Identifikacija krivulja drugog reda

Sipl, Lucija

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lucija Sipl

Identifikacija krivulja drugog reda

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Lucija Sipl

Identifikacija krivulja drugog reda

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2021.

Sažetak

Tema ovog završnog rada su krivulje drugog reda te njihova identifikacija pomoću kvadratnih formi. Za svaku osnovnu krivulju drugog reda dana je definicija te osnovna svojstva. Glavni dio ovog završnog rada je identifikacija osnovnih krivulja (elipse, hiperbole i parabole) i taj dio je popraćen primjerima s detaljnim rješenjima i grafičkim prikazima. Grafički prikazi su dobiveni u programu dinamične geometrije GeoGebra. Na kraju rada dani su i primjeri specijalnih slučajeva koji se mogu dobiti identifikacijom krivulja.

Ključne riječi

kružnica, elipsa, hiperbola, parabola, krivulja drugog reda

Identification of second-order curves

Summary

The topic of this final paper is second-order curves and their identification using square forms. For each basic second-order curve, a definition and basic properties are given. The main part of this final paper is the identification of the basic curves (ellipses, hyperbolas and parabolas) and is accompanied by examples with detailed solutions and graphical representations. Graphical representations obtained in the program of dynamic geometry GeoGebra. At the end of the paper, examples of special cases that can be obtained by identifying curves are also given.

Key words

circle, ellipse, hyperbole, parabola, second-order curve

Sadržaj

Uvod

Krivulje drugog reda se drugačije nazivaju i konike. Pod krivulje drugog reda ubrajaju se kružnica, elipsa, hiperbola i parabola.

Ovaj rad je podijeljen na 4 poglavlja.

U prvom poglavlju definiran je sam pojam krivulja drugog reda te su dane definicije kružnice, elipse, hiperbole i parabole. Pored samih definicija navedene su i njihove jednadžbe te neki dodatni pojmovi vezani uz njih.

U drugom poglavlju su dane definicije osnovnih pojmova te tvrdnje potrebne za sam postupak identifikacije krivulja drugog reda. Također je u drugom poglavlju opisan i sam postupak identifikacije.

Treće poglavlje donosi po jedan detaljno numerički raspisan i grafički potkrijepljen primjer identifikacije za svaku osnovnu krivulju drugog reda.

Četvrto, ujedno i zadnje poglavlje donosi specijalne slučajeve koji mogu nastati identifikacijom krivulja drugog reda.

1 Osnovno o krivuljama drugog reda

U ovom poglavlju iskazat ćemo definicije kružnice, elipse, hiperbole i parabole. Također ćemo navesti njihove jednadžbe i objasniti temeljne pojmove vezane uz navedene krivulje drugog reda. Definicije krivulja preuzete su iz [1].

1.1 Kružnica

Definicija kružnice

Definicija 1. *Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su jednako udaljene od jedne fiksne točke ravnine.*

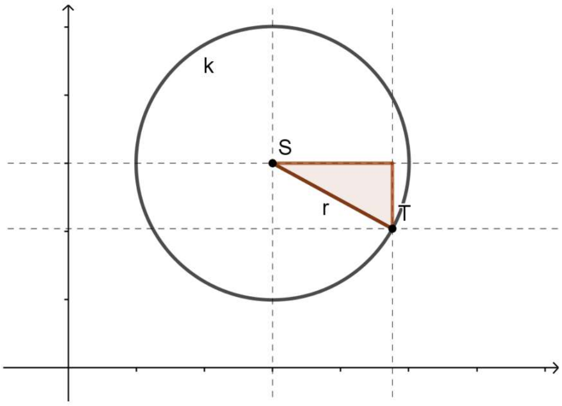
Zadanu fiksnu točku zovemo središte kružnice i označavamo sa S.

Udaljenost od središta kružnice do bilo koje točke na kružnici nazivamo polumjer kružnice i označavamo ga s r.

Jednadžba kružnice

Neka je $k(S, r)$ kružnica sa središtem u S i polumjerom r. Neka središte kružnice ima koordinate $S = (p, q)$, a koordinate proizvoljne točke na toj kružnici su $T = (x, y)$.

Za svaku točku T koja se nalazi na kružnici vrijedi $d(S, T) = r$, tj. svaka točka T je od središta kružnice S jednako udaljena i ta udaljenost je jednaka polumjeru kružnice r.



Slika 1: Kružnica

Kao što možemo vidjeti i iz 1.1, jednadžba kružnice u općem obliku glasi:

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2.$$

U slučaju kad je $S = (0, 0)$, tj. središte kružnice je u ishodištu koordinatnog sustava, jednadžba kružnice je

$$x^2 + y^2 = r^2$$

i takva kružnica se naziva centralna ili središnja kružnica.

1.2 Elipsa

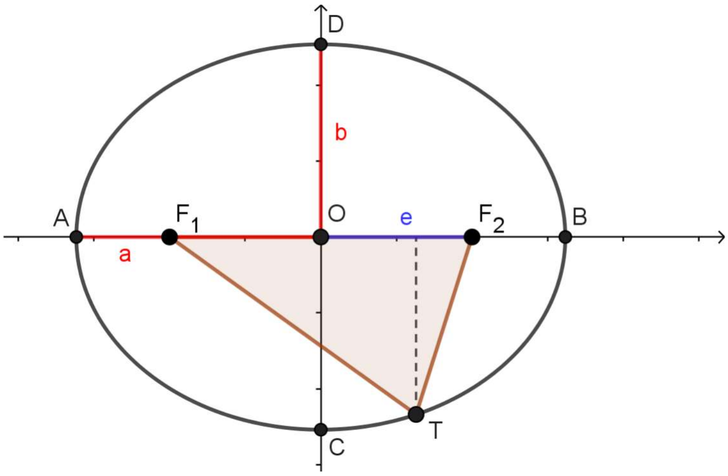
Definicija elipse

Definicija 2. *Neka su F_1 i F_2 dvije različite čvrste točke ravnine M i neka je $d(F_1, F_2) = 2e$, te neka je $a > 0$ zadani realan broj takav da vrijedi $a > e$. Elipsa je skup svih točaka ravnine za koje je zbroj udaljenosti od točaka F_1 i F_2 konstantan i jednak $2a$.*

Kraće zapisano, radi se o skupu točaka E definiranim sa

$$E = \{T \in M\colon d(F_1, T) + d(F_2, T) = 2a\}.$$

Čvrste točke F_1 i F_2 nazivamo žarištima ili fokusima elipse.
Polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ nazivamo središte ili centar elipse.
Nadalje, udaljenost $d(O, F_1) = d(O, F_2) = e$ zovemo linearni ekscentricitet elipse.
Točke A, B, C i D sa slike 1.2 nazivamo tjemenima elipse.
Dužinu $\overline{AB}$ nazivamo glavna os elipse, a dužinu $\overline{CD}$ nazivamo sporedna os elipse.
Dužine $\overline{AO}$ i $\overline{OB}$ nazivamo glavne poluosi elipse.
Dužine $\overline{CO}$ i $\overline{OD}$ nazivamo sporedne poluosi elipse.
Vrijedi: $|AO| = |OB| = a$ i $|CO| = |OD| = b$.



Slika 2: Elipsa

Jednadžba elipse

Kanonska ili središnja jednadžba elipse, to jest jednadžba elipse sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava dana je s

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jednadžba translatirane elipse sa središtem u točki $O = (p, q)$ glasi:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

1.3 Hiperbola

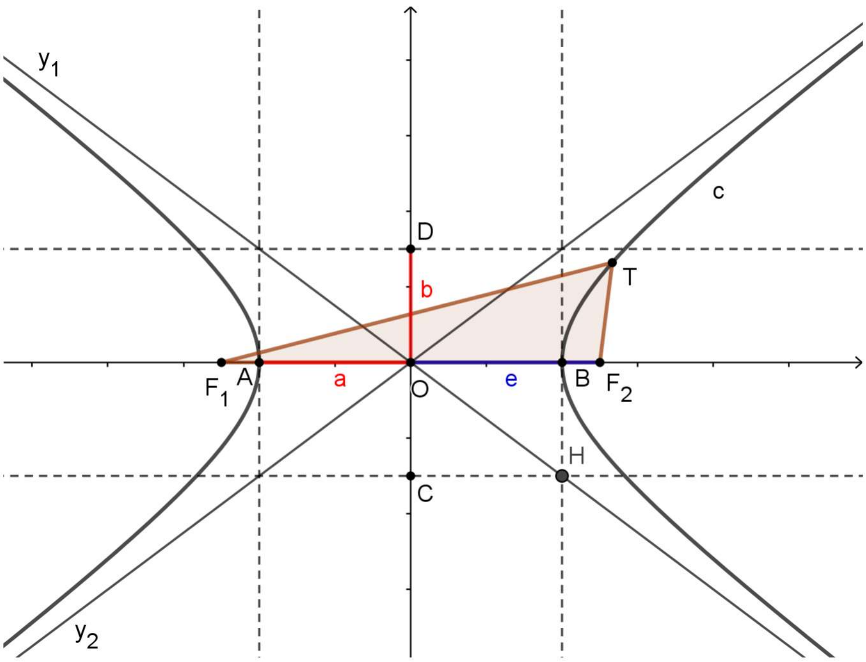
Definicija hiperbole

Definicija 3. *Neka su F_1 i F_2 dvije različite čvrste točke u ravnini i neka je $d(F_1, F_2) = 2e$. Hiperbolom zovemo skup svih točaka ravnine kojima je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od tih točaka konstantna i jednaka $2a$, gdje je $0 < a < e$.*

Kraće zapisano, radi se o skupu točaka H definiranim sa

$$H = \{T \in M \colon |d(T, F_1) - d(T, F_2)| = 2a\}.$$

Čvrste točke F_1 i F_2 nazivamo žarištima ili fokusima hiperbole.
Polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ nazivamo središte hiperbole.
Nadalje, udaljenost $d(O, F_1) = d(O, F_2) = e$ zovemo linearni ekscentricitet hiperbole.
Točke A i B nazivamo tjemenima ili vrhovima hiperbole.
Točke C i D nazivamo imaginarnim vrhovima hiperbole.
Dužinu $\overline{AB}$ nazivamo glavna ili realna os hiperbole
Dužinu $\overline{CD}$ nazivamo sporedna ili imaginarna os hiperbole.
Dužine $\overline{AO}$ i $\overline{OB}$ nazivamo realne poluosi hiperbole.
Dužine $\overline{CO}$ i $\overline{OD}$ nazivamo imaginarne poluosi hiperbole.
Vrijedi: $|AO| = |OB| = a$ i $|CO| = |OD| = b$.
Pravce y_1 i y_2 nazivamo asimptotama hiperbole.



Slika 3: Hiperbola

Jednadžba hiperbole

Kanonska ili središnja jednadžba hiperbole, to jest jednadžba hiperbole sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava dana je s

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Jednadžba translatirane hiperbole sa središtem u točki $O = (p, q)$ glasi:

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

1.4 Parabola

Definicija parabole

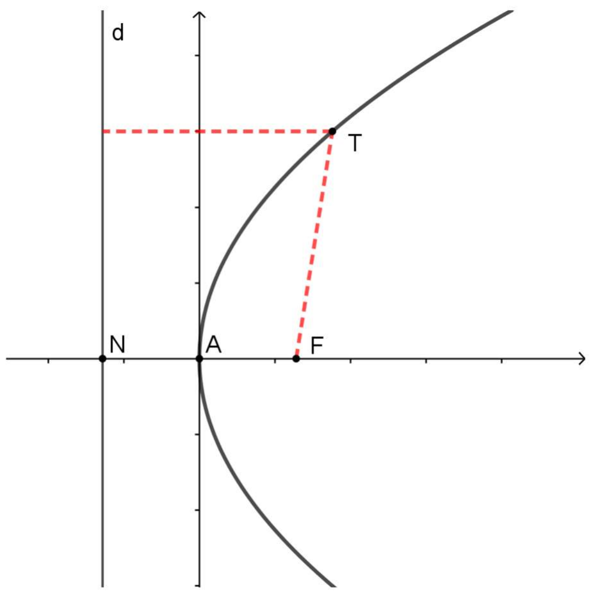
Definicija 4. *Neka je d bilo koji pravac u ravnini i F točka te ravnine M koja ne leži na pravcu d. Skup svih točaka ravnine za koje je udaljenost od pravca d jednaka udaljenosti od točke F zovemo parabolom.*

Dakle, radi se o skupu točaka P definiranim sa

$$P = \{T \in M \colon d(T, d) = d(T, F)\}.$$

Pravac d nazivamo direktrisa ili ravnalica parabole, a točku F fokus ili žarište parabole.

Ako s N označimo nožište okomice iz fokusa F na direktrisu, onda je polovište dužine $\overline{NF}$ točka A koju nazivamo tjeme parabole.



Slika 4: Parabola

Iz slike 1.4 vidimo da vrijedi: $d(T, d) = d(T, F)$.

Jednadžba parabole

Središnja ili tjemena jednadžba parabole, to jest jednadžba parabole sa tjemenom u ishodištu koordinatnog sustava dana je s

$$y^2 = 2px,\ \ p \in \mathbb{R}^+$$

gdje je p poluparametar parabole. Parametar parabole $(2p)$ je duljina tetive parabole koja prolazi fokusom F parabole i okomita je na os parabole te vrijedi $F = \left(\frac{p}{2}, 0\right)$

Jednadžba parabole translatirane za vektor $a\vec{i} + b\vec{j}$, tj. jednadžba s tjemenom u točki $A = (a, b)$ glasi:

$$(y - b)^2 = 2p(x - a).$$

2 Identifikacija krivulja drugog reda

Krivulje drugog reda ili konike pripadaju u jedne od prvih proučavanih krivulja, a proučavale su se i definirale još od starogrčkih vremena. Prvi zapisi se pripisuju Menehmu, a sežu u 4. stoljeće prije Krista.

U ovom poglavlju definirat ćemo krivulje drugog reda kao i ostale osnovne pojmove potrebne za razumijevanje i provedbu postupka identifikacije krivulja drugog reda. Iskazat ćemo i najvažnije tvrdnje vezane uz postupak identifikacije. Definicije i tvrdnje su preuzete iz [1], [4] i [3].

2.1 Opća teorija krivulja drugog reda

Označimo s X_0 vektorski prostor $X_0(M)$ ravnine M.

Definicija 5. *Svako preslikavanje* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *nazivamo operator.*

Definicija 6. *Za operator* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *kažemo da je linearan ako* $(\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$ $(\forall x, y \in X_0)$ *vrijedi*

$$\mathcal{A}(\lambda x + \mu y) = \lambda \mathcal{A}(x) + \mu \mathcal{A}(y).$$

Definicija 7. *Kažemo da je kompleksni broj* $\lambda \in \mathbb{C}$ *svojstvena ili karakteristična vrijednost linearnog operatora* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *ako postoji ne-nul vektor* $x \neq 0$ *takav da bude*

$$\mathcal{A}x = \lambda x,$$

pri čemu vektor x *nazivamo svojstveni ili karakteristični vektor koji pripada svojstvenoj vrijednosti* λ.

Definicija 8. *Kažemo da je linearni operator* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *simetričan ako vrijedi*

$$\mathcal{A}x \cdot y = x \cdot \mathcal{A}y, \ \forall x, y \in X_0.$$

Teorem 1. *Ako je* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *simetrični linearni operator na vektorskom prostoru* $X_0 = X_0(M)$, *onda postoje realni brojevi* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *i ortonormirana baza* (e_1', e_2') *vektorskog prostora* X_0, *tako da bude*

$$\mathcal{A}e_1' = \lambda_1 e_1', \qquad \mathcal{A}e_2' = \lambda_2 e_2'.$$

Korolar 1. *Svojstvene vrijednosti simetričnog linearnog operatora* $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ *su realne, a odgovarajući svojstveni vektori međusobno okomiti.*

Definicija 9. *Kažemo da je linearni operator* $\mathcal{U} : X_0 \to X_0$ *ortogonalan ako je*

$$\mathcal{U}x \cdot \mathcal{U}y = x \cdot y, \ \forall x, y \in X_0.$$

Definicija 10. *Kvadratnu funkciju dviju varijabli* $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

nazivamo kradratna forma dviju varijabli.

Uz definiciju kvadratne forme definiramo linearni operator $\mathcal{A}\colon X_0 \to X_0$ kojemu u bazi (e_1, e_2) pripada simetrična matrica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

koju zovemo matrica kvadratne forme. Definirani linearni operator $\mathcal{A}$ je simetričan.

Definicija 11. *Kažemo da je kvadratna forma dviju varijabli $q\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$q(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2,\ a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R}$$

a) indefinitna, ako prima i pozitivne i negativne vrijednosti,

b) pozitivno semidefinitna, ako prima samo pozitivne vrijednosti,

c) negativno semidefinitna, ako prima samo negativne vrijednosti,

d) semidefinitna, ako prima samo pozitivne odnosno samo negativne vrijednosti,

e) pozitivno definitna, ako je pozitivno semidefinitna i ako je $q(x_1, x_2) = 0$ ekvivalentno sa $x_1 = x_2 = 0$,

f) negativno definitna, ako je negativno semidefinitna i ako je $q(x_1, x_2) = 0$ ekvivalentno sa $x_1 = x_2 = 0$,

g) definitna, ako je pozitivno ili negativno definitna.

Kriteriji za ispitivanje definitnosti kvadratne forme

Kvadratna forma q je:

a) indefinitna ako i samo ako je $\det A < 0$,

b) pozitivno semidefinitna ako i samo ako je $a_{11} \geq 0$, $a_{22} \geq 0$ i $\det A \geq 0$,

c) negativno semidefinitna ako i samo ako je $a_{11} \leq 0$, $a_{22} \leq 0$ i $\det A \geq 0$,

d) semidefinitna ako i samo ako je pozitivno semidefinitna ili negativno semidefinitna,

e) pozitivno definitna ako i samo ako je $a_{11} > 0$ i $\det A > 0$,

f) negativno definitna ako i samo ako je $a_{11} < 0$ i $\det A > 0$,

g) definitna ako i samo ako je pozitivno ili negativno definitna.

Definicija 12. *Skup svih nultočaka polinoma drugog reda dviju varijabli $\mathcal{P}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$\mathcal{P}(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0, \quad a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0 \in \mathbb{R}$$

pri čemu matrica prisutne kvadratne forme $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ nije nul-matrica nazivamo krivulja drugog reda.

Za točku $P = (x_1, x_2) \in M$ kažemo da je nultočka polinoma $\mathcal{P}$ ako vrijedi $\mathcal{P}(x_1, x_2) = 0$. Skup svih nultočaka polinoma $\mathcal{P}$ označimo sa S.

Teorem 2. *Neka je $S \subset M$ skup definiran jednadžbom $a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_0 = 0$ u pravokutnom koordinatnom sustavu i neka je A matrica linearnog operatora pridruženog toj jednadžbi. Tada, ako je:*

1. $\det A > 0$, *onda je S elipsa, kružnica ili skup koji sadrži samo jednu točku ili prazan skup.*

2. $\det A < 0$, *onda je S ili hiperbola ili unija dvaju ukrštenih pravaca.*

3. $\det A = 0$, *onda je S ili parabola ili unija dvaju paralelnih pravaca ili jedan pravac ili prazan skup.*

Napomena 1. *Dokaz prethodnog teorema se može vidjeti u [2].*

3 Primjeri

Ovo poglavlje sadržava po jedan riješeni primjer za svaku od osnovnih krivulja te je naveden još barem jedan primjer bez rješenja koji također identifikacijom daje navedenu krivulju. Svaki primjer je popraćen i pripadnim grafom.

Primjeri se mogu pronaći i u literaturi koja je navedena na kraju ovoga rada.

3.1 Elipsa

Primjer 1. *Identificirajmo skup točaka ravnine zadan jednadžbom*

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

Rješenje:
Za početak iščitajmo koeficijente dane jednadžbe:

$$a_{11} = 5, a_{12} = 2, a_{22} = 8, a_1 = -32, a_2 = -56, a_0 = 80.$$

Nadalje odredimo matricu prisutne kvadratne forme:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\det A = 5 \cdot 8 - 2 \cdot 2 = 40 - 4 = 36 > 0$ iz prethodnog teorema znamo da su moguća rješenja za ovu jednadžbu elipsa, kružnica, skup koji sadrži samo jednu točku ili prazan skup.
Vektor a je jednak: $a = a_1e_1 + a_2e_2 = -32e_1 - 56e_2$.
Nadalje računamo trag matrice A: $\mathrm{tr}A = 5 + 8 = 13$.
Sada imamo dovoljno podataka za traženje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora operatora A.
$P(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}A\lambda + \det A = \lambda^2 - 13\lambda + 36$
$\lambda_{1,2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \dfrac{13 \pm 5}{2}$
$\lambda_1 = \dfrac{13+5}{2} = 9$ i $\lambda_2 = \dfrac{13-5}{2} = 4$ ... pronašli smo svojstvene vrijednosti
Pripadni svojstveni vektori su:
$v_1 = \mathcal{A}e_1 - \lambda_2 e_1 = 5e_1 + 2e_2 - 4e_1 = e_1 + 2e_2$ i
$v_2 = \mathcal{A}e_1 - \lambda_1 e_1 = 5e_1 + 2e_2 - 9e_1 = -4e_1 + 2e_2$.
Kako bi smo pronašli zapis u novoj bazi u koordinatnom sustavu $(O_1; e_1', e_2')$ potrebno je normirati prethodno dobivene svojstvene vektore.
$||v_1|| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ i $||v_2|| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$e_1' = \dfrac{v_1}{||v_1||} = \dfrac{e_1 + 2e_2}{\sqrt{5}}$ i $e_2' = \dfrac{v_2}{||v_2||} = \dfrac{-2e_1 + e_2}{\sqrt{5}}$
Nadalje,
$b_1 = a \cdot e_1' = (-32e_1 - 56e_2)\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}e_1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}e_2\right) = -32 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{5}} + (-56) \cdot \dfrac{2}{\sqrt{5}} = -\dfrac{32}{\sqrt{5}} - \dfrac{112}{\sqrt{5}} = \dfrac{-144}{\sqrt{5}}$

$b_2 = a \cdot e_2' = (-32e_1 - 56e_2)\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}e_2\right) = -32 \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{5}} + (-56) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{64}{\sqrt{5}} - \frac{56}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$

Sada početna jednadžba prelazi u oblik:

$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + b_1 y_1 + b_2 y_2 + a_0 = 0$

$9y_1^2 + 4y_2^2 - \frac{144}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_2 + 80 = 0$

Grupiranjem i svođenjem na potpuni kvadrat dobivamo ljepši zapis ove jednadžbe iz kojeg možemo iščitati što je naše rješenje.

$9\left(y_1^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}y_1\right) + 4\left(y_2^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2\right) + 80 = 0$

$9\left(y_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{64 \cdot 9}{5} + 4\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4 \cdot 1}{5} + 80 = 0$

$9\left(y_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = -80 + \frac{64 \cdot 9}{5} + \frac{4 \cdot 1}{5}$

$9\left(y_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36 \qquad / : 36$

$\frac{(y_1 - \frac{8}{\sqrt{5}})^2}{4} + \frac{(y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}})^2}{9} = 1$

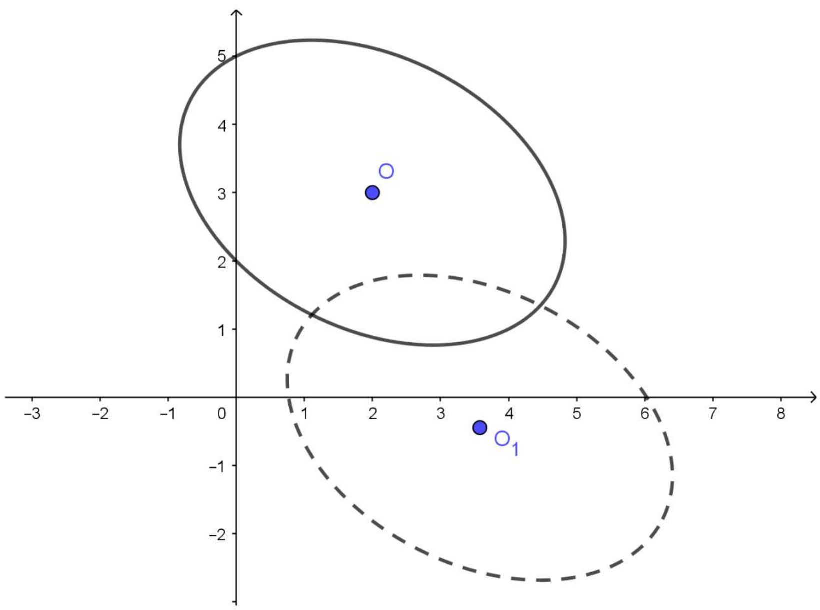
Ovo je elipsa sa središtem u točki $O_1 = \left(\frac{8}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ i poluosima 2 i 3.

Na kraju tražimo položaj naše krivulje u početnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

$\overrightarrow{OO_1} = \frac{8}{\sqrt{5}}e_1' - \frac{1}{\sqrt{5}}e_2' = \frac{8}{\sqrt{5}}\left(\frac{e_1 + 2e_2}{\sqrt{5}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{-2e_1 + e_2}{\sqrt{5}}\right)$

$\overrightarrow{OO_1} = \frac{8}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}e_1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{(-2)}{\sqrt{5}}e_1 + \frac{16}{5}e_2 - \frac{1}{5}e_2 = 2e_1 + 3e_2$

Iz ovog vidimo da se središte u $(O; e_1, e_2)$ nalazi u točki $O' = (2, 3)$.



Slika 5: Skup svih rješenja jednadžbe $5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0$

Primjer 2. *Identificirajmo skup točaka ravnine zadan jednadžbom*

$$17x_1^2 + 12x_1x_2 + 8x_2^2 + 20\sqrt{5}x_1 + 20 = 0$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

Rješenje:
Analognim postupkom kao u prethodnom primjeru dobiva se da je rješenje elipsa koja ima središte u početnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ u točki $O' = \left(\frac{-4}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$, a poluosi su jednake 1 i 2.

3.2 Hiperbola

Primjer 3. *Identificirajmo skup točaka ravnine zadan jednadžbom*

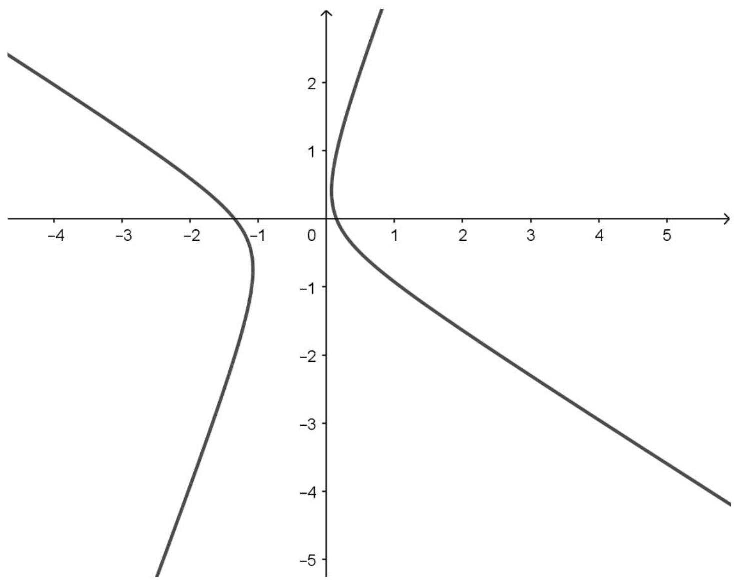
$$5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 - 1 = 0$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

Rješenje:
Matrica prisutne kvadratne forme:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\det A = -24 < 0$ iz prethodnog teorema znamo da su moguća rješenja za ovu jednadžbu hiperbola ili unija dvaju ukrštenih pravaca.
Svojstvene vrijednosti operatora su: $\lambda_1 = 6$ i $\lambda_2 = -4$.
Odgovarajući svojstveni vektori potrebni za novu bazu su:
$e_1' = \frac{1}{\sqrt{10}}(3e_1 + e_2)$ i $e_2' = \frac{1}{\sqrt{10}}(-e_1 + 3e_2)$
Jednadžba u novom koordinatnom sustavu glasi:
$6y_1^2 - 4y_2^2 + 2\sqrt{10}y_1 - 1 = 0$
Grupiranjem i svođenjem na potpuni kvadrat dobivamo ljepši zapis ove jednadžbe iz kojeg dolazimo do rješenja.
$6\left(y_1 + \frac{\sqrt{10}}{6}\right)^2 - 4y_2^2 = \frac{8}{3}$
Ovo je hiperbola sa središtem u točki $O_1 = \left(-\frac{\sqrt{10}}{6}, 0\right)$.
Na kraju tražimo položaj naše krivulje u početnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.
$\overrightarrow{OO_1} = \frac{-1}{2}e_1 - \frac{1}{6}e_2$
Iz ovog vidimo da se središte u $(O; e_1, e_2)$ nalazi u točki $O' = \left(\frac{-1}{2}, -\frac{1}{6}\right)$.



Slika 6: Skup svih rješenja jednadžbe $5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 + 6x_1 + 2x_2 - 1 = 0$

Primjer 4. *Identificirajmo skup točaka ravnine zadan jednadžbom*

$$x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 - \frac{8}{3} = 0$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

Rješenje:
Analognim postupkom kao u prethodnom primjeru dobiva se da je rješenje hiperbola koja ima središte u početnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ u točki $O' = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

3.3 Parabola

Primjer 5. *Identificirajmo skup točaka ravnine zadan jednadžbom*

$$12x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 + 13x_2 + \frac{25}{12} = 0$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

Rješenje:
Matrica prisutne kvadratne forme:

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kako je $\det A = 0$ iz prethodnog teorema znamo da su moguća rješenja za ovu jednadžbu parabola ili unija dvaju paralelnih pravaca ili jedan pravac ili prazan skup.
Svojstvene vrijednosti pripadnog linearnog operatora su: $\lambda_1 = 15$ i $\lambda_2 = 0$.
Odgovarajući svojstveni vektori potrebni za novu bazu su:

$e_1' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2e_1 + e_2)$ i $e_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}(-e_1 + 2e_2)$

Jednadžba u novom koordinatnom sustavu glasi:

$15y_1^2 + 5\sqrt{5}y_1 + 4\sqrt{5}y_2 + \frac{25}{12} = 0$

Grupiranjem i svođenjem na potpuni kvadrat dobivamo ljepši zapis ove jednadžbe iz kojeg dolazimo do rješenja.

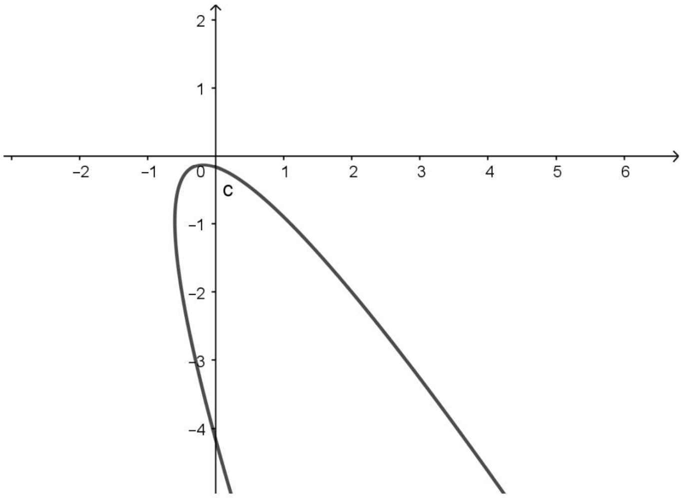
$15\left(y_1 + \frac{\sqrt{5}}{6}\right)^2 + 4\sqrt{5}y_2 = 0$

Ovo je parabola sa tjemenom u točki $O_1 = \left(-\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$.

Na kraju tražimo položaj naše krivulje u početnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

$\overrightarrow{OO_1} = \frac{-1}{3}e_1 - \frac{1}{6}e_2$

Iz ovog vidimo da se središte u $(O; e_1, e_2)$ nalazi u točki $O' = \left(\frac{-1}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.



Slika 7: Skup svih rješenja jednadžbe $12x_1^2 + 12x_1x_2 + 3x_2^2 + 6x_1 + 13x_2 + \frac{25}{12} = 0$

Primjer 6. *Identificirajmo skup točaka ravnine zadan jednadžbom*

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 + 50x_1 - 100x_2 + 25 = 0$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

Rješenje:

Analognim postupkom kao u prethodnom primjeru dobiva se da je rješenje parabola koja ima tjeme u početnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$ u točki $O' = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

4 Što još možemo dobiti identifikacijom?

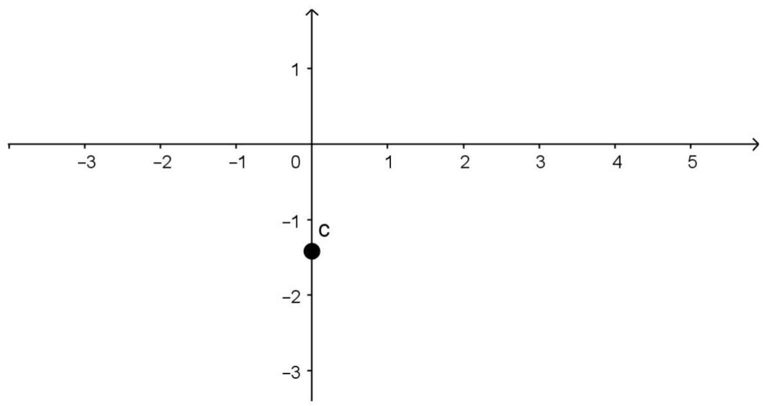
Zadnje poglavlje ovoga rada sadrži primjere identifikacije kad rješenje nije ni elipsa ni hiperbola ni parabola.

Primjer 7. *Identificirajmo skup točaka ravnine zadan jednadžbom*

$$2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 4\sqrt{2}x_2 + 4 = 0$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

Rješenje:
To je točka s koordinatama $T = (0, -\sqrt{2})$.



Slika 8: Skup svih rješenja jednadžbe $2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 2\sqrt{2}x_1 + 4\sqrt{2}x_2 + 4 = 0$

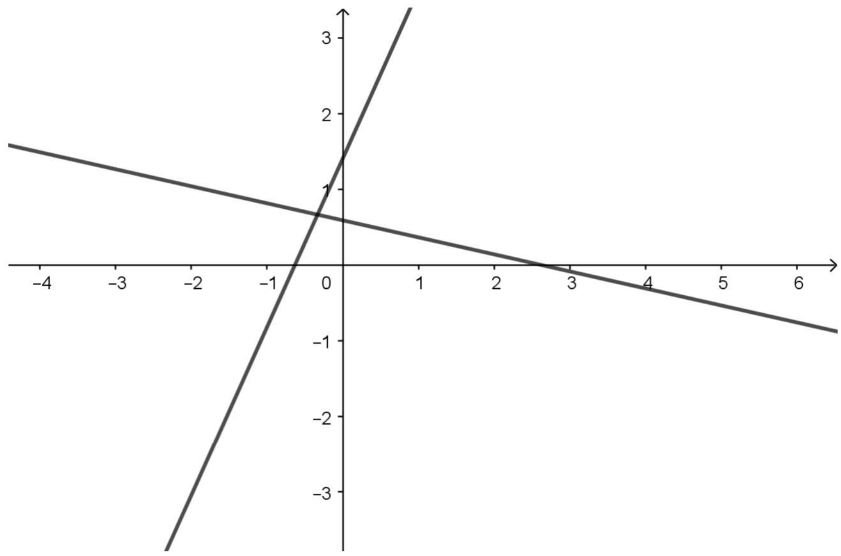
Primjer 8. *Identificirajmo skup točaka ravnine zadan jednadžbom*

$$x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 - \frac{5}{3} = 0$$

u pravokutnom koordinatnom sustavu $(O; e_1, e_2)$.

Rješenje:

Unija dvaju pravaca koji se sijeku u točki $T = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right)$.



Slika 9: Skup svih rješenja jednadžbe $x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 - \frac{5}{3} = 0$

Literatura

[1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika II*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.

[2] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1982.

[3] L. Čaklović, *Zbirka zadataka iz linearne algebre*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[4] R. Scitovski, D. Jankov Maširević, *Linearni operatori u ravnini*, dostupno na `http://www.mathos.unios.hr/geometrija/Materijali/Geo_2.pdf`