Metode jednostavnih iteracija za rješavanje nelinearnih jednadžbi

Džojić, Stjepan

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Metode jednostavnih iteracija za rješavanje nelinearnih jednadžbi

Završni rad

Stjepan Džojić

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2020.

Sažetak

Tema ovog rada su metode jednostavnih iteracija za rješavanje nelinearnih jednadžbi i sustava nelinearnih jednadžbi. Prvo ćemo se baviti rješavanjem nelinearnih jednadžbi gdje ćemo objasniti metodu bisekcije i uvesti pojmove ocjena pogreške i red konvergencije. Poslije toga nam slijedi upoznavanje s metodom jednostavnih iteracija za rješavanje nelinearnih jednadžbi. I na kraju ćemo kratko proći kroz metodu jednostavnih iteracija za sustav nelinearnih jednadžbi.

Ključne riječi

iterativne metode, nelinearne jednadžbe

Summary

The topic of this seminar is simple iteration methods for solving nonlinear equations and systems of nonlinear equations. We will first deal with solving nonlinear equations where we will explain the bisection method and explore the concepts of error estimation and order of convergence. This is followed by an introduction to the method of simple iterations for solving nonlinear equations. Finally, we will go through the method of simple iterations for a system of nonlinear equations.

Key words

iterative methods, nonlinear equations

Sadržaj

1 Rješavanje nelinearnih jednadžbi **1**

1.1 Metoda bisekcije 3

1.2 Ocjena pogreške i brzina konvergencije 4

1.2.1 Ocjena pogreške 4

1.2.2 Red konvergencije metode 5

2 Metoda jednostavnih iteracija **6**

2.1 O metodi jednostavnih iteracija 6

2.2 Metoda jednostavnih iteracija za Lipschitz-neprekidnu funkciju 9

2.3 Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi 11

Literatura **12**

Uvod

Numerička matematika je disciplina koja proučava i numerički rješava matematičke probleme koji se javljaju u znanosti, tehnici, gospodarstvu, itd. U povijesnom razvoju začetaka numeričke matematike doprinijeli su Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz u području prirodnih znanosti, a velike teorijske doprinose dali su Leonhard Euler, Joseph Louis de Lagrange, Carl Friedrich Gauss i dr. John Napier stvorio je logaritme kojima se množenje i dijeljenje moglo zamijeniti jednostavnijim zbrajanjem i oduzimanjem, a Charles Babbage izradio je prvo mehaničko računalo. Od sredine XX. stoljeća dostupnost elektroničkih računala dovela je do povećanja uporabe numeričkih matematičkih modela u znanosti, tehnici i ekonomiji.

Slika 1: Isaac Newton i Leonhard Euler

Iako se numerička matematika najčešće povezuje s numeričkim metodama, treba znati da bez dubljeg poznavanja samog problema kojeg rješavamo, nije moguće procijeniti je li neka metoda dobra u smislu da daje zadovoljavajuće točna rješenja u dovoljno kratkom vremenskom intervalu. O problemu koji se rješava treba znati barem neka svojstva:

- postoji li barem jedno rješenje, ako da, je li rješenje jedinstveno,
- kako se rješenje (ili rješenja) ponašaju kad se polazni podaci malo promijene.

Kada se konstruira neka metoda za dani problem, otvara se mnoštvo pitanja kao što su: konvergencija, brzina konvergencije, adaptibilnost metode za specijalna računala, složenost metode, točnost, odnosno stabilnost metode. Uz određivanje stabilnosti algoritma vezana je i analiza grešaka zaokruživanja koja pokazuje mogu li greške koje aritmetika računala generira u procesu računanja bitno narušiti točnost izlaznih podataka.

1 Rješavanje nelinearnih jednadžbi

Promatramo realnu funkciju f koja je neprekidna na zatvorenom intervalu $[a, b]$. Kažemo da je realni broj ξ nultočka funkcije f ukoliko je ξ rješenje jednadžbe $f(x) = 0$. Geometrijski to znači da graf funkcije f siječe os apscisu u točki ξ. Može se dogoditi da funkcija ima više realnih nultočaka od kojih neke mogu biti višestruke ili da nema realnih nultočaka. Ako je funkcija f neprekidna na intervalu I=[a, b] i ako na rubovima intervala prima suprotne vrijednosti

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

onda postoji barem jedna točka $\xi \in I$ za koju vrijedi

$$f(\xi) = 0.$$

Nadalje, ako je prva derivacija stalnog predznaka na intervalu I, onda je ξ jedina nultočka funkcije f na intervalu I. Realna rješenja jednadžbe

$$f(x) = 0$$

tražimo pomoću sljedeća dva koraka:
1) Separirati interval I u kojem funkcija ima nultočku ξ.
2) Iterativnom metodom odrediti aproksimaciju nultočke ξ s unaprijed zadanom točnošću.
Pogledajmo primjer.

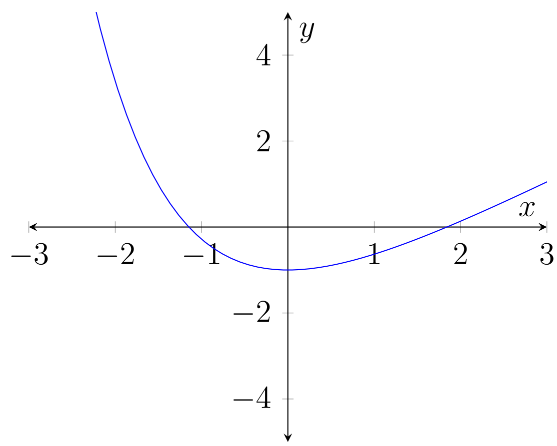
Primjer 1. Trebamo separirati realne nultočke funkcije

$$f(x) = e^{-x} + x - 2.$$

Trebamo procijeniti predznak vrijednosti funkcije u proizvoljnim točkama. Pogledajmo tablicu te graf funkcije f.

x	-2	-1	1	2
predznak	+	-	-	+

Tablica 1: Predznak vrijednosti funkcije u proizvoljnim točkama



Slika 2: Graf funkcije $f(x) = e^{-x} + x - 2$

Sada imamo 2 separirana intervala: I_1 =[-2,-1], I_2 =[1,2]. U svakom intervalu se nalazi po jedna nultočka.

Za rješavanje jednadžbe $f(x) = 0$ postoji čitav niz različitih metoda, a u ovom seminarskom radu ću proći kroz one koje se najčešće koriste u primjenama. Sve metode za rješavanje opće jednadžbe $f(x) = 0$ iterativne su metode u kojima se nekom rekurzivnom formulom definira niz brojeva (aproksimacija): $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ koji uz neke uvjete može konvergirati rješenju jednadžbe.

1.1 Metoda bisekcije

Metoda bisekcije je najjednostavnija metoda za nalaženje nultočaka. Ona će sigurno konvergirati prema nultočki ξ, ako je funkcija f kojoj tražimo nultočku neprekidna na $[a, b]$ i ako vrijedi $f(a) \cdot f(b) < 0$. Metoda bisekcije se provodi tako da se nalazi srednja točka x_0 početnog intervala $[a_0, b_0] = [a, b]$, a zatim se nastavlja raditi na intervala $[a_0, x_0]$ ili $[x_0, b_0]$ u kojem je ostala nultočka. Da bismo našli gdje je ostala nultočka, dovoljno je provjeriti predznak $f(a_0) \cdot f(x_0)$. Ako je on negativan, nultočka je u $[a_0, x_0]$, a ako je pozitivan, nultočka je u $[x_0, b_0]$. Ako je predznak nula, to znači da je x_0 nultočka. Postupak ponavljamo s intervalom koji je dvostruko kraći od početnog. Njegovu srednju točku označimo s x_1. Zatim se analogno postupak nastavlja i dobivaju se uzastopni intervali sa srednjim točkama, redom, $x_2, x_3, ...$ Općenito, niz čiji je opći član

$$x_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}),$$

konvergira prema rješenju jednadžbe $f(x) = 0$, pri čemu pogrešku aproksimacije x_n možemo ocjeniti s

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{1}{2^n}(b - a).$$

Primjer 2. Kao u Primjeru 1., uzet ćemo funkciju $f(x) = e^{-x} + x - 2$. S točnošću $\epsilon = 0.01$, koristeći algoritam bisekcije izračunat ćemo nultočku funkcije na intervalu $[1, 2]$.

n	a_n	b_n	x_n	$f(x_n)$	$f(a_n) \cdot f(x_n)$
0	1	2	1.5	-0.27686984	>0
1	1.5	2	1.75	-0.07622606	>0
2	1.75	2	1.875	0.02835497	<0
3	1.75	1.875	1.8125	-0.02425449	>0
4	1.8125	1.875	1.84375	0.00197298	<0

Tablica 2: Iterativni postupak metode bisekcije u Primjeru 2.

Nakon 4 iteracije dobijemo x^*=1.84375.

1.2 Ocjena pogreške i brzina konvergencije

U ovom poglavlju ćemo se baviti s ocjenom pogreške i brzinom konvergencije koja će nam biti potrebne u metodi jednostavnih iteracija.

1.2.1 Ocjena pogreške

Neka je funkcija f na intervalu $I = [a, b]$ dovoljno "glatka", tj. da je klase $C^1[a, b]$. Ako je x_n jedna aproksimacija nultočke ξ u intervalu I i ako je f derivabilna funkcija takva da je $|f'(x)| > 0, x \in I$, onda vrijedi ocjena pogreške

$$|\xi - x_n| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}, \text{gdje je } 0 < m_1 = \min_{x \in I} |f'(x)|.$$

Ova ocjena slijedi iz Lagrangeovog teorema o srednjoj vrijednosti, pa imamo

$$f(\xi) - f(x_n) = (\xi - x_n) f'(c), \quad c \in I.$$

Sada je

$$|f(x_n)| = |\xi - x_n| \cdot |f'(c)| \geq m_1 \cdot |\xi - x_n|,$$

a zbog stroge monotonosti funkcije f slijedi data ocjena.
Ako rješenje ξ jednadžbe $f(x) = 0$ tražimo nekim iterativnim procesom, dolazimo do pitanja zaustavljanja tog procesa. Pri tome možemo tražiti da apsolutna greška aproksimacije x_n nultočke ξ ne bude veća od unaprijed zadanog broja $\epsilon > 0$, te onda je prema datoj ocjeni dovoljno ispuniti uvjet

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \epsilon.$$

Tada ovo možemo smatrati jednim od kriterija zaustavljanja iterativnog procesa.
U primjerima je često teško odrediti konstantu m_1, pa tada umjesto kriterija za zaustavljanje procesa $\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \epsilon$, možemo koristiti i

$$|x_n - x_{n-1}| < \epsilon_1 \text{ i } |f(x_n)| < \epsilon_2,$$

gdje su ϵ_1, ϵ_2 unaprijed zadani brojevi.

1.2.2 Red konvergencije metode

Važna karakteristika svake iterativne metode je njena brzina (red) konvergencije. To je broj koji je usko povezan s brojem potrebnih iteracija za postizanje tražene točnosti u iterativnom procesu. Sada ćemo definitari red konvergencije metode.

Definicija 1 Neka niz (x_n), dobiven nekom iterativnom metodom, konvergira prema $\xi \in \mathbb{R}$ i neka je $e_n = \xi - x_n$ pogreška n-te aproksimacije. Tada, ako postoje dvije pozitivne konstante $A, r \in \mathbb{R}_+$, takve da vrijedi

$$\lim_{n \to \infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = A,$$

kažemo da metoda ima red (brzinu) konvergencije r.

U slučaju ako je $r = 1$, kažemo da metoda ima linearnu brzinu konvergencije, a u slučaju ako je $r = 2$, kažemo da ima kvadratnu brzinu konvergencije. Možemo iz definicije zaključiti da će niz (x_n) brže konvergirati za veći r. Također, iz definicije slijedi da metoda ima red konvergencije r ako postoji $A \in \mathbb{R}_+$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da bude

$$|\xi - x_{n+1}| \leq A|\xi - x_n|^r, \quad n \geqslant n_0.$$

2 Metoda jednostavnih iteracija

2.1 O metodi jednostavnih iteracija

Kaže se da je točka $\xi \in [a, b]$ fiksna točka neke funkcije $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ako je $\varphi(\xi) = \xi$. Traženje nultočke funckije $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ na intervalu $[a, b]$ može se povezati s traženjem fiksne točke funkcije $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) := x - f(x),$$

na tom intervalu. Točka $x_0 \in [a, b]$ je nultočka funkcije f ako i samo ako je x_0 fiksna točka funkcije φ. Traženje rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ je jednako traženju fiksne točke funkcije φ, odnosno rješavanju jednadžbe

$$x = \varphi(x).$$

Geometrijski gledano, tražimo sjecište grafova funkcija $y_1 = x$ i $y_2 = \varphi(x)$. Kada odredimo interval I u kojem se nalazi tražena nultočka, u tom intervalu ćemo odabrati početnu aproksimaciju x_0. Sljedeću aproksimaciju x_1 ćemo odrediti kao

$$x_1 = \varphi(x_0).$$

Tako ponavljamo postupak i dobijemo niz

$$x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), ..., x_n = \varphi(x_{n-1}), ...$$

Ovakav niz može i ne mora konvergirati, a sljedeći teorem će nam dati odgovor na to pitanje. Također, teorem nam govori o brzini konvergencije i ocjeni pogreške pojedine aproksimacije x_n.

Teorem 1 *Neka je* $\varphi : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ *neprekidno derivabilna funkcija za koju vrijedi:*
(i) $\varphi(x) \in I$ *za svaki* $x \in I$,
(ii) $\exists q \in < 0, 1 >$, *takav da je* $|\varphi'(x)| \leq q$ *za svaki* $x \in < a, b >$.
Tada postoji jedinstevi $\xi \in I$ *takav da je je* $\varphi(\xi) = \xi$. *Osim toga, za proizvoljni* $x_0 \in I$, *niz definiran s*

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, ...,$$

konvergira prema ξ *i vrijede sljedeće pogreške aproksimacije*

$$|\xi - x_n| \leq \frac{q}{1-q}|x_n - x_{n-1}|,$$
$$|\xi - x_n| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|.$$

Metoda ima linearnu brzinu konvergencije, tj. vrijedi

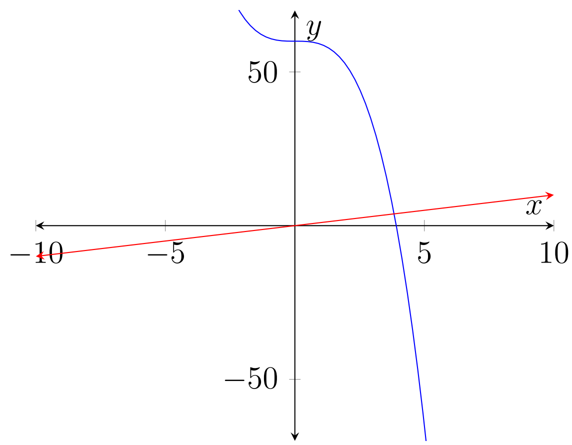
$$|\xi - x_{n+1}| \leq q|\xi - x_n|.$$

Pogledajmo primjer.

Primjer 3. Metodom jednostavnih iteracija treba riješiti jednadžbu $f(x) = x^3 + x - 60$ s točnošću $\epsilon = 0.005$.
Jednadžbu ćemo zapisati u obliku

$$x = -x^3 + 60.$$

Rješenje ove jednadžbe je apscisa točke presjeka grafa funkcije $y = -x^3 + 60$ i pravca $y = x$. Pogledajmo Sliku 3.



Slika 3: Graf funkcije $y = -x^3 + 60$ i pravca $y = x$

Iz slike vidimo da je rješenje jedinstveno, te naslućujemo da pripada intervalu $[3, 4]$. Kako je $f(3) = -30 < 0$ i $f(4) = 8 > 0$, te zbog neprekidnosti funkcije f, nultočka pripada intervalu $[3, 4]$.
Funkcija φ mogla bi biti funkcija $\varphi(x) = -x^3 + 60$. Kako je $|\varphi'(x)| = |-3x^2| > 1$ za $x \in [3, 4]$, uvjeti Teorema 1 nisu zadovoljeni. Zapišimo sada danu jednadžbu u obliku $x^3 = -x + 60$, odnosno

$$x = \sqrt[3]{-x + 60},$$

te pokušajmo s izborom $\varphi(x) = \sqrt[3]{-x + 60}$. Tada je $\varphi'(x) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(-x+60)^2}}$, $|\varphi'(x)| < 1$, za $x \in [3, 4]$ i $\varphi([3, 4]) = [\sqrt[3]{56}, \sqrt[3]{57}] \approx [3.826, 3.849] \subset [3, 4]$.
To znači da su uvjeti Teorema 1 zadovoljeni.
Zaključujemo da funkcija φ ima fiksnu točku ξ na segmentu $[3, 4]$. Uzmemo $x_0 := 4$, te niz (x_n) definiramo pomoću formule $x_n = \varphi(x_{n-1})$. Tada je $x_1 = \varphi(x_0) = \varphi(4) = \sqrt[3]{56}$, $q = \underset{x\in[3,4]}{max}|\varphi'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{56^2}}$, a fiksnu točku ξ aproksimiramo s $n-$tom aproksimacijom x_n, gdje je

$$n \geqslant \frac{\log(\epsilon(1-q)) - \log|x_1 - x_0|}{\log q} = \frac{\log(0.005(1 - \frac{1}{3\sqrt[3]{56^2}})) - \log|\sqrt[3]{56} - 4|}{\log \frac{1}{3\sqrt[3]{56^2}}} \approx 0.95,$$

pa stoga je $n = 1$. Pogledajmo sada tablicu.

n	x_n	$f(x_n)$
0	4	8
1	3.825862	-0.174138

Tablica 3: Iterativni postupak metode jednostavnih iteracija u Primjeru 3.

Dakle, $\xi \approx x_1 = \sqrt[3]{56} = 3.825862$.

2.2 Metoda jednostavnih iteracija za Lipschitz-neprekidnu funkciju

Pogledajmo iterativnu metodu jednostavnih iteracija

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, ...,$$

za rješavanje jednadžbe

$$x = \varphi(x),$$

uz pretpostavku da je φ Lipschitz-neprekidna funkcija na intervalu $I = [a, b]$. Zahtjev derivabilnosti na funkciju φ iz Teorema 1 je prejak jer se u iterativnom procesu

$$x_0, x_1 = \varphi(x_0), x_2 = \varphi(x_1), ..., x_n = \varphi(x_{n-1}), ...$$

ne koristi. Zato ćemo zahtijevati da funkcija φ bude neprekidna uz dodatnu pretpostavku ograničenosti pada ili rasta. Upravo takva svojstva imaju Lipschitz-neprekidne funkcije. Definirajmo Lipschitz-neprekidnu funkciju.

Definicija 2 (Lipschitz-neprekidna funkcija) Kažemo da je funkcija $g : I \to \mathbb{R}, I = [a, b]$ Lipschitz-neprekidna funkcija s konstantom L > 0 i pišemo $g \in Lip_L(I)$ ako za svaki $x, y \in I$ vrijedi

$$|g(x) - g(y)| \leq L|x - y|.$$

Pogledajmo primjer Lipschitz-neprekidne funkcije.

Primjer 4. Funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = |x|$ je Lipschitz-neprekidna s konstantom $L = 1$ na $\mathbb{R}$

$$||x| - |y|| \leq 1 \cdot |x - y|,$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Za Lipschitz-neprekidnu funkciju vrijedi teorem o konvergenciji sličan Teoremu 1.

Teorem 2 *Neka je $\varphi : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija za koju vrijedi:*
(i) $\varphi(x) \in I$ za svaki $x \in I$,
(ii) $f \in Lip_L(I)$, $0 < L < 1$.
Tada postoji jedinstveni $\xi \in I$ takav da je je $\varphi(\xi) = \xi$. Osim toga, za proizvoljni $x_0 \in I$, niz definiran s

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

konvergira prema ξ i vrijede sljedeće ocjene pogreške aproksimacije

$$|\xi - x_n| \leq \tfrac{L}{1-L}|x_n - x_{n-1}|,$$
$$|\xi - x_n| \leq \tfrac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|.$$

Metoda ima linearnu brzinu konvergencije, tj. vrijedi

$$|\xi - x_{n+1}| \leq L|\xi - x_n|. \ \square$$

Dokaz ovog teorema može se vidjeti u [1].

2.3 Rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

Možemo generalizirati metodu jednostavnih iteracija na rješavanje sustava nelinearnih jednadžbi

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1, ..., n,$$

odnosno u vektorskom obliku $\mathbf{f(x)} = \mathbf{0}$, gdje je $\mathbf{f}$:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{f(x)} = (f_1(x), ..., f(x_n))^T, \quad \mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n.$$

Kao i kod metode jednostavnih iteracija, sustav

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \quad i = 1, ..., n,$$

možemo zapisati u obliku

$$x_i = \varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i = 1, ..., n,$$

što upućuje na iterativni postupak metode jednostavnih iteracija

$$x_i^{k+1} = \varphi_i(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}), \quad i = 1, ..., n, \quad k = 0, 1, ...,$$

gdje je $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, ..., x_n^{(0)}) \in \mathbb{R}^n$ početna aproksimacija. Ovdje nećemo dalje detaljnije razmatrati ovu generaliziranu metodu jednostavnih iteracija.

Literatura

[1] R. Scitovski, *Numerička matematika,* Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2015.

[2] N. Truhar, *Numerička linearna algebra,* Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, Osijek, 2010.

[3] N. Ujević, *Uvod u numeričku matematiku,* skripta PMF−a, Split, 2004.

[4] V. Hari, Z. Drmač, M. Rogina, S. Singer, *Numerička analiza,* PMF-MO, Zagreb, 2003.