Zlatni rez

Blagojević, Luka

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Luka Blagojević

Zlatni rez

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Luka Blagojević

Zlatni rez

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Matić

Osijek, 2020.

Sadržaj

Sažetak

U ovome radu proučit ćemo zlatni rez, njegovu povijest i nastanak te njegovo pojavljivanje u arhitekturi, prirodi i umjetnosti. Upoznat ćemo se s njegovim osnovama te njegovom povezanošću s Fibbonaccijevim brojevima.

Ključne riječi

Zlatni rez, Fibbonacijevi brojevi, zlatna spirala, pravilni peterokut

Abstract

In this paper we will study the Golden ratio, its history and origin, and its appearance in architecture, nature and art. We will be introduced to its basics and connection to Fibbonaci sequence.

Key words

Golden ratio, Fibbonaci numbers, golden spiral, regular pentagon

Uvod

Zlatni rez pristutan je svuda oko nas. Kada god vidimo nešto skladno i lijepo, vrlo često ćemo mi matematičari u tome vidjeti zlatni rez. Zlatni rez povezuje prirodu, matematiku, umjetnost, arhitekturu i tehniku na fascinantan i vrlo zanimljiv način.Zlatni rez najviše se očituje u omjerima geometrijskih tijela, a o čemu ćemo i govoriti u ovome radu. Proučavana je i povijest zlatnog reza od početka razvoja čovječanstva, pa sve do danas.

1 Zlatni rez općenito te u povijesti, umjetnosti, prirodi i arhitekturi

Kažemo da su dvije veličine u omjeru zlatnog reza ako se manji dio odnosi prema većem kao što se veći dio odnosi prema cjelini, to jest ako vrijedi:

$$\frac{m}{M} = \frac{M}{m+M} = \lambda.$$

Uvrstimo li $m = M\lambda$ u lijevi dio jednadžbe dobivamo:

$$\frac{M\lambda}{M} = \frac{M}{M\lambda + M}$$

iz čega slijedi:

$$\lambda = \frac{1}{\lambda + 1}.$$

Sređivanjem te jednadžbe dobivamo kvadratnu jednadžbu:

$$\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

čije pozitivno rješenje iznosi:

$$\lambda = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.6180339887\ldots$$

Taj broj označavamo malim grčkim slovom fi odnosno $\phi = 0.6180339887$. Ako početnu jednadžbu napišemo recipročno, odnosno:

$$\frac{M}{m} = \frac{m+M}{M} = \lambda$$

dobit ćemo kvadratnu jednadžbu oblika:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

a njeno pozitivno rješenje iznosi:

$$\lambda = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.6180339887\ldots$$

Taj broj označavat ćemo velikim grčkim slovom fi odnosno $\Phi = 1.6180339887$.

Rimski panteon, Da Vincijev čovjek, iPad, kreditna kartica, suncokret. Svi ovi naizgled nepovezivi pojmovi imaju zajedničku jednu stvar, a to je upravo broj $\Phi = 1.6180339887$. To je konstanta koju nazivamo upravo zlatni rez. Zlatni rez čini matematiku univerzalnom znanošću, ne samo kao egzaktne brojke, nego prikazuje da je matematika uključena u cijelokupan razvoj ljudskog društva i samog čovjeka od početka ljudskog postojanja pa sve do danas. Taj broj služio je kao inspiracija mnogim znanstvenicima i umjetnicima još od starih Grka i Rimljana, iako za neke umjetnike i arhitekte iz tog vremena ne možemo sa sigurnošću znati jesu li oni bili svjesni samog broja Φ ili im se taj omjer jednostavno činio ugodan oku.

Povijest

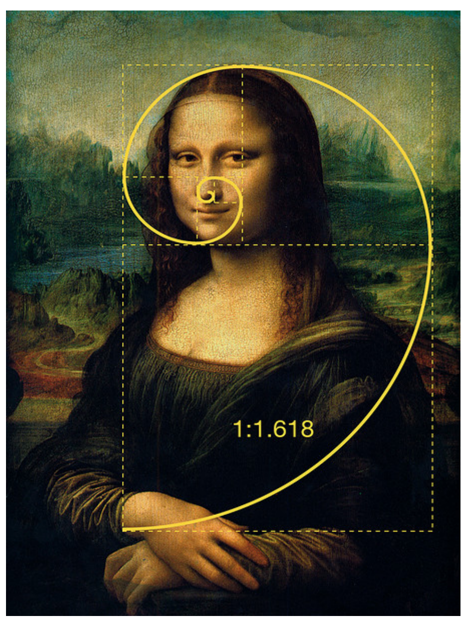
Zlatni rez pronalazimo svuda, a jedan od starijih zapisa je onaj iz biblijskog Starog Zavjeta gdje u Knjizi Izlaska Bog govori Mojsiju:

> Od bagremova drva neka naprave Kovčeg: dva i po lakta dug, lakat i po širok i lakat i po visok.

Ove mjere čine savršene proporcije prema pravilima zlatnog reza, a možda je i ovaj citat razlog zašto se zlatni rez naziva i božanska proporcija.

Sama teorija zlatnog reza započela je u ranoj antici na prostoru stare Grčke, dok se kasnije najviše razvila u renesansi kada su umjetnici, filozofi, astronomi, fizičari i matematičari tražili savršenstvo u kompozicijama poznatih stuktura. Kipar Fidije gradio je atenski Partenon po počelima zlatnog reza dok je velikom misliocu Platonu u opisivanju pet pravilnih geometrijskih tijela koji su po njemu temelj harmonične strukture svijeta, zlatni rez imao ključnu ulogu u dimenzijama nekima od tih tijela.

Prvi koji je uočio i izrazio ovaj broj bio je poznati grčki matematičar Euklid u svojoj knjizi ”Elementi” u kojoj je i prva zabilježena definicija zlatnog reza i to da se manji dio odnosi prema većem kao što se veći dio odnosi prema cijelom. U 1. stoljeću prije Krista rimski arhitekt Marcus Vitruvius Polio zapisao je sva poznata znanja starih Grka u svojoj knjizi ”De architectura libri decem”. U njoj opisuje gradnju hramova, kuća i partenona i uspoređuje njihove mjere s mjerama ljudskog tijela. On je bio prvi koji je ljudsko tijelo smjestio u kružnicu dok će 16 stoljeća kasnije isto usavršiti Leonardo da Vinci. Ovaj je poznati i renesansni umjetnik, zlatni rez koristio je u mnoštvu svojih slika, između ostalog i na najpoznatijoj Mona Lisi.



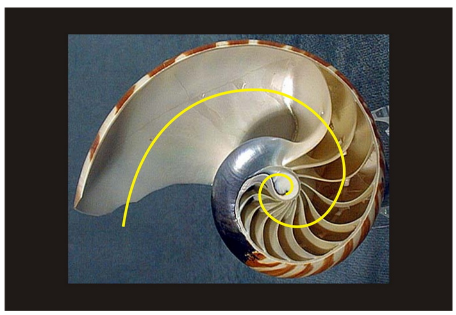
Slika 1: Mona Lisa

1202. godine u Pisi je Leonardo Fibonacci razmatrao razmnožavanje zečeva i došao do vrlo zanimljivog zaključka u održavanju vrste. Počeo je brojati sume novorođenih zečeva, počevši od prva dva zeca i došao do sljedećih brojki. Broj zečeva progresivno je rastao: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89... Dakle, zečevi su u razmnožavanju slijedili zakon zlatnog reza. Svaki slijedeći broj bio je jednak zbroju prethodna dva dok je omjer uzastopnih članova jednak 1.618 odnosno upravo omjeru zlatnog reza. Nešto više o vezi zlatnog reza i Fibonaccijevih brojeva se može vidjeti u slijedećem poglavlju.

Priroda

U prirodi oko nas postoji neprebrojivo mnoštvo primjera zlatnog reza. Zlatni rez prisutan je u obliku i rastu biljaka, pristan je u građi tijela životinje, ali i u obliku i građi ljudskog tijela. Temelj zlatnog reza u prirodi je zlatna ili logaritamska spirala. Rast zlatne spirale je u skladu s ravnotežom broja Φ, a to vidimo iz konstukcije zlatne spirale gdje dobivamo kvadrate čije su površine Fibonaccijevi brojevi.

Jedan od najboljih i najljepših primjera zlatne spirale u prirodi je puž Nautilus, odosno indijska lađica. Oblik njezine kućice je u dimenzijama zlatne spirale, odnosno svaki spiralni promjer prema sljedećem spiralnom omjeru odnosi se u omjeru Φ.



Slika 2: puž Nautilus

Jedan od najboljih primjera iz naše ravničarske okoline je suncokret. Broj sjemenki suncokreta u jednom smjeru ima 34 reda, dok se u drugom smjeru nalazi 55 spiralnih redova. U jednom redu nalazi se 21 sjemenka, dok se u drugom redu nalaze upravo 34 sjemenke. Kao što vidimo ponavljaju se brojevi 21, 34 i 55, a oni su upravo susjedni brojevi Fibonaccijevog niza. Pitamo se zašto se to događa i zašto se u mnoštvu cvjetova, borova ili ananasa ponavlja identična zlatna spirala dok je broj latica uglavno broj iz Fibonaccijevog niza? Uzmimo ponovno za primjer suncokret. Njegove sjemenke poslagane su vrlo gusto jedna uz drugu tako da podjednako zauzimaju prostor prema van, odnosno da bi svaka sjemenka imala podjednak dovod kišnice te da jedna drugoj ne bi zaklanjale sunce. Mjerivši kuteve izračunato je da se svaka sjemenka koja izraste odmakne od prethodno izrasle sjemenke za 137.5°, odnosno upravo za omjer zlatnog kuta pri čemu je vrh kuta u središtu sunokreta. Ovakve spirale možemo uočiti i u rastu nekih ruža, kaktusa i sličnih biljaka.

Slika 3: Suncokret

Naravno zlatni rez se nalazi i u neživim stvarima kao što je morska pučina, atmosfera, ali i u svemiru. Velike oluje, uragani i tornada također vrlo često zadovoljavaju pravila zlatnog reza. Svemirske galaksije također su u obliku zlatne spirale, koju najbolje možemo uočiti u našoj galaksiji odnosno Mliječnoj stazi.

Slika 4: Mliječna staza

Zlatni rez pronalazimo i u glazbenoj umjetnosti. Jedan od najpoznatijih graditelja violina, talijan Antonio Stradivari, svoje violine pravio je u omjeru zlatnog reza i time postavio temelj svim kasnijim graditeljima violina. Dakle, središte zakrivljenosti luka u tijelu violine je u zlatnoj spirali dok se sama dužina luka prema tijelu violine odnosi kao tijelo violine s obzirom na ukupnu dužine, odnosno upravo omjer zlatnog reza. Još je mnogo primjera u glazbi, a jedan od njih je i najočitiji. Klavijatura klavira, odnosno sama notna ljestvica u jednoj oktavi ima 8 glavnih tonova i 5 međutonova, odnosno 13 ukupno. Već smo rekli kako su 5, 8 i 13 Fibonaccijevi brojevi. Dakle, u samoj osnovi glazbe nalazimo zlatni rez.

Arhitektura

Od najranijih civilizacija, zlatni rez bio je primjećivan u većini građevina, na oslikanim površina -ma te u likovnoj umjetnosti. 2500 godina prije Krista nastalo je jedno od sedam svjetskih čuda Starog vijeka i jedino koje je u nekom obliku preživjelo do danas. To je Keopsova piramida. Keopsova piramida je kao tijelo napravljena kao pravilna četverostrana piramida pri čemu joj je duljina stranice baze jednaka 230.4 metra dok je probitna visina iznosila 146.6 metara (danas je ta visina nešto manja s obzirom da je izložena vremenskim uvjetima već 4500 godina). Uzmemo li u obzir pravokutan trokut s pravim kutem u središtu piramide i vrhovima na polovištu bočnog brida baze i vrhu piramide, prema Pitagorinom poučku dobit ćemo duljinu visine bočne stranice u iznosu od 186.45 metara. Podijelimo li duljinu te visine s duljinom kraće katete odnonosno pola duljine osnovnog brida baze dobit ćemo:

$$\frac{186.45}{115.2} = 1.618 = \Phi.$$

Isto tako odnos te hipotenuze prema visini piramide je:

$$\frac{186.45}{146.6} = 1.272 = \sqrt{\Phi}.$$

Ako nam je dakle manja kateta duljine 1, visina $\sqrt{\Phi}$, a duljina hipotenuze Φ, tada taj trokut nazivamo egipatski trokut, a pravokutnik izveden iz njega Keopsov pravokutnik. Ta dva lika temelj su cjelokupne egipatske arhitekture.

Slika 5: Keopsova piramida

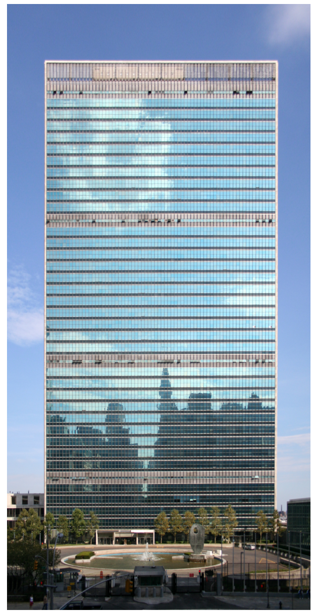
Najblistaviji antički spomenik sačuvan do danas je zasigurno atenski Partenon. Partenon je hram posvećen božici Ateni u samom središtu grada Atene. Izgrađen je 500 godina prije Krista gotovo kompletno zadovoljavajući pravila zlatnog reza čak i do najsitnijih detalja. Grčki arhitekti su bili prvi koji zlatni rez nisu gledali samo kao odnos dužina, nego i kao odnos površina tako da omjere zlatnog reza osim na pročelju vidimo i u samom tlocrtu građevine.

Slika 6: Partenon

Budući da se rimska kultura naslanjala na kulturu stare Grčke tako su i rimski arhitekti poštovali uvedena pravila zlatnog reza. Tako su dimenzije rimskog Panteona i Konstantinovog slavoluka također u omjeru zlatnog reza. Zlatni rez voljeli su i ranokršćanski arhitekti i umjetnici tako da u tlocrtima istanbulske Aja Sofije i venecijanske Crkve svetog Marka primjećujemo po nekoliko zlatnih pravokutnika, kako zovemo pravokutnike čije su stranice u omjeru zlatnog reza.

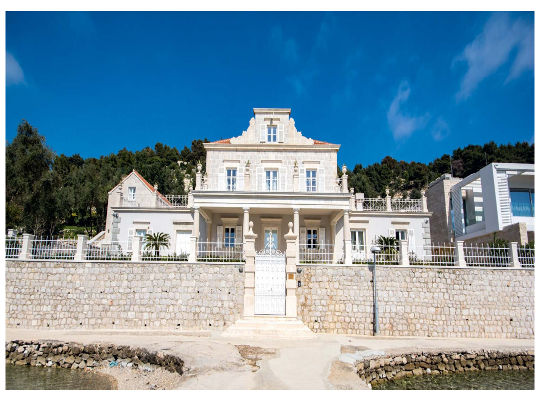
Graditelji srednjovjekovnih građevina u mnogočemu su se pokušali u svojim projektima nasloniti na starogrčku aritekturu kao simbol pravilne strukture i estetike. Zlatni rez u njihovim građevinama nije vidljiv samo na prvi pogled, već su omjer zlatnog reza upotrebljavali svuda. Tako da u nekim crkvama u Francuskoj imamo omjere lađa unutar crkve u zlatnom rezu, omjere prozora i zida među njima u zlatnom rezu, visine glavnih ulaznih vrata u omjeru sa sporednim vratima također u zlatnom rezu... Najbolji primjer je i poznata pariška katedrala Notre Dame kojoj je cijelo pročelje u omjerima zlatnog reza. Kako nije estetika zlatnog reza bila ograničena samo za Europu primjera ima i van nje. Kineski zid u nekim svojim elementima ima omjere zlatnog reza, ali najboljji primjer je indijski Taj Mahal koji svoju ljepotu duguje zlatnim pravokutnicima koji su uočljivi u cijelom pročelju i glavnim vratima.

Otac moderne arhitekture, francuski arhitekt Le Corbuisier, uvelike se bavio odnosima građevina s prirodom te je razvio svoj mjerni sustav koji u svom temelju ima zlatni rez. Mnoga njegova djela poput Ville Stein, Ville Savoye ili crkva Notre Dame u Ronchampeu su iako iracionalnog dizajna u svom temeljnom tlocrtu u zlatnom rezu. Neki moderni arhitekti koriste omjer zlatnog reza kao omjer između središnjeg i bočnog dijela kuće. Zgrada Ujedinjenih naroda u New Yorku također se temelji na zlatnom rezu iako na prvi pogled nikad to ne bi rekli. Prozori na toj zgradi su u omjeru zlatnog reza, a širina zgrade je u zlatnom rezu sa svakih 10 katova.



Slika 7: Zgrada Ujedinjenih naroda u New Yorku

Ni arhitektura u Hrvatskoj nije zaostajala za svjetskom i europskom arhitekturom. Toranj trogirske katedrale je u omjeru zlatnog reza dok je zlatni rez primjetan i u portalu majstora Radovana na ulazu u katedralu. Mnoge vile na Jadranu građene su na temeljima zlatnog reza, a najpoznatija među njima je vila Katino na otoku Šipanu koja je građena početkom 20. stoljeća. Cijelo pročelje vile je u zlatnom rezu dok je on primjetan i u tlocrtu te vile.



Slika 8: Vila Katino na otoku Šipanu

2 Veza zlatnog reza i Fibonaccijevih brojeva te zlatni rez u geometriji

Zlatni rez i Fibonaccijevi brojevi

Već ranije smo spomenuli 1202. godinu i talijana Leonarda Fibonaccija koji je te godine promatrao razmnožavanje zečeva. On se pitao koliko parova zečeva može dobiti razmnožavanjem počevši od jednog zeca i zečice u razdoblju od jedne godine. Naravno, razmatranje se vodilo uz savršene uvjete odnosno da nijedan zec ne ugine, da svaki par zečeva ima potomke počevši od drugog mjeseca života te da svaki par ima točno jedan par malih zečića. Dakle, nakon godine dana Leonardo Fibonacci došao je do 233 odrasla para i 144 zečića odnosno 377 zečeva i to redom po mjesecima ovako: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. Kasnije je matematičar Lucas taj rekurzivni niz nazvao Fibonaccijev niz, a članove niza Fibonaccijevi brojevi. Dakle, zbroj dva broja u nizu jednak je vrijednosti njihovog sljedbenika npr. $3+5=8$ ili $55+89=144$. Ako s A_n označimo opći član niza, onda imamo rekurzivnu relaciju:

$$A_n = A_{n-2} + A_{n-1}.$$

No budući da se ova rekurzija može odnositi i na neke druge nizove moramo postaviti neke uvjete kako bismo točno definirali Fibonaccijev niz. Najjednostavnije je postaviti uvjete na prva dva člana to jest postavimo da je $A_1 = A_2 = 1$. Tada možemo definirati Fibonaccijev niz:

$$A_n, n \in \mathbb{N}, A_0 = 0, A_1 = 1, A_n = A_{n-2} + A_{n-1}.$$

Fibonaccijevi brojevi nalaze se u mnogim granama matematike, ali preko zlatnog reza i u astronomiji, umjetnosti, arhitekturi, ali i prirodi i svijetu oko nas. Koja je uopće veza Fibonaccijevih brojeva iz zlatnog reza? Pogledajmo kvocijent bilo koja dva uzastopna broja Fibonaccijevog niza:

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1.6180339887$$

ili recipročno:

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = \phi = 0.6180339887.$$

Tu vidimo dakle osnovnu vezu zlatnog reza i Fibonaccijevih brojeva.

Zlatni rez u geometriji

U geometrijskom prikazu, zlatni rez ćemo najlakše uočiti na primjeru dužine na slijedeći način:
Podijelimo dužinu $\overline{\mathrm{AB}}$ duljine 1 točkom C tako da vrijedi

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}$$

gdje je a duljina dužeg dijela dužine $\overline{\mathrm{AB}}$ odnosno duljina $\overline{\mathrm{AC}}$.

Slika 9: Dužina AB

Rješavanjem kvadratne jednadžbe

$$a^2 + a - 1 = 0$$

za njeno pozitivno rješenje dobit će se upravo broj $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ pa možemo zaključiti:

$$\frac{1}{a} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2(1+\sqrt{5})}{(-1+\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi = 1.6180339887.$$

Zlatni rez se u geometriji može očitovati i kroz zlatni kut odnosno ako podijelimo krug na dva kuta čiji kvocijent iznosi $\Phi = 1.6180339887$. U tom slučaju veći kut iznosi približno $222.5°$, dok je iznos manjeg kuta približno $137.5°$. Dakle, kut punog kruga se prema većem kutu odnosi u omjeru:

$$\frac{360°}{222.5°} = \Phi = 1.618$$

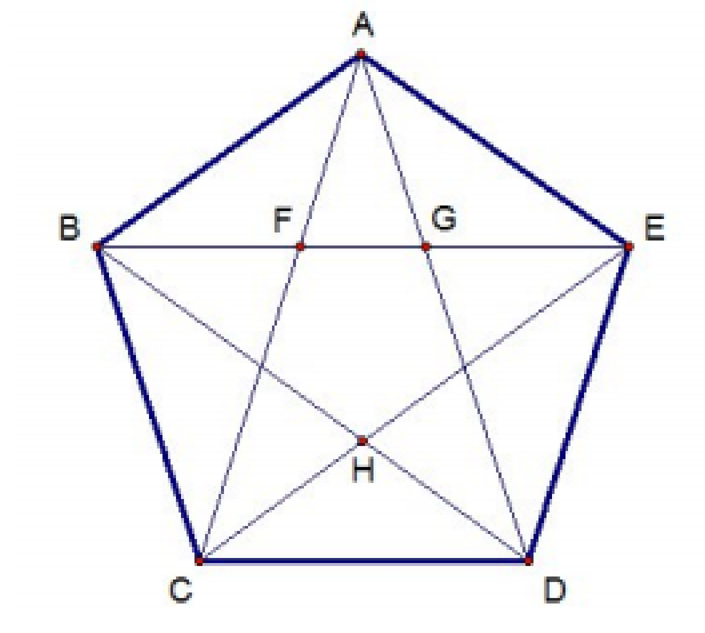
dok se veći kut prema manjem odnosi u istom omjeru:

$$\frac{222.5°}{137.5°} = \Phi = 1.618.$$

Zlatni rez nalazimo i u drugim pravilnim geometijskim tijelima, što je i na tragu Platonovog opisivanja istih. Dobar primjer je i pravilni peterokut čije dijagonale čine pentagram.

Kao što vidimo na slici, unutar pravilnog peterokuta povezali smo vrhove dijagonalama za koje vrijedi:

$$\angle BHE = 108°, \angle BEH = 36°.$$



Slika 10: Peterokut ABCDE

Prema sinusovom poučku vrijedi slijedeće:

$$\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{BH}}} = \frac{\sin 108^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\sin 72^\circ}{\sin 36^\circ} = 2\cos 36^\circ = 2\frac{1+\sqrt{5}}{4} = \Phi = 1.6180339887.$$

Budući da je $\overline{\mathrm{BH}} = \overline{\mathrm{BG}}$, iz toga slijedi:

$$\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{BH}}} = \frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{BG}}} = \Phi = 1.6180339887.$$

Dakle, vidljivo je da točka G dijeli dužinu $\overline{\mathrm{BE}}$ baš u omjeru zlatnog reza. Na sličan način zaključujemo

$$\frac{\overline{\mathrm{BG}}}{\overline{\mathrm{EG}}} = \Phi = 1.6180339887.$$

Također, vrijedi i jednakost $\overline{\mathrm{BF}} = \overline{\mathrm{EG}}$ pa zaključujemo i sljedeće:

$$\frac{\overline{\mathrm{BG}}}{\overline{\mathrm{BF}}} = \frac{\overline{\mathrm{BF}}}{\overline{\mathrm{FG}}} = \Phi = 1.6180339887.$$

Iz ovoga zaključujemo da množeći redom dužine $\overline{\mathrm{FG}}, \overline{\mathrm{BF}}, \overline{\mathrm{BG}}$ i $\overline{\mathrm{BE}}$ s Φ dobivamo iduću dužinu. Odnosno vrijedi:

$$\overline{\mathrm{FG}} \cdot \Phi = \overline{\mathrm{BF}}$$

$$\overline{\mathrm{BF}} \cdot \Phi = \overline{\mathrm{BG}}$$

$$\overline{\mathrm{BG}} \cdot \Phi = \overline{\mathrm{BE}}.$$

Na identičan način vidimo da je

$$\frac{\overline{\mathrm{BE}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \Phi.$$

I u mnoštvu drugih geometrijskih tijela i likova prisutan je zlatni rez. Neke od njih su i spomenuti u odjeljku o arhitekturi, kao na primjer zlatni trokut u egipatskoj arhitekturi ili zlatni pravokutnik u grčkom Partenonu.

Literatura

[1] I. TANACKOV, J. TEPIĆ, M. KOSTELAC, The golden ratio in probabilistic and artificial inteligence, Technical Gazette 18, 4(2011), 641-647

[2] S. VAJDA Fibonacci and Lucas numbers, and golden section, Ellis Horwood Limited, Chichester, England, 1989.

[3] S. ZLATIĆ, Zlatni rez, Technical journal 7, 1(2013), 84-90