 6

Promotrimo sljedeći polinom

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 \\ &= (a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n) x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \\ &= \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) x^2 + 2 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) x + \sum_{i=1}^n b_i^2. \end{aligned}$$

Budući da je  $f(x) \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , diskriminanta  $D$  od  $f(x)$  nije pozitivna tj.

$$D = 4 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) \leq 0.$$

Čime je dokazana nejednakost (1).

□

### Dokaz 7

Neka su

$$\begin{aligned} A_n &= a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2, \\ B_n &= b_1 a_1 + b_2 a_2 + \cdots + b_n a_n, \\ C_n &= b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2. \end{aligned}$$

Iz aritmetičko-geometrijske nejednakosti slijedi:

$$\frac{A_n C_n}{B_n^2} + 1 = \sum_{i=1}^n \frac{a_i^2 C_n}{B_n^2} + \sum_{i=1}^n \frac{b_i^2}{C_n} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i^2 C_n}{B_n^2} + \frac{b_i^2}{C_n} \right) \geq 2 \sum_{i=1}^n \frac{a_i b_i}{B_n} = 2$$

Stoga,  $A_n C_n \geq B_n^2$ , to jest

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)^2$$

□

### Dokaz 8

Koristeći aritmetičko-geometrijsku nejednakost, za  $\lambda > 0$  imamo

$$|a_i b_i| \leq \frac{1}{2} \left( \lambda a_i^2 + \frac{b_i^2}{\lambda} \right).$$

Ako biramo  $\lambda = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ , gornja nejednakost nam daje

$$|a_i b_i| \leq \left[ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}} a_i^2 + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}} b_i^2 \right].$$

Stoga,

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \sum_{i=1}^n b_i^2} \right].$$

Što je ekvivalentno

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \right) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$$

Iz čega slijedi nejednakost (1). □

### Dokaz 9

Definirajmo niz  $(S_n)$ ,

$$S_n = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2).$$

Onda,

$$S_{n+1} = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + a_{n+1} b_{n+1})^2 - (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + a_{n+1}^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 + b_{n+1}^2),$$

Promotrimo razliku

$$S_{n+1} - S_n = - [(a_1 b_{n+1} - b_1 a_{n+1})^2 + (a_2 b_{n+1} - b_2 a_{n+1})^2 + \dots + (a_n b_{n+1} - b_n a_{n+1})^2]$$

Dakle,  $S_{n+1} \leq S_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Stoga imamo:

$$S_n \leq S_{n-1} \leq \dots \leq S_1 = 0.$$

Iz čega slijedi nejednakost (1). □

### 3 Poopćenja

Za kompleksne brojeve na sljedeći način izražavamo CSB nejednakost.

**Teorem 4** *Neka su  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  i  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$   $n$ -torke kompleksnih brojeva. Tada vrijedi*

$$\left( \sum_{i=1}^n |a_i|^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right) \geq \left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2.$$

Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako su  $n$ -torke  $a$  i  $\bar{b}$  proporcionalne.

*Dokaz*

Neka je  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Vrijedi jednakost

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 &= \sum_{i=1}^n (a_i - \lambda \bar{b}_i)(\bar{a}_i - \bar{\lambda} b_i) \\ &= \sum_{i=1}^n |a_i|^2 + |\lambda|^2 \sum_{i=1}^n |b_i|^2 - 2 \operatorname{Re} \left( \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n a_i b_i \right). \end{aligned}$$

U jednakost uvrstimo

$$\lambda = \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) \left( \sum_{i=1}^n |b_i|^2 \right)^{-1},$$

gdje je  $b \neq 0$ , stoga imamo

$$\sum_{i=1}^n |a_i - \lambda \bar{b}_i|^2 = \sum_{i=1}^n |a_i|^2 - \frac{\left| \sum_{i=1}^n a_i b_i \right|^2}{\sum_{i=1}^n |b_i|^2} \geq 0,$$

što dokazuje CSB nejednakost za kompleksne brojeve. □



**Teorem 5 (Težinska CSB nejednakost)**

Neka su  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$   $n$ -torke realnih brojeva i  $m = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ ,  $m_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$   $n$ -torka pozitivnih realnih brojeva. Tada vrijedi

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i b_i m_i \right)^2 \leq \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 m_i \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 m_i \right).$$

Jednakost vrijedi kao i samo ako su  $a$  i  $b$  proporcionalne.

Dokaz se može pogledati u [1].

## 4 Primjene CSB u zadatcima

U zadatcima ćemo koristiti i Engel formu CSB nejednakosti i AG nejednakost.

**Zadatak 1.**

Dokažite da za pozitivne realne brojeve  $x, y, z$  vrijedi:

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

*Rješenje:*

U CSB nejednakosti stavimo  $a_1 = \sqrt{x}$ ,  $a_2 = \sqrt{y}$ ,  $a_3 = \sqrt{z}$  te  $b_1 = \frac{1}{x}$ ,  $b_2 = \frac{1}{y}$ ,  $b_3 = \frac{1}{z}$ . Uvrštavanjem dobijemo:

$$\left( \sqrt{x} \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{y} \frac{1}{\sqrt{y}} + \sqrt{z} \frac{1}{\sqrt{z}} \right)^2 \leq (x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right),$$

odnosno upravo ono što se trebalo pokazati, tj.

$$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq (1 + 1 + 1)^2 = 9.$$

**Zadatak 2.**

Neka su  $x_1, \dots, x_n$  pozitivni realni brojevi za koje je  $x_1 + \dots + x_n = 1$ .

Dokažite da vrijedi nejednakost:

$$\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n} \leq \sqrt{n}.$$

*Rješenje:*

Stavimo li u CSB nejednakost  $a_i = \sqrt{x_i}$  i  $b_i = 1 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$  dobivamo

$$(\sqrt{x_1} \cdot 1 + \dots + \sqrt{x_n} \cdot 1)^2 \leq (\sqrt{x_1}^2 + \dots + \sqrt{x_n}^2) \underbrace{(1 + \dots + 1)}_{n \text{ puta}},$$

odnosno

$$(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n})^2 \leq n(x_1 + \dots + x_n).$$

Kako je po uvjetu zadatka  $x_1 + \dots + x_n = 1$ , slijedi  $(\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n})^2 \leq n$ , iz čega korjenovanjem dobijamo nejednakost.

### Zadatak 3.

Dokažite da za pozitivne realne brojeve  $x, y, z$  vrijedi nejednakost

$$\frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \geq x + y + z.$$

*Rješenje:*

Tvrdnja slijedi direktno iz CSB nejednakosti ako pažljivo odaberemo što su  $a_i$ , odnosno  $b_i$ . Kako s lijeve strane CSB nejednakosti imamo sumu produkata  $a_i b_i$ , očito nam primjerice  $a_1$  i  $b_1$  u produktu moraju dati  $x$ , dok kvadrat jednog od njih treba biti  $\frac{x^2}{z}$  jer je to jedan od faktora s desne strane tražene nejednakosti. Neka su stoga:

$$a_1 = \frac{x}{\sqrt{z}}, \quad b_1 = \sqrt{z}, \quad a_2 = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad b_2 = \sqrt{x}, \quad a_3 = \frac{z}{\sqrt{y}}, \quad b_3 = \sqrt{y}.$$

Iz CSB nejednakosti (uz promjenu poretka nakon primjene iste) sada slijedi:

$$(x + y + z)^2 \leq \left( \frac{x^2}{z} + \frac{y^2}{x} + \frac{z^2}{y} \right) (x + y + z).$$

Podijelimo li prethodnu nejednakost s  $x + y + z > 0$  dobivamo traženu nejednakost.

**Zadatak 4.**

Neka su  $x, y, z \in [-1/4, \infty)$  takvi da je  $x + y + z = 1$ . Dokažite da vrijedi

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}.$$

*Rješenje:*

Treba razmisliti kako s desne strane nejednakosti dobiti broj 21. Kako je  $21 = 7 \cdot 3$  potpun rastav broja 21 na proste faktore, ne nameće se puno mogućnosti. Očito ćemo 3 dobiti kao sumu jedinica, što znači da stavljamo

$$a_1 = \sqrt{4x+1}, \quad a_2 = \sqrt{4y+1}, \quad a_3 = \sqrt{4z+1}, \quad b_1 = b_2 = b_3 = 1.$$

Sada iz CSB nejednakosti slijedi:

$$\begin{aligned} (\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1})^2 &\leq (4x+1 + 4y+1 + 4z+1)(1+1+1) \\ &= (4(x+y+z) + 3) \cdot 3 = 7 \cdot 3 = 21 \end{aligned}$$

Korjenovanjem prethodne nejednakosti slijedi:

$$\sqrt{4x+1} + \sqrt{4y+1} + \sqrt{4z+1} \leq \sqrt{21}.$$

**Zadatak 5.**

Neka su  $a, b, c$  pozitivni realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3a+2b-c}{4}.$$

*Rješenje:*

Primijenimo CSB nejednakost u Engel formi na desnu stranu nejednakosti:

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{(a+b)^2}{a+2b+c} = a+b - \frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c}.$$

Iz kvadrirane AG nejednakosti i odgovarajuće primjene svojstva asocijativnosti dobivamo:

$$\left(\frac{a+2b+c}{2}\right)^2 = \left(\frac{(a+b)+(b+c)}{2}\right)^2 \geq (a+b)(b+c).$$

Iz čega dijeljenjem s  $a+2b+c$  slijedi da je:

$$\frac{(a+b)(b+c)}{a+2b+c} \leq \frac{a+2b+c}{4}. \quad (2)$$

Sad kada uvrstimo u Engel formu CSB (2) i svedemo sve na zajednički nazivnik dobivamo upravo ono što smo trebali i pokazati, tj.

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} \geq a+b - \frac{a+2b+c}{4} = \frac{3a+2b-c}{4}.$$

### Zadatak 6.

Neka su  $a$  i  $b$  duljine kateta, a  $c$  duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Dokažite da vrijedi:

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq 3 + 2\sqrt{2}.$$

*Rješenje:*

Lijeva strana nejednakosti koju želimo dokazati produkt je dvaju binoma, pa slutimo da možemo koristiti CSB nejednakost.

U tu svrhu neka je  $n = 2$ ,  $a_1 = b_1 = 1$ ,  $a_2 = \sqrt{\frac{c}{a}}$ ,  $b_2 = \sqrt{\frac{c}{b}}$ . Uvrštavanjem u CSB nejednakost slijedi:

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq \left(1 + \sqrt{\frac{c^2}{ab}}\right)^2.$$

Kako je prema uvjetu zadatka trokut pravokutan, iz Pitagorinog teorema<sup>2</sup> uvrštavanjem slijedi:

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq \left(1 + \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{ab}}\right)^2.$$

Iz nejednakosti  $(a+b)^2 \geq 0$  tj.  $a^2 + b^2 \geq 2ab$  uvrštavanjem se pokradi razlomak i dobivamo upravo ono što se trebalo pokazati, tj.

$$\left(1 + \frac{c}{a}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) \geq (1 + \sqrt{2})^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

---

<sup>2</sup>Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbroju kvadrata nad obje katete, tj. u našim oznakama  $c^2 = a^2 + b^2$ .

**Zadatak 7.**

Neka su  $x_1, \dots, x_n$  pozitivni realni brojevi takvi da je  $x_1 + \dots + x_n = 1$ .

Dokažite da vrijedi:

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

*Rješenje:*

Lijeva strana nejednakosti suma je razlomaka čiji su brojnici kvadrati brojeva  $x_i$ , dok se u nazivnicima ne pojavljuju kvadrati. Pogledamo li izraz s lijeve strane CSB nejednakosti u Engel formi uočavamo sličnosti. Stavimo li  $a_i = x_i$ ,  $b_i = x_i + x_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$  pri čemu smatramo da je  $x_{n+1} = x_1$  te uvrstimo u CSB nejednakost u Engel formi, slijedi

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{2(x_1 + x_2 + \dots + x_n)}.$$

Kako je  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$ , slijedi tražena nejednakost

$$\frac{x_1^2}{x_1 + x_2} + \frac{x_2^2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_n^2}{x_n + x_1} \geq \frac{1}{2}.$$

**Zadatak 8.**

Riješite sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 6z &= 49 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 49. \end{aligned}$$

*Rješenje:*

Uvrstimo li u CSB nejednakost dobivamo

$$(2x + 3y + 6z)^2 \leq (2^2 + 3^2 + 6^2)(x^2 + y^2 + z^2),$$

tj.

$$\begin{aligned} (2x + 3y + 6z)^2 &\leq 49(x^2 + y^2 + z^2) \\ 49^2 &\leq 49 \cdot 49 \end{aligned}$$

Dakle,  $49 = 49$ .

Jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{6} = k, \quad k \in \mathbb{R},$$

tj.  $x = 2k$ ,  $y = 3k$ ,  $z = 6k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Tada iz  $2x + 3y + 6z = 49$  slijedi  $4k + 9k + 36k = 49$ , pa je  $k = 1$ . Dakle, uređena trojka  $(2, 3, 6)$  je rješenje traženog sustava.

**Zadatak 9.**

Odredite realne brojeve  $a, b, c$  tako da vrijedi

$$\begin{aligned}a + b + c &= 6, \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 12.\end{aligned}$$

*Rješenje:*

Prema CSB nejednakosti vrijedi

$$6^2 = (a \cdot 1 + b \cdot 1 + c \cdot 1)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(1^2 + 1^2 + 1^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Dakle,  $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$ .

Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$ , tj. za  $a = b = c = 2$ .

Primjeri su preuzeti iz [3] i [4].

## Literatura

- [1] Z. CVETKOVSKI, *Inequalities*, Springer, Berlin, 2012.
- [2] S.S.DRAGOMIR, *A survey on Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz type discrete inequalities*, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, 4 (3) (2003), 1-142.
- [3] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena Cauchy-Schwartz-Buniakowsky-jeve nejednakosti u geometriji*, Osječki matematički list, 5 (2) (2005), 77-84.
- [4] I. ILIŠEVIĆ, *Primjena Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeve nejednakosti na rješavanje algebarskih jednadžbi i sustava jednadžbi*, Osječki matematički list, 12 (1) (2012), 1-10.
- [5] D. JUKIĆ, R. SCITOVSKI, *Matematika 1*, Odjel za matematiku, Osijek, 1998.
- [6] D. S. MITRINOVIĆ, J. E. PEČARIĆ, A. M. FINK, *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.
- [7] M. R. PENAVALA, K. BOŠNJAK, *Jensenova nejednakost i nejednakosti izvedene iz nje*, Osječki matematički list, 16 (1) (2016), 15-25.
- [8] J. M. STEELE, *The Cauchy-Schwarz Master Class*, University of Pennsylvania, 2004.
- [9] H. H. WU, S. WU, *Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality*, Octagon mathematical magazine, 17 (1) (2009), 221-229.