Sylvesterova i Ljapunovljeva matrična jednadžba

Kovačević, Maja

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Maja Kovačević

Sylvesterova i Ljapunovljeva matrična jednadžba

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Maja Kovačević

Sylvesterova i Ljapunovljeva matrična jednadžba

Završni rad

Mentor: doc.dr.sc. Ivana Kuzmanović Ivičić

Osijek, 2020.

Sažetak

U ovom radu bavit ćemo se Sylvesterovom jednadžbom koja je dobila ime po engleskom matematičaru Jamesu Josephu Sylvesteru i njezinim specijalnim slučajem koji se naziva Ljapunovljeva matrična jednadžba po ruskom matematičaru Aleksandru Mikhailovichu Ljapunovu. U prvom poglavlju navest ćemo samu definiciju jednadžbi te definirati Kroneckerov produkt i operator vektorizacije koji će nam pomoći pri numeričkom rješavanju jednadžbi. Od velike važnosti su nam Schurova i Hessenbergova forma matrica koje ćemo korisiti u Bartels - Stewartovom algoritmu. U drugom poglavlju opisat ćemo postojanje i jedinstvenost rješenja jednadžbi te iskazati i dokazati pripadne tvrdnje. U trećem poglavlju predstavit ćemo najučinkovitiji Bartels - Stewartov algoritam za jednadžbe malih dimenzija pomoću kojeg rješavamo Sylvesterovu i Ljapunovljevu jednadžbu. Algoritam ćemo opisati u 4 koraka te ćemo ga provesti za Ljapunovljevu jednadžbu. Analogno tome provest ćemo Bartels - Stewartov algoritam za Sylvesterovu jednadžbu gdje će nam matrice A i B biti različitih dimenzija pa ćemo uvesti posebnu metodu koja se naziva Hessenberg - Schurova metoda koju ćemo koristiti u algoritmu za rješavanje jednadžbi tog tipa.

Ključne riječi: matrična jednadžba, postojanje rješenja, jedinstvenost rješenja, Bartels - Stewartov algoritam

Abstract

In this paper we will talk about Sylvester's equation named after the English mathematician James Joseph Sylvester and its special case called Lyapunov's matrix equation after the Russian mathematician Alexander Mikhailovich Lyapunov. In the first chapter, we will state the definition of equations and define the Kronecker product and vectorization operator that will help us in numerical solving of equations. Of great importance to us are the Schurov and Hessenberg form of matrix that we will use in the Bartels - Stewart algorithm. In the second chapter we will describe the existence and uniqueness of the solution of the equations and state and prove the corresponding theorems. In the third chapter we will present the most efficient Bartels - Stewart algorithm for small equations by which we solve the Sylvester and Lyapunov equation. We will describe the algorithm in 4 steps and implement it for Lyapunov's equation. Analogously, we will implement the Bartels - Stewart algorithm for the Sylvester equation where the matrices A and B will be of different dimensions, so we will introduce a special method called Hessenberg - Schur method, which we will use in the algorithm to solve equations of this type.

Key words: matrix equation, existence of solution, uniqueness of solution, Bartels - Steawart algorithm

Sadržaj

1 Uvod i motivacija

U ovom radu predstavit ćemo Sylvesterovu matričnu jednadžbu i poseban slučaj koji nazivamo Ljapunovljeva matrična jednadžba. Promatrat ćemo egzistenciju i jedinstvenost rješenja te numeričke metode pomoću kojih ih možemo rješavati. Općenito, matrične jednadžbe prisutne su u obradi signala, kontroli i teoriji sustava. Većina modela ovisnih o vremenu mogu biti predstavljeni kao linearni ili nelinearni dinamički sustavi koji se odnose na predviđanje i simulaciju u stvarnom svijetu. Navedene jednadžbe koriste se u područjima primjenjene matematike. Na primjer, numeričko rješenje problema eliptičkih graničnih vrijednosti može se formulirati u pojmovima rješavanja Sylvesterove jednadžbe (Starke and Niethammer 1991). Rješavanje Sylvesterove jednadžbe potrebno je i u blok dijagonalizaciji matrica kod transformacije sličnosti. Koriste se pri rješavanju Riccatijeve jednadžbe, pronalaženju svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. Nadalje, imaju važnu primjenu u obradi slike, problemu prigušenja u mehaničkim sustavima, teoriji upravljanja i u teoriji linearnih sustava. Dodatne primjene i detalji o navedenim problemima mogu se pronaći u članku [1].

Prije svega definirat ćemo Sylvesterovu i Ljapunovljevu jednadžbu te uvesti neke osnovne pojmove i svojstva.

1.1 Definicija Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe

Definirajmo najprije sam pojam linearne matrične jednadžbe.

Definicija 1.1. *Neka su* $A_i \in \mathbb{R}^{p\times q}$, $B_i \in \mathbb{R}^{r\times s}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times s}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. *Jednadžba oblika*

$$\sum_{i=1}^{k} A_i X B_i = C \tag{1.1}$$

naziva se ***linearna matrična jednadžba****, a matrica* $X \in \mathbb{R}^{q\times r}$ *njezino rješenje.*

Matrice A_i i B_i, $i = 1, 2, \ldots, k$ nazivaju se matricama koeficijenata matrične jednadžbe.

Definicija 1.2. *Matričnu jednadžbu oblika*

$$AX + XB = C \tag{1.2}$$

pri čemu su $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $C = [c_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *nazivamo* ***Sylvesterova matrična jednadžba****.*

Ukoliko u jednadžbu (1.2) uvrstimo $B = A^T$, dobivamo Ljapunovljevu jednadžbu.

Definicija 1.3. *Jednadžba oblika*

$$AX + XA^T = C \tag{1.3}$$

pri čemu su $A,\ C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *naziva se* ***Ljapunovljeva matrična jednadžba****.*

1.2 Kroneckerov produkt i operator vektorizacije

Kroneckerov produkt i operator vektorizacije matrice su od velike važnosti za dobivanje teorijskih rezultata o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja Sylvesterovih i Ljapunovljevih matričnih jednadžbi.

Definicija 1.4. ***Kroneckerov produkt*** *matrica* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *i* $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{r \times s}$ *(u oznaci* $A \otimes B$*) definiran je s:*

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{mr \times ns}. \tag{1.4}$$

Ako su A i B invertibilne matrice, tada je i $A \otimes B$ invertibilan i vrijedi $(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$ Navedimo jedan primjer Kroneckerovog produkta:

Primjer 1.1. *Neka su zadane sljedeće matrice :* $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ *i* $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & 6 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Tada je:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 0B & -2B \\ 3B & -1B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 4 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & -4 & 2 & -8 \\ 6 & 3 & 15 & 0 & -2 & -1 & -5 & 0 \\ -12 & -6 & 18 & 9 & 4 & 2 & -6 & -3 \\ -9 & 6 & -3 & 12 & 3 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Definicija 1.5. *Za matrice* $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *i* $B = [b_{ij}] \in \mathbb{R}^{r \times s}$ *definiramo* ***Kroneckerovu sumu*** *(u oznaci* $A \oplus B$*) izrazom:*

$$A \oplus B = I_m \otimes A + B \otimes I_n, \tag{1.5}$$

pri čemu su I_m *i* I_n *jedinične matrice reda* $m \times m$ *i* $n \times n$.

Nadalje, iskazat ćemo i dokazati teorem o svojstvenim vrijednostima Kroneckerove sume koji će nam poslužiti u dokazivanju jedinstvenosti rješenja Sylvesterove jednadžbe.

Teorem 1.6. *Neka matrica* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *ima svojstvene vrijednosti* λ_i, $i = 1, \dots, n$ *i neka* $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ *ima svojstvene vrijednosti* μ_j, $j = 1, \dots, m$. *Tada Kroneckerova suma* $A \oplus B = I_m \otimes A + B \otimes I_n$ *ima* mn *svojstvenih vrijednosti*

$$\lambda_1 + \mu_1, \dots, \lambda_1 + \mu_m, \lambda_2 + \mu_1, \dots, \lambda_2 + \mu_m, \dots, \lambda_1 + \mu_m, \dots, \lambda_n + \mu_m.$$

Nadalje, ako su $x_1, \dots, x_p$ *linearno nezavisni svojstveni vektori matrice* A *za odgovarajuće svojstvene vrijednosti* $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ $(p \leqslant n)$ *i* $z_1, \dots, z_q$ *linearno nezavisni svojstveni vektori matrice* B *za odgovarajuće svojstvene vrijednosti* $\mu_1, \dots, \mu_p$ $(q \leqslant m)$, *tada su* $z_j \otimes x_i \in \mathbb{R}^{m \times n}$ *linearno nezavisni svojstveni vektori od* $A \oplus B$ *za odgovarajuće svojstvene vrijednosti* $\lambda_i + \mu_j$, $i = 1, \dots, p, j = 1, \dots, q$.

Dokaz. Neka je $Ax = \lambda x$ i $Bz = \mu z$ za $x, z \neq 0$. Primjenom definicije Kroneckerove sume, svojstva o množenju Kroneckerova produkta $(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$ i svojstva $(\alpha A) \otimes B = A \otimes (\alpha B) = \alpha(A \otimes B)$, za $\alpha \in \mathbb{R}$ slijedi:

$$\begin{aligned}
(A \oplus B)(z \otimes x) &= [(I_m \otimes A) + (B \otimes I_n)](z \otimes x) \\
&= (I_m \otimes A)(z \otimes x) + (B \otimes I_n)(z \otimes x) \\
&= (I_m z \otimes Ax) + (Bz \otimes I_n x) \\
&= z \otimes (\lambda x) + (\mu z) \otimes x \\
&= (\lambda z) \otimes x + z \otimes (\mu x) \\
&= \lambda(z \otimes x) + \mu(z \otimes x) \\
&= (\lambda + \mu)(z \otimes x). \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

□

Definicija 1.7. *Operator vektorizacije matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, u oznaci $vec(A)$ definiran je s*

$$vec(A) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (1.7)$$

pri čemu su $a_1, a_2, \ldots, a_n$ stupci matrice A.

Odnosno operator vektorizacije je linearni operator koji matrici A pridružuje vektor sačinjen od stupaca matrice A poredanih jedan ispod drugog. Navedimo jedan primjer.

Primjer 1.2. *Neka je zadana matrica $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Tada je :*

$$vec(A) = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Pokazat ćemo sada da se pomoću Kroneckerovog produkta i operatora vektorizacije svaka linearna matrična jednadžba može zapisati kao sustav linearnih jednadžbi čije su nepoznanice elementi matrice X. Promotrimo Sylvesterovu jednadžbu (1.2). Neka su a_i, b_i, c_i, x_i redom stupci matrica A, B, C, X. Zapišimo jednakost (1.2) po stupcima. Dobivamo

$$c_i = Ax_i + Xb_i = Ax_i + \sum_{j=1}^{m} b_{ji} x_j$$

odnosno, ako sada prethodno dobiveni sustav jednadžbi zapišemo matrično, dobivamo

$$\begin{pmatrix} A + b_{11}I & b_{21}I & \ldots & b_{m1}I \\ b_{12}I & A + b_{22}I & \ldots & b_{m2}I \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1m}I & b_{2m}I & \ldots & A + b_{mm}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}. \qquad (1.8)$$

Dakle, (1.8) je $mn \times mn$ linearni sustav, čiju matricu koeficijenata možemo zapisati kao Kroneckerovu sumu $(I_m \otimes A) + (B^T \otimes I_n)$. Pomoću Definicije 1.6. pripadni linearni sustav možemo zapisati na sljedeći način

$$[I_m \otimes A + B^T \otimes I_n]vec(X) = vec(C). \tag{1.9}$$

Analogno, Ljapunovljeva matrična jednadžba (1.3) ekvivalentna je linearnom sustavu

$$[I_m \otimes A + A \otimes I_n]vec(X) = vec(C). \tag{1.10}$$

1.3 Schurova i Hessenbergova forma

U ovom poglavlju uvest ćemo Schurovu i Hessenbergovu formu matrica koje su pogodne za transformaciju matričnih jednadžbi. Također ćemo opisati kako dobiti realnu Schurovu formu matrice koja prikazuje njezine svojstvene vrijednosti. Navedene forme matrica kasnije ćemo koristiti kod metoda za rješavanje Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe.

Teorem 1.8. *Neka je $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Tada postoji unitarna matrica $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ takva da je*

$$U^*AU = T, \tag{1.11}$$

*gdje je $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gornjetrokutasta matrica kojoj se na dijagonali nalaze svojstvene vrijednosti matrice A. Kažemo da je matrica T **Schurova forma** matrice A.*

Dokaz. Vidi [3] □

Budući da realna matrica može imati kompleksne svojstvene vrijednosti, čak i za realnu matricu A, matrice U i T iz prethodnog teorema mogu biti kompleksne. Međutim, možemo odabrati da U bude realna ortogonalna matrica, ako T zamijenimo blok - trokutastom matricom R. Tada govorimo o realnoj Schurovoj formi matrice. To ćemo precizno iskazati u sljedećem teoremu.

Teorem 1.9. *(Realna Schurova dekompozicija) Neka $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ realna matrica. Tada postoji ortogonalna matrica $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da je*

$$Q^TAQ = R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & R_{kk} \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

*gdje je svaki dijagonalni blok R_{ii}, $i = 1, \dots, k$, dimenzije 1×1 ili 2×2. Trivijalni 1×1 blokovi su realne svojstvene vrijednosti od A, a svojstvene vrijednosti svakog 2×2 bloka su jedan par kompleksno konjugiranih svojstvenih vrijednosti od A. Kažemo da je R **realna Schurova forma** matrice A.*

Dokaz. Vidi [3] □

Definicija 1.10. *Za $n \times n$ matricu H kažemo da je u **Hessenbergovoj formi** (Hessenbergova matrica) ako je $h_{ij} = 0$ za $i > j + 1$.*

Sljedeći teorem govori o Hessenbergovoj dekompoziciji matrice.

Teorem 1.11. *Za realnu $n \times n$ matricu A postoji ortogonalna matrica $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ i Hessenbergova matrica $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ takva da vrijedi*

$$Q^T AQ = H. \tag{1.13}$$

Dokaz. Vidi [3] □

2 Egzistencija i jedinstvenost rješenja Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe

U većini numeričkih metoda za rješavanje matričnih jednadžbi podrazumijeva se da jednadžba koju treba riješiti ima jedinstveno rješenje i tada metode pomoću kojih ih rješavama konstruiraju jedinstveno rješenje. U ovom poglavlju predstaviti ćemo neke rezultate o postojanju i jedinstvenosti rješenja Sylvesterove i Ljapunovljeve jednažbe.

2.1 Sylvesterova jednadžba: $AX + XB = C$

Neka su $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ i $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Navest ćemo teorem koji je osnovni rezultat o egzistencije i jedinstvenosti rješenja Sylvesterove jednadžbe.

Teorem 2.1. *(Egzistencija i jedinstvenost rješenja) Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A i $\mu_1, \dots, \mu_m$ svojstvene vrijednosti matrice B. Tada Sylvesterova jednadžba (1.2) ima jedinstveno rješenje X ako i samo ako je $\lambda_i + \mu_j \neq 0$ za svaki i = 1, ..., n, j = 1, ..., m.*

Drugim riječima, Sylvesterova jednadžba ima jedinstveno rješenje ako i samo ako A i $-B$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti.

Dokaz. Sylvesterova jednadžba $AX + XB = C$ ekvivalentna je $mn \times mn$ linearnom sustavu

$$Px = c, \tag{2.1}$$

gdje je $P = I_m \otimes A + B^T \otimes I_n$,

$$x = vec(X) = (x_{11}, \dots, x_{n1}, x_{12}, x_{22}, \dots, \dots, x_{n2}, \dots, x_{1m}, x_{2m}, \dots, x_{nm})^T$$

$$c = vec(C) = (c_{11}, \dots, c_{n1}, c_{12}, c_{22}, \dots, \dots, c_{n2}, \dots, c_{1m}, c_{2m}, \dots, c_{nm})^T.$$

Stoga, vidimo da Sylvesterova jednadžba ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je P regularna matrica. Prema Teoremu 1.6. svojstvene vrijednosti matrice P su $\lambda_i + \mu_j$, gdje su λ_i, $i = 1, \dots, n$, μ_j, $j = 1, \dots m$ svojstvene vrijednosti matrica A i B. Kako je determinanta matrice jednaka produktu svojstvenih vrijednosti, to znači da je P regularna odnosno da Sylvesterova jednadžba ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\lambda_i + \mu_j \neq 0$, za $i = 1, \dots, n$, μ_j, $j = 1, \dots m$. □

Iskazat ćemo još jedan kriterij za postojanje rješenja Sylvesterove jednadžbe u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 2.2. *Jednadžba (1.2) ima rješenje ako i samo ako su matrice* $\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & -B \end{pmatrix}$ *i* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -B \end{pmatrix}$ *slične.*

Dokaz. Vidi [4] $\square$

2.2 Ljapunovljeva jednadžba: $AX + XA^T = C$

Budući je Ljapunovljeva jednadžba (1.3) poseban slučaj Sylvesterove jednadžbe (1.2) sljedeći korolar neposredno proizlazi iz Teorema 2.1.

Korolar 2.3. *(Jedinstvenost rješenja Ljapunovljeve jednadžbe) Neka su* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *svojstvene vrijednosti matrice* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$*. Tada Ljapunovljeva jednadžba (1.3) ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je* $\lambda_i + \lambda_j \neq 0$*, za* $i, j = 1, \ldots, n$*.*

Drugim riječima Ljapunovljeva jednadžba ima jedinstveno rješenje ako i samo ako A i $-A$ nemaju zajedničkih svojstvenih vrijednosti.

Nadalje, u primjenama se često pojavljuje Ljapunovljeva jednadžba u kojoj je matrica C simetrična odnosno $C = C^T$. Sljedeća napomena nam govori o jedinstvenosti rješenja takve Ljapunovljeve jednadžbe.

Napomena 2.4. *Primjetimo da ako je matrica* C *u Ljapunovljevoj jednadžbi* $AX + XA^T = C$ *s jedinstvenim rješenjem simetrična, odnosno* $C = C^T$*, onda transponiranjem jednadžbe dobivamo* $X^TA^T + AX^T = C^T$*, odnosno* $AX^T + X^TA^T = C$*, odakle slijedi da je* $X^T = X$*, odnosno da je rješenje takve jednadžbe također simetrična matrica.*

3 Numeričke metode za rješavanje Sylvesterove i Ljapunovljeve jednadžbe

U ovom poglavlju promatrat ćemo algoritme za matrične jednadžbe manjih dimenzija. Jedan od načina za rješavanje Sylvesterove jednadžbe $AX + XB = C$ je primjenom Gaussovih eliminacija s parcijalnim pivotiranjem na sustav (2.1) $Px = c$. Međutim, primjena Gaussovih eliminacija na matricu P bit će računski zahtjevna jer je P matrica dimenzije $mn \times mn$ pa je složenost $O(m^3n^3)$. Jedan od načina iskorištavanja strukture matrice P bit će transformirati A i B u neke jednostavnije forme koristeći sličnost matrica. Prema tome, ovdje ćemo koristit Schurovu i Hessenbergovu formu matrica koju smo uveli u prvom poglavlju. Najčešće korišteni algoritam za pronalaženje rješenja je Bartels - Stewartov koji se sastoji od transformacije matrice A i B u realnu Schurovu formu. Također ćemo uvesti Schurovu metodu za Lyapunovljevu jednadžbu i Hessenberg - Schurovu metodu za Sylvesterovu jednadžbu.

3.1 Bartels - Stewartov algoritam

Učinkovitu metodu za numeričko rješavanje Sylvesterovih jednadžbi manjih veličina uveli su 1972. godine Bartels i Stewart koja je prema njima i dobila ime Bartels - Steawart metoda te je uz neke izmjene i danas najučinkovitija. Numerička složenost algoritma je $O(m^3 + n^3)$.

Opisat ćemo Bartels - Stewartov algoritam (BS algoritam) u 4 koraka:

1. Transformirati matrice A i B u "jednostavniji" oblik koristeći sličnost matrica:
$$\hat{A} = U^{-1}AU, \quad \hat{B} = V^{-1}BV.$$
2. Izračunati matricu: $\hat{C} = U^{-1}CV$.
3. Riješiti transformiranu jednadžbu po Y: $\hat{A}Y + Y\hat{B} = \hat{C}$.
4. Izračunati X iz Y rješavanjem sustava: $X = UYV^{-1}$.

U sljedećim potpoglavljima u prvom koraku algoritma za Ljapunovljevu jednadžbu koristi se Schurova, a za Sylvesterovu Hessenberg - Schurova forma .

3.2 BS algoritam za Ljapunovljevu jednadžbu

Neka je $AX + XA^T = C$ Ljapunovljeva jednadžba, pri čemu je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Provedimo sada BS algoritam po koracima navedenim u poglavlju 3.1.:

1. korak: Reduciramo problem.
Trebamo matricu A transformirati u realnu Schurovu formu, odnosno dobiti matricu R oblika $R = U^TAU$, gdje je $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalna matrica. Zatim pomnožimo Ljapunovljevu jednadžbu s desne i lijeve strane s matricom $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$, odnosno dobivamo sljedeće
$$U^TCU = U^TAXU + U^TXA^TU.$$
Budući je U ortogonalna matrica, znamo da vrijedi $UU^T = I$ pa slijedi
$$\begin{aligned} U^TCU &= U^TAUU^TXU + U^TXUU^TA^TU \\ &= RY + YR^T. \end{aligned}$$
Zatim koristeći ovu transformaciju, Ljapunovljevu matričnu jednadžbu zapišemo kao
$$RY + YR^T = \hat{C}, \tag{3.1}$$
gdje je $R = U^TAU$, $\hat{C} = U^TCU$ i $Y = U^TXU$.
2. korak: Izračunamo matricu $\hat{C}$.
3. korak: Sada rješavamo reduciranu jednadžbu $RY + YR^T = \hat{C}$, odnosno trebamo izračunati Y koji ćemo dobiti koristeći supstituciju unazad. Dakle redom pronalazimo stupce od Y počevši od zadnjeg. Označimo
$$Y = (y_1, \ldots, y_n), \quad \hat{C} = (c_1, \ldots, c_n) \quad i \quad R = (r_{ij}), \quad i, j = 1, 2 \ldots, n.$$

Kako je R blok gornje trokutasta matrica, prema Teoremu 1.10. znamo da je oblika

$$Q^T A Q = R = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1k} \\ 0 & R_{22} & \dots & R_{2k} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & R_{kk} \end{pmatrix},$$

gdje je svaki blok R_{ii} dimenzije 1×1 ili 2×2. Pri rješavanju $RY + YR^T = \hat{C}$ razlikujemo dva slučaja s obzirom na vrstu blok matrice R_{ii}, $i = 1, \dots, k$. Pretpostavimo da su stupci y_{k+1} do y_n izračunati te promotrimo slučajeve:

1. slučaj : R_{ii} je 1×1 matrica. Neka se u matrici R nalazi u $k - tom$ retku i stupcu, odnosno $R_{ii} = r_{kk}$. Kako je R gornje trokutasta matrica slijedi da je $r_{k,k-1} = 0$. Prema pretpostavci da su stupci y_{k+1} do y_n izračunati tada se y_k određuje rješavanjem sustava :

$$(R + r_{kk} I) y_k = c_k - \sum_{j=k+1}^{n} r_{kj} y_j.$$

Budući je R gornje trokutasta matrica tada se svaki y_i, $i = n, n-1, \dots, 2, 1$ može izračunati rješavanjem gornjeg $n \times n$ sustava na sljedeći način:

$$\begin{aligned} (R + r_{nn} I) y_n &= c_n, \\ (R + r_{n-1,n-1} I) y_{n-1} &= c_{n-1} - r_{n-1,n} y_n, \\ &\vdots \\ (R + r_{11} I) y_1 &= c_1 - r_{12} y_2 - \dots - r_{1n} y_n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

2. slučaj : R_{ii} je 2×2 matrica. Neka se u matrici R nalazi u stupcima i retcima k - 1 i k, što znači da je $r_{k,k-1} \neq 0$ za neki k. Dakle, $R = \begin{pmatrix} r_{k-1,k-1} & r_{k,k-1} \\ r_{k-1,k} & r_{kk} \end{pmatrix}$. Prema pretpostavci znamo da su stupci y_{k+1} do y_n izračunati, ali sada k - ti stupac umnoška YR^T ne možemo izračunati pomoću već poznatih vrijednosti jer se element $r_{k-1,k}$ množi sa stupcem y_{k-1} koji još nismo izračunali. Stoga, moramo istovremeno izračunati y_{k-1} i y_k, rješavanjem sljedećeg $2n \times 2n$ linearnog sustava:

$$R(y_{k-1}, y_k) + (y_{k-1}, y_k) \begin{pmatrix} r_{k-1,k-1} & r_{k,k-1} \\ r_{k-1,k} & r_{kk} \end{pmatrix} = (c_{k-1}, c_k) - \sum_{j=k+1}^{n} (r_{k-1,j} y_j, r_{kj} y_j) = (d_{k-1}, d_k) \tag{3.3}$$

Ilustrirajmo sada prethodno navedeni 3. korak za n = 3.
Pretpostavimo da je $r_{21} \neq 0$. Tada je,

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ 0 & 0 & r_{33} \end{pmatrix}.$$

Budući je $r_{32} = 0$ imamo 1.slučaj i y_3 ćemo izračunati rješavanjem sustava:

$$(R + r_{33} I) y_3 = c_3.$$

Kako je $r_{21} \neq 0$ tada po 2.slučaju, y_1 i y_2 izračunavamo rješavanjem

$$R(y_1, y_2) + (y_1, y_2) \begin{pmatrix} r_{11} & r_{21} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix} = (c_1 - r_{13}y_3, c_2 - r_{23}y_3). \tag{3.4}$$

4. korak. Nakon što smo dobili Y rješavajući reduciranu jednadžbu $RY + YR^T = \hat{C}$, rješenje X originalnog problema $AX + XA^T = C$ dano je s

$$X = UYU^T.$$

Složenost algoritma

1. Transformacija matrice A u realnu Schurovu formu : $26n^3$.
2. Rješavanje reduciranog sustava: $3n^3$.
3. Pronalaženje rješenja X : $3n^3$.

$\Rightarrow$ Ukupna složenost: $32n^3$ operacija

Napomena 3.1. *Ako bismo koristili kompleksnu Schurovu dekompoziciju, tada u slučaju da je $R = U^*A^TU$ kompleksna gornje trokutasta matrica, onda se rješenje Y reduciranog problema može dobiti rješavanjem n kompleksnih $n \times n$ linearnih sustava (3.2.). Međutim, tada je numerički račun puno skuplji (povećava se broj računskih operacija) i ne preporučuje se u praksi. Stoga odabiremo realnu Schurovu dekompoziciju.*

3.3 BS algoritam za Sylvesterovu jednadžbu

Schurova metoda za Ljapunovljevu jednadžbu opisana gore u 1. koraku BS algoritma također se može koristiti za rješavanje Sylvesterove jednadžbe $AX + XB = C$, pri čemu je $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ i $C \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Matrice A i B se transformiraju u gornju i donju realnu Schurovu formu i tada se supstitucijom unatrag rješava dobiveni problem. Ostali koraci BS algoritma su analogni kao za Ljapunovljevu jednadžbu. Međutim, poseban oblik Schurove matrice S može se iskoristiti samo u rješavanju $n \times n$ linearnih sustava sa S. Stoga ćemo opisati Hessenberg - Schurovu metodu koja se koristi kada se dimenzije matrica A i B razlikuju.

3.3.1 Hessenberg - Schurova metoda

Golub, Nash i Van Loan su 1979. godine razvili Hessenberg - Schurovu metodu koju ćemo opisati u nastavku. U slučaju da je n dimenzija matrice A puno veća od dimenzije m matrice B za rješavanje Sylvesterove jednadžbe također se korisiti varijanta BS algoritma, pri čemu se B dovodi u realnu Schurovu formu, a matrica A u Hessenbergovu.

Sada ćemo opisati varijantu BS - algoritma sa Hessenberg - Schurovom metodom, izostavit ćemo neke korake jer je sve detaljno opisano u algoritmu za Ljapunovljevu jednadžbu.

1. korak. Redukcija na Hessenberg - Schurov problem.
   Pretpostavimo da je $n > m$. Neka su $H = V^TAV$ i $R = U^TB^TU$ redom Hessenbergova

forma i realna Schurova forma matrica A i B, pri čemu su matrice $U \in \mathbb{R}^{m\times m}$ i $V \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ortogonalne. Tada,

$$AX + XB = C \quad \text{postaje} \quad HY + YR^T = \hat{C},$$

gdje je $Y = V^T XU$, $\hat{C} = V^T CU$

2. korak. Izračunamo matricu $\hat{C}$.

3. korak. Rješavanje reduciranog Hessenberg - Schurovog problema.
U jednadžbi $HY + YR^T = \hat{C}$ neka su

$$Y = (y_1, \dots, y_n), \quad \hat{C} = (c_1, \dots, c_n) \quad i \quad R = (r_{ij}), \quad i = 1, \dots, n, j = 1, \dots m.$$

Pretpostavimo da su y_{k+1} do y_n izračunati, te y_k ili (y_k i y_{k+1}) mogu se izračunati kao u slučaju Ljapunovljeve jednadžbe uzimajući u obzir sljedeća dva slučaja.

1. slučaj: Ako je $r_{k,k-1} = 0$, y_k ćemo dobiti rješavanjem $m \times m$ sustava:

$$(H + r_{kk}I)y_k = c_k - \sum_{j=k+1}^{n} r_{kj}y_j.$$

2. slučaj: Ako je $r_{k,k-1} \neq 0$ izjednačavanjem stupaca *k-1* i k u jednadžbi $HY + YR^T = \hat{C}$, lako se vidi da se y_{k-1} i y_k mogu dobiti istovremeno rješavanjem linearnog sutava $2m \times 2m$:

$$H(y_{k-1}, y_k) + (y_{k-1}, y_k) \begin{pmatrix} r_{k-1,k-1} & r_{k,k-1} \\ r_{k-1,k} & r_{kk} \end{pmatrix} = (c_{k-1}, c_k) - \sum_{j=k+1}^{n} (r_{k-1,j}y_j, r_{kj}y_j) = (d_{k-1}, d_k) \tag{3.5}$$

4. korak. Rješenje X dobit ćemo iz Y na sljedeći način $X = VYU^T$.

Složenost algoritma

1. Redukcija na Hessenbergovu i realnu Schurovu formu: $5/3n^3 + 10m^3$.
2. Računanje matrice $\hat{C}$: $n^2m + nm^2$.
3. Rješavanje reduciranog sustava, odnosno računanje matrice Y : $3n^2m + 1/2nm^2$.
4. Pronalaženje rješenja X : $n^2m + nm^2$.

$\Rightarrow$ Ukupna složenost: $5/3n^3 + 10m^3 + 4n^2m + 5/2nm^2$ operacija.

Sada ćemo usporediti složenost Schurove i Hessenberg - Schurove metode. Ukupna složenost Schurove metode je $10n^3 + 10m^3 + 5/2(n^2m + nm^2)$. Na primjer za $n = 4m$, Hessenberg - Schurova metoda je oko 3 puta brža od Schurove metode. Stoga, zaključujemo da je Hessenberg - Schurova metoda bolja kada je n puno veći od m.

Primjer 3.1. *Riješite $AX + XB = C$, ako su dane sljedeće matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 8 & 9 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 12 \\ 24 & 22 & 24 \\ 27 & 25 & 27 \\ 12 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

1. korak. Pretvorimo B^T u realnu Schurovu formu i A u Hessenbergovu formu H:

$$U^T B^T U = R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$V^T A V = H = \begin{pmatrix} 1 & -5.3766 & -0.3709 & -0.0886 \\ -12.8452 & 7.6545 & 5.3962 & -0.7695 \\ 0 & 10.6689 & 4.7871 & -0.2737 \\ 0 & 0 & -5.3340 & 1.5584 \end{pmatrix}.$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3.114 & -0.7398 & -0.5965 \\ 0 & -5.449 & -0.3752 & 0.7498 \\ 0 & -0.7785 & 0.5585 & -0.2863 \end{pmatrix}.$$

2. korak. Izračunajmo $\hat{C} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 12 \\ -31.5292 & -28.2595 & -31.5292 \\ -21.1822 & -20.0693 & -21.1822 \\ 2.4949 & 2.7608 & 2.4949 \end{pmatrix}.$

3. korak. Rješavamo reducirani problem : $HY + YR^T = \hat{C}$.

1. slučaj: Kako je $r_{32} = 0$, y_3 ćemo dobiti rješavanjem: $(H + r_{33}I)y_3 = c_3$.

$$y_3 = \begin{pmatrix} 1 - 1.6348, & -0.5564, & -0.1329 \end{pmatrix}^T.$$

2. slučaj: Kako $r_{21} \neq 0$, y_1 i y_2 istovremeno ćemo izračunati rješavanjem sustava:

$$\begin{pmatrix} H + r_{11}I & r_{12}I \\ r_{21}I & H + r_{22}I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix},$$

gdje je $(d_1, d_2) = (c_1 - r_{13}y_3, c_2 - r_{23}y_3)$.

$$y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.6348 \\ -0.5564 \\ -0.1329 \end{pmatrix}, \quad y_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.6348 \\ -0.5564 \\ -0.1329 \end{pmatrix}.$$

Dakle,

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.6348 & -1.6348 & -1.6348 \\ -0.5564 & -0.5564 & -0.5564 \\ -0.1329 & -0.1329 & -0.1329 \end{pmatrix}.$$

4. korak. $X = VYU^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

Literatura

[1] V. Simoncini, *Computational methods for linear matrix equations*, SIAM Review, Society for Industrial and Applied Mathematics (2016.), 377 - 441.

[2] B.J. Broxson. *The Kronecker Product.* University of North Florida, Florida, 2006.

[3] B. N. Datta, *Numerical methods for linear control systems*, Academic Press, San Diego, 2004.

[4] W. E. Roth. *The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices.* Proc. Amer. Math. Soc., 3:392–396, 1952.

[5] A. C. Antoulas, *Approximation of large-scale dynamical systems, Society for Industrial and Applied Mathematics*, Philadelphia, PA, USA, 2005

[6] Alan J.Laub, *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, SIAM_Society for Industrial and Applied Mathematics (2004.)

[7] G. H. Golub, S. Nash i C. Van Loan, A Hessenberg-Schur method for the problem AX + XB = C, IEEE Trans. Automat. Control 24 (1979),909–913.

[8] Jasmina Šestan, *Numeričko rješavanje linearnih matričnih jednadžbi, Diplomski rad*, Prirodoslovno - Matematički fakultet, Matematički odsjek, Zagreb, 2016.