

# Pitagorine trojke

---

Erceg, Erika

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:983564>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-07-23**



Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Erika Erceg

# Pitagorine trojke

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku

Erika Erceg

# Pitagorine trojke

Završni rad

Voditelj: doc. dr. sc. Mirela Jukić Bokun

Osijek, 2020.

**Sažetak:**

U radu se bavimo primitivnim Pitagorinim trojkama, četvorkama i  $n$ -torkama. Proučili smo dvije metode za generiranje svih Pitagorinih trojki. Pokazali smo kako se može doći do svih Pitagorinih četvorki i  $n$ -torki te kako generirati Pitagorine  $n$ -torke iz jednog broja.

**Ključne riječi:**

Pitagorine trojke, primitivne Pitagorine trojke, relativno prosti brojevi, generiranje, generalizacija, Pitagorine  $n$ -torke

## Pythagorean triples

**Abstract:**

In this paper we deal with primitive Pythagorean triples, quadruples and  $n$ -tuples. We studied two methods for generating all Pythagorean triples. We have shown how to get all Pythagorean quadruples and  $n$ -tuples and also how to generate Pythagorean  $n$ -tuple from a single number.

**Key words:**

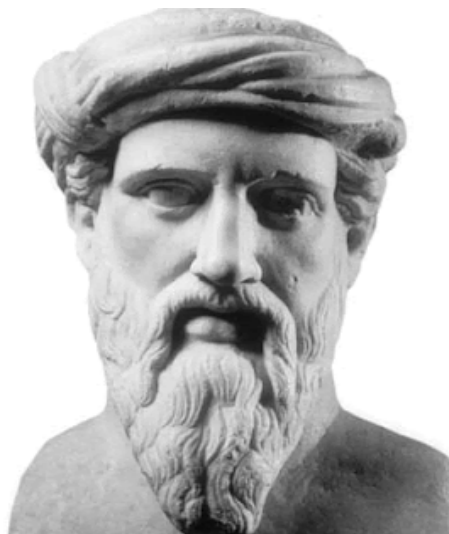
Pythagorean triples, primitive Pythagorean triples, relatively prime numbers, generating, generalization, Pythagorean  $n$ -tuples

# Sadržaj

Uvod	1
1. Osnovne formule za generiranje Pitagorinih trojki	2
2. Direktna metoda za generiranje Pitagorinih trojki i generalizacija metode na Pitagorine $n$ -torke	7
2.1. Generiranje primitivnih Pitagorinih trojki . . . . .	7
2.2. Generiranje svih Pitagorinih trojki . . . . .	10
2.3. Pitagorine četvorke . . . . .	11
2.4. Pitagorine $n$ -torke . . . . .	13
2.5. Generiranje Pitagorinih $n$ -torki iz jednog broja . . . . .	14
3. Metoda za generiranje svih Pitagorinih trojki jednom formulom	15
Literatura	20

# Uvod

Pitagora je živio otprilike od 570. do 500. pr. Kr. i osnovao je filozofsko vjersku školu Pitagorejska škola. Pitagorin teorem glasi: Za bilo koji pravokutni trokut je kvadrat duljine hipotenuze  $c$  jednak zbroju kvadrata duljina kateta  $a$  i  $b$ , tj.  $c^2 = a^2 + b^2$ . Vrijedi i obrat Pitagorinog teorema.



Slika 1: Pitagora<sup>1</sup>

Pitagorina trojka je uređena trojka prirodnih brojeva  $(a, b, c)$  koji zadovoljavaju formulu  $c^2 = a^2 + b^2$ . Pronalaženje Pitagorine trojke ekvivalentno je pronalaženju pravokutnog trokuta čije duljine stranica su prirodni brojevi. Ukoliko su  $a$ ,  $b$  i  $c$  relativno prosti, onda je  $(a, b, c)$  primitivna Pitagorina trojka. Za bilo koju trojku  $(a, b, c)$ , ako je  $x$  njihov najveći zajednički djelitelj, onda je  $(a/x, b/x, c/x)$  primitivna trojka. Stoga da bi pronašli sve Pitagorine trojke dovoljno je pronaći sve primitivne Pitagorine trojke.

O primitivnim Pitagorinim trojkama, generiranju Pitagorinih trojki, kao i o Pitagorinim  $n$ -torkama i njihovom generiranju bit će više riječi u poglavljima koja slijede.

---

<sup>1</sup>Izvor:[2]

# 1. Osnovne formule za generiranje Pitagorinih trojki

U ovom ćemo poglavlju opisati klasični način kako možemo generirati Pitagorine trojke ([1]). Prvo ćemo dokazati pomoćnu lemu koja nam govori kada je Pitagorina trojka primitivna.

**Lema 1.1.** *Za Pitagorinu trojku  $(a,b,c)$  sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1.  $a$ ,  $b$  i  $c$  nemaju zajedničkih djelitelja, tj. trojka je primitivna.
2.  $a$ ,  $b$  i  $c$  su u parovima relativno prosti.
3. neka dva od  $a$ ,  $b$  i  $c$  su relativno prosta.

*Dokaz.* Da 1. povlači 2. ćemo pokazati kontrapozicijom. Pretpostavimo da  $a$ ,  $b$  i  $c$  nisu u parovima relativno prosti. Tada postoji neki prirodan broj  $p$  takav da npr.  $p$  dijeli  $a$  i  $b$ . Pošto je  $c^2 = a^2 + b^2$ , onda  $p$  dijeli i  $c$ . Znači da  $a$ ,  $b$  i  $c$  imaju zajedničkog djelitelja  $p$ , što je kontradikcija. Isto bi dobili i da smo uzeli da  $p$  dijeli  $b$  i  $c$  ili  $a$  i  $c$ .

Očito je da 2. povlači 3., jer ako su  $a$ ,  $b$  i  $c$  u parovima relativno prosti, onda su i neka dva od  $a$ ,  $b$  i  $c$  relativno prosti.

Pokažimo kontrapozicijom da 3. povlači 1. Pretpostavimo da  $a$ ,  $b$  i  $c$  imaju zajednički djelitelj veći od 1. Tada taj broj dijeli i  $a$  i  $b$  i  $c$  pa ni jedan od njih nije sa nekim drugim relativno prost.  $\square$

Sada ćemo iskazati i dokazati jako bitan teorem za generiranje Pitagorinih trojki.

**Teorem 1.1.** *Ako je  $(a,b,c)$  primitivna Pitagorina trojka, tada je jedan broj od  $a$  i  $b$  paran, dok je drugi neparan broj. Ako je  $b$  paran, onda je*

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2, \quad (1)$$

za prirodne brojeve  $u$  i  $v$  koji zadovoljavaju  $u > v$ ,  $(u,v) = 1$  i  $u \not\equiv v \pmod{2}$ .

Obrnuto, za takve brojeve  $u$  i  $v$ , formulama (1) definirane su primitivne Pitagorine trojke.

*Dokaz.* Pokažimo prvo da su formulama (1) definirane primitivne Pitagorine trojke.

$$a^2 + b^2 = (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 = (u^2 + v^2)^2 = c^2.$$

Vidimo da je  $(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$  Pitagorina trojka za  $u > v > 0$ . Provjerimo je li primitivna za  $(u,v) = 1$  i  $u \not\equiv v \pmod{2}$ . Ako je prirodan broj  $x$  zajednički djelitelj od  $u^2 - v^2$  i  $u^2 + v^2$  koji su neparni, onda je  $x$  također neparan i dijeli njihovu sumu i razliku. Znači  $x$  dijeli  $2u^2$  i  $2v^2$ , a pošto je  $x$  neparan, onda dijeli  $u^2$  i  $v^2$ . Kako je  $(u,v) = 1$ , zaključujemo da je  $x = 1$ .

Sada ćemo na dva načina dokazati prvi smjer ovog teorema.

## Algebarski dokaz:

Pretpostavimo da su i  $a$  i  $b$  neparni. Tada je  $a^2 \equiv b^2 \equiv 1 \pmod{4}$ , pa je  $c^2 = a^2 + b^2 \equiv 2 \pmod{4}$ . Niti jedan broj kvadriran nije kongruentan 2 modulo 4 pa je to kontradikcija, znači ili  $a$  ili  $b$  mora biti paran. Kada bi oba broja bila parna, onda bi i  $c$  bio paran broj pa trojka  $(a,b,c)$  ne bi bila primitivna. Stoga je jedan od brojeva  $a$  i  $b$  paran, a drugi neparan i  $c$  je neparan.

Uzmimo da je  $b$  paran te zapišimo  $c^2 = a^2 + b^2$  na sljedeći način

$$b^2 = c^2 - a^2 = (c - a)(c + a). \quad (2)$$

Pošto su i  $a$  i  $c$  neparni, onda je  $c - a$  i  $c + a$  parno. Podijelimo li (2) s 4 imamo

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{c-a}{2} \frac{c+a}{2}. \quad (3)$$

Zato što su  $a$  i  $c$  relativno prosti, onda su i  $\frac{c-a}{2}$  i  $\frac{c+a}{2}$  relativno prosti, jer ako je  $x$  njihov najveći zajednički djelitelj, onda on dijeli i  $\frac{c+a}{2} - \frac{c-a}{2} = a$  i  $\frac{c+a}{2} + \frac{c-a}{2} = c$  pa je  $x = 1$ . Znamo da je  $c > a > 0$  pa su oba faktora jednakosti (3) pozitivni brojevi koji su relativno prosti. Pošto njihov umnožak daje kvadrat, onda je i svaki od njih kvadrat nekog broja pa za neke prirodne brojeve  $u$  i  $v$  imamo

$$\frac{c+a}{2} = u^2, \quad \frac{c-a}{2} = v^2. \quad (4)$$

Uočimo da su  $u$  i  $v$  relativno prosti. Sada kada zbrojimo i oduzmemo formule iz (4) dobijemo

$$a = u^2 - v^2, \quad c = u^2 + v^2.$$

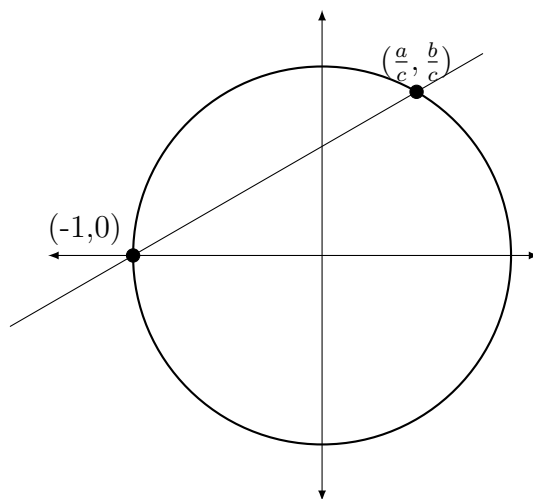
Oдавde (uzimajući u obzir da su  $b$ ,  $u$  i  $v$  prirodni brojevi) zaključujemo sljedeće

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = u^2 v^2 \implies b^2 = 4u^2 v^2 \implies b = 2uv.$$

Još je ostalo provjeriti  $u \not\equiv v \pmod{2}$ . Znamo da su  $u$  i  $v$  relativno prosti što znači da nisu oba parni. Kada bi oba bili neparni, onda bi  $u^2 - v^2$ ,  $2uv$  i  $u^2 + v^2$  svi bili parni pa trojka ne bi bila primitivna što je kontradikcija.

### Geometrijski dokaz:

Pitagorine trojke su povezane s točkama jedinične kružnice. Uočimo da se  $c^2 = a^2 + b^2$  može zapisati kao  $1 = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$  što nas podsjeća na jediničnu kružnicu  $1 = x^2 + y^2$ . Iz toga vidimo da je točka  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$  racionalna točka na jediničnoj kružnici.



Slika 2: Kružnica određena jednađbom  $x^2 + y^2 = 1$ .

Iz algebarskog dokaza znamo da za primitivnu Pitagorinu trojku  $(a, b, c)$  možemo uzeti da je  $a$  neparan, a  $b$  paran broj. Sada ćemo povući pravac kroz  $(-1, 0)$  i  $\left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right)$  kao na Slici



2.

Koeficijent smjera ovog pravca jednak je

$$k = \frac{\frac{b}{c} - 0}{\frac{a}{c} - (-1)} = \frac{b}{a + c}$$

pa znamo i jednadžbu pravca

$$y = \frac{b}{a + c}(x - (-1)) = k(x + 1).$$

Sada možemo jednadžbu pravca uvrstiti u jednadžbu kružnice i dobijemo

$$\begin{aligned} 1 &= x^2 + (k(x - 1))^2, \\ 1 &= x^2 + k^2x^2 - 2k^2x + k^2, \\ 1 &= (1 + k^2)x^2 - 2k^2x + k^2, \\ 0 &= (1 + k^2)x^2 - 2k^2x + k^2 - 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Iz jednadžbe (5) možemo izračunati nultočke, ali mi već znamo da su to  $x$ -koordinate u kojima se pravac i kružnica sijeku, tj.  $x_1 = -1$  i  $x_2 = \frac{a}{c}$ . Računanjem nultočki ćemo dobiti  $x_1$  i  $x_2$  zapisane preko  $k$

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{-2k^2 \pm \sqrt{4k^2 - 4(1 + k^2)(k^2 - 1)}}{2(1 + k^2)}, \\ x_{1,2} &= \frac{-k^2 \pm \sqrt{k^4 - k^4 + 1}}{1 + k^2} = \frac{-k^2 \pm 1}{1 + k^2}, \\ x_1 &= -1, \quad x_2 = \frac{a}{c} = \frac{-k^2 + 1}{1 + k^2}. \end{aligned} \tag{6}$$

Sjetimo se da je i točka  $(\frac{a}{c}, \frac{b}{c})$  na pravcu  $y = k(x + 1)$  pa imamo

$$\frac{b}{c} = k \left( \frac{a}{c} + 1 \right) = k \left( \frac{-k^2 + 1}{1 + k^2} + 1 \right) = k \left( \frac{-k^2 + 1 + 1 + k^2}{1 + k^2} \right) = \frac{2k}{1 + k^2}. \tag{7}$$

Pošto je  $k$  koeficijent smjera pravca koji siječe jediničnu kružnicu u prvom kvadrantu, onda je  $1 > k > 0$ . Tada  $k = \frac{b}{a+c}$  možemo zapisati ovako  $k = \frac{v}{u}$  za relativno proste prirodne brojeve  $u$  i  $v$ . Uvrstimo sada takav  $k$  u (6) i (7), uzimajući u obzir da je  $u > v$ , zbog  $k < 1$ , dobivamo

$$\frac{a}{c} = \frac{1 - \left(\frac{v}{u}\right)^2}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{u^2 - v^2}{u^2 + v^2}, \tag{8}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2\left(\frac{v}{u}\right)^2}{1 + \left(\frac{v}{u}\right)^2} = \frac{2uv}{u^2 + v^2}. \tag{9}$$

Moramo provjeriti uvjet  $u \not\equiv v \pmod{2}$ . Brojevi  $u$  i  $v$  nisu oba parna jer ne bi bili relativno prosti. Ako su oba broja neparna, onda su i  $2uv$  i  $u^2 + v^2$  parni pa možemo formulu (9) ovako zapisati

$$\frac{b}{c} = \frac{2uv}{u^2 + v^2} = \frac{uv}{\frac{u^2 + v^2}{2}}.$$

Pošto je  $uv$  neparan broj, a  $b$  je paran došli smo do kontradikcije.

Znamo da  $u^2 - v^2$ ,  $2uv$ ,  $u^2 + v^2$  čine Pitagorinu trojku. Također znamo i da su  $u^2 + v^2$  i

$u^2 - v^2$  relativno prosti pa zbog Leme 1.1 znamo da čine primitivnu Pitagorinu trojku. Sada kada znamo da su ta tri broja relativno prosta i da su  $a$ ,  $b$  i  $c$  relativno prosti, iz formula (8) i (9) možemo zaključiti da je

$$a = u^2 - v^2, \quad b = 2uv, \quad c = u^2 + v^2$$

i s time smo završili ovaj dokaz. □

Zanimljiva posljedica dobivene geometrijske formule za primitivnu Pitagorinu trojku  $(a, b, c)$  je da možemo znati koji će od  $u$  i  $v$  biti paran, a koji neparan. Imamo

$$k = \frac{b}{a+c} = \frac{v}{u}$$

i znamo da je ili  $u$  ili  $v$  paran. Kada je  $a+c$  djeljiv sa većom potencijom broja 2 nego što je  $b$ , onda je  $u$  paran, a  $v$  je paran kada je  $b$  djeljiv sa većom potencijom broja 2 nego što je  $a+c$ .

Navest ćemo sada nekoliko primjera.

**Primjer 1.1.** Pogledajmo kako za različite  $u$  i  $v$  dobivamo različite Pitagorine trojke. Uzimajući u obzir da je  $u > v$  i da je jedan od njih paran a drugi neparan dobivamo sljedeću tablicu.

$u$	$v$	$a$	$b$	$c$
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37

**Primjer 1.2.** Pogledajmo Pitagorine trojke  $(a, b, c)$  iz Primjera 1.1.

Pitagorina trojka  $(3, 4, 5)$ : vidimo da  $a+c = 8 = 2^3$  ima veću potenciju broja 2 nego  $b = 4 = 2^2$  pa bi zaključili da je  $u$  paran, što je istina jer je  $u = 2$ .

Pitagorina trojka  $(5, 12, 13)$ :  $a+c = 18 = 2 \cdot 9$  ima manju potenciju broja 2 nego  $b = 12 = 3 \cdot 2^2$  pa zaključujemo da je  $v$  paran, vidimo iz tablice da je  $v = 2$ .

Pitagorina trojka  $(9, 40, 41)$ :  $a+c = 50 = 5^2 \cdot 2$  ima manju potenciju broja 2 nego  $b = 40 = 5 \cdot 2^3$  pa je  $v$  paran, vidimo iz tablice da je  $v = 4$ .

**Primjer 1.3.** Pitagorine trojke iz Primjera 1.1 su sve primitivne, ali iz njih možemo dobiti i one koje nisu primitivne. Primitivna Pitagorina trojka je  $(5, 12, 13)$ , a Pitagorine trojke koje nisu primitivne i koje dobijemo iz  $(5, 12, 13)$  su  $(10, 24, 26)$ ,  $(15, 36, 39)$ ,  $(50, 120, 130)$ ,  $(500, 1200, 1300)$ , itd.

**Napomena 1.1.** Iz Teorema 1.1 smo vidjeli kako dobiti primitivne Pitagorine trojke, a sve Pitagorine trojke možemo dobiti pomoću ove formule

$$[d(u^2 - v^2)]^2 + (2duv)^2 = [d(u^2 + v^2)]^2, d \in \mathbb{N}. \quad (10)$$

**Primjer 1.4.** *Odredite sve Pitagorine trojke u kojima jedna kateta ima duljinu 15.*

*Vidimo iz formule (10) da  $d$  može biti neki od brojeva 1, 3, 5, 15.*

- *Ako je  $d = 1$  onda je trojka primitivna i jedna kateta joj je jednaka 15. Tada je  $u^2 - v^2 = 15$  pa imamo primitivnu Pitagorinu trojku (15, 8, 17).*
- *Ako je  $d = 3$  onda možemo podijeliti Pitagorinu trojku s 3 i dobijemo primitivnu Pitagorinu trojku čija je jedna kateta jednaka 5. Tada je  $u^2 - v^2 = 5$  pa je primitivna Pitagorina trojka (5, 12, 13).*
- *Ako je  $d = 5$  onda možemo podijeliti Pitagorinu trojku s 5 i dobijemo primitivnu Pitagorinu trojku čija je jedna kateta jednaka 3. Tada je  $u^2 - v^2 = 3$  pa je primitivna Pitagorina trojka (3, 4, 5).*
- *Ako je  $d = 15$  onda možemo podijeliti Pitagorinu trojku s 15 i dobijemo primitivnu Pitagorinu trojku čija je jedna kateta jednaka 1. Pošto su  $u$  i  $v$  različite parnosti ovaj slučaj nije moguć.*

## 2. Direktna metoda za generiranje Pitagorinih trojki i generalizacija metode na Pitagorine $n$ -torke

U prvom poglavlju smo uveli formule (1) koje generiraju primitivne Pitagorine trojke  $(a, b, c)$  te formulu (10) pomoću koje možemo dobiti sve Pitagorine trojke. Postoji više načina za generiranje svih Pitagorinih trojki, ovdje ćemo govoriti o metodi koja je opisana u [8]. Ova metoda koristi činjenicu da razlika između duljine hipotenuze  $c$  i duljine jednog od krakova  $a$  (ili  $b$ ) pravokutnog trokuta može imati samo određenu vrijednost ovisnu o duljini drugog kraka. Ono što je također dobro kod ove metode je što kada faktoriziramo  $u$  možemo prognozirati koliko će biti primitivnih, a koliko Pitagorinih trojki koje nisu primitivne i prije nego što ih sve izračunamo. Motivacija za generiranje Pitagorinih trojki je njihova primjena u svakodnevnom životu, kao npr. u kriptografiji i zaštiti podataka ([3]).

Zapišimo sada  $c - b = d$ , tj.  $c = d + b$ . Tada iz opće formule  $a^2 + b^2 = c^2$  dobijemo ovo

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (d + b)^2, \\ a^2 + b^2 &= b^2 + 2bd + d^2, \\ a^2 &= d(2b + d), \\ b &= \frac{a^2 - d^2}{2d}. \end{aligned} \tag{11}$$

Broj  $d$  mora zadovoljavati sljedeća dva uvjeta:  $d$  mora biti djelitelj od  $a^2$  i pošto je  $b$  prirodan broj mora biti  $a^2 - d^2 > 0$ , tj.

$$a > d.$$

U Potpoglavljju 2.1. ćemo pokazati kako možemo pomoću ovog generiranja doći do primitivnih Pitagorinih trojki, a u Potpoglavljju 2.2. ćemo napraviti generiranje za sve Pitagorine trojke. Nakon toga ćemo u Potpoglavljju 2.3. napraviti generalizaciju posebno za Pitagorine četvorke, te nakon toga u Potpoglavljju 2.4. općenito za Pitagorine  $n$ -torke.

### 2.1. Generiranje primitivnih Pitagorinih trojki

Znamo iz Poglavlja 1. da je Pitagorina trojka  $(a, b, c)$  primitivna kada su  $a$ ,  $b$  i  $c$  relativno prosti te da je  $c$  neparan broj, a da su  $a$  i  $b$  jedan paran, a drugi neparan broj. Sada kada gledamo formulu  $c - b = d$  znamo da ako uzmemo da je  $a$  paran onda je i  $d$  paran, te ako je  $a$  neparan, onda imamo neparan broj  $c$  minus paran broj  $b$ , a to je neparan broj  $d$ .

Problem ćemo rastaviti na tri slučaja:

1. parni brojevi koji se sastoje samo od potencija broja 2
2. neparni brojevi koji se sastoje od potencija prostih brojeva
3. parni brojevi koji se sastoje i od potencija broja 2 i od potencija prostih brojeva.

Promotrimo u nastavku nabrojane slučajeve.

1. Neka je  $a = 2^m$  i  $d = 2^n$ , gdje su  $m$  i  $n$  cijeli brojevi.  
Zbog uvjeta na  $d$  mora biti  $m > n$ . Iz formule (11) dobijemo

$$\begin{aligned}(2^m)^2 &= 2^n(2b + 2^n), \\ 2^{2m} &= 2^{n+1}b + 2^{2n}, \\ b &= \frac{2^{2m} - 2^{2n}}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

dijeljenjem i brojnika i nazivnika s  $2^{2n}$  dobijemo

$$b = 2^{n-1}(2^{2m-2n} - 1). \quad (12)$$

Pošto je  $a$  oblika  $2^m$  znamo da je  $a$  paran iz čega slijedi da je  $b$  neparan broj pa je zbog formule (12)  $n = 1$ . Trojka će izgledati ovako

$$(2^m, 2^{2m-2} - 1, 2^{2m-2} + 1), \quad (13)$$

jer kada  $n = 1$  uvrstimo u formulu (12) imamo  $b = 2^{2m-2} - 1$  te kada uvrstimo u  $c - b = d$  imamo  $c = 2^1 + 2^{2m-2} - 1 = 2^{2m-2} + 1$ .

**Primjer 2.1.** Neka je  $a = 2^4 = 16$ . Znamo da je  $d = 2$  i  $m = 4$ .

Sada možemo izračunati iz (13) da je  $b = 63$  i  $c = 65$  te imamo primitivnu Pitagorinu trojku  $(16, 63, 65)$ . Da nismo uzeli  $d = 2$ , da smo npr. uzeli  $d = 4$  imali bi  $(16, 30, 34)$ , a to je Pitagorina trojka koja nije primitivna.

2. Neka je  $a = p^r k$ ,  $p$  je prost djelitelj od  $a$ ,  $k$  je produkt ostalih prostih faktora, a  $r$  je neki prirodan broj.

Tada je  $d = p^t$ , gdje je  $t$  prirodan broj. Iz formule (11) imamo

$$\begin{aligned}(p^r k)^2 &= p^t(2b + p^t), \\ p^{2r} k^2 &= 2p^t b + p^{2t}, \\ b &= \frac{p^{2r} k^2 - p^{2t}}{2p^t}\end{aligned}$$

i sada podijelimo i brojnik i nazivnik sa  $p^t$  i imamo

$$b = \frac{p^{2r-t} k^2 - p^t}{2}. \quad (14)$$

Pošto je  $p$  djelitelj od  $a$ , a mi tražimo primitivne trojke, onda  $p$  ne smije biti djelitelj od  $b$ . Zbog toga  $t$  može biti ili 0 ili  $2r$ . Sada vidimo da su onda primitivne Pitagorine trojke oblika

$$\left( p^r k, \frac{k^2 - p^{2r}}{2}, \frac{k^2 + p^{2r}}{2} \right)$$

za  $d = p^{2r}$ , a za  $d = 1$  su ovog oblika

$$\left( p^r k, \frac{p^{2r} k^2 - 1}{2}, \frac{p^{2r} k^2 + 1}{2} \right). \quad (15)$$

Uočimo da se formula (15) može zapisati ovako  $\left( a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2} \right)$ , što znači da za svaki neparan broj postoji barem jedna primitivna Pitagorina trojka tog oblika.

**Primjer 2.2.** Neka je  $a = 3^2 \cdot 5 = 45$ . Tada  $d$  može biti samo oblika  $d = 1$  jer je  $d = 3^4 = 81 > 45 = a$ . Kada je  $d = 1$  primitivna Pitagorina trojka je oblika  $(45, 1012, 1013)$ .

3. Neka je  $a = 2^m p^r k$ ,  $p$  je neparan prost djelitelj od  $a$ ,  $k$  je produkt ostalih prostih faktora, a  $m$  i  $r$  su prirodni brojevi.

Tada je  $d = 2^s p^t$ ,  $s$  i  $t$  su cijeli brojevi. Iz formule (11) imamo

$$\begin{aligned} (2^m p^r k)^2 &= 2^s p^t (2b + 2^s p^t), \\ 2^{2m} p^{2r} k^2 &= 2^{s+1} p^t b + 2^{2s} p^{2t}, \\ b &= \frac{2^{2m} p^{2r} k^2 - 2^{2s} p^{2t}}{2^{s+1} p^t} \end{aligned}$$

i kada podijelimo i brojnik i nazivnik sa  $2^{2s} p^t$  dobijemo

$$b = 2^{s-1} (2^{2m-2s} p^{2r-t} k^2 - p^t). \quad (16)$$

(a) Kada je  $m > s$ , iz formule (16) vidimo da  $s$  mora biti jednak 1 jer je  $b$  neparan broj, te  $p$  ne može biti djelitelj od  $b$  jer onda trojka ne bi bila primitivna. Zaključujemo da je ili  $t = 0$  ili  $t = 2r$ .

Primitivna Pitagorina trojka će izgledati ovako

$$(2^m p^r k, 2^{2m-2} p^{2r} k^2 - 1, 2^{2m-2} p^{2r} k^2 + 1)$$

za  $d = 2$ , a za  $d = 2p^{2r}$  ovako

$$(2^m p^r k, 2^{2m-2} k^2 - p^{2r}, 2^{2m-2} k^2 + p^{2r}).$$

**Primjer 2.3.** Neka je  $a = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 9 = 900$ . Tada je  $d = 2$ , ne može biti  $d = 5^4 \cdot 2 = 1250$  jer je  $1250 > 900$ . Za  $d = 2$  je  $(900, 202499, 202501)$  primitivna Pitagorina trojka.

(b) Kada je  $m < s$ , formulu (16) zapisujemo ovako

$$b = 2^{s-1} \left( \frac{p^{2r-t} k^2}{2^{2s-2m}} - p^t \right) = 2^{2m-s-1} (p^{2r-t} k^2 - 2^{2s-2m} p^t).$$

Zbog toga što  $b$  treba biti neparan je  $s = 2m - 1$ , te  $p$  ne smije dijeliti  $b$  pa je  $t = 0$  ili  $t = 2r$ .

Primitivna Pitagorina trojka će izgledati ovako

$$(2^m p^r k, p^{2r} k^2 - 2^{2m-2}, p^{2r} k^2 + 2^{2m-2})$$

za  $d = 2^{2m-1}$ , a za  $d = 2^{2m-1} p^{2r}$  ovako

$$(2^m p^r k, k^2 - 2^{2m-2} p^{2r}, k^2 + 2^{2m-2} p^{2r}, ).$$

**Primjer 2.4.** Neka je  $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 = 252$ . Tada je  $d = 2^3 = 8$ , ne može biti  $d = 2^3 \cdot 3^4 = 648$  jer je  $648 > 252$ . Za  $d = 8$  je  $(252, 3965, 3973)$  primitivna Pitagorina trojka.

(c) Kada je  $m = s$ , iz formule (16) imamo

$$b = 2^{s-1}(p^{2r-t}k^2 - p^t).$$

Ako je  $s \geq 1$ ,  $b$  će uvijek biti paran, tako da je trojka primitivna jedino kad je  $m = s = 0$ . Kada to uvrstimo u  $b$  dobit ćemo formulu (14) koju smo već prokomentirali u 2. slučaju.

Sada možemo te slučajeve sve povezati u jedan: ako je  $a = 2^m p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n}$ , onda je  $d = 2^s q$  gdje je  $q = \prod_{i=1}^N q_i^{t_i}$ , a  $t_i = 0$  ili  $t_i = 2r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Na ovaj način smo generirali sve primitivne Pitagorine trojke, ali ne smijemo zaboraviti da i dalje  $d$  mora zadovoljavati uvjet  $a > d$ .

**Primjer 2.5.** Neka je  $a = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11 = 1188$ , tada je  $p_1 = 3$ , a  $p_2 = 11$ . Pokazat ćemo tablicom sve moguće kombinacije za primitivne Pitagorine trojke u kojima je  $a = 1188$ .

$d$	$b$	$(a, b, c)$
$2^1 \cdot 3^0 \cdot 11^0 = 2$	352835	(1188, 352835, 352837)
$2^1 \cdot 3^6 \cdot 11^0 = 1458$	-	-
$2^1 \cdot 3^0 \cdot 11^2 = 242$	2795	(1188, 2795, 3037)
$2^1 \cdot 3^6 \cdot 11^2 = 176418$	-	-
$2^3 \cdot 3^0 \cdot 11^0 = 8$	88205	(1188, 88205, 88213)
$2^3 \cdot 3^0 \cdot 11^2 = 968$	245	(1188, 245, 1213)
$2^3 \cdot 3^6 \cdot 11^0 = 5832$	-	-
$2^3 \cdot 3^6 \cdot 11^2 = 705672$	-	-

Ova četiri slučaja za  $d$  smo isključili jer ne zadovoljava uvjet  $a > d$ .

## 2.2. Generiranje svih Pitagorinih trojki

Da bi generirali Pitagorine trojke koje nisu primitivne jedini uvjet je da je  $a > d$ . Stoga prvo faktoriziramo broj  $a$  i onda  $d$  uzmemo da je bilo koja kombinacija tih brojeva osim one koja daje primitivnu trojku. Ako je  $a$  paran, onda je i  $d$  paran broj, a ako je  $a$  neparan, onda je i  $d$  neparan broj.

**Primjer 2.6.** Neka je  $a = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ . Prikazat ćemo sada tablicom za  $a = 180$  sve moguće Pitagorine trojke koje nisu primitivne.

$d$	$b$	$(a, b, c)$
$2^1 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 30$	525	(180, 525, 555)
$2^1 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 10$	1615	(180, 1615, 1625)
$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 18$	891	(180, 891, 909)
$2^1 \cdot 3^2 \cdot 5^1 = 90$	135	(180, 135, 225)
$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^0 = 4$	4048	(180, 4048, 4052)
$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^0 = 12$	1344	(180, 1344, 1356)
$2^2 \cdot 3^0 \cdot 5^1 = 20$	800	(180, 800, 820)
$2^2 \cdot 3^1 \cdot 5^1 = 60$	240	(180, 240, 300)
$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^0 = 36$	432	(180, 432, 468)

Znači kada ne bi isključili  $d$  za koje je trojka primitivna imali bi sve moguće Pitagorine trojke.

## 2.3. Pitagorine četvorke

Pitagorina četvorka je uređena četvorka prirodnih brojeva  $(a, b, c, d)$  za koje vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = d^2. \quad (17)$$

U ovom dijelu ćemo pokazati kako doći do svih Pitagorinih četvorki ako imamo zadan  $(a, b)$ . Stavimo da je  $a^2 + b^2 = u$  i  $d = c + v$ . Kada to uvrstimo u formulu (17) dobijemo

$$\begin{aligned} u + c^2 &= (c + v)^2, \\ u + c^2 &= c^2 + 2cv + v^2, \\ c &= \frac{u - v^2}{2v}. \end{aligned} \quad (18)$$

Iz toga možemo vidjeti da, pošto  $c$  mora biti cijeli broj, mora vrijediti ako je  $u$  paran onda je i  $v$  paran broj, a ako je  $u$  neparan onda je i  $v$  neparan broj. Kada je  $u$  paran on mora biti djeljiv s  $2v$  te da bi  $c$  bio pozitivan mora biti  $u > v^2$ .

Rastavit ćemo problem na tri slučaja:

1.  $a$  je paran broj, a  $b$  je neparan (ili obrnuto)
2. i  $a$  i  $b$  su parni brojevi
3. i  $a$  i  $b$  su neparni brojevi.

Razmotrimo gornje slučajeve.

1.  $u = a^2 + b^2$  je neparan broj, pa je i  $v$  neparan.

(a) Pretpostavimo da  $a$  i  $b$  imaju zajedničke djelitelje  $p_1, p_2, \dots, p_n$ . Tada  $u$  možemo zapisati kao  $u = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n} q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_N^{s_N}$ , a  $v$  će biti oblika  $v = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n} q_1^{t_1} q_2^{t_2} \dots q_N^{t_N}$ , gdje su  $m_i, s_i, r_i$  i  $t_i$  cijeli brojevi za sve  $i$ . Iz formule (18) imamo

$$c = \frac{p_1^{m_1 - r_1} p_2^{m_2 - r_2} \dots p_n^{m_n - r_n} q_1^{s_1 - t_1} q_2^{s_2 - t_2} \dots q_N^{s_N - t_N} - p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n} q_1^{t_1} q_2^{t_2} \dots q_N^{t_N}}{2}.$$

Vidimo da je za primitivno rješenje  $r_i = 0$  ili  $r_i = m_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , a  $t_j$  može biti bilo koji cijeli broj između 0 i  $s_j$ , uz uvjet da je  $u > v^2$ .

**Primjer 2.7.** Neka je  $a = 10$  i  $b = 15$ . Tada je  $u = 325 = 5^2 \cdot 13$ , a  $v = 1$  ili  $v = 13$ . Ne može biti  $v = 5^2 = 25$ , niti  $v = 5^2 \cdot 13$  jer je tada  $v^2 > u$ . Pa za  $v = 1$  imamo  $c = 162$  i  $d = 163$ , a za  $v = 13$  imamo  $c = 6$  i  $d = 19$ .

(b) Sada pretpostavimo da  $a$  i  $b$  nemaju zajedničkih djelitelja. Tada je  $u = q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_N^{s_N}$ , a  $v = q_1^{t_1} q_2^{t_2} \dots q_N^{t_N}$ , gdje  $t_i$  može biti bilo koji cijeli broj između 0 i  $s_j$  uzimajući u obzir da mora vrijediti  $u > v^2$ . Iz formule (18) imamo

$$c = \frac{q_1^{s_1 - t_1} q_2^{s_2 - t_2} \dots q_N^{s_N - t_N} - q_1^{t_1} q_2^{t_2} \dots q_N^{t_N}}{2}.$$

**Primjer 2.8.** Neka je  $a = 10$  i  $b = 11$ . Tada je  $u = 221 = 13 \cdot 17$ , a  $v = 1$  ili  $v = 13$ . Ne može biti  $v = 17$ , niti  $v = 17 \cdot 13$  jer je narušen uvjet  $u > v^2$ . Pa za  $v = 1$  imamo  $c = 110$  i  $d = 111$ , a za  $v = 13$  imamo  $c = 2$  i  $d = 15$ .



**Napomena 2.1.** Uočimo da kada god imamo da je jedan od brojeva  $a$  i  $b$  paran, a drugi neparan, tada ćemo imati barem jednu primitivnu trojku koja ima  $v = 1$ .

2.  $u = a^2 + b^2$  je paran broj pa će i  $v$  biti paran. Sada će  $u$  biti ovog oblika  $u = 2^m p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n} q_1^{s_1} q_2^{s_2} \cdots q_N^{s_N}$ , a  $v$  oblika  $v = 2^r p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n} q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_N^{t_N}$ . Iz formule (18) imamo

$$c = 2^{m-r-1} p_1^{m_1-r_1} p_2^{m_2-r_2} \cdots p_n^{m_n-r_n} q_1^{s_1-t_1} q_2^{s_2-t_2} \cdots q_N^{s_N-t_N} - 2^{r-1} p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_n^{r_n} q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_N^{t_N}.$$

Da bi četvorka bila primitivna mora vrijediti da je  $r = 1$  ili  $r = m - 1$ , uzimajući u obzir uvjet  $u > v^2$ , te  $r_i = 0$  ili  $r_i = m_i$ , a  $t_j$  je bilo koji cijeli broj između 0 i  $s_j$ .

**Primjer 2.9.** Neka je  $a = 6 = 2 \cdot 3$  i  $b = 28 = 2^2 \cdot 7$ . Tada je  $u = 820 = 2^2 \cdot 5 \cdot 41$ . Moguće kombinacije dane su u sljedećoj tablici.

$v$	$c$	$d$	$(a, b, c, d)$
$2^1 \cdot 5^0 \cdot 41^0 = 2$	204	206	(6, 28, 204, 206)
$2^1 \cdot 5^1 \cdot 41^0 = 10$	36	46	(6, 28, 36, 46)
$2^1 \cdot 5^0 \cdot 41^1 = 82$	-	-	-
$2^1 \cdot 5^1 \cdot 41^1 = 410$	-	-	-

Za dva slučaja nije moguće naći Pitagorinu trojku pošto je  $v^2 > u$ .

**Napomena 2.2.** Primjetimo da ako imamo zadana dva parna broja uvijek možemo naći primitivnu Pitagorinu četvorku koja ima  $u = 2$ .

3. Pošto su u ovom slučaju i  $a$  i  $b$  neparni zapisat ćemo ih ovako  $a = 2x + 1$ ,  $b = 2y + 1$ , za  $x$  i  $y$  prirodne brojeve. Tada je  $u = (2x + 1)^2 + (2y + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1 + 4y^2 + 4y + 1 = 4(x^2 + y^2) + 4(x + y) + 2$ . Vidimo da je  $u$  paran i zaključujemo da i  $v$  mora biti paran. Ranije smo zaključili da kada je  $v$  paran, onda je  $u$  oblika  $2v$ , tj.  $u$  bi morao biti djeljiv s 4, što je nemoguće pa u ovom slučaju ne dobivamo ni jednu Pitagorinu četvorku.

Sada kada smo pokazali kako doći do primitivnih Pitagorinih četvorki možemo doći i do ne primitivnih. Kada izračunamo i faktoriziramo  $u$ , onda  $v$  može biti bilo koja kombinacija tih faktora osim onih za koje je četvorka primitivna, uz uvjet  $u > v^2$ .

Na taj način možemo generirati sve Pitagorine četvorke.

**Primjer 2.10.** Neka je  $a = 100$  i  $b = 105$ . Tada je  $u = 21025 = 5^2 \cdot 29^2$ , a tablicom ćemo pokazati sve moguće kombinacije Pitagorinih četvorki za zadane  $a$  i  $b$ .

$v$	$c$	$d$	$(a, b, c, d)$
$5^0 \cdot 29^0 = 1$	10512	10513	(100, 105, 10512, 10513)
$5^0 \cdot 29^1 = 29$	36	46	(6, 28, 36, 46)
$5^1 \cdot 29^0 = 5$	348	377	(100, 105, 348, 377)
$5^2 \cdot 29^0 = 25$	408	433	(100, 105, 408, 433)

Ostale  $v$  smo isključili jer narušavaju uvjet  $u > v^2$ .

## 2.4. Pitagorine $n$ -torke

Pitagorina  $n$ -toraka je uređena  $n$ -toraka prirodnih brojeva  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  za koju vrijedi

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = a_n^2.$$

Kada imamo zadana  $(n - 2)$  broja, onda možemo izračunati i ostala dva broja  $n$ -torke. Izračunat ćemo ih na sličan način kao što smo to radili s Pitagorinim četvorkama u prošlom poglavlju. Uzmimo da je  $u = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-2}^2$  i  $v = a_n - a_{n-1}$ .

Među brojevima  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$  neki će bit parni, a neki neparni. Neka je  $\alpha$  broj neparnih brojeva među ta  $(n - 2)$  broja.

1. Kada je  $\alpha = 2$ , onda će se kvadrati od ta dva neparna broja zbrojiti i imat ćemo parni broj plus kvadrati ostalih brojeva koji su parni, stoga je  $u$  paran broj oblika  $u = 2x$ , gdje je  $x$  neparan broj. Ovdje, kao i u zadnjem slučaju kod Pitagorinih četvorki, ne postoji Pitagorina  $n$ -toraka koja to zadovoljava.
2. Kada je  $\alpha$  neparan broj, onda imamo zbroj kvadrata neparnih brojeva, to je neparan broj plus zbroj kvadrata parnih brojeva, što sve zajedno daje neparan broj  $u$ . Tada je  $u$  oblika  $u = p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n} q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_N^{s_N}$ , gdje su  $p_1, p_2, \dots, p_n$  zajednički djelitelji brojeva  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ . Tada je  $v = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n} q_1^{t_1} q_2^{t_2} \dots q_N^{t_N}$ , gdje je  $r_i = 0$  ili  $r_i = m_i$ , a  $t_j$  može biti bilo koji broj između 0 i  $s_j$  za kojega je zadovoljen uvjet  $u > v^2$ .

**Primjer 2.11.** Neka je  $a_1 = 15, a_2 = 10, a_3 = 5, a_4 = 25, a_5 = 40$  i  $a_6 = 30$ . Tada je  $u = 3475 = 5^2 \cdot 139$ . Prikazat ćemo sada tablicom primitivne osmorke.

$v$	$a_7$	$a_8$	$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \cdot a_6, a_7, a_8)$
$5^0 \cdot 139^0 = 1$	1737	1738	$(15, 10, 5, 25, 40, 30, 1737, 1738)$
$5^0 \cdot 139^1 = 139$	-	-	-
$5^2 \cdot 139^0 = 25$	57	82	$(15, 10, 5, 25, 40, 30, 57, 82)$
$5^2 \cdot 139^1 = 3475$	-	-	-

3. Kada je  $\alpha$  paran broj različit od 2, ili  $\alpha = 0$ , tada je i  $u$  paran broj oblika  $u = 2^m p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n} q_1^{s_1} q_2^{s_2} \dots q_N^{s_N}$ , gdje je  $m$  prirodan broj veći od 1, a  $p_1, p_2, \dots, p_n$  su zajednički djelitelji brojeva  $a_1, a_2, \dots, a_{n-2}$ . Tada je  $v = 2^r p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_n^{r_n} q_1^{t_1} q_2^{t_2} \dots q_N^{t_N}$ , gdje je  $r = 1$  ili  $r = m - 1$ ,  $r_i = 0$  ili  $r_i = m_i$ , a  $t_j$  može biti bilo koji broj između 0 i  $s_j$  koji zadovoljava uvjet  $u > v^2$ .

**Primjer 2.12.** Neka je  $a_1 = 4, a_2 = 10, a_3 = 16, a_4 = 22, a_5 = 50, a_6 = 20$  i  $a_7 = 32$ . Tada je  $u = 4780 = 5 \cdot 2^2 \cdot 239$ . Prikazat ćemo sada tablicom primitivne devetorke.

$v$	$a_8$	$a_9$	$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \cdot a_6, a_7, a_8, a_9)$
$2^1 \cdot 5^0 \cdot 239^0 = 2$	1194	1196	$(4, 10, 16, 22, 50, 20, 32, 1194, 1196)$
$2^1 \cdot 5^1 \cdot 239^0 = 10$	234	244	$(4, 10, 16, 22, 50, 20, 32, 234, 244)$
$2^1 \cdot 5^1 \cdot 239^1 = 2390$	-	-	-

Na ovaj način smo dobili primitivne Pitagorine  $n$ -torke, da bi dobili sve  $n$ -torke morali bi dopustiti da  $v$  može biti kombinacija bilo kojih faktora od  $u$ , uz uvjet  $u > v^2$ .

## 2.5. Generiranje Pitagorinih $n$ -torki iz jednog broja

U ovom potpoglavlju ćemo pokazati nešto jako zanimljivo, kako preko Pitagorinih trojki iz samo jednog broja možemo doći do Pitagorinih  $n$ -torki proizvoljne duljine.

Neka je zadan  $a_1$ , tada možemo izračunati trojku  $(a_1, a_2, b_3)$  koja zadovoljava  $a_1^2 + a_2^2 = b_3^2$ . Nakon toga od  $b_3$  možemo opet izračunati trojku  $(b_3, a_3, b_4)$  koja zadovoljava  $b_3^2 + a_3^2 = b_4^2$ , kada to uvrstimo umjesto  $b_3$  imamo  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = b_4^2$ . Tu radnju možemo nastaviti raditi dok ne dodjemo do željene  $n$ -torke, pa nakon  $(n - 2)$  koraka dođemo do

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = a_n^2.$$

**Napomena 2.3.** *Primjetite da za broj  $a_1$  možemo dobiti više različitih Pitagorinih trojki i za svaku tu trojku možemo dobiti više različitih četvorki, itd. Tako da od jednog broja možemo dobiti puno različitih Pitagorinih  $n$ -torki, a te  $n$ -torke će biti primitivne ako je svaka trojka preko koje dolazimo do  $n$ -torke primitivna.*

**Napomena 2.4.** *Ovom metodom ne možemo doći do svih Pitagorinih  $n$ -torki.*

**Primjer 2.13.** *Neka je  $a = 15$ . U nastavku navodimo nekoliko  $n$ -torki koje možemo dobiti iz ovog broja:*

$$\begin{aligned}15^2 + 36^2 + 760^2 + 289560^2 &= 289561^2, \\15^2 + 20^2 + 60^2 + 2112^2 + 2232384^2 &= 2232385^2, \\15^2 + 8^2 + 144^2 + 348^2 + 71064^2 &= 71065^2.\end{aligned}$$

### 3. Metoda za generiranje svih Pitagorinih trojki jednom formulom

U ovom poglavlju ćemo govoriti o još jednoj metodi generiranja Pitagorinih trojki ([5]). Najveći problem kod generiranja je naći sve Pitagorine trojke bez ponavljanja.

Označimo skup svih Pitagorinih trojki sa  $\mathcal{P}$ , a skup svih primitivnih Pitagorinih trojki sa  $\mathcal{R}$ , te neka je skup svih Pitagorinih trojki oblika  $(a, b, c) = (u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2)$ , pri čemu su  $u, v \in \mathbb{N}$  i  $u > v$ , označen s  $\mathcal{E}$ . Zbog načina na koji smo definirali  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{R}$  i  $\mathcal{E}$  vidimo da vrijedi  $\mathcal{P} \supset \mathcal{E} \supset \mathcal{R}$ , jer znamo od prije da se u  $\mathcal{E}$  nalaze sve primitivne Pitagorine trojke, ali tu se također nalazi i npr. Pitagorina trojka  $(27, 36, 45)$  za  $u = 6$  i  $v = 3$  koja nije primitivna.

Promotrimo sada podskup  $\mathcal{C}$  skupa  $\mathcal{E}$  koji sadrži sve Pitagorine trojke u kojima je točno jedan od brojeva  $a$  i  $b$  neparan i  $c$  je neparan, a to vrijedi ako i samo ako je točno jedan od brojeva  $u$  i  $v$  neparan, tj.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \{(a, b, c) \in \mathcal{E} : a - b \text{ i } c \text{ su neparni}\} \\ &= \{(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2) : u, v \in \mathbb{N}, u > v, u - v \text{ je neparan}\}. \end{aligned}$$

Sada vrijedi  $\mathcal{P} \supset \mathcal{E} \supset \mathcal{C} \supset \mathcal{R}$ .

**Lema 3.1.** Za Pitagorinu trojku  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  vrijedi

- $\exists m \in \mathbb{N}$  takav da je  $c - b = (2m - 1)^2$ ;
- $\exists n \in \mathbb{N}$  takav da je  $c - a = 2n^2$ .

Obrnuto, za neke  $m, n \in \mathbb{N}$   $\exists (a, b, c) \in \mathcal{C}$  takva da je  $c - b = (2m - 1)^2$  i  $c - a = 2n^2$ .

*Dokaz.* Pokažimo prvo da za  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  vrijedi  $c - b = (2m - 1)^2$ . Iz definicije skupa  $\mathcal{C}$  znamo da postoje  $u, v \in \mathbb{N}$ ,  $u > v$  takvi da je  $a = u^2 - v^2$ ,  $b = 2uv$  i  $c = u^2 + v^2$  te da je  $u - v$  neparan broj. Stoga  $c - b$  možemo zapisati ovako, za neki  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$c - b = u^2 + v^2 - 2uv = (u - v)^2 = (2m - 1)^2.$$

Sada pokažimo da za  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  vrijedi i  $c - a = 2n^2$ . Vidimo da je

$$c - a = u^2 + v^2 - (u^2 - v^2) = 2v^2,$$

a trebamo pokazati da postoji  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $c - a = 2n^2$ . Iz toga slijedi da je  $n = v$ . Da bi dokazali obrat treba pokazati da sustav jednačbi

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2uv - 2uv &= (2m - 1)^2, \\ u^2 + v^2 - (u^2 - v^2) &= 2n^2, \end{aligned}$$

ima rješenje takvo da su  $u, v \in \mathbb{N}$ ,  $u > v$  i  $u - v$  je neparan broj. Kada taj sustav riješimo imamo da je  $v = n$  i  $u = n + 2m - 1$  što zadovoljava sve uvjete pa je to rješenje.  $\square$

Direktna posljedica ove leme je da je  $c - b$  uvijek neparan broj iz skupa  $\{1, 9, 25, 49, \dots\}$ , te da je  $c - a$  uvijek paran broj iz skupa  $\{2, 8, 18, 32, \dots\}$ . Ta informacija nam omogućuje uvođenje iduće definicije.

**Definicija 3.1.** Za  $m, n \in \mathbb{N}$ , niz neparnih Pitagorinih trojki iz  $\mathcal{C}$  definiramo kao

$$N(m) := \{(a, b, c) \in \mathcal{C} : c - b = (2m - 1)^2\}$$

te niz parnih Pitagorinih trojki iz  $\mathcal{C}$  definiramo kao

$$P(n) := \{(a, b, c) \in \mathcal{C} : c - a = 2n^2\}.$$

**Primjer 3.1.**  $(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25) \in N(1)$  i  $(3, 4, 5), (15, 8, 17), (35, 12, 37) \in P(1)$ .

**Teorem 3.1.** Iduće tvrdnje su istinite:

1.  $\mathcal{C} = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} N(m) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} P(n)$ .
2. Za  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ ,  $m_1 \neq m_2$  vrijedi  $N(m_1) \cap N(m_2) = \emptyset$ . Također za  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ ,  $n_1 \neq n_2$  vrijedi  $P(n_1) \cap P(n_2) = \emptyset$ .
3. Za  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$ ,  $\exists m, n \in \mathbb{N}$  takvi da je  $(a, b, c) \in N(m) \cap P(n)$ . Obrnuto, za  $m, n \in \mathbb{N}$  presjek  $N(m) \cap P(n) \in \mathcal{C}$  sadrži jedinstvenu Pitagorinu trojku.
4. Neka su  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tada trojku  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  za koju vrijedi  $c - b = (2m - 1)^2$  i  $c - a = 2n^2$  možemo zapisati na jedinstven način u sljedećem obliku:

$$a = -2n + 4nm + 4m^2 - 4m + 1, \quad (19)$$

$$b = 2n^2 - 2n + 4nm, \quad (20)$$

$$c = 2n^2 - 2n + 4nm + 4m^2 - 4m + 1. \quad (21)$$

*Dokaz.* Tvrdnje 1. – 3. su direktne posljedice Leme 3.1 stoga njih nećemo dokazivati. Ostalo je onda dokazati tvrdnju 4. Također iz Leme 3.1 znamo da je

$$a = (n + 2m - 1)^2 - n^2, \quad (22)$$

$$b = 2(n + 2m - 1)n, \quad (23)$$

$$c = (n + 2m - 1)^2 + n^2, \quad (24)$$

što raspisivanjem dovodi do formula (19)-(21). Vidimo da je trojka  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  zapisana na jedinstven način kao funkcija od  $m, n \in \mathbb{N}$ . Tada iz (19) imamo

$$n = \frac{a - (2m - 1)^2}{2(2m - 1)}$$

te kada to uvrstimo u (20) dobijemo

$$(2m - 1)^4 + 2b(2m - 1) - a^2 = 0.$$

Rješavanjem te bikvadratne jednadžbe dobijemo samo jedno pozitivno rješenje

$$m = \frac{1 + \sqrt{c - b}}{2}.$$

Kada to uvrstimo u  $n$  dobijemo

$$n = \frac{a + b - c}{2\sqrt{c - b}}.$$

Ovo nam pokazuje da za danu trojku  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  imamo jedinstvene  $m, n \in \mathbb{N}$  koji zadovoljavaju formule (19)-(21).  $\square$

**Napomena 3.1.** *Primjetimo da formule (19)-(21) možemo zapisati na ovaj način*

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2n^2 \\ 2n(2m-1) \\ (2m-1)^2 \end{bmatrix}.$$

*Zamislimo sada pravokutan trokut  $\triangle ABC$  s pravim kutom u vrhu  $C$ . Neka je  $a = |\overline{BC}|$ ,  $b = |\overline{AC}|$  i  $c = |\overline{AB}|$ . Pretpostavimo da je  $d = c - b$  neparan broj, a  $e = c - a$  paran. Tada definiramo  $f = a - d$  i imamo*

$$\begin{aligned} a &= f + d, \\ b &= e + f, \\ c &= e + d + f, \end{aligned}$$

*što je ekvivalentno ovome*

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \\ d \end{bmatrix}. \quad (25)$$

*Pošto je  $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$  matrica je regularna i iz toga slijedi da je  $e = 2n^2$  i  $d = (2m-1)^2$ .*

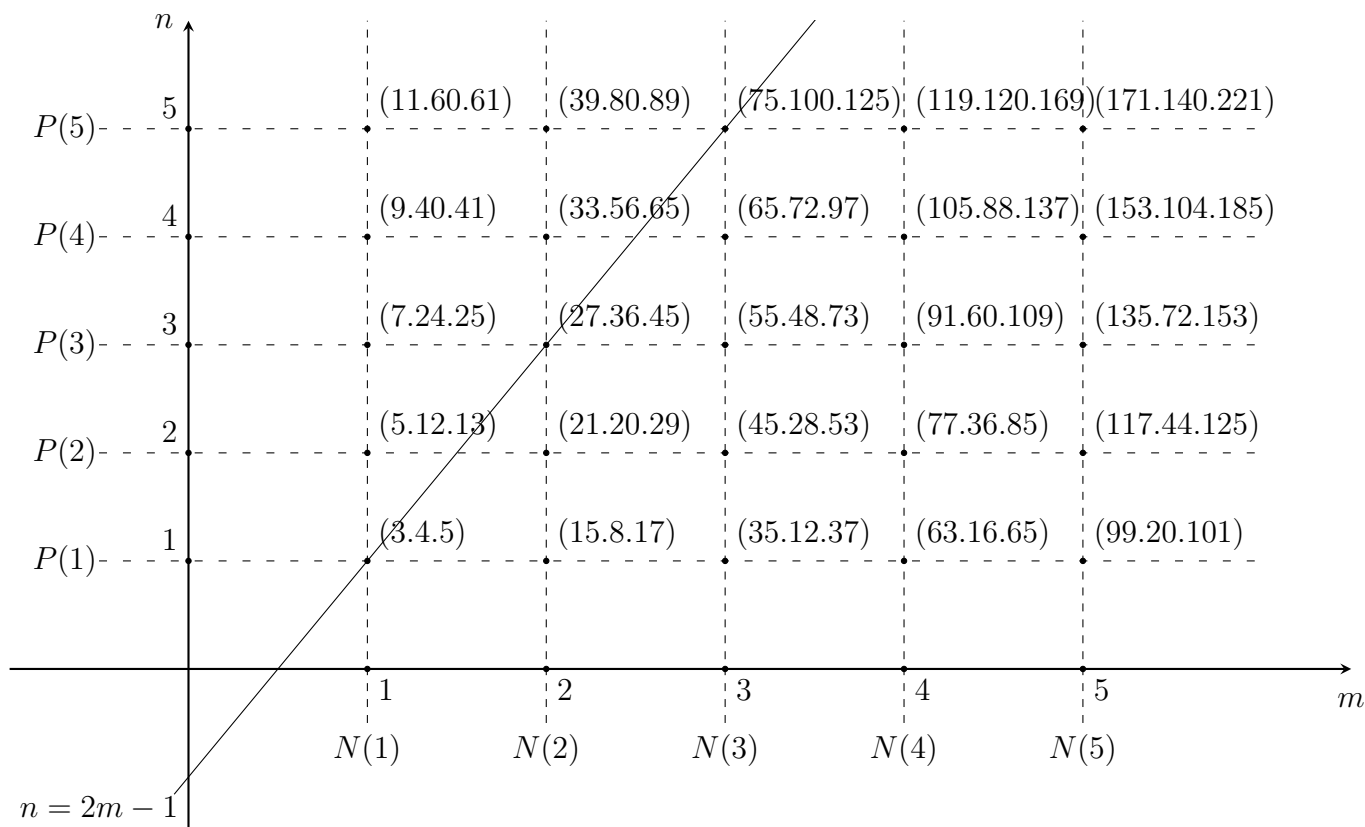
**Napomena 3.2.** *Sve Pitagorine trojke koje dobijemo na taj način, za  $m, n \in \mathbb{N}$ , su takve da je  $c$  neparan. No ako dopustimo da  $m$  može biti  $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ , tada će  $a, b$  i  $c$  i dalje biti prirodni brojevi koji čine Pitagorinu trojku, ali će  $a$  i  $b$  i  $c$  biti parni brojevi. To znači da  $\mathcal{C}$  sadrži sve Pitagorine trojke iz  $\mathcal{E}$  osim onih za koje su  $a, b$  i  $c$  svi parni brojevi. Označimo sada  $\mathbb{N}_{\frac{1}{2}} := \mathbb{N} \cup \{p + \frac{1}{2} : p \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  i  $\mathcal{C}' := \bigcup_{m \in \mathbb{N}_{\frac{1}{2}}} N(m)$ . Ako stavimo  $s = 2m$  i to uvrstimo*

*u formule (22)-(24) dobijemo*

$$a = (n + s - 1)^2 - n^2, \quad b = 2(n + s - 1)n, \quad c = (n + s - 1)^2 + n^2.$$

*Za  $u = n + s - 1$  i  $v = n$  slijedi da je  $(a, b, c) \in \mathcal{E}$ , stoga je  $\mathcal{C}' = \mathcal{E}$ .*

Svaka Pitagorina trojka  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  se može zapisati kao funkcija  $p$  od  $m$  i  $n$ , pa možemo pisati  $(a, b, c) = p(m, n)$ . Trojke čine rešetku u koordinatnom sustavu  $(m, n)$  što se vidi na Slici 3.



Slika 3: Rešetka Pitagorinih trojki u  $\mathcal{C}$ .

Iz Slike 3 također vidimo da  $\mathcal{C}$  sadrži i Pitagorine trojke koje nisu primitivne. Sve trojke koje leže na pravcu  $n = 2m - 1$  možemo dobiti kao  $k^2(3, 4, 5)$ , gdje je  $k$  neparan prirodan broj.

**Teorem 3.2.** *Neka su  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  i  $m, n \in \mathbb{N}$  takvi da je  $(a, b, c) = p(m, n)$ . Tada je  $(a, b, c)$  primitivna Pitagorina trojka ako i samo ako su  $n$  i  $2m - 1$  relativno prosti brojevi.*

*Dokaz.* Neka je  $\mu = 2m - 1$ . Uvrštavanjem u formule (22)-(24) dobijemo

$$a = \mu(2n + \mu), \quad (26)$$

$$b = 2n(n + \mu), \quad (27)$$

$$c = 2n^2 + \mu(2n + \mu). \quad (28)$$

Prvo pokažimo da ako  $n$  i  $\mu$  imaju zajednički faktor trojka nije primitivna. Neka je  $n = kn_1$  i  $\mu = k\mu_1$ , gdje su  $k, n_1, \mu_1 \in \mathbb{N}$ . Kada to uvrstimo u (26)-(28) imamo

$$a = k^2\mu_1(2n_1 + \mu_1),$$

$$b = 2k^2n_1(n_1 + \mu_1),$$

$$c = k^2(2n_1^2 + 2n_1\mu_1 + \mu_1^2),$$

iz čega vidimo da  $a$ ,  $b$  i  $c$  imaju zajednički djelitelj  $k$  pa trojka nije primitivna. Iz toga vidimo da ako trojka  $(a, b, c) \in \mathcal{C}$  nije primitivna,  $n$  i  $\mu$  nisu relativno prosti brojevi.

Ako trojka  $(a, b, c)$  nije primitivna možemo ju zapisati u obliku  $k(\alpha, \beta, \gamma)$ , gdje je  $k \in \mathbb{N}$  i  $(\alpha, \beta, \gamma)$  je primitivna trojka. Stoga postoje  $n_1, \mu_1 \in \mathbb{N}$  takvi da je  $(\alpha, \beta, \gamma) = p(n_1, \mu_1)$  te

ako to uvrstimo u (22)-(24) imamo

$$\mu(2n + \mu) = k\mu_1(2n_1 + \mu_1), \quad (29)$$

$$2n(n + \mu) = 2kn_1(n_1 + \mu_1), \quad (30)$$

$$2n^2 + \mu(2n + \mu) = k(2n_1^2 + 2n_1\mu_1 + \mu_1^2). \quad (31)$$

Kada formulu (29) uvrstimo u formulu (31) dobijemo  $k = \frac{n^2}{n_1^2}$ , te kada to uvrstimo u formulu (30) dobijemo

$$l = \frac{n}{n_1} = \frac{\mu}{\mu_1}.$$

Uočimo da je  $l \in \mathbb{N}$  i da je  $l^2 = k$ , iz toga slijedi da je  $l$  zajednički djelitelj od  $n$  i  $\mu$  pa oni nisu relativno prosti.  $\square$

**Napomena 3.3.** *Posebni slučajeви parametrizacije iz Teorema 3.1 su:*

1. *Pitagorina familija neparnih trojki  $(2n + 1, 2n^2 + 2n, 2n^2 + 2n + 1)$ , koju možemo zapisati i ovako  $p(1, n) = N(1) = \{(3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25), \dots\}$ . Kada u fomulu (25) uvrstimo  $m=1$  imamo*

$$p(1, n) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2n^2 \\ 2n \\ 1 \end{bmatrix} \text{ za } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. *Platonova familija parnih trojki  $(4m^2 - 1, 4m, 4m^2 + 1)$ , koju možemo zapisati i ovako  $p(m, 1) = P(1) = \{(3, 4, 5), (15, 8, 17), (35, 12, 37), \dots\}$ . Kada u fomulu (25) uvrstimo  $n=1$  imamo*

$$p(m, 1) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2(2m - 1) \\ (2m - 1)^2 \end{bmatrix} \text{ za } m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Jedina trojka koja je i u Pitagorinoj familiji trojki, i u Platonovoj familiji trojki je  $(3, 4, 5)$ , iz čega slijedi da je  $p(1, 1) = (3, 4, 5)$ .

Kombiniranjem Pitagorine i Platonove familije trojki dobije se formula koja generira sve Pitagorine trojke a dana je s

$$p(m, n) = \left\{ (a, b, c) \in \mathbb{N}^3 : \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2n^2 \\ 2n(2m - 1) \\ (2m - 1)^2 \end{bmatrix} \text{ za } m, n \in \mathbb{N} \right\}$$

i iz nje dobijemo ove jednakosti

$$\begin{aligned} e &= 2n^2, & d &= (2m - 1)^2, & f &= 2n(2m - 1), \\ a &= d + f = 4mn - 2n + 4m^2 - 4m + 1, \\ b &= e + f = 2n^2 + 4mn - 2n, \\ c &= d + e + f = 2n^2 + 4mn - 2n + 4m^2 - 4m + 1. \end{aligned}$$

Ova parametrizacija je već uspješno iskorištena za brže izračune zlatnog i srebrnog reza ([6],[7]).



# Literatura

- [1] K. CONRAD, *Pythagorean triples*,  
<http://www.math.uconn.edu/~kconrad/blurbs/ugradnumthy/pythagtriple.pdf>
- [2] M. CURIĆ, K. JURKOVIC, *Pitagorin poučak*,  
URL: <https://sites.google.com/site/8bpitagorinpoucak/pitagora?fbclid=IwAR1MjrA2luQVxy>
- [3] A. LUMA, B. RAUF, *Data Encryption and Decryption Using New Pythagorean Triple Algorithm*,  
[http://www.iaeng.org/publication/WCE2014/WCE2014\\_pp516-519.pdf](http://www.iaeng.org/publication/WCE2014/WCE2014_pp516-519.pdf)
- [4] I. MATIĆ, *Uvod u teoriju brojeva*, Odjel za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku, 2013.
- [5] A. OVERMARS, L. NTOGRAMATZIDIS, S. VENKATRAMAN, *A new approach to generate all Pythagorean triples*, AIMS Mathematics, 4(2019), 242—253,  
<https://www.aimspress.com/fileOther/PDF/Math/math-04-02-242.pdf>
- [6] A. OVERMARS, S. VENKATRAMAN, *A new method of golden ratio computation for faster cryptosystems*, Proceedings of IEEE Cybersecurity and Cyberforensics Conference, London, 21–23 Nov. 2017., DOI: 10.1109/CCC.2017.12.
- [7] A. OVERMARS, S. VENKATRAMAN, S. PARVIN, *Revisiting square roots with a fast estimator*, London J. Res. Comput. Sci. Technol., 18 (2018), Compilation 10.
- [8] T. ROY, F. J. SONIA, *A Direct Method to Generate Pythagorean Triples and its Generalization to Pythagorean Quadruples and n-tuples*,  
<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1201/1201.2145.pdf>