Beskonačni verižni razlomci

Vranić, Andrea

Undergraduate thesis / Završni rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:915060

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-26**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Computer Science

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Vranić

Beskonačni verižni razlomci

Završni rad

Osijek, 2020.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Andrea Vranić

Beskonačni verižni razlomci

Završni rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2020.

Sažetak

Ovaj završni rad bavit će se beskonačnim jednostavnim verižnim razlomcima. U prvom dijelu navedena su neka osnovna svojstva i definicije o verižnim razlomcima, te opisana je podjela na konačne i beskonačne verižne razlomke. U drugom dijelu razmatraju se beskonačni verižni razlomci, njihova svojstva, pitanje konvergencije i postupak računanja. Na kraju ćemo vidjeti neke zanimljivosti koje su vezane uz zapise beskonačnih verižnih razlomaka.

Ključne riječi: Verižni razlomci, beskonačni verižni razlomci, konvergencija

Abstract

This paper will deal with infinitely simple continuous fractions. The first part lists some basic properties and definitions of continuous fractions, and describes the division into finite and infinite continuous fractions. The second part discusses infinite continuous fractions, its properties, the convergence issue, and the calculating process. Finally, some interesting facts related to the records of infinite continued fractions will be seen.

Key words: Continuous fractions, infinite continued fractions, convergence

Sadržaj

1 Uvod

U samim početcima matematike razvija se pojam verižnih razlomaka. Iako su se mnogi matematičari bavili verižnim razlomcima, većina povjesničara smatra da najviše zasluga možemo pripisati Euklidu čiji algoritam danas upotrebljavamo prilikom raspisa racionalnog broja u verižni razlomak. U njegovom algoritmu dolazi do traženja najvećeg zajedničkog djelitelja dvaju prirodnih brojeva. Nešto kasnije su se verižni razlomci koristili za rješavanje nekih matematičkih problema, ali samo u konkretnim primjerima.
John Wallis je u 17. stoljeću započeo proučavanje i generalizaciju teorije verižnih razlomaka, te je nakon njega porastao interes za proučavanjem. Indijski matematičar Aryabhata je koritio verižne razlomke za rješavanje neodređenih linearnih jednadžbi.
U 19. stoljeću teorija verižnih razlomaka znatno je porasla te se to razdoblje smatra zlatnim dobom verižnih razlomaka. Ali tu nije kraj, njegova upotreba širi se i dalje te u 20.st. su matematičari koristili verižne razlomke u računu s različitim transcendentalnim funkcijama i numeričkoj aproksimaciji. Time nam verižni razlomak pokažuje da će uvijek biti oko nas.
Primjena verižnih razlomaka velika je, koristimo ih u računalnim algoritmima za racionalne aproksimacije realnih brojeva, kod rješavanja linearnih diofanskih jednadžbi, u kriptografiji itd.
Jedna od zanimljivih primjena verižnog razlomka je u računanju kalendarske godine. Trajanje jedne sunčane godine eksperimentalna je veličina, stoga nam nema smisla proučavati taj broj kao racionalan ili iracionalan. Taj broj ćemo zamijeniti s njegovom približnom vrijednosti

$$\alpha = 365 + \frac{5h \quad 48m \quad 46s}{1dan} = 365 + \frac{20926s}{86400s} = 365\frac{10463}{43200}$$

Kao što vidimo, broj α je racionalan pa je njegov razvoj u verižni razlomak konačan. Sada primijenimo Euklidov algoritam na brojeve 43200 i 10463 , te dobivamo

$$43200 = 10463 \cdot 4 + 1348$$

$$10463 = 1348 \cdot 7 + 1027$$

$$1348 = 1027 \cdot 1 + 321$$

$$1027 = 321 \cdot 3 + 64$$

$$321 = 64 \cdot 5 + 1$$

$$64 = 1 \cdot 64$$

Stoga je $\alpha = [365; 4, 7, 1, 3, 5, 64]$, te konvergente broja $\alpha - 365$ su

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{163}{673}, \frac{10463}{43200}.$$

Svaki od gore navedenih konvergenti nam daje jedno rješenje problema kalendara. Tako je primjerice kod prve konvergente prosječno trajanje godine $365\frac{1}{4}$ dana. To nam znači da je svaka četvrta godina prijestupna. Gledajući općenito nazivnik konvergenti nam daje duljinu ciklusa, a brojnik broj prijestupnih godina u svakom ciklusu. Vidimo da peta i šesta konvergenta daju nepraktično riješenje stoga općenito razmatramo kalendare koje nam daju prve četiri konvergente. Julijanski kalendar je upravo naša prva konvergenta, dok kod četvrte konvergente je najmanja pogreška kod računanja.

2 Verižni razlomci

Na početku ćemo navesti razliku između konačnih i beskonačnih verižnih razlomaka i neke osnovne činjenice za daljnje razumijevanje teksta.

2.1 Osnovni pojmovi

Definicija 2.1. *Neka su dani prirodni brojevi* $a_0, a_1, ..., a_n$. *Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}} \tag{1}$$

nazivamo konačni verižni razlomak. Izraz (1) *kraće možemo zapisati kao* $[a_0; a_1, a_2, ..., a_n]$.

Definicija 2.2. *Neka je zadan beskonačni niz prirodnih brojeva* $(a_i)_{i \geqslant 0}$. *Izraz oblika*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}} \tag{2}$$

nazivamo beskonačni verižni razlomak. Izraz (2) *kraće možemo zapisati* $[a_0; a_1, a_2, ...]$.

Navest ćemo neke primjere verižnih razlomaka.

Primjer 2.1. *Primjer konačnog verižnog razlomka*

$$[2; 3, 5] = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{5}} = \frac{37}{16}$$

.

Primjer 2.2. *Primjer beskonačnog verižnog razlomka* $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, ...]$
tj.

$$1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Napomena 2.1. *Brojevi* a_i, $i = 0, ..., n$ *nazivaju se parcijalni kvocijenti verižnog razlomka. Ako je* a_0 *cijeli, te* a_i, $i = 1, ..., n$ *prirodni brojevi, kažemo da je verižni razlomak jednostavan.*

2.2 Konačni verižni razlomci

Svaki racionalni broj $x = \frac{p}{q}, q \neq 0$ može se zapisati u obliku

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}}$$

To se zove razvoj broja x u verižni razlomak. Vrijedi i obrat, tj. sređivanjem konačnog verižnog razlomka dobije se racionalan broj. U nastavku slijedi i dokaz te tvrdnje.

Teorem 2.1. *Svaki konačni jednostavan verižni razlomak može se prikazati kao racionalan broj. Obrat, svaki racionalan broj može se prikazati kao konačan jednostavan verižni razlomak.*

Dokaz. Matematičkom indukcijom ćemo dokazati prvu tvrdnju po duljini verižnog razlomka. Primijetimo da vrijedi $[a_0] = a_0$.
Baza indukcije za n=1:

$$[a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0a_1 + 1}{a_1} \ .$$

Zbog $a_0 \in \mathbb{Z}$ i $a_1 \in \mathbb{N}$ vrijedi da je $\frac{a_0a_1+1}{a_1} \in \mathbb{Q}$. Time smo pokazali bazu indukcije.

Sada pretpostavimo da je $[a_1; a_2, ..., a_n] \in \mathbb{Q}$, za $n > 1$ imamo

$$[a_0; a_1, a_2, ..., a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, ..., a_n]}$$

Zbog pretpostavke da je $[a_1; a_2, ..., a_n] \in \mathbb{Q}$ pišemo

$$[a_0; a_1, ...a_n] = a_0 + \frac{1}{\frac{p}{q}}$$

gdje nam je $\frac{p}{q}$ racionalan broj. Sređivanjem desne strane jednadžbe dobijemo $\frac{a_0p+q}{p} \in \mathbb{Q}$ te smo time našu tvrdnju dokazali, tj. $[a_0; a_1, ...a_n]$ je racionalan broj.
Pokažimo sada obrat.
Za početak ćemo pretpostaviti da je $\frac{a}{b}$ racionalan broj, za $b > 0$. Trebamo pokazati da $\frac{a}{b}$ možemo zapisati kao konačan verižni razlomak matematičkom indukcijom po b.
Baza indukcije za $b = 1$, slijedi

$$\frac{a}{b} = a = [a]$$

Pretpostavit ćemo da svaki racionalan broj koji ima nazivnik manji od b možemo zapisati kao konačni jednostavni verižni razlomak; pri tome koristeći teorem o djeljivosti s ostatkom pišemo: $a = ba_0 + r$, gdje su a_0 i $r \in \mathbb{Z}$ i $0 \leq r < b$. Podijelimo li jednakost s b dobijemo,

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{r}{b}$$

Ukoliko nam je $r = 0$ vrijedi da je $\frac{a}{b} = a_0 = [a_0]$ te naša tvrdnja vrijedi.
Ukoliko je $r \neq 0$, onda imamo

$$\frac{a}{b} = a_0 + \frac{1}{\frac{b}{r}}$$

Sada iskoristimo pretpostavku indukcije za $\frac{b}{r} = [a_1; a_2, ..., a_n]$ gdje su $a_1, a_2, ..., a_n$ neki prirodni brojevi. Kako nam je $\frac{b}{r} > 1$ te a_1 pozitivan broj, slijedi:

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, ..., a_n]$$

te je s time obrat dokazan. $\square$

U izrazu $\frac{a}{b} = [a_0; a_1, ..., a_n]$ iz gore navedenog dokaza možemo posljednji parcijalni koeficijent a_n preoblikovati tako da nam broj članova bude paran ili neparan. Za $a_n > 1$ možemo pisati

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$$

te nam sada naš kraći zapis konačnog verižnog razlomka izgleda ovako

$$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

Sada nam slijedi teorem koji nam to i dokazuje.

Teorem 2.2. *Svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$ može biti izražen kao jednostavni konačni verižni razlomak u kojem posljednji član možemo preoblikovati tako da broj članova razvoja bude paran ili neparan.*

Pokažimo to sada i primjerom.

Primjer 2.3.

$$\frac{19}{6} = 3 + \frac{1}{6} = 3 + \frac{1}{5 + \frac{1}{1}}$$

tj. $\frac{19}{6} = [3; 6] = [3; 5, 1]$

Definicija 2.3. *Neka je x realan broj. Najveći cijeli broj koji nije veći od x označavamo sa $\lfloor x \rfloor$ i zovemo najveći cijeli broj od x ili "stopa od x".*

Dalje u tekstu ćemo reći nešto više o konvergenciji verižnih razlomaka. Pogledajmo sljedeći primjer:
Zapis broja $\frac{93}{29}$ u verižni razlomak izgleda ovako:

$$\frac{93}{29} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}},$$

što se označava s $\frac{93}{29} = [3; 4, 1, 5]$. Sada promotrimo sljedeći postupak:

$$c_0 = \frac{p_0}{q_0} = [3] = 3$$

$$c_1 = \frac{p_1}{q_1} = [3;4] = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

$$c_2 = \frac{p_2}{q_2} = [3;4,1] = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1}} = \frac{16}{5}$$

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = [3;4,1,5] = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{5}}} = \frac{93}{29}\ .$$

Brojevi c_0, c_1, c_2, c_3 su konvergencije od broja $\frac{93}{29}$, stoga nam slijedi definicija konvergencije.

Definicija 2.4. *Neka je* $x = [a_0; a_1, ..., a_n]$*. Svaki racionalni broj* $c_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, ..., a_k]$ *za* $k \leq n$ *zovemo* k*-ta konvergencija od* x*.*

Teorem 2.3. *Brojnici* p_k *i nazivnici* q_k*,* k*-te konvergencije* c_k *verižnog razlomka* $[a_0; a_1, ..., a_n]$ *zadovoljavaju rekurzivne relacije*

$$\begin{aligned} p_k &= a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad p_0 = a_0, \qquad p_1 = a_1 a_0 + 1 \\ q_k &= a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \qquad q_0 = 1, \qquad q_1 = a_1 \end{aligned}$$

za $k \in \{2, 3, ..., n\}$*.*

3 Beskonačni verižni razlomci

Kao što smo u gornjem tekstu naveli primjer (2.2) beskonačnog verižnog razlomka, to nas navodi na pretpostavku da oni predstavljaju skupinu iracionalnih brojeva. Pokazat ćemo računski postupak dobivanja verižnog razlomka od nekog iracionalnog broja.

3.1 Računski postupak

Neka nam je dan iracionalan broj x, tj. neka je za $a_0, a_1 \in \mathbb{Z}$, $a_0 \leq x \leq a_0 + 1$.
Tada uzmemo za $a_0 = \lfloor x \rfloor$ i pišemo

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \qquad 0 < \frac{1}{x_1} < 1 \tag{3}$$

Kako je $\frac{1}{x_1} < 1$, to je $x_1 > 1$, sada uzmemom za $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$, te nam vrijedi

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad 0 < \frac{1}{x_2} < 1 \tag{4}$$

analogno kao u prethodnom slučaju zbog $\frac{1}{x_2} < 1$, $x_2 > 1$ imamo $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$, te vrijedi

$$x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \qquad 0 < \frac{1}{x_3} < 1 \tag{5}$$

$$\vdots$$

$$x_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{x_k}, \qquad 0 < \frac{1}{x_k} < 1 \tag{6}$$

gdje nam je $a_0, a_1, ..., a_{k-1}, ... \in \mathbb{Z}$ i $x, x_0, x_1, ..., x_k, ... \in \mathbb{I}$.
Sljedeći postupak nam je uvrštavanje izraza (4) u (3) , (5) u (4) itd. Nakon ponavljanja tog postupka k puta dobivamo jedostavan beskonačni verižni razlomak

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{x_2}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{x_3}}} = ... ,$$

a kraći zapis je $x = [a_0; a_1, ...a_{k-1}, x_k]$.

3.2 Konvergencija i bitna svojstva

Da bi mogli proučavati konvergenciju beskonačnih verižnih razlomaka, morali bi uzeti konačan broj članova razlomka , $[a_0; a_1, ..., a_k]$. Tako dobiveni izraz nazivamo k-ta konvergencija verižnog razlomka. Kod njega ćemo konvergente $c_k = \frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, ..., a_k]$ računati koristeći rekurzivne formule

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \qquad p_0 = a_0, \quad p_1 = a_1 a_0 + 1$$

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, \qquad q_0 = 1, \quad q_1 = a_1$$

za neki $k \in \{2, 3, ..., n\}$.
Dogovoreno uzimamo $p_{-2} = 0$ i $p_{-1} = 1$, te $q_{-2} = 1$ i $q_{-1} = 0$. Također nam vrijedi i sljedeća relacija

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k+1}, \qquad k \geq -1 \ .$$

Propozicija 1. *Neka je* $[a_0; a_1, a_2, ...]$ *beskonačni verižni razomak. Tada nam je*

a) $c_k - c_{k-1} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}}$

b) $c_k - c_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k q_{k-2}}$.

Dokaz. Gornje formule a) i b) dokazujemo raspisivanjem konvergenti pomoću navedenih rekurzija.

a)

$$c_k - c_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)^{k+1}}{q_k q_{k-1}}$$

b)

$$c_k - c_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k q_{k-2} - p_{k-2} q_k}{q_k q_{k-2}} =$$

$$= \frac{(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) q_{k-2} - p_{k-2}(a_k q_{k-1} + q_{k-2})}{q_k q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_k p_{k-1} q_{k-2} + p_{k-2} q_{k-2} - a_k q_{k-1} p_{k-2} - p_{k-2} q_{k-2}}{q_k q_{k-2}}$$

$$= \frac{a_k (p_{k-1} q_{k-2} - q_{k-1} p_{k-2})}{q_k q_{k-2}} = \frac{a_k (-1)^k}{q_k q_{k-2}} \ .$$

Time smo time dokazali našu propoziciju.

□

Teorem 3.1. *Neka je* a_0 *cijeli broj i* $(a_i)_{i\geq 1}$ *niz prirodnih brojeva. Tada niz* (c_n)*, gdje je*

$$c_n = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] \ ,$$

konvergira.

Dokaz. Teorem se dokazuje koristeći Cauchyev niz, jer znamo da svaki Cauchyev niz u $\mathbb{R}$ konvergira (vidi [6]). □

Nadalje beskonačni verižni razlomak možemo definirati na drugačiji način. Pogledajmo definiciju koja slijedi.

Definicija 3.1. *Neka je* $(a_i)_{i\geq 0}$ *niz cijelih brojeva gdje su* a_i *pozitivni za* $i \geq 1$*. Tada beskonačni verižni razlomak* $[a_0; a_1, a_2, ...]$ *definiramo pomoću limesa, tj., kao*

$$\lim_{n\to\infty} [a_0; a_1, ..., a_n] \ .$$

Brojeve a_i *nazivamo parcijalnim kvocijentima, dok* n*-tu konvergenciju verižnog razlomka* $[a_0; a_1, ...]$ *definiramo kao* $c_n = [a_0; a_1, ..., a_n]$.

Sada promotrimo razvoj beskonačnog verižnog razlomka kod kojeg nam dolazi do uzastupnog ponavljanja određenog broja ili brojeva, kao npr.

$$\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, ...] = [1; \overline{2}]$$

ili u ovom primjeru gdje nam se ponavlja više brojeva

$$\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...] = [1; \overline{12}]$$

Takve verižne razlomke nazivamo beskonačni periodični verižni razlomci, koje definiramo ovako.

Definicija 3.2. *Za beskonačni verižni razlomak* $x = [a_0; a_1, ...]$ *kažemo da je periodičan ako postoji* $s \in \mathbb{N}$ *i* $N \in \mathbb{Z}$ *takvi da je* $a_k = a_{k+s}$*, za* $\forall k \geq N$*. Najmanji takav* s *zovemo duljina perioda verižnog razlomka, te možemo pisati*

$$x = [a_0; a_1, ..., a_{N-1}, \overline{a_N, ..., a_{N+s-1}}]$$

gdje

$$\overline{a_N, ..., a_{N+s-1}}$$

znači da se ti brojevi $a_N, ..., a_{N+s-1}$ *ponavljaju.*
U slučaju kada nam je $N = 0$*, tj. nema dijela koji se ne ponavlja, reći ćemo da je verižni razlomak čisto periodičan, te možemo pisati*

$$x = [\overline{a_0; a_1, ..., a_{s-1}}] \ .$$

3.3 Primjeri

Propozicija 2. *Jednostavan beskonačni verižni razlomak predstavlja iracionalan broj.*

Dokaz. Propoziciju ćemo dokazati koristeći kontrapoziciju, tj. pretpostavimo da beskonačni verižni razlomak predstavlja racionalan broj:

$\frac{a}{b} = [a_0; a_1, a_2, ...] \qquad nzv(a, b) = 1 \qquad a, b \in \mathbf{Z}$.

Neka nam je n-ta konvergencija verižnog razlomka $c_n = \frac{p_n}{q_n}$, sada uzmimo toliko velik n tako da nam vrijedi $|b| < q_n$.
Kako je $\frac{a}{b} \neq \frac{p_n}{q_n}$, slijedi nam da je $aq_n - bp_n \neq 0$.
Primijenimo korolar, koji govori da kod zapisa realnog broja x u jednostavan verižni razlomak sa c_n n-tom konvergencijom i sa brojnicima p_n i nazivnicima q_n vrijedi $|x - c_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$.

Koristeći taj korolar pišemo

$$|\frac{a}{b} - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} \ .$$

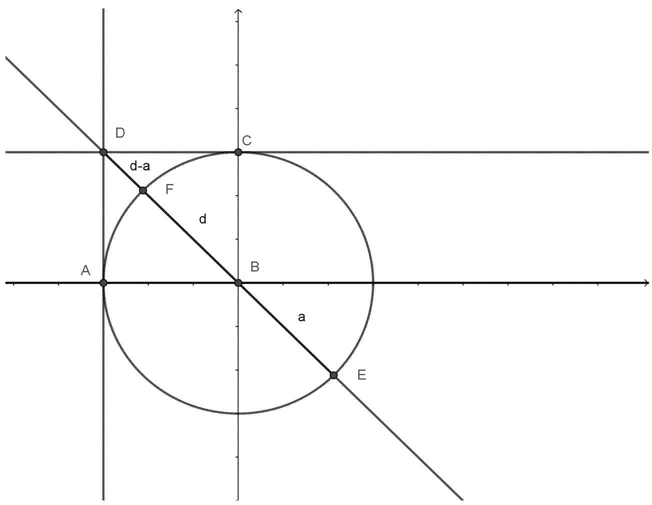
Kako je $|b| < q_n < q_{n+1}$ zaključujemo da vrijedi

$$0 < |aq_n - bp_n| < \frac{|b|}{q_{n+1}} < 1 \ .$$

Kako je $aq_n - bp_n$ cijeli broj, dolazi do kontradikcije. Zaključujemo da beskonačni verižni razlomak predstavlja iracionalan broj □

Primjer 3.1. *Pokažimo da je* $\sqrt{2}$ *iracionalan broj.*

Dokaz: Našu tvrdnju ćemo dokazati tako što ćemo već poznatu tvrdnju o omjeru duljina dijagonale i stranice kvadrata prikazati kao beskonačan verižni razlomak.



Slika 3.1

Iz sličnosti $\triangle DEC$ i $\triangle DCF$ iz Slike 3.1 znamo da vrijedi $DF \cdot DE = DC^2$
odnosno $(d-a)(d+a) = a^2$. Ako traženi omjer označimo $d : a$ s α, dobivamo $(\alpha-1)(\alpha+1) = 1$

Odatle slijedi

$$\alpha = 1 + \frac{1}{1+\alpha}\ .$$

Uvrstimo li s desne strane umjesto α izraz kojemu je on jednak, slijedi nam

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\alpha}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1+\alpha}}} = ...$$

Postupak se nastavlja u beskonačno. Omjeru $\alpha = \sqrt{2}$ odgovara beskonačni verižni razlomak, dakle nije racionalan broj. Tvrdnja je dokazana. $\square$

Primjer 3.2. *Izvedimo formulu za* $\sqrt{3}$.

Broj $\sqrt{3}$ možemo zapisati:

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3}-1) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}+1} = 1 + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}-1}{2}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\sqrt{3}}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+(\sqrt{3}-1)}} = ...$$

Dalje se sitacija periodički ponavlja, zato je $\sqrt{3} = [1; 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, ...] = [1; \overline{1, 2}]$
Period se sastoji od dvije znamenke 1 i 2.
Nadalje, može se pokazati da svaki broj oblika $\sqrt{n}$ koji nije prirodan broj, gdje n $\in \mathbb{N}$, može se pokazati u obliku beskonačnog periodičnog verižnog razlomka.

4 Neke zanimljivosti beskonačnih verižnih razlomaka

Dužina duljine x podijeljena je u zlatnom rezu na dijelove a i $x-a$, ako nam vrijedi $x : a = a : (x-a)$. Za omjer $\beta = x : a$ naš problem zlatnog reza dužine dovodi do jednadžbe

$$\beta^2 - \beta - 1 = 0 \ .$$

Pozitivno rješenje te jednadžbe je $\beta = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Gornju jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\beta^2 = \beta + 1 \quad tj. \quad \beta = 1 + \frac{1}{\beta} \ .$$

Ako izraz β uvrstimo s desne strane imamo $\beta = 1 + \frac{1}{\beta} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\beta}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\beta}}} = ...$

Vidimo da je prikaz zlatnog reza preko verižnog razlomka $\beta = [1; 1, 1, 1, 1, ...]$.
Njezini konvergenti su $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, . . . , gdje se jasno vidi da su brojnici i nazivnici redom Fibonaccijevi brojevi tj. 1,1,2,3,5,. . .

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \beta \ .$$

Među najpoznatijim iracionalnim brojevima, Ludolphovom broju π i Eulerovom broju e primjećujemo jednu zanimljivost prilikom njihovih zapisa. Prvo pogledajmo zapis broja e

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, ...]$$

koji se nastavlja prema pravilu koji je očit, tj. dvije jedinice te višekratnik broja 2 itd. Također je zanimljiv i ovaj zapis

$$\sqrt{e} = [1; 1, 1, 1, 5, 1, 1, 9, 1, 1, 13, 1, 1, 17, 1, ...]$$

gdje isto imamo pravilo po kojemu se niz nastavlja.
Pogledavši radove L. Eulera vidimo kako se on bavio teorijom verižnih razlomaka, te nailazimo na spise gdje dokazuje da se svaki racionalni broj može zapisati u obliku konačnog verižnog razlomka. Također je on autor i ovih jednakosti

$$e - 1 = 1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + ...}}}} \qquad \frac{1}{e+2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \cfrac{4}{5 + ...}}}}$$

Gore navedeni primjeri nisu standardni verižni razlomci. Kao što smo vidjeli kod Eulerovog broja e imamo pravilo po kojem se niz brojeva nastavlja, dok kod broja π nije baš tako. Pogledajmo kako je broj π Lambert prikazao

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 14, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 1, 84, 2, 1, 1, 15, 3, 13, 1,$$

$$4, 2, 6, 6, 99, 1, 2, 2, 3, 5, 1, 1, 6, 8, 1, 7, 1, 2, 3, 7, 1, 2, 1, 1, 12, 1, 1, 3, 1, 1, ...]$$

Par godina prije prikaza Lambertovog zapisa, pokazano je kako se $\mathrm{tg}(x)$ može razviti u verižni razlomak

$$\mathrm{tg}(x) = \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{\ddots}}}}$$

U slučaju kada je x racionalan broj, desna strana jednadžbe je iracionalan broj. Znamo da je $\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$, pa zaključujemo da je $\frac{\pi}{4}$ iracionalan broj. Time je zapravo i dokazano po prvi put da je broj π iracionalan broj.

Literatura

[1] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[2] V. Petričević, *Periodski verižni razlomci, Magistarski rad*, PMF, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009., https://web.math.pmf.unizg.hr/ vpetrice/radovi/Magistarski.pdf

[3] C.D.Olds, *Continued Fractions*, The Mathematical Association of America, Washington 1963.

[4] I.Tržić, *Verižni razlomci*, Diplomski rad, Osijek, 2011.,http://www.mathos.unios.hr/ mdjumic/uploads/diplomski/TR

[5] A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*,Skripta, PMF Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 2006, https://web.math.pmf.unizg.hr/ duje/utb/utblink.pdf

[6] M.Erickson, A.Vazzana, *Introduction to Number Theory*, Chapman and Hall, New York, 2008.