

Motivacija u nastavi matematike

Petković, Maja

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:531337>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-23**



mathos

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Maja Petković
Motivacija u nastavi matematike

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku

Maja Petković
Motivacija u nastavi matematike

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2021.

Sadržaj

| | |
|---|-----------|
| Uvod | 1 |
| 1 Motivacija | 2 |
| 1.1 Motivacijski ciklus | 2 |
| 1.2 Vrste motivacije | 4 |
| 1.2.1 Analiza učeničke ankete | 5 |
| 2 Motivacija u nastavi matematike | 11 |
| 2.1 Uloga nastavnika | 11 |
| 2.2 Principi motivacije za učenje matematike | 14 |
| 3 Načini motiviranja učenika u nastavi matematike | 17 |
| 3.1 Učenje kroz igru | 17 |
| 3.2 Povezivanje matematike sa stvarnim životom | 19 |
| 3.3 Povezivanje matematike sa drugim nastavnim predmetima | 20 |
| 3.4 Postavljanje izazova | 23 |
| 3.5 Pripovijedanje o zanimljivostima koje su povezane s matematikom | 25 |
| 3.6 Upotreba tehnologije | 30 |
| 3.7 Personaliziranje i pravo na izbor načina rada | 32 |
| 3.8 Razgovor u nastavi matematike | 32 |
| 4 Demotivacija | 33 |
| Zaključak | 35 |
| Literatura | 36 |
| Sažetak | 39 |
| Summary | 40 |
| Životopis | 41 |

Uvod

Riječ motivacija dolazi od latinske riječi *movere* što znači *kretati se*. To možemo shvatiti kao fizičku ili psihičku kretanju. Stoga se u psihologiji motivacija često definira kao stanje ili proces koji nas pokreće, održava i usmjerava na fizičke ili psihičke aktivnosti kako bi postigli određeni cilj ([16, str. 115]).

Motivacija je povezana sa uspjehom, pa tako možemo zaključiti da je ona često bitnija za školsko postignuće od samih sposobnosti učenika. Albert Einstein (1879. - 1955.) je jednom rekao za sebe: "Ja nisam nešto posebno talentiran. Samo sam strastveno radoznao." Nastavnici imaju bitan zadatak - potaknuti radoznalost kod učenika, a temelj za radoznalost je upravo motivacija. U ovom radu ćemo se baviti motivacijom učenika u nastavi matematike jer učenici često ne vide njezinu ljepotu, smatraju ju dosadnom i nepotrebnom za budućnost što rezultira "neuspješnim" nastavnim satima, neusvojenim znanjem i lošim ocjenama.

Prvo poglavlje će nas uvesti u pojam motivacije. Prisjetit ćemo se što čini motivacijski ciklus i koje vrste motivacije postoje. U sklopu toga analizirat ćemo i rezultate ankete kojoj je cilj bio utvrditi kojom vrstom motivacije je većina učenika motivirana za matematiku. U drugom poglavlju ćemo reći nešto više o ulozi nastavnika i na koje načine mogu povećati motivaciju učenika. Navest ćemo te objasniti i šest principa motivacije za učenje matematike. U trećem poglavlju ćemo se upoznati sa načinima motiviranja učenika u nastavi matematike uz navedene primjere zadataka, igara, matematičkih zgoda i slično. U posljednjem poglavlju ćemo se dotaknuti i pojma demotivacije te objasniti kako možemo prepoznati demotiviranog učenika. Osim toga, navest ćemo i primjere demotiva s kojima se učenici mogu susresti u školi.

1 Motivacija

U ovom poglavlju ćemo se upoznati sa motivacijom općenito kroz osnovne podjele, pojmove i njihova objašnjenja preuzeta iz [16, str. 115-120].

1.1 Motivacijski ciklus

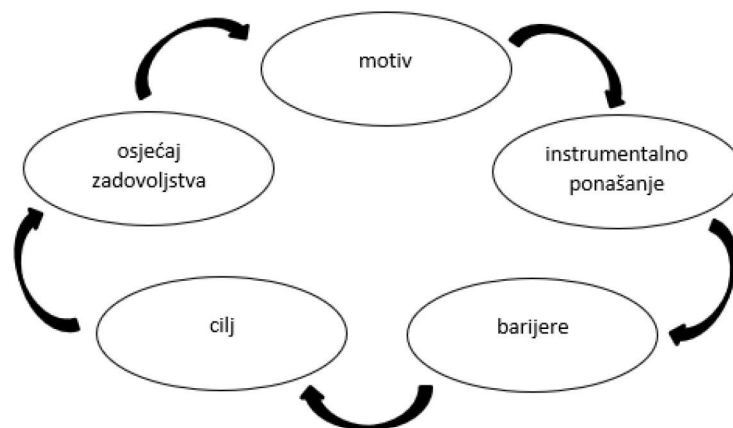
Motivacijsko ponašanje čovjeka je moguće opisati pomoću tzv. motivacijskog ciklusa. Možemo reći da na početku svakog motivacijskog ponašanja stoji motiv. Motiv je pobuda koja čovjekovo djelovanje usmjerava prema određenom cilju, održava to djelovanje i određuje njegov intenzitet. Motivi se dijele na:

1. Prirodne (primarne) motive - motivi koji počivaju na fiziološkim potrebama svakog živog organizma kao što su izbjegavanje gladi, žeđi, potreba za spavanjem i kretanjem. Oni su urođeni i nije ih potrebno učiti.
2. Stečene (sekundarne) motive - motivi koji počivaju na psihičkim potrebama za čije je ostvarenje potreban kontakt s ljudima, npr. poštovanje i pripadanje. Oni se uče tijekom života i ovise o društvu i kulturi u kojoj pojedinac živi.

Nakon toga slijedi ponašanje koje je "instrument" za postizanje cilja, tj. instrumentalno ponašanje. Pri tome često moramo savladati određene barijere. One se dijele na:

1. Prirodne (fizikalne), npr. nepostojanje mosta za prijelaz preko rijeke.
Te barijere nije teško otkloniti. One su opipljive te će uvijek postojati način za njihovo savladavanje, a jedini trošak je vrijeme.
2. Društvene (socijalne), npr. razni zakoni ili društveni običaji.
Njih je teže svladati jer su ukorijenjene u našem društvu. One mogu usporavati razvoj npr. manjinskih grupa ili pojedinaca, ali nas u isto vrijeme i štite od raznih štetnih i negativnih aktivnosti. Njihovo savladavanje može ostaviti materijalne posljedice ukoliko dođe do kršenja zakona, ali i nematerijalne posljedice kao što je odbacivanje i neprihvatanje od strane društva.
3. Osobne, npr. nisko samopouzdanje ili neodlučnost.
Te barijere je najteže svladati jer se nalaze u nama kao dio naše osobnosti i karaktera ili kao rezultat konflikta, tj. stanja u kojem se nalazimo kad moramo birati između dva ili više ciljeva pri čemu dolazi do sukoba motiva. Osobne barijere nas najčešće sputavaju u osobnom razvoju, karijeri ili međuljudskim odnosima. Kako bismo ih svladali, potrebna nam je jaka psihička volja i strpljenje. Kod težih situacija bi bilo poželjno zatražiti i pomoć stručnjaka.

Ukoliko dođemo do cilja, razvija se osjećaj zadovoljstva, a kasnije i potreba za novim, često "višim" ciljem nakon čega se ovaj ciklus ponavlja.



Slika 1: Motivacijski ciklus.

Ukoliko ne uspijemo savladati barijere i ne dođemo do cilja, javlja se osjećaj frustracije kojeg karakterizira osjećaj nemira, nezadovoljstva i napetosti. Dugotrajna frustracija može izazvati simptome stresa koji može ostaviti vrlo negativne posljedice na naše zdravlje. Zbog toga se aktiviraju obrambeni mehanizmi kao što su:

- Negiranje - odbijanje suočavanja sa izvorom frustracije, npr. kada bolesna osoba vjeruje da se liječnik zabunio ili da su joj stigli krivi nalazi.
- Racionalizacija - razuman način objašnjavanja ili opravdavanja novonastalih problema ili okolnosti, npr. kada student pad na ispitu pripisuje nepravednosti nastavnika, a ne svojem neznanju.
- Fiksacija - ponavljanje načina reagiranja koji ne dovodi do rješenja, npr. konstanto javljanje nekoj osobi putem sms poruka iako ih ona ignorira.
- Projekcija - preslikavanje vlastitih negativnih osjećaja, misli ili mana na drugu osobu, npr. kada lijena osoba, gledajući neku TV-emisiju, tvrdi da su osobe u njoj lijene i nemarne, a istodobno odbija da je ona sama takva.
- Pomaknuta agresija - iskaljivanje ljutnje i bijesa na osobu koja nije izvor frustracije, npr. ljutnja na ukućane iako je izvor frustracije šef na poslu.
- Supstitucija - zamjena ciljeva na način da novoodabrani cilj barem djelomično zadovoljava prvotnu potrebu, npr. kada učenik koji nije uspio upisati prirodoslovnu-matematičku gimnaziju upiše opću gimnaziju, čime je zadovoljio odabir srednje škole.
- Kompenzacija - fokusiranje na pozitivne stvari ili stvari u kojima smo dobri kako bismo nadomjestili nedostatke koji nam onemogućuju postizanje cilja, npr. kada učenik neuspjeh u školi nadomjesti uspjehom u nekom sportu.

Iako su navedeni obrambeni mehanizmi dobri za nas u trenucima frustracije, loši su za naše međuljudske odnose. Ljudski je burno reagirati na neuspjeh, no problem nastaje ukoliko se obrambeni mehanizmi krenu aktivirati prilikom i najmanjeg podbačaja. Važno je barem pokušati ostati smiren i utvrditi gdje je pošlo po zlu kako bismo izbjegli pogreške u budućosti. Jer kako bi američki poduzetnik Malcolm Forbes (1919.-1990.) rekao: "Neuspjeh je uspjeh ako učimo iz njega."

1.2 Vrste motivacije

Ponašanja ljudi su regulirana unutarnjim i vanjskim motivima. Stoga postoje intrinzična (unutarnja) motivacija i ekstrinzična (vanjska) motivacija. Njihova objašnjenja su preuzeta iz [15].

Intrinzična motivacija

"Intrinzična motivacija definira se kao obavljanje neke aktivnosti zbog zadovoljstva, a ne zbog neke posljedice. Kada je osoba iznutra motivirana da djeluje iz zabave ili izazova, radije nego zbog vanjskih poteškoća, pritisaka ili nagrada" ([15]).

Ona je vrlo važna za naš fizički, kognitivni i socijalni razvoj jer iz vlastitog interesa rastemo u znanju i vještinama. Kako nismo svi intrinzično motivirani za istu aktivnost, možemo reći da intrinzična motivacija nije nešto što se nalazi u nama, sama po sebi, nego postoji u odnosu pojedinca i aktivnosti. Primjer aktivnosti, za koju je pojedinac intrinzično motiviran, je bilo koji hobi koji ga ispunjava, npr. slikanje, sviranje, vrtlarjenje... Bitno je naglasiti da tada te aktivnosti obavljamo kvalitetnije i da se prilikom njihovog obavljanja osjećamo sretno i zadovoljno. Zanimljiv je utjecaj izvanjskih nagrada na intrinzičnu motivaciju. Pokazalo se da ju takve nagrade smanjuju, dok je jedina ispravna nagrada poticanje pozitivnih emocija. To možemo činiti npr. pohvalom.

Ekstrinzična motivacija

Iako je intrinzična motivacija poželjnija, češće smo u životu ekstrinzično motivirani. Ekstrinzična motivacija se odnosi na izvršavanje aktivnosti kako bi se postigao neki odvojivi ishod. Ona je na taj način suprotna intrinzičnoj motivaciji koja se odnosi na obavljanje aktivnosti samo radi uživanja u samoj aktivnosti, a ne radi postizanja nekog cilja. Novac, ocjene u školi, trofeji, pohvale i priznanja okoline su tipični motivi koji nas motiviraju izvana. No, osim zbog nagrada, ekstrinzično motivirani možemo biti i prilikom izbjegavanja neke kazne.

Postojanje intrinzične i ekstrinzične motivacije vidimo kod svih živih bića, a ne samo kod ljudi. Ako pogledamo mladunče bilo koje životinje, ono je razigrano i znatiželjno bez nekog vanjskog podražaja i čini razne stvari iz vlastitog zadovoljstva i spremnosti na učenje i istraživanje. A ako se sjetimo dresiranja, vidimo da čine razne stvari i zbog nagrade ili kazne. Takvo ponašanje možemo primijetiti i kod ljudi. Neke aktivnosti su nam zanimljive i to činimo bez napora, dok za neke moramo pronaći izvanjski motiv, što ne mora biti nužno loše. Npr. neki učenici uče samo zbog dobre ocjene ili kako bi izbjegli neku vrstu kazne, ali će na kraju ipak doći do istog cilja kao i učenici koji su bili intrinzično motivirani - naučenog gradiva. No sjetimo li se izreke da je putovanje do cilja bitnije nego cilj sam, možemo zaključiti da je bolje biti intrinzično motiviran i do cilja dolaziti sa zadovoljstvom, a ne sa naporom.

1.2.1 Analiza učeničke ankete

Cilj ove ankete je bio utvrditi je li više učenika motivirano intrinzično ili ekstrinzično za matematiku.

Anketno istraživanje je provedeno u studenom 2020. godine u Osnovnoj školi Matija Antun Reljković Cerna uz pomoć online anketnog upitnika. U istraživanju je sudjelovalo 136 učenika. Provedeno je anonimno, a ispitanici su bili upoznati sa svrhom istraživanja.

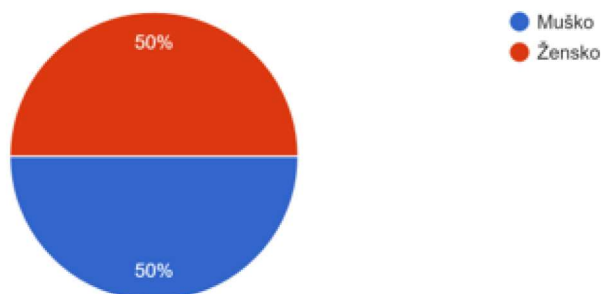
Anketnim upitnikom su se prikupljali opći podatci (spol), podatci o obrazovanju (razred i zaključna ocjena iz matematike prethodne akademske godine) i stavovi o matematici. Stavovi o matematici su prikupljeni primjenom Likertove ljestvice¹ sa pet stupnjeva (1=uoopće se ne slažem, 5=potpuno se slažem), a razmatrale su se sljedeće tvrdnje:

1. Dok rješavam zadatke iz matematike osjećam se sretno i ispunjeno.
2. Usvojeno znanje iz matematike mi je bitnije od zaključne ocjene.
3. Ne očekujem materijalnu nagradu od roditelja ili nastavnika nakon uspješno riješenog zadatka/položenog testa iz matematike.
4. Istražujem razne teme i rješavam zadatke iz matematike u slobodno vrijeme.
5. Vježbam matematiku iz vlastitog zadovoljstva, a ne zbog izbjegavanja kazne.
6. Matematiku smatram vrijednom, zanimljivom, uočavam njezinu svrhu i povezanost sa stvarnim životom.

¹Ljestvica nazvana po pronalazaču, Rensis Likertu (1903.-1981.) kojom se mjeri stupanj i intezitet stavova, mišljenja i percepcija; najčešće sa ocjenama od 1 do 5, gdje 1 označava najniži, a 5 najviši stupanj slaganja. Široko se primjenjuje u istraživanjima jer pruža priliku za fleksibilan odgovor sa sposobnošću određivanja frekvencije, korelacije i ostalih oblika kvantitativnih analiza ([2, str. 325]).

Spol

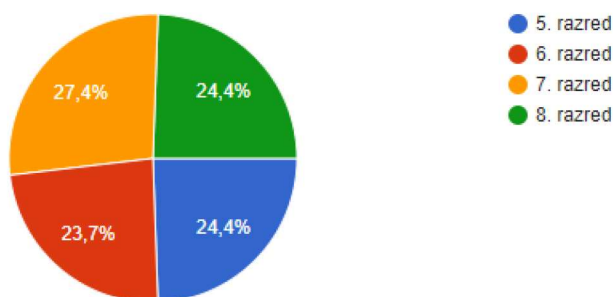
Od ukupnog broja ispitanika 50% ispitanih bile su osobe ženskog spola, a 50% osobe muškog spola. Ovim omjerom postignut je omjer 50:50 uključenosti oba spola u provedbi istraživanja čime je poštovana rodna jednakost ispitanika.



Slika 2: Grafički prikaz strukture ispitanika po spolu.

Razred

Od 136 ispitanika, 33 učenika (24.4%) su 5. razred, 32 učenika (23.7%) su 6. razred, 37 učenika (27.4%) su 7. razred i 33 učenika (24.4%) su 8. razred. Ovom strukturom ispitanika postignuta je podjednaka zastupljenost učenika svih razreda predmetne nastave.

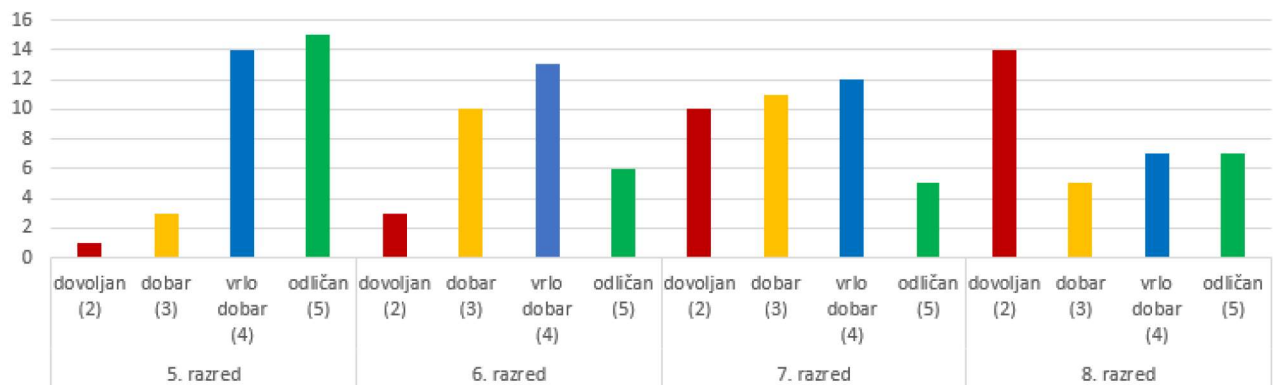


Slika 3: Grafički prikaz strukture ispitanika po razredu koji pohađaju.

Zaključna ocjena iz matematike prethodne akademske godine

Od 136 ispitanika, nijedan učenik nije imao zaključnu ocjenu nedovoljan iz matematike prethodne akademske godine, 28 učenika (20.6%) imalo je ocjenu dovoljan, 29 učenika (21.3%) imalo je ocjenu dobar, 46 učenika (33.8%) imalo je ocjenu vrlo dobar i 33 učenika (24.3%) imalo je ocjenu odličan.

Promatrajući zaključne ocjene iz matematike prethodne akademske godine pojedinih razreda (Slika 4), možemo primijetiti da su učenici petih razreda u četvrtom razredu imali najviše ocjene, što može ukazivati na to da je razredna nastava manje zahtjevana od predmetne nastave ili da su učenici u razrednoj nastavi bili više motivirani za matematiku. Osim toga, možemo primijetiti i da se broj vrlo dobrih i odličnih učenika smanjuje sa pohađanjem sve višeg razreda, što također može upućivati na smanjenje motiviranosti.



Slika 4: Grafički prikaz strukture ispitanika pojedinih razreda po zaključnoj ocjeni iz matematike prethodne akademske godine.

Stavovi o matematici

Od ukupnog broja učenika, 27.2% njih se uglavnom slaže sa tvrdnjom o osjećaju sreće i ispunjenosti prilikom rješavanja zadataka. Po pitanju tih osjećaja nesigurno je 23.5%, 22.1% njih se uopće ne slaže sa tom tvrdnjom, 18.4% njih se u potpunosti slaže, a 8.8% učenika se uglavnom ne slaže.

Učenici su tvrdnji *Dok rješavam zadatke iz matematike osjećam se sretno i ispunjeno* dali prosječnu ocjenu 3.1.

Možemo zaključiti da se učenici uglavnom osjećaju sretno i ispunjeno prilikom rješavanja zadataka iz matematike.

Čak 39% učenika se slaže, a 27.2% učenika se u potpunosti slaže sa tvrdnjom da je usvojeno znanje iz matematike bitnije od zaključne ocjene. Po tom pitanju neodlučno je 22.1% učenika, a isti postotak učenika, 5.9% se uglavnom i u potpunosti ne slaže s navedenom tvrdnjom.

Učenici su tvrdnji *Usvojeno znanje iz matematike mi je bitnije od zaključne ocjene* dali prosječnu ocjenu 3.8.

Vidimo da je većini učenika usvojeno znanje iz matematike bitnije od zaključne ocjene.

Velik broj učenika, njih 39% ne očekuje materijalnu nagradu od roditelja ili nastavnika nakon uspješno riješenog zadatka ili položenog testa iz matematike. Sa spomenutom tvrdnjom o neočekivanju nagrade se uopće ne slaže 21.3% učenika, 19.9% se uglavnom slaže, dok se 11% njih uglavnom ne slaže. Po pitanju navedene tvrdnje nesigurno je 8.8% učenika.

Učenici su tvrdnji *Ne očekujem materijalnu nagradu od roditelja ili nastavnika nakon uspješno riješenog zadatka/položenog testa iz matematike* dali prosječnu ocjenu 3.4.

Primjećujemo da učenici uglavnom ne očekuju materijalnu nagradu od roditelja ili nastavnika nakon uspješno riješenog zadatka ili položenog testa iz matematike.

Najviše učenika, njih 33.1% se uglavnom ne slaže, a 27.9% učenika se uopće ne slaže sa tvrdnjom o istraživanju i rješavanju matematike u slobodno vrijeme. Nadalje, 16.2% učenika uglavnom koristi slobodno vrijeme za istraživanje i vježbanje matematike, 15.4% učenika je neodlučno, dok se samo 7.4% njih u potpunosti odlučuje na ispunjenje slobodnog vremena matematikom.

Učenici su tvrdnji *Istražujem razne teme i rješavam zadatke iz matematike u slobodno vrijeme* dali prosječnu ocjenu 2.4.

Možemo zaključiti da učenici uglavnom ne istražuju i ne rješavaju zadatke iz matematike u slobodno vrijeme.

Što se tiče tvrdnje o vježbanju matematike iz vlastitog zadovoljstva, a ne zbog izbjegavanja kazne, 25% učenika se u potpunosti slaže s njom, 22.8% njih se uglavnom slaže, dok se 22.1% učenika uopće ne slaže. Po tom pitanju, 19.9% učenika je neodlučno, a 10.3% njih uglavnom ne vježba matematiku iz vlastitog zadovoljstva, nego zbog izbjegavanja neke vrste kazne.

Učenici su tvrdnji *Vježbam matematiku iz vlastitog zadovoljstva, a ne zbog izbjegavanja kazne* dali prosječnu ocjenu 3.2.

Primjećujemo da učenici uglavnom vježbaju matematiku iz vlastitog zadovoljstva, a ne zbog izbjegavanja kazne.

Nadalje, 33.1% učenika uglavnom smatra, a 22.1% njih u potpunosti smatra matematiku vrijednom, zanimljivom i uočava njezinu svrhu i povezanost sa stvarnim životom. No po tom pitanju, 25% učenika je ipak neodlučno, dok se jednak postotak učenika, njih 9.6% uglavnom i uopće ne slaže sa tvrdnjom o vrijednosti matematike.

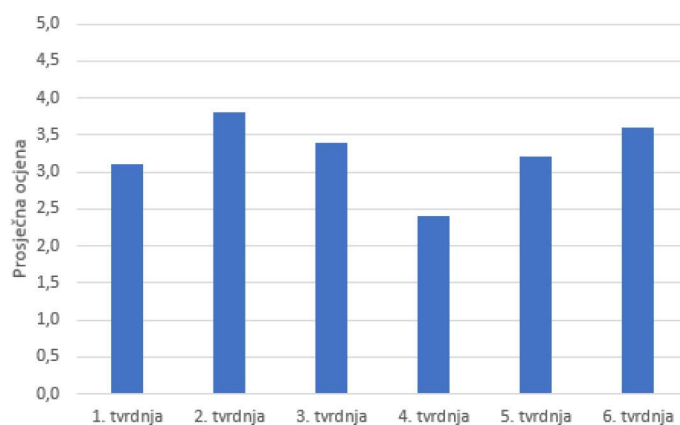
Učenici su tvrdnji *Matematiku smatram vrijednom, zanimljivom, uočavam njezinu svrhu i povezanost sa stvarnim životom* dali prosječnu ocjenu 3.2.

Možemo primijetiti da učenici matematiku uglavnom smatraju vrijednom, zanimljivom i da uočavaju njezinu svrhu i povezanost sa stvarnim životom.

| Tvrdnja | Uopće se ne slažem | Uglavnom se ne slažem | Niti se slažem, niti se ne slažem | Uglavnom se slažem | Potpuno se slažem | Prosječna ocjena |
|---|--------------------|-----------------------|-----------------------------------|--------------------|-------------------|------------------|
| Dok rješavam zadatke iz matematike osjećam se sretno i ispunjeno. | 22.1 | 8.8 | 23.5 | 27.2 | 18.4 | 3.1 |
| Usvojeno znanje iz matematike mi je bitnije od zaključne ocjene. | 5.9 | 5.9 | 22.1 | 39 | 27.2 | 3.8 |
| Ne očekujem materijalnu nagradu od roditelja ili nastavnika nakon uspješno riješenog zadatka/položenog testa iz matematike. | 21.3 | 11 | 8.8 | 19.9 | 39 | 3.4 |
| Istražujem razne teme i rješavam zadatke iz matematike u slobodno vrijeme. | 27.9 | 33.1 | 15.4 | 16.2 | 7.4 | 2.4 |
| Vježbam matematiku iz vlastitog zadovoljstva, a ne zbog izbjegavanja kazne. | 22.1 | 10.3 | 19.9 | 22.8 | 25 | 3.2 |
| Matematiku smatram vrijednom, zanimljivom i uočavam njezinu svrhu i povezanost sa stvarnim životom. | 9.6 | 9.6 | 25.7 | 22.1 | 33.1 | 3.6 |

Tablica 1: Postotci odgovora i prosječne ocjene koje odražavaju različite stupnjeve slaganja s tvrdnjama o matematici za cijeli uzorak ispitanika.

Na temelju postotka odgovora i prosječnih ocjena dobivenih na pojedinim tvrdnjama (Tablica 1), pri čemu veći stupanj slaganja predstavlja intrinzičnu motivaciju, vidljivo je da su učenici uglavnom intrinzično motivirani za matematiku, ali da ipak u svoje slobodno vrijeme ne istražuju nove teme i ne rješavaju zadatke iz matematike.

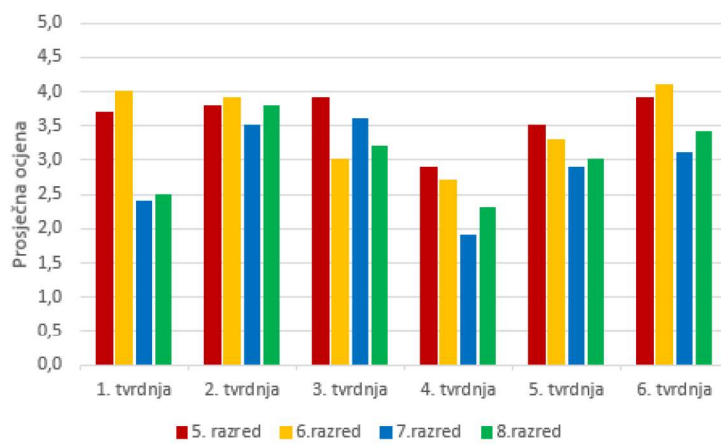


Slika 5: Grafički prikaz prosječnih ocjena pojedinih tvrdnji s obzirom na cijeli uzorak ispitanika.

Promotrimo li prosječne ocjene tvrdnji za pojedine razrede (Tablica 2), možemo uočiti da su one nešto više u nižim razredima što može upućivati na to da su niži razredi više intrinzično motivirani za matematiku od viših razreda.

| | 5. razred | 6. razred | 7. razred | 8.razred |
|------------|-----------|-----------|-----------|----------|
| 1. tvrdnja | 3.7 | 4.0 | 2.4 | 2.5 |
| 2. tvrdnja | 3.8 | 3.9 | 3.5 | 3.8 |
| 3. tvrdnja | 3.9 | 3.0 | 3.6 | 3.2 |
| 4. tvrdnja | 2.9 | 2.7 | 1.9 | 2.3 |
| 5. tvrdnja | 3.5 | 3.3 | 2.9 | 3.0 |
| 6. tvrdnja | 3.9 | 4.1 | 3.1 | 3.4 |

Tablica 2: Prosječne ocjene koje odražavaju različite stupnjeve slaganja s tvrdnjama o matematici s obzirom na pojedine razrede.



Slika 6: Grafički prikaz prosječnih ocjena tvrdnji s obzirom na pojedine razrede.

2 Motivacija u nastavi matematike

Mnogi učenici imaju poteškoća u učenju matematike. Neki učenici imaju nedostatke u znanju od prethodnih akademskih godina zbog kojih im je teško nastaviti pratiti novo gradivo, nekima je prenaporno kontinuirano raditi što zahtijeva puno vremena, truda i napora, ali najviše učenika jednostavno nije zainteresirano. Prema [4], interes se može razvijati posebnim sadržajima same matematike, ljepotom njezinih ideja, djelotvornošću njezinih metoda i njezinim dostignućima. Za određene matematičke sadržaje, potrebna je samo primjerena motivacija.

2.1 Uloga nastavnika

Često možemo čuti kako je neki učenik krenuo određenim putem zbog jednog od svojih nastavnika. Nastavnici mogu biti izvrstan izvor motivacije.

”Preduvjet za uspješan rad i dobru motivaciju je razvijanje pozitivne slike o učitelju (nastavniku) kao lučonoši znanja, dobrom i predanom predavaču, nadasve pravednom, koji je spreman na suradnju s učenicima i roditeljima, onog koji omogućava uspjeh, gradi toleranciju, osvješčuje emocije ponosa i samopoštovanja” ([27]).

Dakle, nastavnici bi, kao ključ motivacije, trebali krenuti od sebe. Dobrog nastavnika karakterizira uspješno prenošenje znanja, ali ponajviše predanost tom zanimanju. Osim toga nastavnici bi trebali:

- pohvaliti učenike za svaki uspjeh,
- komunicirati s njima i zanimati se za njih kao pojedince,
- ne odustajati od njih zbog malih očekivanja,
- stvarati toplu i ugodnu atmosferu u učionici,
- pružati povratne informacije nakon svake aktivnosti.

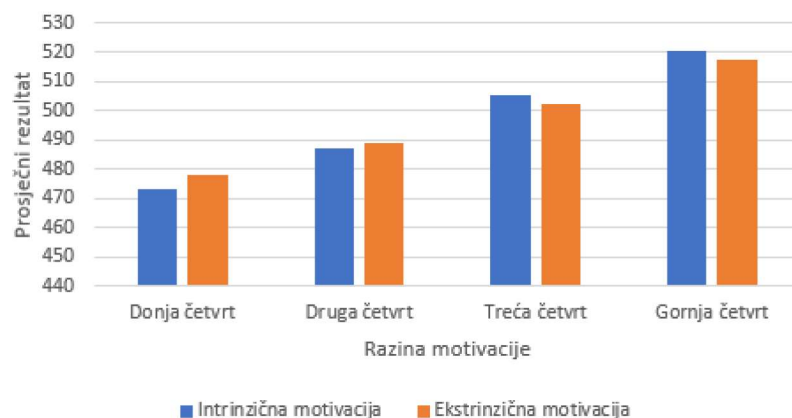
Domaće zadaće

Nastavnici uz pomoć domaćih zadaći pokušavaju primorati učenike na vježbanje matematike, ali prisilom rijetko postizemo dobre dugoročne rezultate. Učenici se često osjećaju prisiljenima na domaću zadaću dok im nastavnici, u žurbi na kraju sata, bez objašnjenja i uputa za rješavanje, zadaju redne brojeve zadataka iz udžbenika. Nastavnikovim osvrtom na izbor zadataka, čitanjem tekstova od strane učenika, objašnjenjima, uputama za rješavanje težih zadataka, pregledom rješenja zadataka na sljedećem nastavnom satu i isticanjem uspješijih i originalnijih rješenja, učenicima opravdava važnost domaće zadaće za njihovo obrazovanje

i odgoj. Osim zadavanja točno određenih zadataka za domaću zadaću, postoje metode koje pružaju učenicima slobodu izbora. One mogu uključivati izbor zadataka kojima težina postupno raste i navođenje onih koje su učenici obvezni rješavati, a koje ne. Postoji i metoda u kojoj učenici mogu birati koje će od predloženih zadataka rješavati, ali i metoda u kojoj učenici mogu samostalno odabrati nekoliko zadataka. No možda je najzanimljivija čak ona u kojoj učenici mogu sami sastaviti neke zadatke, sa čime u potpunosti postaju aktivni sudionici u kreiranju domaćih zadaća ([4]).

Ocjene

Učenici mogu osjećati pritisak u školi, ali je zabrinjavajuće ako osjećaju pritisak i od svojih roditelja koji bi im trebali biti oaza mira. Roditelji se, u brizi za budućnost svoje djece, prvenstveno znaju fokusirati na njihove ocjene i često očekivati previše. Nastavnici tako mogu vidjeti da učenici uglavnom sve i rade ponajviše zbog ocjena. U praksi se pokazalo da učenici imaju nešto niže ocjene ukoliko nisu i intrinzično motivirani za matematiku. 2012. godine, analizirajući rezultate PISA ² istraživanja, istraživači su došli do zaključka da su intrinzično motivirani učenici ostvarili bolje rezultate ([26]).



Slika 7: Grafički prikaz povezanosti motivacije i matematičkih postignuća.

Slika je preuzeta iz [26].

Kako bismo izbjegli ocjene koje će se učenicima činiti nepravedne, nastavnici bi trebali svaku argumentirati. Poželjno bi bilo upitati i učenika što misli koliko je zaslužio i zašto, dopustiti razredu da prokomentira ocjenu svog kolege i dopustiti učeniku priliku za odgovaranje za veću ocjenu ukoliko smatra da zna za više nego što mu je nastavnik predložio. Tako će učenici biti svjesni na kojem dijelu gradiva još moraju poraditi, te će sa sigurnošću znati u kojem smjeru idu s matematikom.

²*Programme for International Student Assessment*; najveće obrazovno istraživanje na svijetu kojim se prikupljaju podatci o znanju i vještinama petnaestogodišnjih učenika.

Natjecanja

Uloga nastavnika je pripremiti učenike i za razna natjecanja iz matematike. Na natjecanjima uglavnom sudjeluju visoko motivirani učenici koji su jako dobri u matematici, ali postoje i natjecanja kao što je *Klokan bez granica* kojima je cilj približiti matematiku svim učenicima i tako ih motivirati da se bave matematikom i izvan redovitih školskih programa. Zadatci na takvim natjecanjima uglavnom nisu teški, ali nisu ni šablonski, već zahtijevaju povezivanje i snalažljivost. Zbog toga je bitno napomenuti da na takvim natjecanjima ne moraju sudjelovati samo odlični učenici, nego svi domišljati učenici i koji se tako smatraju.

Za usporedbu su u nastavku navedeni primjeri zadataka iz 2020. godine za 6. razred osnovne škole sa natjecanja *Klokan bez granica* i Školskog/gradskog natjecanja iz matematike.

Primjer 2.1. *Četiri košare sadrže redom 1, 4, 6 i 9 jabuka. Koliko najmanje jabuka treba premjestiti da bi u košarama bio isti broj jabuka?*

$$A) 3 \quad B) 4 \quad C) 5 \quad D) 6 \quad E) 7$$

Rješenje. U košarama ukupno ima $1 + 4 + 6 + 9 = 20$ jabuka. Budući da u svakoj košari moramo imati jednak broj jabuka, svaka košara treba sadržavati $20 : 4 = 5$ jabuka. To možemo postići premještanjem 4 jabuke iz četvrte u prvu košaru i 1 jabuke iz treće u drugu košaru. Dakle, potrebno je premjestiti najmanje 5 jabuka.

Primjer 2.2. *U dvije košare nalaze se jabuke. Kad bismo iz prve košare izvadili $\frac{5}{6}$, a iz druge $\frac{3}{4}$ broja jabuka u njima, u obje košare bi ostalo po 20 jabuka. Koliki je ukupan broj jabuka i koliko će ih ostati u obje košare zajedno ako iz prve izvadimo $\frac{2}{3}$ jabuka, a u drugoj ostavimo $\frac{3}{5}$ jabuka?*

Rješenje. Ako iz prve košare izvadimo $\frac{5}{6}$ broja jabuka, u njoj ostaje $\frac{1}{6}$ broja jabuka. Isto tako, ako iz druge košare izvadimo $\frac{3}{4}$ broja jabuka, u njoj ostaje $\frac{1}{4}$ broja jabuka. Znamo da je u objema košarama ostalo 20 jabuka.

Označimo s x početni broj jabuka u prvoj košari, a s y početni broj jabuka u drugoj košari.

$$x \cdot \frac{1}{6} = 20 \Rightarrow x = 120$$

$$y \cdot \frac{1}{4} = 20 \Rightarrow y = 80$$

U prvoj košari je bilo 120, a u drugoj košari 80 jabuka, tj. na početku je u obje košare zajedno bilo 200 jabuka.

Ako iz prve košare izvadimo $\frac{2}{3}$ broja jabuka, u njoj ostaje $\frac{1}{3}$ jabuka, tj. $\frac{1}{3} \cdot 120 = 40$. Ako u drugoj košari ostavimo $\frac{3}{5}$ broja jabuka, u njoj ostaje $\frac{2}{5} \cdot 80 = 48$ jabuka.

U obje košare zajedno će ostati 88 jabuka.

Mnogo ljudi ima natjecateljski duh. Naša usađena želja za pobjedom je često izvor naše motivacije. Zbog toga se pokazalo dobrim i u nastavi organizirati mala natjecanja jer će se učenici u želji za pobjedom zainteresirati za gradivo, te će ga tako lakše naučiti.

2.2 Principi motivacije za učenje matematike

Postoji šest bitnih principa koji su proizašli iz raznih istraživanja motivacije, samoregulacije, socijalnog ponašanja i učenja učenika, a kroz koje se provlače istaknute značajke motivacije za učenje matematike ([6, str. 8]).

U nastavku su navedeni principi i njihova objašnjenja preuzeta iz [6, str. 8-100].

1. Motivacija je naučena

Učenje možemo definirati kao promjenu u načinu razmišljanja, razumijevanja, rasuđivanja i rješavanja problema. Osim toga, učenjem razvijamo i naše interese i sklonosti. Sve nabrojano nam pomaže u predviđanju budućnosti. Ukoliko učenici za matematiku vežu pozitivna sjećanja i osjećaje, onda će i svoj budući angažman u matematici predviđati optimistično, s osjećajem užitka, te će tako biti i više motivirani za nju. Za razliku od nekih svakodnevnih aktivnosti, za matematiku su potrebna kontinuirana pozitivna iskustva tijekom dugog razdoblja za razvijanje produktivne motivacije, a potrebno je samo nekoliko negativnih iskustava da bi ju učenici počeli izbjegavati.

Što se tiče nagrada, ukoliko nastavnici uvide da učenici nisu intrinzično motivirani često će ih pokušati motivirati nekom nagradom u vidu ocjene ili slatkiša što će kod učenika povećati ekstrinzičnu motivaciju. Učenici tako mogu naučiti, tj. stvoriti naviku na nagrade što će rezultirati manjom vjerojatnošću da će se učenik u budućnosti dobrovoljno baviti matematikom u nedostatku značajne nagrade.

2. Motivacija je prilagodljiva

Pod ovim principom podrazumijevamo način obrade podataka koji nas usmjeravaju prema bavljenju nama korisnim aktivnostima ili barem kako bismo umanjili bilo kakvu psihičku štetu koju naš angažman može proizvesti. Motivacija pomaže pri predviđanju, iniciranju i reguliranju odgovarajuće vrste ponašanja u određenoj situaciji kako bismo osigurali neki uspjeh. Ona nam omogućuje i da tražimo pozitivne, a izbjegavamo negativne prilike, npr. ako je neki učenik vizualni tip osobe on će svoju motivaciju usmjeriti ka traženju rješenja pomoću skica, dok će izbjegavati postavljanje jednadžbi koje su za njega nešto negativno.

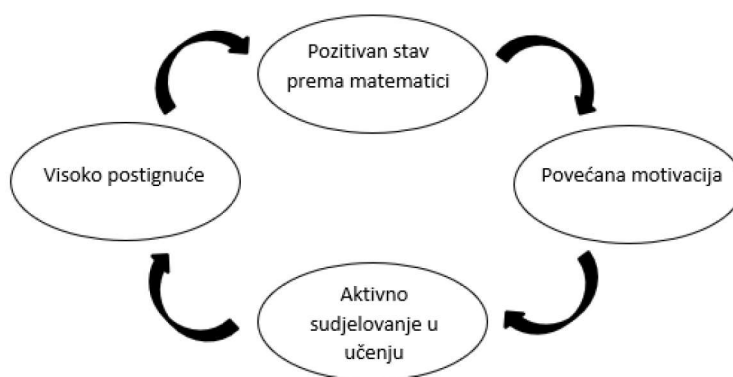
Budući da matematika i ostale znanosti ne bi trebale biti samo popis činjenica i pravila, nego bi učenici trebali znati primjenjivati i povezivati prošla znanja u pronalaženju rješenja, znanstvenici su razvili pojam *prilagodljivi stručnjak*. On se odnosi na osobe čije im znanje omogućuje da stvari vide na nove, kreativne načine i koje je primjenjivo na različitim domenama. Prilagodljivi stručnjaci su težnja svakog poslodavca jer ne rade samo ono za što

su osposobljeni, nego stvaraju i rješavaju probleme na originalan način. Upravo su to osobe koje doprinose raznim inovativnim otkrićima.

3. Motivacija stvara dugoročne stavove

Želja nastavnika je pripremiti učenike za budućnost. Nažalost, često se događa da učenici u školi zamrzu matematičku i da onda pokušavaju izbjeći fakultet koji ima matematičke kolegije, bez obzira što je on put do njihovog željenog zanimanja. Odabir životnih puteva pokazuje čovjekove ciljeve, vrijednosti, težnje i motive, odnosno odabir fakulteta ili karijere je usko povezan s motivacijom. Neki bitni aspekti motivacije koji utječu na ove izbore mogu uključivati interese, vrijednosti, ono što učenici očekuju i vjeruju o sebi i o matematici kao nastavnom predmetu, kako se učenici nose s izazovima i njihove potrebe za povezanošću s drugima. Osim toga, nastavnici matematike također imaju bitnu ulogu u navedenim izborima. Oni su ti koji mogu stvoriti dugoročni pozitivan stav prema matematici:

- pružanjem podrške i pozitivnim odnosom,
- naglašavanjem kompetencija za matematiku koje učenik posjeduje,
- pružanjem uvida u vrijednosti matematike.



Slika 8: Utjecaj pozitivnog stava u matematičkim postignućima.

Slika je preuzeta iz [23].

Vrlo je važno zaštititi učenikovo samopouzdanje jer je mišljenje učenika o vlastitim sposobnostima u određenom predmetu uglavnom trajno.

4. Motivacija je uočljiva u određenoj situaciji

Pod ovim principom podrazumijevamo kratkotrajni emocionalni nagon za pristupom ili izbjegavanjem određenog obilježja u određenoj okolnosti. Nastavnici mogu primijetiti da ponekad i učenici koji nisu baš motivirani za matematiku u određenom dijelu gradiva mogu biti zainteresirani, i obrnuto. Prema [6, str. 43] to nazivamo *situacijski interes*. Čimbenici

kao što su stupanj noviteta ili preklapanja sadržaja i individualnog interesa, životne teme i ljudske aktivnosti su neke od karakteristika zadataka koje pridonose situacijskom interesu. Zanimljivo je što dugoročne interese možemo koristiti za izgradnju situacijskog interesa za temu s kojom se još nismo susreli. Isto tako, razvijanjem situacijskog interesa, on može postati dugoročni, stabilni stav ili interes.

5. Motivacije je socijalna

Čovjek je društveno biće i bitan mu je osjećaj pripadnosti. Često možemo vidjeti kako se poistovjećujemo jedni s drugima, npr. ako su svi učenici opušteni prije ispita, opustit će se i učenik koji je bio pod velikim stresom.

Interakcijom s ostalim učenicima i učiteljem stvara se osjećaj pripadnosti razredu. Učenici koji su razvili taj osjećaj osjećat će se sigurnije, neće imati strah od neodobravanja, te će tako povećati svoj interes i postignuća.

Ponekad se u radu mogu primijetiti zanimljive socijalne potrebe kao što su potreba za pokazivanjem kompetencija drugima i traženje odobrenja, potreba za socijalnom brigom i potreba za stvaranjem zajedničkog značenja. Sve one su vrlo korisne u nastavi matematike. Pod socijalnom brigom podrazumijevamo pomoć učenicima koji imaju poteškoća u savladavanju određenog dijela gradiva. No korist je obostrana. Učenici koji pomažu razvijaju vještine matematičke komunikacije i rasuđivanja. Potrebom za stvaranjem zajedničkog značenja učenici pokušavaju razumjeti druge učenike, pronaći grešku u svojem ili tuđem razumijevanju ili nadopuniti vlastito mišljenje. Dakle, nastavnici mogu iskoristiti ljudsku potrebu za druženjem u učenju matematike. Grupni rad je najbolji primjer u kojem možemo vidjeti da je motivacija socijalna. Ako učenici ravnomjerno rasporede zadatke, u zadovoljavanju prethodno navedenih socijalnih potreba, surađivat će s drugima i time povećati motivaciju za rad.

6. Uspjeh je važan

Uspjeh je bitan, ali je bitno i kako se nosimo sa neuspjehom. Neki učenici svoje pogreške pripisuju svojim osobnim manama, nastavnicima ili nekoj trenutnoj situaciji kao što je npr. vrućina ili hladnoća u učionici, ali ništa neće naučiti iz njih. Suprotno, neki učenici svoje pogreške pripisuju nedostatku truda. Oni uglavnom pogreške shvaćaju kao izazov, te će biti još motiviraniji za učenje kako bi taj izazov savladali.

Uspjeh u matematici ovisi o:

- vjerovanju u svoje sposobnosti,
- uloženom trudu,
- pripisivanju pogrešaka nedovoljnom trudu i učenju iz njih.

Često je dobro da nastavnici od učenika očekuju više jer onda i kada naprave manje postižu veći uspjeh nego što bi postigli da su nastavnici odmah imali niska očekivanja.

3 Načini motiviranja učenika u nastavi matematike

Već smo zaključili da bi glavna zadaća svakog nastavnika trebala biti motivacija učenika. Nastavnici ne bi trebali biti samo oni koji će učenicima prenijeti znanje, nego i oni koji će im usaditi znatiželju prema nekoj temi kako bi oni sami dodatno istraživali. Glavno pitanje je kako motivirati učenike. Neki od načina su:

- učenje kroz igru,
- povezivanje matematike sa stvarnim životom,
- povezivanje matematike sa drugim nastavnim predmetima,
- postavljanje izazova,
- pripovijedanje o zanimljivostima koje su povezane s matematikom,
- upotreba tehnologije,
- personaliziranje i pravo na izbor načina rada,
- razgovaranje o matematici.

Djeca često znaju doći u stanje u kojem kao da vrijeme prestane postojati, dok se duboko fokusiraju na ono što rade. Idealno bi bilo kada bi učenici na nastavi uspjeli doći u takvo stanje. Kako bi nastavnici to postigli potrebno je učenicima dati dovoljno slobode u aktivnostima, ali ih istovremeno i usmjeravati kako bi one bile produktivne. Jedna od najboljih aktivnosti u kojima učenici mogu izgubiti pojam o vremenu je igra.

3.1 Učenje kroz igru

Sva živa bića na početku svog života uče, otkrivaju sebe i svoju okolinu kroz igru. Albert Einstein je jednom rekao: "Igra je je najviši oblik istraživanja." Razlog tome je što je igra izvor ideja koje će se razvijati i na kraju koristiti u stvarnom životu.

Nastavnicima je cilj pronaći ili osmisliti matematičke igre koje su u isto vrijeme zanimljive i poučne. One se trebaju oslanjati na prošla učenička iskustva i znanje i trebaju imati točno određena pravila i cilj.

Igru je poželjno uključiti u svaki nastavni predmet, posebno u matematiku jer većina učenika ima negativan stav prema njoj. Igra je prva koja će pomoći učenicima da uvide njezinu zanimljivu stranu. Prema [33], igra u nastavi matematike je važna jer:

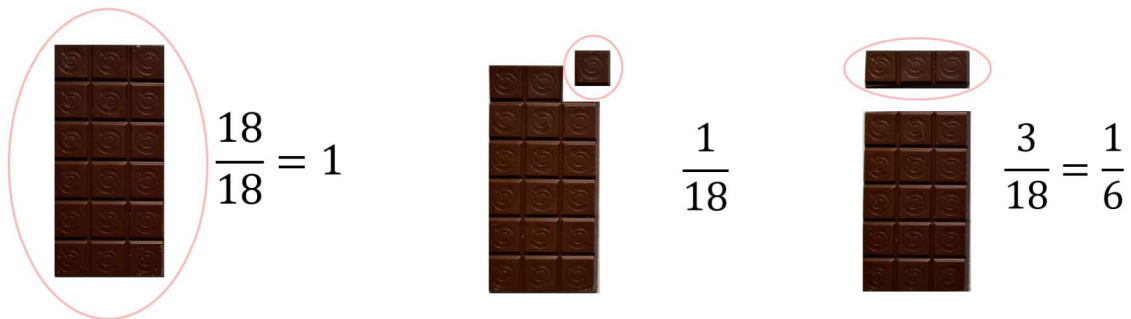
- Igranje igara potiče strateško matematičko razmišljanje dok učenici pronalaze različite strategije za rješavanje problema i produbljuju razumijevanje brojeva.
- Igre pružaju mogućnosti za vježbanje. Nastavnici tada mogu promatrati ili ocjenjivati učenike i raditi s pojedincima ili malim skupinama učenika.

- Igre mogu potencijalno omogućiti učenicima da razviju poznavanje brojevnog sustava i uključe se u računsku praksu, gradeći dublje razumijevanje operacija.

U nastavku je navedeno nekoliko primjera učenja kroz igru.

Razlomci

Razlomci su većini učenika problem jer ne razumiju što predstavljaju brojnik i nazivnik. Zato je najbolje učenike s razlomcima upoznati kroz igru. Možemo se poslužiti čokoladom, prebrojati kockice, a zatim ju rezati na razne načine i svaki taj odrezani dio zapisati pomoću razlomka (Slika 9). U brojnik bi zapisivali broj kockica u odrezanom dijelu, a u nazivnik broj kockica cijele čokolade. Na kraju ju učenicima možemo podijeliti te im zadati da zapišu u obliku razlomka, koji su dio čokolade pojeli.



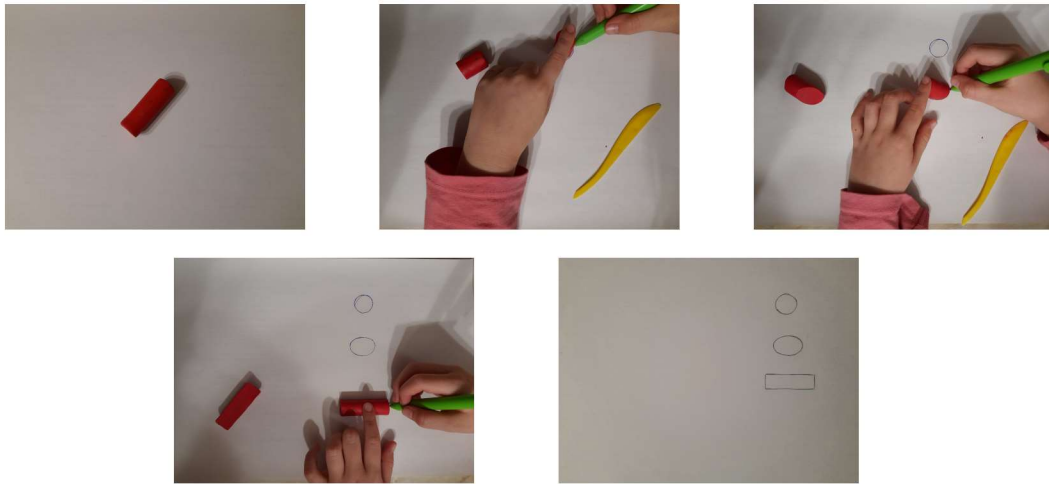
Slika 9: Učenje razlomaka uz pomoć čokolade.

Vjerojatnost

Oko 70% Zemlje je prekriveno vodom. Učenici ovaj postotak mogu provjeriti tako što će se dobacivati globusom. Kada učenik uhvati globus, učitelj zabilježi dodiruje li desni palac učenika vodu ili kopno. Nakon što se svi učenici izredaju više puta, učitelj prebroji koliko su puta učenici dodirivali vodu i koliko puta su dodirivali vodu ili kopno. Količnik broja dodirivanja vode i broja dodirivanja vode ili kopna bi trebao približno davati traženi postotak. Učenici nakon toga mogu otkriti koji postotak Zemlje zauzima neki od kontinenata. ([19]).

Presjek geometrijskih tijela i ravnine

Učenici ponekad imaju problema sa vizualizacijom presjeka geometrijskih tijela i ravnine. Taj problem možemo riješiti s modelima geometrijskih tijela. Jednostavan način da učenici nauče presjeke geometrijskih tijela i ravnine je da od plastelina naprave nekoliko geometrijskih tijela, prerežu ih na različite načine te svaki prerezani dio opcrtaju po njegovom rubu na papir (Slika 10).



Slika 10: Presjek uspravnog valjka i ravnine.

3.2 Povezivanje matematike sa stvarnim životom

Svi znamo izreku da je matematika svuda oko nas, no učenici se svejedno često pitaju kako li će im određena nastavna tema iz matematike pomoći u životu. To je jedan od glavnih razloga zbog kojeg matematiku smatraju nezanimljivom. Svaki nastavnik bi, zbog toga, trebao u svoju pripremu za nastavni sat uvrstiti što više zadataka iz stvarnoga života.

U nastavku su navedeni primjeri zadataka iz svakodnevnog života, preuzeti iz školskih udžbenika [10, str. 51] i [11, str. 125, 207]. Zadatci nisu komplicirani, svode se na uvrštavanje zadanih vrijednosti u formule, ali pomoću njih učenici mogu odmah vidjeti primjenu određenog dijela gradiva u životu.

Primjer 3.1. *Dvorište oblika pravokutnika duljine 56 m i širine 37 m treba ograditi žicom. Koliko je metara žice potrebno za ogradu?*

Rješenje.

$$o = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (56 \text{ m} + 37 \text{ m}) = 2 \cdot 93 \text{ m} = 186 \text{ m}$$

Za ogradu je potrebno 186 m žice.

Primjer 3.2. *Telefonski račun jedne obitelji iznosi 225 kuna bez PDV-a. Koliki je njihov telefonski račun s PDV-om? Naputak: PDV - porez na dodatnu vrijednost u Republici Hrvatskoj iznosi 25%.*

Rješenje.

$$25\% \text{ od } 225 \text{ kn} = \frac{25}{100} \cdot 225 \text{ kn} = \frac{225}{4} \text{ kn} = 56.25 \text{ kn}$$
$$225 \text{ kn} + 56.25 \text{ kn} = 281.25 \text{ kn}$$

Telefonski račun s PDV-om iznosi 281.25 kn.

Primjer 3.3. *Krov crkvenog tornja ima oblik četiriju jednakokranih trokuta osnovice duljine 2.8 m i visine duljine 5.6 m. Izračunaj površinu krova. Ako je cijena kvadratnog metra crijeva 82 kn i 50 lp, koliko treba platiti crijeva za cijeli krov?*

Rješenje.

$$P_1 = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{2.8 \text{ m} \cdot 5.6 \text{ m}}{2} = \frac{15.68 \text{ m}^2}{2} = 7.84 \text{ m}^2$$
$$P = 4 \cdot P_1 = 4 \cdot 7.84 \text{ m}^2 = 31.36 \text{ m}^2$$

Površina krova iznosi 31.36 m².

$$82.50 \text{ kn} \cdot 31.36 \text{ m}^2 = 2\,587.2 \text{ kn}$$

Crijeva za cijeli krov treba platiti 2 587 kn i 20 lp.

3.3 Povezivanje matematike sa drugim nastavnim predmetima

Matematika nam je bitna i u akademskom životu. Mnogo nastavnih predmeta uključuje neki dio matematike.

Nastavni predmeti koji su najviše povezani sa matematikom su zasigurno kemija i fizika. Mnogi čak kažu da je matematika pismo, tj. jezik fizike. "Složenija matematika, poput geometrije i algebre može pomoći učenicima u rješavanju kemijskih problema, razumijevanju kretanja planeta i analiziranju znanstvenih studija" ([24]). Mnogim učenicima su to najteži nastavni predmeti jer u njima trebaju znati primijeniti matematičko gradivo koje im i samo predstavlja problem.

U nastavku su navedeni jedni od mnogobrojnih primjera primjene matematike u fizici i kemiji preuzeti iz [7, str. 34] i [12, str.29].

Primjer 3.4. *Vlak koji ima brzinu 20 m/s počinje se usporavati akceleracijom -0.4 m/s². Kada će se vlak zaustaviti i koliki će put prevaliti za to vrijeme?*

Rješenje.

$$v^2 = 2as \Rightarrow s = \frac{v^2}{2a} = \frac{(20 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 0.4 \text{ m/s}^2} = 500 \text{ m}$$

$$v = at \Rightarrow t = \frac{v}{a} = \frac{20 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m/s}^2} = 50 \text{ s}$$

Vlak će se zaustaviti za 50 s i za to vrijeme će prevaliti 500 m.

Primjer 3.5. *Izračunajte prosječnu relativnu atomsku masu³ klora, ako je poznato da u prirodi dolazi kao smjesa dvaju izotopa⁴: ${}^{35}_{17}\text{Cl}$ s brojnim udjelom 75.77% i ${}^{37}_{17}\text{Cl}$ s brojnim udjelom 24.23%.*

Rješenje.

$$\begin{aligned} A_r(\text{Cl}) &= x({}^{35}\text{Cl}) \cdot A_r({}^{35}\text{Cl}) + x({}^{37}\text{Cl}) \cdot A_r({}^{37}\text{Cl}) \\ &= 0.7577 \cdot 35 + 0.2423 \cdot 37 \\ &= 35.45 \end{aligned}$$

Prosječna relativna atomska masa klora je 35.45.

Znamo da vježbanjem matematike razvijamo logičko mišljenje i zaključivanje te učimo rješavati probleme. U sve popularnijem nastavnim predmetu, informatici, to je vrlo bitno prilikom pronalazaženja algoritama i pisanja računalnih programa.

Na nastavi hrvatskog jezika učenici obrađuju razna književna djela. Jedna od grana književnosti je proza za koju vežemo poetski metar ili određeni ritam. Oni su upravo proizvod matematičkih izračuna. Dakle, učenici uz pomoć matematike mogu bolje razumjeti poeziju. Osim toga, "razvijanje logičkog mišljenja pomoću matematike, pomaže učenicima da pišu logičnije i smislenije tekstove" ([24]).

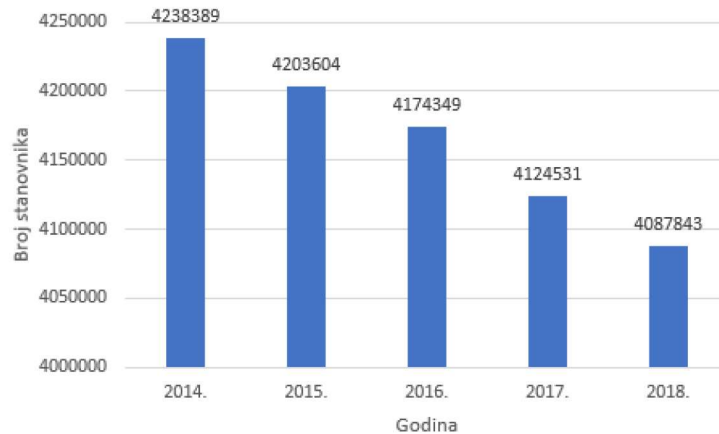
Matematika je prisutna i u društvenim predmetima kao što su povijest i geografija. Učenici se tamo susreću sa raznim dijagramima iz kojih je potrebno iščitati podatke i sa njima raditi. Brojevni pravac, kojeg učenici uče na nastavi matematike, uvelike može pomoći u razumijevanju tijeka događanja u povijesti, tj. lente vremena, dok povezanost matematike i geografije možemo vidjeti u omjerima na zemljopisnim kartama, u korelaciji koordinatnog sustavu i zemljopisne mreže, demografskim promjenama i slično.

U nastavku je naveden primjer dijagrama iz kojeg učenici mogu očitati vrijednosti podataka i riješiti dani zadatak. Vrijednosti podataka su preuzete iz [28].

Primjer 3.6. *Pomoću sljedećeg dijagrama koji prikazuje procjenu ukupnog stanovništva Republike Hrvatske od 2014. do 2018. godine, odredi za koliko se posto broj stanovnika Hrvatske smanjio od 2014. do 2018. godine.*

³Relativna atomska masa (A_r) jest broj koji pokazuje koliko je puta prosječna masa atoma nekoga kemijskog elementa veća od atomske jedinice mase, tj. $\frac{1}{12}$ mase atoma ugljikova izotopa ${}^{12}\text{C}$.

⁴Izotopi su atomi istog kemijskog elementa koji se međusobno razlikuju po broju neutrona u atomskoj jezgri, pa prema tome i po masenom broju, odnosno masi.



Slika 11: Grafički prikaz procjene broja stanovnika Republike Hrvatske od 2014. do 2018. godine.

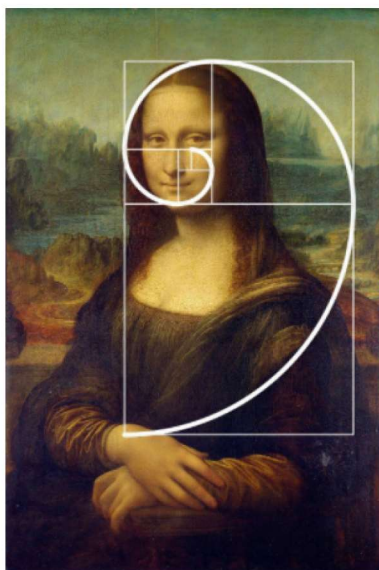
Rješenje.

$$\begin{aligned}
 4\,087\,843 &= 4\,238\,389 - \frac{p}{100} \cdot 4\,238\,389 \\
 4\,087\,843 - 4\,238\,389 &= -\frac{p}{100} \cdot 4\,238\,389 \\
 -150\,546 &= -\frac{p}{100} \cdot 4\,238\,389 \quad / \cdot (-1) \\
 150\,546 &= \frac{p}{100} \cdot 4\,238\,389 \quad / : 4\,238\,389 \\
 0.0355 &= \frac{p}{100} \quad / \cdot 100 \\
 p &= 3.55
 \end{aligned}$$

Broj stanovnika u Republici Hrvatskoj od 2014. do 2018. godine se smanjio za približno 3.55%.

Zanimljivo je što je matematika prisutna čak i u umjetničkim predmetima kao što su likovna i glazbena kultura. Primjenjujući zlatni rez⁵ u slikarstvu možemo stvoriti impresivne slike (Slika 12) jer je on smatran idealnom proporcijom, savršenom za ljudsko oko. Što se tiče glazbe, ritam ovisi o notama i mjeri, a mjera nije ništa drugo nego razlomak. Osim toga, prema [3], zlatni rez se upotrebljava i u izradi glazbenih instrumenata. Najpoznatiji tvorac violina je svakako bio Antonio Stradivari (1644.-1737.) koji je pri izradi koristio omjer zlatnog reza, zbog čega su njegove violine bile vrlo tražene te i danas izazivaju divljenje.

⁵Za dužinu koja je podijeljena na dva dijela tako da se duži dio dužine odnosi prema kraćem kao cijela duljina dužine prema dužem dijelu, kažemo da je podijeljena u omjeru zlatnog reza. Taj omjer je jednak vrijednosti iracionalnog broja $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Slika 12: *Mona Lisa*, umjetničko djelo Leonarda da Vincia.
Slika je preuzeta iz [31].

3.4 Postavljanje izazova

Prema [5], matematički izazov je zanimljiva i motivirajuća matematička poteškoća koju osoba može savladati. Prije se smatralo da su matematički izazovi namijenjeni samo za nadarene učenike. No posljednjih godina ih pronalazimo u gotovo svakoj nastavi matematike koja je usmjerena na razvoj matematičkog rasuđivanja.

Matematički zadatci predstavljaju izazov kada uključuju neki problem. Takvi zadatci su motivirajući, ne uključuju očite postupke i imaju nekoliko pristupa rješenju. Oni bi trebali biti raznovrsni, prilagođeni učeničkim sposobnostima i trebali bi navoditi na razmišljanje.

Postoje razne metode rješavanja takvih zadataka. Neke od njih su: pronalaženje uzorka, promjena fokusa, rješavanje srodnog jednostavnijeg problema, razmatranje ekstremnih slučajeva, crtanje dijagrama, metoda rješavanja unatrag, grafičko-aritmetička metoda itd.

U nastavku je navedeno nekoliko primjera problemskih zadataka preuzetih sa predavanja kolegija Metodika nastave matematika II, Odjela za matematiku u Osijeku. Ti zadatci mogu učenicima predstavljati izazov, ali se lako rješavaju primjenom jedne od navedenih metoda.

Primjer 3.7. Pronađite vrijednost izraza $\frac{2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 34 + 36 + 38}{3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 51 + 54 + 57}$.

Rješenje.

Ovaj primjer možemo riješiti metodom rješavanja srodnog jednostavnijeg problema ili promjenom fokusa.

Rješavanje srodnog jednostavnijeg problema:

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2+4}{3+6} = \frac{2}{3} \quad \frac{2+4+6}{3+6+9} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3} \quad \frac{2+4+6+8}{3+6+9+12} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3} \dots$$

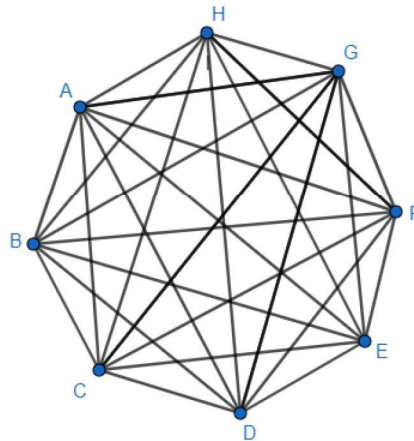
Promjena fokusa:

$$\frac{2(1+2+3+\dots+19)}{3(1+2+3+\dots+19)} = \frac{2}{3}$$

Primjenom bilo koje od ove dvije metode zaključujemo da je vrijednost danog izraza $\frac{2}{3}$.

Primjer 3.8. U košarkaškoj ligi je 8 ekipa, a svaka ekipa mora odigrati sa svakom ekipom po tri utakmice. Koliko će u toj ligi biti utakmica?

Rješenje. Ovaj primjer možemo lako riješiti crtanjem dijagrama.



Slika 13: Dijagram odigranih utakmica između ekipa.

Zamislimo li da su ekipe točke, a odigrane utakmice spojnice između njih (Slika 13), vidimo da je svaka od 8 ekipa odigrala po 7 utakmica. $8 \cdot 7 = 56$. A zbog toga što smo svaku vezu, tj. utakmicu brojali dva puta, zaključujemo da bi bilo $56 : 2 = 28$ odigranih utakmica. No budući da je svaka ekipa sa svakom ekipom odigrala po tri utakmice, rješenje je $3 \cdot 28 = 84$.

Primjer 3.9. Dva kvadrata s duljinama stranica 8 smještena su tako da vrh jednog kvadrata leži u središtu drugog kvadrata (Slika 14). Koliko iznosi površina četverokuta $ELCN$?

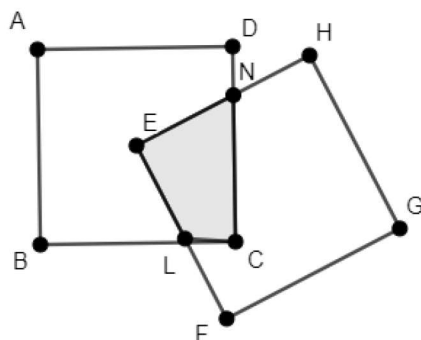
Rješenje.

Ovaj primjer možemo riješiti razmatranjem ekstremnog slučaja.

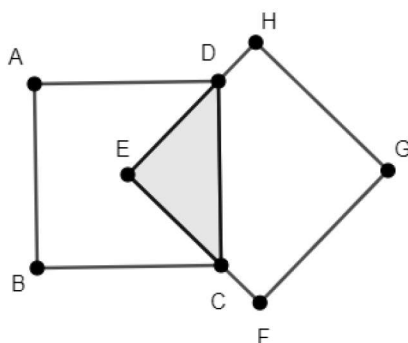
Razmotrimo li ekstremni slučaj (Slika 15), lako zaključujemo da je tražena površina četverokuta

$ELCN$ jednaka $\frac{1}{4}$ površine kvadrata $ABCD$, tj. površini trokuta DEC .

$$P_{\square ABCD} = a^2 = 8^2 = 64$$



Slika 14: Prikaz kvadrata.



Slika 15: Ekstremni slučaj Slike 14.

$$P_{\triangle DEC} = \frac{1}{4} \cdot 64 = 16$$

Dakle, površina četverokuta $ELCN$ je 16.

3.5 Pripovijedanje o zanimljivostima koje su povezane s matematikom

Nastavnici, između ostalog, moraju biti dobri govornici jer bi trebali biti ti koji će učenike upoznati sa raznim kompleksnim temama, nadahnuti ih i motivirati na dodatano istraživanje. Odlike dobrih govornika su:

- strast i samouvjerenost,
- dobra pripremljenost,
- prenošenje poruka i ideja,
- sposobnost pojednostavljivanja kompleksnih tema,
- otvorenost pitanjima,
- sposobnost da zainteresiraju publiku.

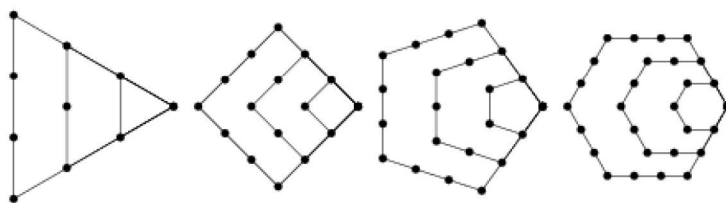
Iako su sve odlike jednako važne, u nastavku ćemo se fokusirati na posljednju stavku. Najlaši način za zainteresirati učenike je pripovijedanje o raznim zanimljivostima. Gradivo možemo "presjeći" matematičkim trikovima, zanimljivostima o pojedinim brojevima, matematičkim zgodama, zanimljivostima iz povijesti itd. Učenicima će se svidjeti ovakva dinamičnost, te će se dodatno zainteresirati za ostatak sata.

Zanimljivi brojevi

Klase zanimljivih brojeva, od kojih ćemo ovdje izdvojiti učenicima najzanimljivije i najjednostavnije kao što su figurativni, palindromski i savršeni brojevi, preuzete su iz [13, str. 29, 26, 22].

Figurativni brojevi

Figurativni brojevi su se pojavili među pitagorejcima u pokušaju spajanja geometrije i aritmetike. To su prirodni brojevi koje možemo prikazati slaganjem kamenčića u geometrijske likove. Neke skupine figurativnih brojeva su trokutni brojevi, kvadratni brojevi, pravokutni brojevi, peterokutni brojevi i slično.



Slika 16: Primjer trokutnih, kvadratnih, peterokutnih i šesterokutnih brojeva.
Slika je preuzeta iz [21].

Palindromski brojevi

Svi znamo što su palindromi. Kao što sam naziv govori, palindromski brojevi su oni koji se čitaju isto u oba smjera. Zanimljivo je što su prve četiri potencije broja 11 upravo palindromski brojevi:

$$\begin{aligned} 11^1 &= 11, \\ 11^2 &= 121, \\ 11^3 &= 1331, \\ 11^4 &= 14641. \end{aligned}$$

Osim toga, zanimljivo je i da takav broj možemo jednostavno dobiti pomoću bilo kojeg broja i primjenom jedne računske operacije - zbrajanja. Proizvoljnom broju trebamo pribrojiti isti taj broj sa obrnutim redoslijedom znamenki.

Ukoliko dobiveni zbroj nije palindrimski broj, postupak ponavljamo sve dok ne dođemo do njega. Na primjer:

$$\begin{aligned}96 + 69 &= 165, \\165 + 561 &= 726, \\726 + 627 &= 1353, \\1353 + 3531 &= 4884.\end{aligned}$$

Savršeni brojevi

Za prirodan broj n kažemo da je savršen ako je jednak sumi svih svojih pravih djelitelja. Neki savršeni brojevi su:

$$\begin{aligned}6 &= 1 + 2 + 3, \\28 &= 1 + 2 + 4 + 7 + 14.\end{aligned}$$

Sljedeći je tek 492. Budući da ne postoji mnogo savršenih brojeva, bilo bi zamorno ići redom i isprobavati. Srećom, Euklid je došao do teorema koji generalizira pronalazak savršenog broja.

Teorem 3.10. *Ako je $2^k - 1$ prost broj, onda je $2^{k-1}(2^k - 1)$ savršen broj.*

Broj π

π je široko primjenjivana konstanta, beskonačno decimalan i transcendentan broj. Definiira se kao omjer opsega i promjera kruga. Broj π je otkriven prije 4000 godina. Njegovu grubu aproksimaciju možemo pronaći čak i u *Bibliji*. U *Prvoj knjizi o Kraljevima*, koju je prema tradiciji napisao prorok Jeremija između 560. i 540. g. pr. Kr., možemo pronaći opis fontane ili bazena u hramu kralja Solomona (965. g. pr. Kr. – 926. g. pr. Kr.): "Tada od rastaljene kovine izli more koje je od ruba do ruba mjerilo deset lakata; bilo je okruglo naokolo, pet lakata visoko, a u opsegu, mjereno vrpcom, imalo je trideset lakata" ([13, str. 132]).

Primjećujemo da opisana kružna struktura ima opseg od 30 lakata i promjer od 10 lakata.

Prema definiciji broja π , on ovdje iznosi $\pi = \frac{30}{10} = 3$. Iako su ljudi njegovu grubu aproksimaciju znali još u davnoj prošlosti, simbol koji danas poznamo je dobio tek 1706. godine. Neki ljudi čak vjeruju da π sadržava odgovore na pitanja o beskonačnosti svemira.

Numerička vrijednost broja π zaokružena na 60 decimalnih mjesta je:

$$\pi \approx 3,141592653589793238462643383279502884197169399375105820974944.$$

Broj 108

Na prvi pogled broj 108 ni po čemu ne djeluje zanimljivo, no ako pogledamo njegove znamenke postaje vrlo interesantan. Simbol 1 predstavlja jednu stvar, simbol 0 ništa, a simbol 8 položen vodoravno predstavlja beskonačnost. Zbog toga broj 108 predstavlja krajnju stvarnost svemira koji je prema filozofiji pitagorejaca sastavljen od suprotnosti.

Zanimljivo je i što se broj 108, u religijama kao što su hinduizam, budizam i džainizam, smatra svetim. Razlog tome leži u astronomiji jer povezuje Sunce, Mjesec i Zemlju. Prosječna udaljenost Sunca i Mjeseca do Zemlje je 108 puta veća od njihovih promjera ([32]).

Broj 73

Svi ljubitelji televizijske serije *Teorija velikog praska* znaju koliko je broj 73 poseban. Jedan od glavnih junaka, Sheldon, često nosi majice s brojem 73 "zato što je on 21. prost broj. Zrcalno je 37, što je 12. prost broj, koji je zrcalno 21, a on je produkt množenja brojeva 7 i 3. Osim toga, 73 je u binarnom sustavu palindrom. Broj 1001001 se i unatrag piše 1001001" ([1]).

Matematički trikovi

Djeca vole mađioničarske trikove, i kada ih znaju izvesti, rado će ih svima pokazivati iznova i iznova. Matematičkim trikovima mogu kroz zabavu vježbati matematiku, ali potaknuti i druge na to. U nastavku su navedena dva matematička trika kojima učenici mogu uvježbati osnovne računске operacije, preuzeta iz [13, str. 100] i [18].

Primjer 3.11. *Odaberite bilo koji troznamenkasti broj čije su sve znamenke različite. Napišite sve moguće dvoznamenkaste brojeve koji se mogu oblikovati od prethodno odabranog troznamenkastog broja. Zatim njihov zbroj podijelite sa zbrojem znamenki u početnom troznamenkastom broju. . . Rješenje je 22.*

Ako odaberemo troznamenkasti broj 245, svi mogući dvoznamenkasti brojevi oblikovani od njegovih znamenki su: 24, 25, 45, 42, 52, 54. Njihov zbroj je: $24+25+45+42+52+54 = 242$. Ako taj zbroj podijelimo sa zbrojem znamenki početnog broja: $2+4+5 = 11$, dobivamo 22. Zanimljivo je što ćemo uvijek na kraju dobiti broj 22.

Objašnjenje je vrlo jednostavno ako se prisjetimo pozicijskog zapisa broja. Tada bi zbroj dvoznamenkastih brojeva izgledao ovako:

$$\begin{aligned}(10x + y) + (10y + x) + (10x + z) + (10z + x) + (10y + z) + (10z + y) &= \\ 10(2x + 2y + 2z) + (2x + 2y + 2z) &= \\ 11(2x+2y + 2z) &= \\ 22(x+y + z) &\end{aligned}$$

Podijelimo li prethodni zbroj sa općenitim zapisom zbroja znamenki troznamenkastog broja: $x + y + z$, dobivamo upravo broj 22.

Primjer 3.12. *Bacite dvije igraće kockice i zapamtite dobivene brojeve. Prvi broj pomnožite s 5 te tom umnošku dodajte 12. Zatim dobiveni broj udvostručite te tom udvostručenom broj dodajte broj dobiven na drugoj kockici. Na kraju, tom dobivenom broju pribrojite 15 te od tog zbroja oduzmite 39. Rješenje je dvoznamenkasti broj. Na mjestu jedinica se nalazi broj dobiven na drugoj kockici, a na mjestu desetica se nalazi broj dobiven na prvoj kockici.*

Ukoliko smo na igraćim kockicama dobili 3 i 5. Račun će ići ovako:

$$\begin{aligned}3 \cdot 5 &= 15, \\15 + 12 &= 27, \\27 \cdot 2 &= 54, \\54 + 5 &= 59, \\59 + 15 &= 74, \\74 - 39 &= 35.\end{aligned}$$

Tajna je u tome što je množenje s 5, a zatim udvostručenje, isto što i množenje s 10. Taj račun stavlja broj sa prve igraće kockice na mjesto desetica. Dodavanjem broja sa druge igraće kockice taj broj stavljamo na mjesto jedinica. Svaka druga operacija je matematički trik i dodaje dodatnih 39 u ukupnom iznosu. Oduzimanjem tog broja otkrivamo dobivene brojeve na kockici.

Zanimljivosti iz povijesti matematike

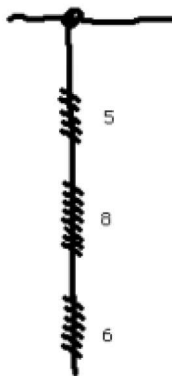
Matematička otkrića: Gaussova dosjetka

Carl Friedrich Gauss (1777.–1855.), zvani Princ matematike, jedan je od najpoznatijih matematičara na svijetu. Zaslužan je za mnogo važnih matematičkih rezultata, a svoju je darovitost pokazao još kao sedmogodišnjak. Prema [13, str. 60], njegov je učitelj, kako bi zaposlio razred i tako dobio na slobodnom vremenu, učenicima zadao zadatak da zbroje brojeve od 1 do 100. No Gauss je primijetio da postoji 50 parova brojeva čiji zbroj iznosi 101. Tako je lako i brzo došao do rješenja od 5050 te učitelju pokvario odmor. Po njemu takav način računanja zovemo Gaussova dosjetka, a općenita formula za zbroj prvih n brojeva glasi

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Prikazivanje brojeva kod starih naroda: Inke

Prema [14], Inke su bile poznate po razvijenoj civilizaciji. Zbog toga ne čudi što su imale i dobro osmišljenu metodu čuvanja brojevnih informacija koja se temeljila na boji užeta, vrsti čvorova na njemu, razmaku između čvorova i slično (Slika 17). Prema poziciji, čvorovi su označavali jedinice, desetice, stotice, tisućice, ... dok je boja užeta odgovarala njegovoj namjeni, npr. žuta boja je mogla predstavljati kukuruz.



Slika 17: Zapis broja 586 kod Inka.
Slika je preuzeta iz [14].

Život matematičara: Kurt Gödel

Kurt Gödel (1906. – 1978.) je bio austrijsko-američki logičar i jedan od najznačajnijih matematičara 20. st. Što se tiče njegovog privatnog života, imao je paranoidnu shizofreniju, tj. psihički poremećaj kojeg karakteriziraju razne paranoidne ideje i halucinacije. Bio je uvjeren da ga svi žele otrovati hranom, te je zbog toga uvijek, od svoje žene, zahtijevao da ona prva okusi hranu. Njegova žena, Adele Nimbursky (1899.-1981.), je bila jedina osoba kojoj je vjerovao i jeo bi tek kada bi bio siguran da hrana nije otrovana. Nakon što mu se žena razboljela i završila u bolnici, izglednio se do smrti jer više nije imao osobu od povjerenja ([20]).

3.6 Upotreba tehnologije

Tehnologija je dio naše svakodnevnice. Njezin razvoj nam je olakšao mnogo toga i poboljšao kvalitetu života. Iako tehnologija nosi brojne pogodnosti, neki ju nastavnici odbijaju koristiti u nastavi jer se ne znaju njome služiti ili su naviknuti na tradicionalnu nastavu. No nastavnici koji ju koriste u svom radu sigurno mogu potvrditi da su njezinom upotrebom uspjeli motivirati učenike na rad.

U okviru eksperimentalnog programa *Škola za život*, čiji je nositelj Ministarstvo znanosti i obrazovanja Republike Hrvatske, učenici bi trebali naučiti rješavati probleme, kritički razmišljati i razvijati svoju kreativnost i inovativnost. Kako bi se to postiglo na što lakši i zanimljiviji način, učenicima su podijeljeni tableti koje mogu koristiti na nastavi i kod kuće.

Podjelom tableta, učenici su dobili pristup učenju s tehnologijom. To možemo iskoristiti i u nastavi matematike.

U nastavku su navedeni primjeri što sve učenici i nastavnici mogu s tehnologijom, zajedno s primjerima internetskih stranica s kojima se možemo poslužiti za navedeno:

- Dodatno istraživati, učiti ili provjeravati svoje znanje;
IZZI (URL: <https://hr.izzi.digital/#/>),
Edutorij (URL: <https://edutorij.e-skole.hr/share/page/home-page>).
- Koristiti razne programe za računanje, te tako provjeriti točnost dobivenih rješenja;
Photomath (URL: <https://photomath.app/en/>),
Math10 (URL: <https://www.math10.com/sr/program.html>).
- Biti u kontaktu i surađivati sa drugim učenicima;
Teams (URL: <https://www.microsoft.com/hr-hr/microsoft-365/microsoft-teams/log-in>),
Zoom (URL: <https://zoom.us/>),
Skype (URL: <https://www.skype.com/en/>).
- Vizualno prikazivati i rješavati probleme;
GeoGebra (URL: <https://www.geogebra.org/?lang=hr>),
Mathcha (URL: <https://www.mathcha.io/>).
- Prikupljati i uređivati podatke;
Microsoft Excel,
Meta-Chart (URL: <https://www.meta-chart.com/>).
- Igrati matematičke igre;
Wordwall (URL: <https://wordwall.net/>),
Math Playground (URL: <https://www.mathplayground.com/>),
Education (<https://www.education.com/games/math/>).

Kako ni sa čim ne treba pretjerivati, tako ne treba pretjerivati ni sa upotrebom tehnologije. Prevelika primjena tehnologije kod djece je povezana sa nedostatkom pažnje, agresivnim ponašanjem, tjelesnom neaktivnošću, pretiilošću, problemima sa spavanjem, manjkom socijalnih vještina, problemima sa vidom i kralježnicom ([8]).

3.7 Personaliziranje i pravo na izbor načina rada

Personalizirano učenje proizlazi iz uvjerenja da je svaki učenik jedinstven i da uči na različite načine. Svaki učenik ima različite interese, potrebe i sposobnosti prema kojima bi trebao imati pravo na izbor načina rada ([9]).

Prema [17], postoje četiri koraka do postizanja personaliziranog učenja:

1. upoznavanje učenika;
2. grupiranje učenika na temelju njihovih interesa;
3. definiranje cilja svakog učenika;
4. korištenje tehnologije.

Prilikom personaliziranog učenja, učenik postaje aktivan sudionik nastave koji stvara, uređuje, realizira i prilagođava gradivo svojim interesima. Tehnologija tu ima ključnu ulogu jer omogućuje učenicima veći izbor načina rada. Posao učitelja tako postaje nadgledanje, pružanje potpore i upravljanje izvorima, umjesto samo prenošenja znanja.

3.8 Razgovor u nastavi matematike

Pod pojmom *Razgovor u nastavi matematike* podrazumijevamo iznošenje kritičkih i logičkih mišljenja, zaključaka i argumenata. Prema [34], razgovaranjem o matematici pomažemo učenicima da razumiju ideje, poboljšaju pamćenje i razumijevanje, razvijaju jezik i socijalne vještine, povećaju samopouzdanje i zanimanje za matematiku.

Kako bi nastavnici potaknuli razgovaranje u učionici najbitnije je da ne daju učenicima već gotova rješenja. Nastavnici bi trebali poticati učenike na slobodno izražavanje mišljenja kako bi samostalno došli do zaključaka.

| KAKO IZGLEDA: | KAKO ZVUČI: |
|--|--|
| Učenici dijele strategije rješavanja u grupi | Nastavnik navodi učenike do rješenja pomoću njihovih ideja |
| Nastavnik koristi pauze kako bi učenici promislili o tuđim idejama | Učenici se kritički osvrću na ideje drugih |
| Učenici povezuju i uspoređuju svoje strategije rješavanja sa strategijama drugih | Nastavnik navodi učenike na odgovore kako bi ostali fokusirani na temu |
| Nastavnik i učenici razgovaraju o problemu | Nastavnik potiče učenike da si međusobno postavljaju pitanja |
| Učenici uče surađujući kao zajednica kako bi dali potporu jedni drugima | Učenici ponavljaju, sažimaju, ispravljaju i prevode mišljenja drugih učenika |
| Učenici su angažirani i sudjeluju u raspravi | Nastavnik i učenici koriste greške kao sredstvo za učenje |

Slika 18: Interakcija između učitelja i učenika tijekom učinkovitog matematičkog razgovora.

Slika je preuzeta iz [22].

4 Demotivacija

Demotivacija je izostanak motivacije. U Cambridgeovom rječniku ona se definira kao nedostatak interesa i entuzijazma za neku radnju.

Tekst u nastavku je preuzet iz analiza istraživanja koja su opisana u [29].

Demotivacija može utjecati na produktivnost pojedinca, ali i na produktivnost cijele njegove okoline zbog negativne atmosfere proizašle iz njega. Osim toga, takav pojedinac svojim ponašanjem može stvoriti napetost i stres kod ostalih. Zbog toga je bitno što ranije uočiti takvog učenika u razredu.

Demotivirani učenik kasni na sat ili je često odsutan, ometa nastavu i druge učenike, dosađuje se ili je pod stresom, potiče negativne razgovore, dobacuje negativne komentare, nije produktivan, ne obavlja kvalitetno zadane aktivnosti, ne surađuje s drugima, ne pokazuje nikakav interes i ne vjeruje u svoje sposobnosti.

Bitno je napomenuti da takav učenik vjerojatno nije oduvijek demotiviran. Većina djece krene u školu motivirana, željna novih iskustava i znanja, ali se tijekom školovanja susretnu sa raznim događajima koji štetno utječu na njihovu motivaciju.

Važno je razlikovati negativne čimbenike i demotive. Primjeri negativnih čimbenika su:

- Atraktivna alternativna radnja koja služi kao moćna distrakcija, npr. gledanje televizije umjesto obavljanja zadaće. Njezin se efekt distrakcije sastoji u predstavljanju mogućnosti koja nam pruža veće zadovoljstvo.
- Postupni gubitak interesa za dugotrajnu aktivnost.
- Iznenadna spoznaja da su troškovi postizanja cilja previsoki, npr. kada netko prepozna koliko je zahtjevno pohađati fakultet dok radi danju. To je rezultat unutarnjeg razmatranja, a ne nekog vanjskog okidača.

Sve u svemu, možemo reći da negativni čimbenici uglavnom ne stvaraju negativne osjećaje kod pojedinca. Za razliku od njih, demotivi ostavljaju veće i negativnije posljedice. Primjeri demotiva u školi su:

- Osobni odnos nastavnika s učenicima kao što su favoriziranje određenih učenika, prekritičnost, nedostatak brige za učenike i ljutnja ako nešto ne razumiju.
- U spomenuti odnos možemo smjestiti i očekivanja nastavnika od učenika. Ukoliko nastavnik ne očekuje previše od učenika moguće je da će učenik izgubiti samopouzdanje i motivaciju za taj nastavni predmet jer će biti uvjeren da nije u mogućnosti savladati gradivo kao i ostali učenici.

- Odnos nastavnika prema nastavnom predmetu ili materijalu, uključujući nedostatak entuzijazma i rad pomoću zastarjelih nastavnih materijala.
- Sukobi u stilu između nastavnika i učenika, uključujući sukobe vezane za količinu gradiva ili ne davanje dovoljno jasnih uputa.
- Atmosfera u učionici.
Nitko ne voli negativnu atmosferu, no zanimljivo je što će nekim učenicima više odgovarati radna, a nekima opuštena atmosfera. Stoga je bitno napraviti ravnotežu između te dvije atmosfere kako bi se svi učenici osjećali ugodno u učionici.

U prethodno navedenim primjerima demotivacije možemo primijetiti da nastavnici mogu biti njezin glavni uzrok. To je vrlo žalosno jer nastavnici ne bi trebali demotivirati učenike, već motivirati. Pogotovo one koji na nastavu već dođu demotivirani zbog privatnih problema ili zbog negativnog stava prema matematici.

Zaključak

Motivirati učenike je teško, ali ne i nemoguće. Najlakši način za povećanje motivacije je svakako bilo koji oblik nagrade, ali i kazne. Takvim načinom se povećava ekstrinzična motivacija koja ne daje dugoročne rezultate. Cilj svakog nastavnika bi trebao biti povećanje intrinzične motivacije kod učenika kako bi učili matematiku zbog vlastite želje i interesa jer znamo da najlakše učimo i najduže pamtimo ono što nas zanima. Postoje brojni načini za povećanje intrinzične motivacije koje nastavnici mogu primijeniti u svom radu. Bitno je napomenuti da će svi ti načini biti uzaludni ukoliko je nastavnikov odnos prema radu i učenicima loš. Zbog toga možemo zaključiti da su nastavnici ključni izvor intrinzične motivacije za učenike. Njihova predanost poslu, pravednost, dosljednost, iskrenost i topli odnos s učenicima su svakako kvalitete koje će učenici znati cijeliti i koje će utjecati na njihov odnos prema matematici.

Literatura

- [1] J. BYRNES, C. SPICER, A. TURNQUIST, *The Sheldon conjecture*, Math Horizons, 23(2015), 12-15.
- [2] L. COHEN, L. MANION, K. MORRISON, *Research Methods in Education*, 6. izd., Routledge, Abingdon, 2007.
- [3] I. CULEK, *Glazba i matematika*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2015.
- [4] Z. KURNIK, *Motivacija*, Matematika i škola, 31(2005), 4-10.
- [5] R. LEIKIN, *Mathematical Challenge in the Eyes of the Beholder: Mathematics Teachers' Views*, Canadian Journal of Science Mathematics and Technology Education, 14(2014), 1-16.
- [6] J. A. MIDDLETON, A. JANSEN, *Motivation Matters and Interest Counts: Fostering Engagement in Mathematics*, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, 2011.
- [7] B. MIKULIČIĆ, E. VERNIĆ, M. VARIĆAK, *Zbirka zadataka iz fizike za 1. do 4. razred srednjih škola*, Školska knjiga, Zagreb, 2010.
- [8] R. MUSTAFAOGLU, E. ZIREK, Z. YASACI, A. R. OZDINCLER, *The Negative Effects of Digital Technology Usage on Children's Development and Health*, The Turkish Journal on Addictions, 5(2018), 13-21.
- [9] D. NANDIGAM, S. S. TIRUMALA, N. BAGHAEI, *Personalized Learning: Current Status and Potential*, konferencijski rad, Institute of Electrical and Electronics Engineers, Melbourne, 2014.
- [10] G. PAIĆ, Ž. BOŠNJAK, B. ČULINA, N. GRGIĆ, *Matematički izazovi 5, udžbenik iz matematike za peti razred osnovne škole*, Alfa, Zagreb, 2019.
- [11] G. PAIĆ, Ž. BOŠNJAK, B. ČULINA, N. GRGIĆ, *Matematički izazovi 6, udžbenik iz matematike za šesti razred osnovne škole*, Alfa, Zagreb, 2020.
- [12] Z. POPOVIĆ, LJ. KOVAČEVIĆ, *Kemija 1, udžbenik iz kemije za prvi razred gimnazije*, Alfa, Zagreb, 2019.
- [13] A. S. POSAMENTIER, *Math Wonders to Inspire Teachers and Students*, Association for Supervision and Curriculum Development, Alexandria, 2003.
- [14] D. PRIMORAC, *Brojevi u drevnim civilizacijama*, diplomski rad, Odjel za matematiku, Sveučilište u Osijeku, 2012.

- [15] R. M. RYAN, E. L. DECI, *Intrinsic and Extrinsic Motivations: Classic Definitions and New Directions*, Contemporary Educational Psychology 25(2000), 54-67.
- [16] B. ŠVERKO i sur., *Psihologija, udžbenik za gimnazije*, 5. izd., Školska knjiga, Zagreb, 2011.
- [17] *4 Ways To Get Started With Personalized Learning*,
URL:<https://www.teachthought.com/pedagogy/getting-started-personalized-learning/>
- [18] *9 Mathemagic Tricks*,
URL:<https://professornumbers.com/MATHEMAGICTRICKS.html>
- [19] *15 Math Games in 15 Minutes or Less*,
URL:<https://www.scholastic.com/teachers/articles/teaching-content/15-math-games-15-minutes-or-less/>
- [20] *Despite Being A Renowned Mathematician, Kurt Gödel Starved Himself Out Of Paranoia*,
URL:<https://allthatsinteresting.com/kurt-godel>
- [21] *Figurate Number*,
URL:<https://mathworld.wolfram.com/FigurateNumber.html>
- [22] *Getting Started with Effective Math Talk in the Classroom*,
URL:<https://minds-in-bloom.com/getting-started-with-effective-ma/>
- [23] *How Attitude Towards Math Impacts Student Achievement*,
URL:<https://www.prodigygame.com/main-en/blog/attitude-towards-math/>
- [24] *How Is Mathematics Used in Other Subjects?*,
URL:<https://sciencing.com/how-is-mathematics-used-in-other-subjects-9861185.html>
- [25] *Klokan bez granica 2020. godine*,
URL:<http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/klokan/2020/benjamin-2020-zad.pdf>
- [26] *Math motivation: Attitude, anxiety, and achievement*,
URL:<https://www.renaissance.com/2018/03/29/blog-math-motivation-attitude-anxiety-achievement/>
- [27] *Motivacija učenika u nastavi matematike*,
URL:https://www.umtk.info/index.php?option=com_docman&task=doc_download&gid=87&Itemid=2

- [28] *Procjene stanovništva Republike Hrvatske u 2018.*,
URL:https://www.dzs.hr/Hrv_Eng/publication/2019/07-01-03_01_2019.htm
- [29] *Student Demotivation*,
URL:<https://teachnews.gr/pyxologia-symvouleftikh/item/70-student-demotivation>
- [30] *Školsko/gradsko natjecanje iz matematike 2020. godine*,
URL:<http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2020/2020-0S-skolsko-45678-zad+rj/2020-0S-skolsko-6-zad.pdf>
- [31] *The Golden Ratio and Fibonacci Sequence*,
URL:<https://www.compulsivecontents.com/detail-event/the-golden-ratio-and-fibonacci-sequence-in-art/>
- [32] *What's So Sacred About the Number 108?*,
URL:<https://www.yogajournal.com/philosophy/the-number-108/>
- [33] *Why Play Math Games?*,
URL:<https://www.mathnasium.com/why-math-games-are-important>
- [34] *Why students need more "math talk"*,
URL:<https://theconversation.com/why-students-need-more-math-talk-104034>

Sažetak

Jedan od glavnih problema sa kojima se nastavnici susreću u svom radu je manjak motivacije kod učenika. Taj je problem najizraženiji kada je u pitanju matematika jer njezino učenje zahtijeva kontinuiran rad i razumijevanje. Demotiviranim učenicima to predstavlja prevelik napor, pa jednostavno zanemariju matematiku što na kraju rezultira neusvojenim znanjem i lošim ocjenama.

U ovom radu su dani savjeti za povećanje motivacije i sprječavanje demotivacije učenika na nastavi matematike te je istaknuta uloga nastavnika kao jednog od osnovnih izvora učeničke motivacije. Navedeni načini motiviranja učenika su bazirani na razvijanju intrinzične motivacije koja traje duže i daje kvalitetnije rezultate od ekstrinzične motivacije. Zbog različitih utjecaja tih dviju vrsta motivacije na učenje matematike provedena je i anketa kojoj je bio cilj utvrditi je li više učenika motivirano intrinzično ili ekstrinzično za matematiku, a čiji su rezultati analizirani u ovom radu.

Ključne riječi: *nastavnik, učenik, matematika, motivacija, demotivacija, intrinzična motivacija, ekstrinzična motivacija*

Summary

One of the main problems that teachers face in their work is the lack of students' motivation. This problem is most prominent when it comes to mathematics because its learning requires continuous work and understanding. This requires a lot of effort, which is too much for unmotivated students to handle. As a result, they often neglect learning mathematics and eventually end up having bad grades and incomplete knowledge.

This paper offers advice on how to increase students' motivation and avoid demotivation of students in class. Besides that, teacher's role as one of the main sources of student's motivation is emphasized. The methods of motivating students are based on stimulating intrinsic motivation which lasts longer and gives better results than extrinsic motivation. A survey, whose results were analysed in this paper, was conducted to determine whether more students were motivated intrinsically or extrinsically due to the different influence of these two types of motivation on learning mathematics.

Keywords: *teacher, student, mathematics, motivation, demotivation, intrinsic motivation, extrinsic motivation*

Životopis

Rođena sam 15. 4. 1996. u Vinkovcima, a odrasla sam u Cerni gdje sam se 2003. godine upisala u Osnovnu školu Matija Antun Reljković. Tamo mi je nastavnica matematike, Ana Mrkonjić, usadila ljubav prema matematici i tako uvelike utjecala na moj životni put. 2011. godine upisujem opću gimnaziju u srednjoj školi Gimnazija Županja. Tijekom srednjoškolskog obrazovanja sam završila Specijalizaciju animatora instruktora, programa *Mladi za mlade* u Zagrebu, kojoj su prethodile Temeljne formacije u Đakovu i Opća specijalizacija animatora u Pleternici. Tijekom poplava u istočnoj Hrvatskoj sam volontirala u edukativnoj i humanitarnoj udruzi civilnoga društva *Društvo "Naša djeca" Vinkovci*, gdje sam pomagala pri izvođenju radionica i vođenju djece na izlete. 2015. godine upisujem petogodišnji sveučilišni integrirani nastavnički studij matematike i informatike Odjela za matematiku Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku. Trenutno sam zaposlena kao zamjena u Osnovnoj školi Matija Antun Reljković Cerna gdje predajem matematiku i informatiku. U slobodno vrijeme volim učiti nove vještine, pa tako trenutačno učim šivati i vesti.