Bertrandov paradoks

Vidović, Robert

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Robert Vidović

Bertrandov paradoks

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku

Odjel za matematiku

Sveučilišni preddiplomski studij
matematike

Robert Vidović

Bertrandov paradoks

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2020.

Sažetak: U ovom ćemo se radu baviti vjerojatnosnim problemom iz 19. stoljeća. Prvo ćemo proučiti povijesni razvoj vjerojatnosti i upoznati se s prilikama i vremenom u kojem je živio Joseph Louis François Bertrand. Zatim ćemo se pozabaviti nekim osnovnim vjerojatnosnim definicijama. Za razumjevanje Bertrandovog paradoksa će nam biti potrebne definicije pokusa, prostora elementarnih događaja i geometrijske vjerojatnosti. Vidjet ćemo da postoje različiti pristupi geometrijske vjerojatnosti koje ćemo upoznati i preko primjera. Detaljno ćemo proći kroz sve interpretacije Bertrandovog problema.

Ključne riječi: Vjerojatnost, pokus, prostor elementarnih događaja, elementarni događaj, geometrijska vjerojatnost, slučajna varijabla, gustoća, Bertrandov paradoks.

Abstract: In this work, we will deal with the probability problem of the 19th century. We will first study the historical development of probability and become acquainted with the circumstances and times in which Joseph Louis François Bertrand lived. We will then learn some basic probability definitions. To understand Bertrand's paradox we will need definitions of experiment, space of elementary events, and geometric probability. We will see that there are different approaches to geometric probability that we will get to know through examples as well. We will go through all the interpretations of Bertrand's problem in detail.

Key words: Probability, experiment, space of elementary events, elementary event, geometric probability, random variable, density, Bertrand paradox.

Sadržaj

1 Povijesni razvoj vjerojatnosti

Da bismo mogli pratiti i razumjeti vjerojatnosni problem bilo bi dobro upoznati se s povijesti vjerojatnosti i vremenom u kojem je živio i stvarao Joseph Louis Bertrand. Već u antičkoj Indiji počeli su se razvijati temelji vjerojatnosti koji su napisani u dva epa po imenu *Mahabharata* i *Ramajana*. Potreba za vjerojatnsoti se najviše razvija u obliku igara na sreću, to jest kockanja.

Europski su filozofi razdvojili vjerojatnost na dva koncepta. Prvi koncept je bio objektivna odnosno statistička vjerojatnost u koju su se ubrajale igre na sreću, podaci o mortalitetu stanovništva, kao i pokušaji određivanja spola nerođenog djeteta. Ovakav pristup je koristio princip relativne frekvencije, to jest odnos povoljnih ishoda i svih mogućih ishoda. Drugi koncept vjerojatnosti je bio subjektivna vjerojatnost koja je zapravo procjena pojedinca o vjerojatnosti na osnovi iskustva. Navedenu podjelu točno je definirao Jacob Bernoulli tek 1713. godine.

Treba naglasiti da je vjerojatnost prije renesansnog doba ipak bila nematematička. Srednjevjekovne ideje za vjerojatnost većinom su bile vezane uz bacanje kocke. Računanja su se svodila na broj načina na koji mogu pasti dvije ili tri igraće kocke. O tome nam govori latinski zapis *De vetula* koja se smatra zapisom koji nam otkriva da tri igraće kocke mogu pasti na 216 načina. Razvijanjem ideje o jednako vjerojatnim događajima u 16. stoljeću postaje sve izglednije dobiti točan izračun o stvarnoj vjerojatnosti.

Antoine Arnauld i P. Nicole su objavili prvo djelo numeričke vjerojatnosti koje se ne odnosi samo na primjenu u igrama na sreću. Dosadašnja priča o vjerojatnosti svodila se na jedan oblik igre na sreću koji je bio bacanje igraće kocke, no u 14. stoljeću počinje novi oblik igre na sreću pomoću karata. U samom početku karte su bile izrazito skupe pa nisu bile pristupačne za običan puk, već samo za bogataše. Sama cijena karata onemogućila je njihov brzi rast popularnosti pa su tek nakon nekoliko stotina godina postale popularnije od igraćih kocaka. Kada već pričamo o temi igara na sreću nemoguće je ne spomenuti lutrije koje su bile poznate još u doba Rimljana.

Igre na sreću su se većinom temeljile na ekonomskoj koristi pa se time razvija interes matematičara u tome području. Brojni matematički radovi iz 16. i 17. stoljeća obrađuju temu igara na sreću kako bi povećali svoju mogućnost dobitka. Tako se razvio i problem raspodjele koji je bio temeljen na ranijem završetku igre, a glasio je ovako:

Dva igrača A i B igraju igru naizmjenice dok jedan od njih ne ostvari zadani broj bodova.

Ukoliko se igra prekine prije nego bilo koji igrač ostvari zadani broj bodova, kako ravnomjerno rasporediti dobitak?

U djelu *Summa* iz 1494. godine, autora Luce Paciolia, pronalazimo prvi pisani trag rješavanja navedenog problema. Girolamo Cardano je bio spoj istaknutog matematičara i ljubitelja kockanja. Tako je nastalo Cardanovo djelo *Liber de Ludo Aleae* ili u prijevodu *Knjiga o bacanju kocke* koje se smatra prvim djelom o bacanju kocke čije se pretpostavke temelje na osnovi vjerojatnosti, a ne samo na principu čiste sreće. Galileo Galilei objavio je svoj rad *Razmišljanja o igrama kockom* u kojem je donio sljedeći zaključak:

"Budući da igraća kocka ima šest strana, te bacanjem može pasti na bilo koju stranu. Ukoliko zajedno bacimo dvije kockice možemo dobiti 36 različitih ishoda."

Ovaj rad je važan pošto je Galileo Galilei napravio vjerojatnosni model za bacanje dvije igraće kockice. Dopisivanje dva ugledna matematičara kao što su Pascal i Fermat smatra se jednim od najvažnijih događaja u teoriji vjerojatnosti. Tema njihovog dopisivanja bio je jedan vjerojatnosni problem koji je glasio:

Isplati li se kladiti da će u 24 bacanja dvije kocke pasti dupla šestica?

Prema Cardanovoj teoriji potrebno je pronaći najmanji prirodan broj takav da je $q^n \leq \frac{1}{2}$. Vjerojatnost da će pasti dupla šestica je $\frac{1}{36}$ pa je prema tome vjerojatnost da neće pasti dupla šestica jednaka $q = \frac{35}{36}$. Stoga je vjerojatnost da u 24 nezavisna bacanja neće pasti niti jedna šestica jednaka q^{24} što je približno 50.86% pa je onda vjerojatnost da će pasti par šestica u 24 bacanja jednak 49.14%. Zaključak ovog dopisivanja je da se ne isplati kladiti na to da će pasti par šestica u 24 bacanja. Ako broj bacanja povećamo s 24 na 25 tada se stvari mjenjaju i vjerojatnost da će pasti par šestica je 50.55% što znači da se isplati kladiti. Matematičar Christiaan Huygens objavljuje djelo *De ratiociniis in lude aleae* koje sadrži 14 propozicija te još pet problema. Huygensova tri teorema o očekivanju glase:

Propozicija 1.1. *Ako imam jednake šanse dobiti a ili b, onda očekivanje iznosi $\frac{a+b}{2}$.*

Propozicija 1.2. *Ako imam jednake šanse dobiti a, b ili c, onda očekivanje iznosi $\frac{a+b+c}{3}$.*

Propozicija 1.3. *Neka broj šansi za dobivanje a iznosi p, a broj šansi za dobivanje b iznosi q. Pod pretpostavkom da su šanse jednake, očekivanje će tada biti $\frac{pa+qb}{p+q}$.*

U ovim trima propozicijama mogu se prepoznati matematička očekivanja nekih dobro poznatih diskretnih distribucija. U Bernoullijevom radu *Ars Conjectandi* ponavljanjem igre na sreću dolazi do zaključka da je vjerojatnost pobjede u svakoj igri konstantna, to jest da je neovisna o ishodu prethodne igre. U današnje vrijeme ponavljanje pokusa koji ima samo dva moguća ishoda, uspjeh ili neuspjeh, naziva se Bernoullijev pokus. Treći dio rada *Ars Conjectandi* bavi se razlikovanjem dva tipa vjerojatnosti kao što smo već ranije napomenuli. Bernoulli je zaključio da povećanim brojem zapažanja nekog pokusa možemo lakše predvidjeti njegov sljedeći ishod. Ovim principom je nastao teorem poznat kao zakon velikih brojeva.

Teorem 1.1 (Zakon velikih brojeva)**.** *Neka je* $\{X_n\}, n \in \mathbf{N}$ *niz slučajnih varijabli takvih da za svaki* n *slučajne varijable* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *su nezavisne, imaju ograničenu varijancu* $Var(X_i) = \sigma^2 \leq M$ *i* $E(X_i) = \mu$, $i = 1, \ldots, n$.
Tada za aritmetičku sredinu

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

vrijedi

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \to \infty} P(|\overline{X} - \mu| < \varepsilon) = 1$$

$$(P) \lim_{n \to \infty} \overline{X} = \mu.$$

Pametno iskorištavanje vremena u kojem je radio i stvarao Abraham de Moivre svrstava ga među najvažnije znanstvenike teorije vjerojatnosti. Svojim znanjima i vještinama de Moivre je usavršio radove Christiana Huygesa i Bernoullija. Napisao je vrlo važno djelo po imenu *The Doctrine of Chances*. De Moivre iskazuje preciznu definiciju vjerojatnosti koja glasi:

"Vjerojatnost događaja je veća ili manja, ovisno o broju slučajeva u kojima se događaj može dogoditi ili ne dogoditi."

Još jednu važnu rečenicu de Moivrea je nemoguće ne spomenuti, a glasi:

"Vjerojatnost događaja i ne događanja se zbraja i njihova suma će uvijek biti jednaka jedinici."

U navedenom de Moivreovom radu se po prvi puta spominje integral gustoće vjerojatnosti normalne distribucije i centralni granični teorem.

Teorem 1.2 (Centralni granični teorem). *Neka je* $\{X_n\}, n \in \mathbb{N}$ *niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli sa zajedničkim očekivanjem* μ *i zajedničkom varijancom* σ^2. *Za* $n \in \mathbb{N}$, *definirajmo* $S_n := X_1 + \ldots + X_n$. *Tada za sve* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\Big(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \leq x\Big) = \Phi(x)$$

gdje je Φ *funkcija* $N(0,1)$*distribucije.*

Drugim riječima, niz $\{\frac{S_n-n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\}, n \in \mathbb{N}$ *konvergira po distribuciji ka* $N(0,1)$.

2 Joseph Louis François Bertrand

Prolaskom kronološki kroz razvoj vjerojatnosti od antičke Indije do Abrahama de Moivrea dolazimo do Josepha Bertranda. Joseph Louis François Bertrand je rođen 11. ožujka 1822. godine u Parizu. Bertrand je bio francuski matematičar koji se posvetio pojedinim granama matematike kao što su teorija brojeva, diferencijalna geometrija i teorija vjerojatnosti.

Već u djetinjstvu Bertrand je pokazivao talente prema matematici, pa je već sa jedanaest godina dobio dozvolu za pohađanjem predavanja na Veleučilištu *Ecole*. Već u dobi od šesnaest godina stekao je prvi stupanj te je sa sedamnaest godina posjedovao doktorat iz termodinamike. Bertrand je svoju profesorsku karijeru obnašao na *École Polytechnique* i *Collège de France*.

Bertrand se istaknuo 1845. godine kada je naslutio da uvijek postoji prost broj između n i $2n$, $\forall n > 3$. Iako je Bertrand svoju tvrdnju provjerio za $n < 3 \times 10^6$ to se ne smatra dokazanim, te je prvi put dokazana nakon pet godina od strane ruskog matematičara Puffya Lvovicha Chebyshova. Ta tvrdnja je danas poznata kao Bertrandov postulat. Najpoznatija tvrdnja iz vjerojatnosti opisana u knjizi *Calcul des probabilités*, a poznata je pod nazivom Betrandov paradoks, o čemu ćemo pričati kasnije. Bertrand je bio pisac brojnih knjiga za učenike srednje škole te je kasnije započeo s pisanjem knjiga za učenike kao što su *Traité de calcul différentiel et de calcul intégral* i *Thermodynamique*. Kao krunu svoga rada Joseph Bertrand je izabran u Francusku akademiju znanosti 1856. godine kao snažni promotor matematike. Brojna djela koja je objavio učinila su ga članom književne Francuske akademije. Umro je 1900. godine u Parizu. Po vremenskom razdoblju možemo uočiti da je Bertrand živio i stvarao nakon ranije navedenih znanstvenika te je stvoren temelj za rad na težim vjerojatnosnim problemima.

3 Uvod u vjerojatnost

Nakon upoznavanja povijesnog razvoja vjerojatnosti sljedeće na red dolaze osnovne definicije i pojmovi. Povijest je vjerojatnost temeljila na pokusima što je ostala praksa i danas pa bi trebalo definirati pojam slučajnog pokusa.

Definicija 3.1. *Pokus je svaka realizacija točno definiranog skupa uvjeta pokusa. Kod svakog pokusa imamo uvjete pokusa i rezultate odnosno ishode pokusa. Slučajni pokus je svaki postupak koji rezultira jednim od više mogućih ishoda. Kod slučajnog pokusa ishodi nisu jednoznačno određeni uvjetima pokusa. Deterministički pokus je pokus kojem je ishod jednoznačno određen uvjetima pokusa.*

Primjer 1. Deterministički pokus: *rezanje papira škarama*
Slučajni pokus: *bacanje simetričnog novčića koji ima ishod okretanja glave i pisma*

Nakon navedene definicije pokusa trebali bi se upoznati s prostorom elementarnih događaja.

Definicija 3.2. *Prostor elementarnih događaja nekog slučajnog pokusa je skup* Ω *sa svojstvom da svakom ishodu pokusa odgovara točno jedan element tog skupa* Ω*.*
Elemente prostora Ω *zovemo elementarni događaji.*

Navest ćemo jedan elementarni primjer za navedene pojmove.

Primjer 2. Slučajni pokus*: bacanje dva simetrična novčića*
U ovome pokusu ćemo sa slovom P označiti da je novčić pao na pismo, a sa slovom G da je novčić pao na glavu.
Elementarni događaji*: (P, P)-pala su oba pisma, (P, G)- prvi novčić je pao pismo, a drugi novčić glava , (G, P)- prvi novčić je pao glava, a drugi novčić pismo, (G, G)- pala su oba novčića na glavu*
Prostor elementarnih događaja Ω *:*$\{$*(P P), (P, G), (G, P), (G, G)*$\}$*,tj. skup svih elementarnih događaja*
Događaji*: Palo je barem jedno pismo* $\{$*(P, P), (G, P), (P, G)*$\}$

Nakon razumjevanja osnovnih pojmova možemo polako uvoditi i pojam vjerojatnosti. Vjerojatnost je *"mjera"* kojom izražavamo *"stupanj uvjerenja"* u realizaciju nekog događaja. Ovakvim definiranjem vjerojatnost mi možemo naš pristup zadavanja vjerojatnosti podijeliti na:

- klasični pristup
- statistički pristup
- aksiomatski pristup, koji pokriva sve pristupe definiranju vjerojatnosti

Svaki od navedenih pristupa ima jednak koncept koji se temelji na odnosu dijela i cjeline.

3.1 Koncept geometrijske vjerojatnosti na $\mathbb{R}$ i na $\mathbb{R}^2$

Definicija 3.3 (Geometrijska vjerojatnost na $\mathbb{R}$)**.** *Neka je Ω omeđen interval realnih brojeva i $\lambda(\Omega)$ njegova duljina, a A podinterval od Ω duljine $\lambda(A)$. Vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz intervala Ω bude element njegovog podintervala A je kvocijent duljine intervala A i duljine intervala Ω,tj.*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Važna pretpostavka ove definicije je omeđenost intervala, to jest $\lambda(\Omega) < \infty$.

Definicija 3.4 (Geometrijska vjerojatnost na $\mathbb{R}^2$)**.** *Neka je Ω ograničen podskup ravnine i $\lambda(\Omega)$ njegova površina, a A podskup od Ω površine $\lambda(A)$. Vjerojatnost da slučajno odabrana točka iz Ω sadržana u njegovom podskupu A je kvocijent površine skupa A i površine skupa Ω,tj.*

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}.$$

Primjer 3. *Iz segmenta $\Omega = [0, 4]$ slučajno odaberimo jednu točku. Kolika je vjerojatnost da je slučajno odabrana točka iz segmenta $A = [1, 3]$*

$$\Omega = [0, 4], \qquad \lambda(\Omega) = 4 - 0 = 4, \qquad A = [1, 3]$$

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{3-1}{4-0} = \frac{1}{2}.$$

Primjer 4. *Koliko je vjerojatno da slučajno odabrana točka na kružnici radijusa $\mathbf{R}$ padne na kružni luk $\widehat{BC}$ određen vrhovima B i C toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta?*

- *A - kružni luk $\widehat{BC}$,* $\lambda(A) = \frac{1}{3}2\mathbf{R}\pi = \frac{2}{3}\mathbf{R}\pi$
- *Ω - krug radijusa $\mathbf{R}$,* $\lambda(\Omega) = \mathbf{R}^2\pi$

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{2}{3}\mathbf{R}\pi}{2\mathbf{R}\pi} = \frac{1}{3}.$$

Primjer 5. *Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka u krugu radijusa* $\mathbf{R}$ *padne točno u središte* S *toga kruga?*

- *A - jednočlani skup koji se sastoji samo od središta* S *kruga,* $\lambda(A) = 0$
- Ω*- krug radijusa* $\mathbf{R}$, $\lambda(\Omega) = \mathbf{R}^2\pi$

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{0}{\mathbf{R}^2\pi} = 0.$$

Primjer 6. *Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka u krugu radijusa* $\mathbf{R}$ *padne u jednakostraničan trokut upisan tom krugu?*

- *A- jednakostraničan trokut upisan krugu radijusa* $\mathbf{R}$

$$\frac{a}{2} = \sqrt{\mathbf{R}^2 - \frac{\mathbf{R}^2}{4}} = \sqrt{\frac{3\mathbf{R}^2}{4}} = \frac{\mathbf{R}\sqrt{3}}{2} \Rightarrow a = \mathbf{R}\sqrt{3}$$

$$\lambda(A) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\mathbf{R}^2$$

- Ω*-krug radijusa* $\mathbf{R}$, $\lambda(\Omega) = \mathbf{R}^2\pi$

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{3\sqrt{3}}{4}\mathbf{R}^2\frac{1}{\mathbf{R}^2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

3.2 Slučajne varijable

Da bi upoznali pojam slučajne varijable to ćemo izreći na jednostavan način koji kaže da je slučajna varijabla numerički ishod slučajnog pokusa.

Definicija 3.5. *Neka je* Ω *diskretan skup elementarnih događaja. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *koja svakom elementarnom događaju pridružuje pripadni realni broj naziva se slučajna varijabla.*

$$X(\omega_k) = x_k \quad , \quad \omega_k \in \Omega, x_k \in \mathbb{R}$$

Skupovi događaja nisu jedinstveno određeni pa se tako i slučajne varijable mogu svrstati u dva tipa.

Definicija 3.6. *Slika slučajne varijable* X *je skup* $\mathbf{R}(x) = \{x \in \mathbb{R} : X(\omega_i) = x, \omega_i \in \Omega\}$*. Ako je* $\mathbf{R}(X)$ *konačan ili prebrojiv skup govorimo o diskretnoj slučajnoj varijabli. U suprotnom govorimo o neprekidnoj slučajnoj varijabli.*

Definicija 3.7. *Diskretne slučajne varijable zadajemo tako da zadamo pripadni skup vrijednosti* $\mathbf{R}(X) = \{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ *i pridružene vjerojatnosti* $p_n = P(X = x_n)$*,što zapisujemo u obliku tablice:*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

Ovu tablicu nazivamo distribucija ili zakon razdiobe slučajne varijable X. Distribucija ima sljedeća svojstva:

- $x_i \neq x_j \quad za \ \ i \neq j$
- $p_i \geq 0, \ \forall i$
- $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1.$

Definicija 3.8. *Gustoća diskretne slučajne varijable X je funkcija* $f_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirana na sljedeći način:*

$$f_X(x) = \begin{cases} p_i & , x = x_i \\ 0 & , x \neq x_i \end{cases}$$

gdje je $p_i = P(\{X(\omega_i) = x_i\}) = P(X = x_i)$*.*

Definicija 3.9. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* (Ω, F, P) *i funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in F$ *za svaki* $x \in \mathbb{R}$
- *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable, f, takva da vrijedi:*

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Funkciju X zovemo neprekidna slučajna varijabla na Ω*. Funkciju f tada zovemo funkcija gustoće slučajne varijable X.*

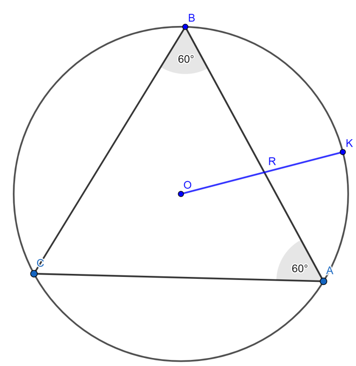
Definicija funkcije gustoće neprekidne slučajne varijable nam govori da je površina ispod njezing grafa nad nekim podskupom od $\mathbb{R}$ zapravo vjerojatnost realizacije tog podskupa od $\mathbb{R}$.

4 Bertrandov paradoks

Još u 19. stoljeću Joseph Louis Bertrand je proučavao primjenjeni problem vjerojatnosti te je svoje novo otkriće nazvao *paradoks*. Bertrandov paradoks zanimljiv je iz razloga što daje tri različita odgovora na vjerojatnosni problem. Svaki dani odgovor je točan za pripradno tumačenje riječi *slučajno*. Formulacija ovoga problema glasi

Kolika je vjerojatnost da duljina slučajno odabrane tetive kružnice bude veća od duljine stranice toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta?

Neka je dana kružnica radijusa $\mathbf{R}$ sa središtem u točki $\mathbf{O}$ te njoj upisan jednakostraničan trokut.



Slika 1: Jednakostraničan trokut i njemu opisana kružnica radijusa R

Sljedeće napomene će nam biti korisne u razumjevanju vjerojatnostnog problema:

- Udaljenost stranice toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta do središta kružnice jednaka je polumjeru $\mathbf{r}$ tom trokutu upisane kružnice i iznosi $\frac{\mathbf{R}}{2}$:

$$\cos(60^\circ) = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{R}} \Rightarrow \mathbf{r} = \mathbf{R}\cos(60^\circ) = \mathbf{R} * \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{R}}{2}.$$

- Središnji kut nad stranicom toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta iznosi 120°.

- Površina jednakostaničnom trokutu opisane i upisane kružnice su u sljedećem omjeru:

$$\frac{P_U}{P_O} = \frac{\mathbf{r}^2\pi}{\mathbf{R}^2\pi} = \frac{\mathbf{r}^2}{\mathbf{R}^2} = \frac{(\frac{R}{2})^2}{R^2} = \frac{1}{4}.$$

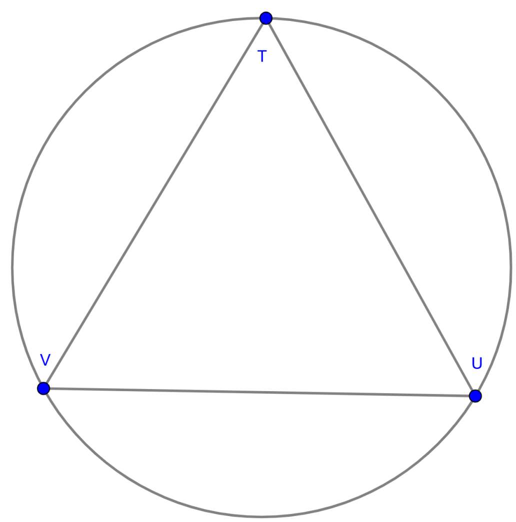
- Vrhovi ovoj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta kružnicu dijele na tri kružna luka duljine
$$\frac{\mathbf{O}}{3} = \frac{2\mathbf{R}\pi}{3} = \frac{2}{3}\mathbf{R}\pi.$$

Pripadna tri odgovora na pitanje Bertrandovog paradoksa su $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{4}$ od kojih je svaki posljedica različitog tumačenja slučajnog pokusa odabira jedne tetive kružnice u ovom problemu.

5 Interpretacija problema

5.1 Prva interpretacija problema

Ovakva interpretacija problema poznata je i pod nazivom *slučajne krajnje točke*. Slučajnim odabirom točke na kružnici odredimo točku T i upišemo joj jednakostraničan troku $\triangle UTV$ s vrhom u T.

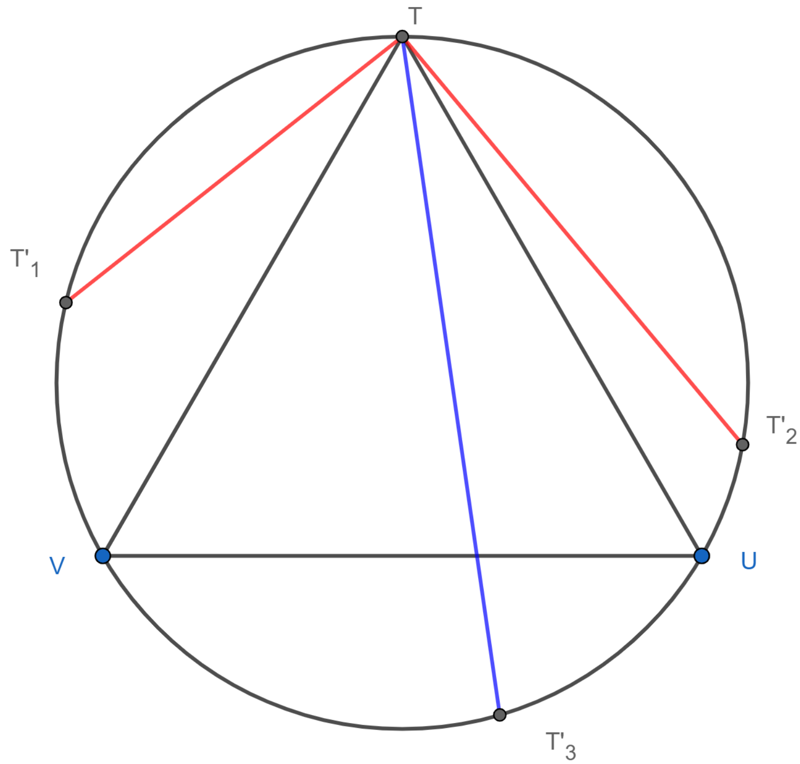


Slika 2: Jednakostraničan trokut i njemu opisana kružnica

Sada na kružnici odaberimo drugu točku T' i povucimo tetivu $\overline{TT'}$. Uočimo sljedeće:

- Ako točka T' leži na kružnom luku $\widehat{UV}$, a poznato nam je da je duljina tog kružnog luka jednaka trećini opsega kružnice, onda je tetiva $\overline{TT'}$ dulja od stranice upisanog jednakostraničnog trokuta.

- Ako je tetiva $\overline{TT'}$ dulja od stranice upisanog jednakostraničnog trokuta, onda točka T' leži na kružnom luku $\widehat{UV}$.



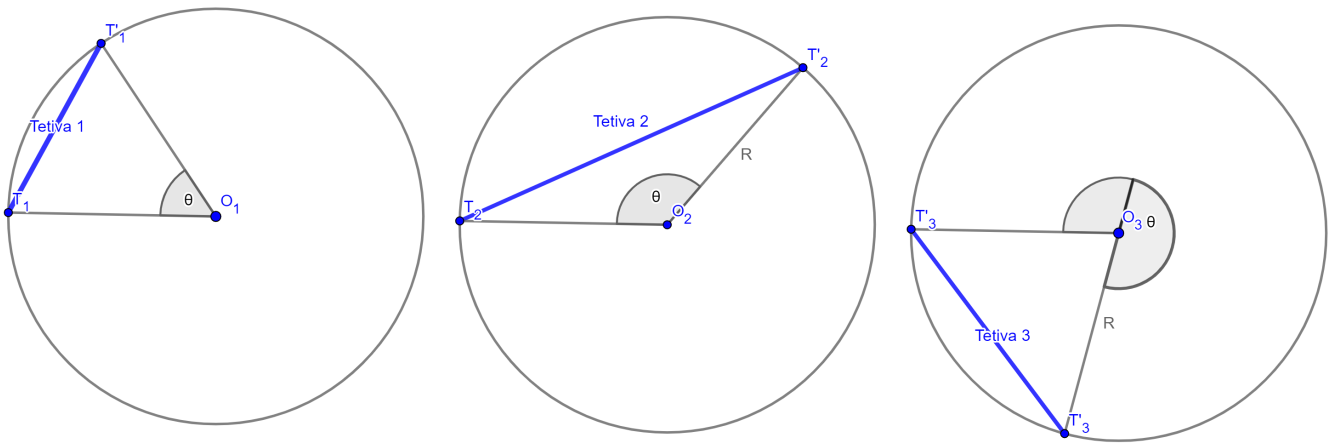
Slika 3: Jednakostraničan trokut $\triangle TUV$ i njemu opisana kružnica

Iz navedenog možemo zaključiti da je skup svih krajnjih točaka tetiva koje povlačimo iz točke T cijela kružnica, tj skup Ω. Neka je skup svih krajnjih točaka tetiva koje povlačimo iz točke T, a koje su dulje od stranice upisanog jednakostraničnog trokuta zapravo kružni luk $\widehat{UV} = A$.

Vjerojatnost da je slučajno povučena tetiva kružnice dulja od stranice jednakostraničnog trokuta upisanog toj kružnici jednaka je kvocijentu duljine kružnog luka $\widehat{UV}$ i opsega kružnice, tj.

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\frac{2}{3}R\pi}{2R\pi} = \frac{1}{3}.$$

Ova interpretacija problema ima još jedno slično razmišljanje koje dovodi do vjerojatnosti $\frac{1}{3}$. Drugi način razmišljanja se svodi na identifikaciju slučajnog izbora tetive sa slučajnim izborom središnjeg kuta θ. U ovom načinu razmišljanja fiksiramo jednu točku, koja je prva krajnja točka naše tetive, a drugu točku odabiremo tako da radijus rotiramo brzinom i zaustavimo se negdje na kružnici.



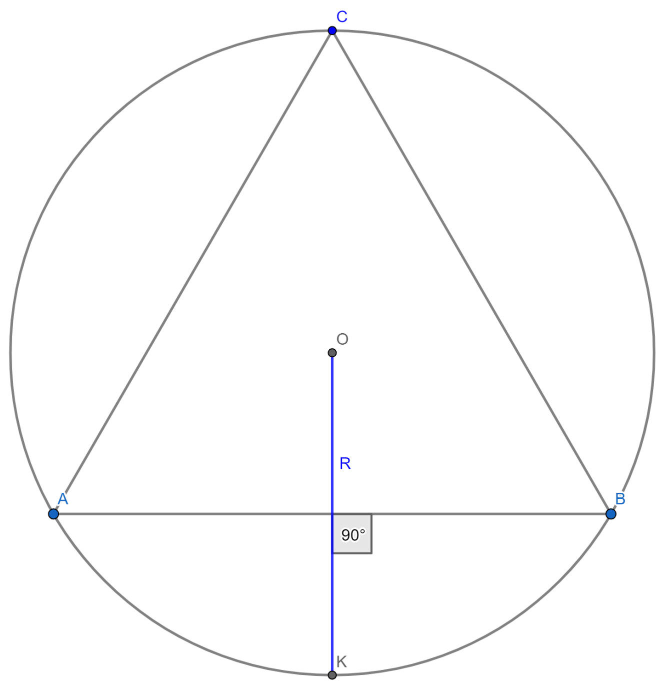
Slika 4: Izbor tetive sa slučajnim izborom središnjeg kuta θ

Zaključujemo da će tako dobivena tetiva biti dulja od stranice upisanog jednakostraničnog trokuta ako i samo ako je pripadni središnji kut θ veći od $120°$ i manji od $240°$, tj $120° < \theta < 240°$. Prema tome vidimo da je

$$P(A) = \frac{240° - 120°}{360°} = \frac{1}{3}.$$

5.2 Druga interpretacija problema

Druga interpretacija problema poznata je pod nazivom *slučajna udaljenost od središta kružnice.* Neka je u kružnici upisan jednakostranični trokut. Slučajno odaberemo radijus te kružnice te trokut zarotiramo tako da jedna njegova stranica postane okomita na odabrani radijus.



Slika 5: Jednakostraničan trokut i njemu opisana kružnica sa radijusom okomitim na stranicu trokuta

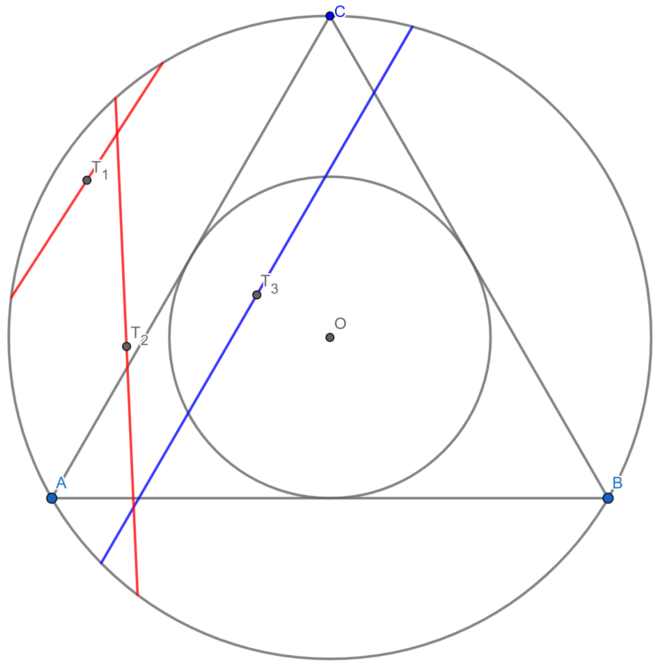
Odaberimo točku radijusa i konstruiramo tetivu čije je polovište odabrana točka. Uočimo da će duljina tetive biti veća od duljine stranice kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta ako je udaljenost tetive od središta O kružnice manja od polumjera $r = \frac{R}{2}$ tom trokutu upisane kružnice.
Skup koji sadrži duljine tetiva veće od duljine stranice upisanog jednakostraničnog trokuta je skup $A = [0, \frac{R}{2}]$. Znamo da tetiva može poprimiti duljinu iz segmenta $[0, R]$, odnosno imamo

$$A = \left[0, \frac{R}{2}\right], \Omega = [0, R]$$

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{R - 0}{\frac{R}{2} - 0} = \frac{R}{\frac{R}{2}} = \frac{1}{2}.$$

5.3 Treća interpretacija problema

Interpretacija problema paradoksa na ovakav način naziva se *slučajno odabrano polovište tetive*. Postupak započinjemo sa slučajno izabranom točkom unutar kruga omeđenog našom kružnicom i konstruiramo tetivu kojoj je ta točka polovište.



Slika 6: Jednakostraničan trokut i njemu opisana kružnica sa označenim polovištima tetiva

Uočimo da su tetive na slici označene crvenom bojom kraće od stranice jednakostraničnog trokuta upisanog u kružnicu. Plavom bojom smo označili tetivu čija je duljina veća od stranice jednakostraničnog trokuta upisanog u kružnicu. Iz navedene slike možemo uočiti da:

- ako slučajno odabrana točka leži unutar jednakostraničnom trokutu upisanog kruga, koji ima radijus $r = \frac{R}{2}$, tada tetiva čija je ta točka polovište ima veću duljinu od stranice početnoj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta
- ako je tetiva kružnice dulja od stranice njoj upisanog jednakostraničnog trokuta, tada njezino polovište leži unutar tom trokutu upisanog kruga.

Neka je skup polovišta svih tetiva kružnice sa središtem u S radijusa R krug $k(S, R)$. Neka je skup polovišta svih tetiva kružnice sa središtem u S radijusa R koje su dulje od stranica toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta krug $k(S, \frac{R}{2})$. Tada je:

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : d(x, S) \leq \frac{R}{2}\right\},$$

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : d(x, S) \leq R\}.$$

Poznavanjem definicije geometrijske vjerojatnosti na $\mathbf{R}^2$ znamo da je vjerojatnost da slučajno odabrana tetiva bude dulja od stranice upisanog jednakostraničnog trokuta zapravo jednaka kvocijentu površine našeg skupa A i površine skupa Ω, tj.

$$P(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)} = \frac{r^2\pi}{R^2\pi} = \frac{(\frac{R}{2})^2}{R^2} = \frac{\frac{R^2}{4}}{R^2} = \frac{1}{4}.$$

6 Interpretacija problema pomoću koncepta slučajne varijable

6.1 Prva interpretacija problema pomoću slučajne varijable

Označimo X slučajnu varijablu koja svakoj točki s kružnice priduži mjeru kuta kojeg tetiva $\overline{TT'}$ zatvara s kružnicom, tj. s tangentom kružnice u točki T. Znamo da je kodomena naše slučajne varijable segment $[0, \pi]$, dok je skup svih povoljnih ishoda u intervalu $\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \rangle$. Bitan princip koji koristimo u ovoj interpretaciji problema je princip uniformonosti. Princip uniformnosti nam govori da pri odabiru točke s kružnice ne preferiramo niti jednu točku kružnog luka. Iz principa uniformnosti dolazimo do zaključka da su svi jednako dugi podintervali od $[0, \pi]$ zapravo jednako vjerojatni.

Funkcija gustoće uniformne distribucije na $[0, \pi]$ slučajne varijable X dana je sljedećom formulom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \,, \, x \in [0, \pi] \\ 0 \,, \, x \in \mathbb{R} \setminus [0, \pi]. \end{cases}$$

Računajući vjerojatnost da je slučajno odabrana tetiva dulja od duljine stranice toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta dobivamo:

$$P\left(\frac{\pi}{3} < X < \frac{2\pi}{3}\right) = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{\pi} dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{3}.$$

6.2 Druga interpretacija problema pomoću slučajne varijable

Fiksirajmo jedan radijus kružnice i rotirajmo trokut tako da jedna njegova stranica postane okomita na fiksni radijus. Označimo s X slučajnu varijablu koja svakoj točki s fiksiranog radijusa pridružuje njezinu udaljenost od središta kružnice. Ovako definirana slučajna varijabla X za kodomenu ima interval $[0, 1]$, a skup svih točaka povoljnog ishoda je interval $[0, \frac{1}{2}\rangle$.

Funkcija gustoće uniformne distribucije na $[0, 1]$ slučajne varijable X dana je sljedećom formulom:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \,, \, x \in [0, 1] \\ 0 \,, \, x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1]. \end{cases}$$

Računanjem vjerojatnosti pomoću druge interpretacije problema slučajne varijable dobivamo:

$$P\left(0 < X < \frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}.$$

6.3 Treća interpretacija problema pomoću slučajne varijable

Neka je X slučajna varijabla koja svakoj točki kruga pridružuje udaljenost do središta kruga. Prostor elementarnih događaja nam je segment $[0, \mathbf{R}]$, a prostor povoljnih događaja je interval $[0, \frac{\mathbf{R}}{2}\rangle$.

Funkcija gustoće slučajne varijable X dana je sljedećom formulom:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\mathbf{R}^2} \text{ , } x \in [0, R] \\ 0 \quad \text{ , } x \in \mathbb{R} \setminus [0, \mathbf{R}]. \end{cases}$$

Vjerojatnost da slučajno odabrana tetiva bude dulja od stranice jednakostraničnoga trokuta upisanog u kružnicu radijusa $\mathbf{R}$ je:

$$P\left(0 < X < \frac{\mathbf{R}}{2}\right) = \int_0^{\frac{\mathbf{R}}{2}} \frac{2x}{\mathbf{R}^2} dx = \frac{\frac{\mathbf{R}}{2}^2}{\mathbf{R}^2} = \frac{1}{4}.$$

7 Eksperimentalna interpretacija problema

U svome radu *Is there a 'correct' solution to Bertrand's paradoks*, autor Ulrich Faigle, izvodi jedan eksperiment za rješavanje Bertrandovog paradoksa. Eksperiment se radio tako što je trebalo nacrtati mnogo kružnica na papir te potom bacati dovoljno dugačak štap. Padom štapa na neku od navedenih kružnica nastaju tetive koje odsjecaju kružnice. Potrebno je izmjeriti duljinu pripadnih tetiva i zabilježiti rezultat. U ovome eksperimentu, autor Faigle, je pri bacanju 100 štapova dobio da je 48 puta dobivena tetiva dulja od stranice toj kružnici upisanog jednakostraničnog trokuta.

8 Zaključak

U ovom paradoksu do izražaja dolazi nejednoznačajnost u matematičkom poimanju koncepta slučajnosti. Posebno u matematici riječ *slučajno* moramo specificirati pri raspodjeli vjerojatnosti. Klasičan primjer iz svakodnevice je da odaberemo proizvoljno broj od jedan do deset. Prva pomisao na rješenje ovoga problema je da svaki broj biramo s vjerojatnošću $\frac{1}{10}$. Strogo gledajući to ne proizlazi iz naše fraze. Možemo jedan broj izvlačiti češće, neka to bude broj jedan u našem problemu, i njemu pridružit vjerojatnost $\frac{1}{2}$. Primjerice, tada svaki drugi broj ima vjerojatnost $\frac{1}{18}$. Ovakvo rješenje i dalje odgovara našem početnom problemu slučajnog izbora broja od jedan do deset. Poznavajući strogost pri zadavanju matematičkih problema trebali bi naš problem ipak zapisati na drugačiji način, tj. trebao bi glasiti *slučajno odaberite broj od jedan do deset, pri čemu je slučajnost zadana uniformno.*

Ukoliko naš problem prebacimo u slučajni odabir točke na krivulji tada smo poprilično zakomplicirali stvari. Primjerice, slučajno odaberimo točku na kružnici, pri čemu svaka točka ima jednaku vjerojatnost. Kolika je vjerojatnost da će naša odabrana točka biti fiksna točka A? Poznato nam je da je ta vjerojatnost nula. Ukoliko vjerojatnost za svaku točku nije nula tada dolazimo do tvrdnje da je zboj svih vjerojatnosti točaka kružnice jednak beskonačno. Tu nailazimo na novi problem koji glasi ovako:

Ako je vjerojatnost odabira svake konkretne točke jednaka nuli, kako uopće možemo odabrati neku točku?

Grana matematike koju nazivamo teorija mjere nam daje odgovor na ovo pitanje. Kaže da dodjelimo svakom mogućem događaju tipa "odabrali smo točku u skupu A" neku vjerojatnost $P(A)$ na takav način da je $P(S) = 1$, gdje je S skup svih danih točaka kružnice. Važna pretpostavka je da su svi događaji A_i disjunktni, tj. da vrijedi

$$P\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_i P(A_i)$$

Ukoliko preformuliramo Bertrandov paradoks kao problem odabira dvije slučajne točke na kružnici s jednakom vjerojatnošću s obzirom na duljinu i neovisnost, a zatim ih spojimo u tetivu, kolika je vjerojatnost da tetiva presjeca unutarnji krug? Za ovako formuliran problem postoji jedinstveni odgovor koji glasi $\frac{1}{3}$. Ukoliko Bertrandov paradoks preformuliramo u problem koji glasi da odaberemo slučajnu točku u krugu uniformno te povučemo tetivu kroz tu točku koja će biti okomita na radijus u toj točki, kolika je vjerojatnost da će tetiva presjecati unutarnji krug? I ovaj problem ima jedinstveno rješenje koje glasi $\frac{1}{4}$. Nakon svega navedenog uočavamo da je matematika precizna znanost i da u definiranju problema moramo biti izrazito precizni. Cijeli paradoks se temelji na shvaćanju pojma *nasumičnog odabira točke*.

Literatura

[1] J. Bertrand, *Calcul des Probabilities*, Paris, 1907.

[2] Samuel S. Chui,Richard C. Larson, *Bertrand's Paradox Revisited: More Lessons about that Ambiguous Word, Random*, 2009.

[3] M. Benšić, N. Šuvak *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Osijek, 2014.

[4] H.Dravec , *Počeci razvoja kombinatorne teorije vjerojatnosti*, javno dostupno na: http://www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/DRA11.pdf

[5] Mostafa K. Ardakani, Shaun S. Wulff, *An extended problem to Bertrand's paradoks*, 2014.