Svojstvene vrijednosti i njihova primjena u PageRanku

Božić, Tena

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tena Božić

Svojstvene vrijednosti i njihova primjena u PageRanku

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Tena Božić

Svojstvene vrijednosti i njihova primjena u PageRanku

Završni rad

Mentorica: izv.prof.dr.sc. Darija Marković

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom završnom radu proučit ćemo svojstvene vrijednosti i algoritam za rangiranje stranica na Googleu. Završni rad započinje definicijom linearnog operatora te opisivanjem matričnog prikaza operatora. U prvom dijelu rada definirane su svojstvene vrijednosti te su navedeni bitni teoremi, korolari i propozicije. Također je definiran i minimalni polinom. U drugom dijelu ovog završnog rada dotaknut ćemo se teme PageRank. Opis algoritma započinje formulom sumiranja. U ovom dijelu je opisan postupak određivanja PageRank vektora pomoću svojstvenih vrijednosti.

Ključne riječi: matrični prikaz, spektar, svojstvena vrijednost, minimalni polinom, PageRank

Abstract

In this bachelor thesis, we will study the eigenvalues and algorithm for ranking pages on Google. The bachelor thesis begins with the definition of the linear operator and the description of the matrix representation of the operator. In the first part of the paper, eigenvalues are defined and important theorems, corollas and propositions are given. The minimal polynomial is also defined. In the second part of this bachelor thesis, we will touch upon the subject of PageRank. The description of the algorithm begins with the summation formula. This section describes the procedure for determining PageRank vectors using eigenvalues.

Key words: matrix representation, spectrum, eigenvalue, minimal polynomial, PageRank

Sadržaj

Uvod

Tema ovog završnog rada su svojstvene vrijednosti te njihova primjena u algoritmu za rangiranje stranica na Googleu.

Završni rad započinje poglavljem o linearnim operatorima. U ovom poglavlju definiran je linearan operator te su dani jednostavni primjeri linearnih operatora. Definiran je skup linearnih operatora i pokazano je kako ovaj skup uz operacije zbrajanja po točkama i množenja skalarima po točkama ima strukturu vektorskog prostora. U potpoglavlju ovog poglavlja objašnjen je matrični prikaz linearnog operatora.

Drugo poglavlje je o spektru. Definirali smo svojstvenu vrijednost, svojstveni vektor i ostale bitne pojmove vezane uz spektar. U ovom poglavlju je objašnjen i algoritam za pronalazak svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora. Na kraju ovog poglavlja objašnjen je minimalni polinom.

Treće poglavlje je o PageRanku. Cilj ovog poglavlja je pokazati gdje se točno koriste svojstvene vrijednosti pri računanju PageRanka stranice. Poglavlje započinje formulom sumiranja. Zatim je objašnjen pojam slučajnog surfera te je na kraju prikazan način računanja PageRank vektora.

1 Definicija linearnog operatora

U ovom radu, definirat ćemo svojstvenu vrijednost pomoću linearnog operatora te je zbog te definicije potrebno definirati linearne operatore i prostor linearnih operatora. Definicije su preuzete iz [1].

Definicija 1.1. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje*

$$A : V \to W$$

zove se linearan operator ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay, \quad \forall x, y \in V, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Primjer 1.2.

1. Preslikavanje $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definirano s

   $$A(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, 0)$$

   je linearan operator.

2. Preslikavanje $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definirano s

   $$A(x_1, x_2) = (x_1 + 5x_2, 2x_1^3 - 4x^2, x_2 + 3)$$

   nije linearan operator. Ovo preslikavanje ne zadovoljava linearnost te ne preslikava nulvektor u nulvektor.

Kako bismo mogli definirati svojstvenu vrijednost, potrebno je uvesti definiciju prostora linearnih operatora.

Da bismo promatrali prostor linearnih operatora, bitno je da vektorski prostori, V i W budu nad istim poljem. Kad su ova dva vektorska prostora nad istim poljem, možemo promatrati skup $L(V, W)$. Taj skup nazivamo skup linearnih operatora s vektorskog prostora V u vektorski prostor W. Želimo i u skup $L(V, W)$ uvesti strukturu vektorskog polja.

Definicija 1.3. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Za $A, B \in L(V, W)$ definira se*

$$A + B : V \to W$$

s

$$(A + B)x = Ax + Bx.$$

Nadalje, za $A \in L(V, W)$ i $\lambda \in \mathbb{F}$, definira se

$$\lambda A : V \to W$$

s

$$(\lambda A)x = \lambda Ax.$$

Teorem 1.4. *Neka su V i W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Tada je i $L(V,W)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.*

Dokaz. Prvo trebamo pokazati da je zbrajanje $+$ doista binarna operacija na skupu $L(V,W)$. Odnosno, to znači da trebamo pokazati da je preslikavanje $A+B : V \to W$ linearno preslikavanje, tj. da vrijedi $(A+B)(\alpha x+\beta y) = \alpha(A+B)x+\beta(A+B)y$.

$$\begin{aligned}(A+B)(\alpha x+\beta y) &= A(\alpha x+\beta y)+B(\alpha x+\beta y)\\ &= \alpha Ax+\beta Ay+\alpha Bx+\beta By\\ &= \alpha Ax+\alpha Bx+\beta Ay+\beta By\\ &= \alpha(Ax+Bx)+\beta(Ay+By)\\ &= \alpha(A+B)x+\beta(A+B)y\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je $A+B \in L(V,W)$. Trebamo još dokazati da se λA nalazi u $L(V,W)$, tj. da je λA linearan operator. Treba vrijediti $(\lambda A)(\alpha x+\beta y) = \alpha(\lambda A)x+\beta(\lambda A)y$.

$$\begin{aligned}(\lambda A)(\alpha x+\beta y) &= \lambda A(\alpha x+\beta y)\\ &= \lambda(\alpha Ax+\beta Ay)\\ &= \lambda\alpha Ax+\lambda\beta Ay\\ &= \alpha(\lambda A)x+\beta(\lambda A)y\end{aligned}$$

□

Imamo još poseban slučaj, kad je $V = W$. Tada umjesto $L(V,V)$ jednostavnije pišemo $L(V)$.

1.1 Matrični prikaz linearnog operatora

Kako bismo definiciju svojstvenih vrijednosti prilagodili tako da ju razumijemo u terminima linearnih operatora, ali i u terminima matrica, potrebno je pokazati da je moguće definirati matrični zapis linearnih operatora.

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i neka je $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ neka baza vektorskog prostora V. Svaki se vektor $x \in V$ može zapisati u jedinstvenom obliku

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i.$$

Jednostupačnu matricu formiranu u obliku

$$[x]^e = \begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{F})$$

zovemo matrični zapis (prikaz) vektora x u bazi e.

Neka je sada operator $A \in L(V,W)$. Tada su zadane baze $e = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $f = \{f_1, \ldots, f_m\}$ za V, odnosno W. Iz propozicije o zadavanju na bazi i proširenju po linearnosti (pogledati [1], stranica 140, propozicija 5.1.5) znamo da je operator A potpuno određen svojim djelovanjem na bazi, tj. ako znamo $Ae_1, \ldots, Ae_n$, onda znamo djelovanje operatora A. Vektore $Ae_1, \ldots, Ae_n \in W$ možemo zapisati na način

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1, \ldots, m$$

Dobivene koeficijente možemo zapisati u obliku matrice

$$[A]_e^f = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mn} \end{bmatrix}$$

Ova matrica naziva se matrični zapis (prikaz) operatora A u paru baza (e, f).

2 Spektar

Poglavlje o spektru glavna je tema ovog završnog rada. Definicije iz ovog poglavlja, preuzete su iz [1].

2.1 Definicija svojstvene vrijednosti

Kod bilo kakvog računanja, cilj nam je račun obaviti što lakše. Tako je i s računanjem s matricama. Kod matričnog zapisa operatora, cilj nam je pronaći bazu u kojoj bi matrica operatora bila dijagonalna. Kad je matrica dijagonalna, onda dođemo jednostavnije do nekih podataka o matrici, kao što su njezin rang, trag, determinanta te inverz, ako postoji. Neka je $a = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ baza prostora V. Neka operatoru A pripada matrica

$$[A]_a^a = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix}.$$

Iz definicije matričnog prikaza linearnog operatora slijedi sustav jednakosti:

$$Aa_1 = \alpha_1 a_1, \quad Aa_2 = \alpha_2 a_2, \quad \ldots, \quad Aa_n = \alpha_n a_n.$$

Vektori a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ imaju svojstvo da ih operator A preslika u njima kolinearne vektore. To nas može dovesti do ideje da za linearan operator, promatramo postojanje, metode pronalaženja i svojstva takvih vektora.

Definicija 2.1. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Kaže se da je skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost operatora A ako postoji vektor $x \in V, x \neq 0$, takav da je*

$$Ax = \lambda_0 x.$$

Skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A naziva se spektar i označava se s $\sigma(A)$.

Naglasimo kako je λ_0 svojstvena vrijednost operatora A ako postoji netrivijalan vektor x sa svojstvom da je $Ax = \lambda_0 x$. Ovo je nužno zbog toga što bi inače svaki skalar λ bio svojstvena vrijednosti jer vrijedi:

$$A0 = \lambda 0.$$

Napomena 2.2. (a) Vektor x iz definicije svojstvene vrijednosti zove se svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Možemo primjetiti kako svojstveni vektor nije jedinstven. Ako je x svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0, onda je i αx svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0 i to za svaki $\alpha \in \mathbb{F}, \alpha \neq 0$.

$$A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha \lambda_0 x = \lambda_0(\alpha x).$$

(b) Neka je

$$V_A(\lambda_0) = \{x \in V : Ax = \lambda_0 x\}.$$

Ovaj skup nazivamo svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_0. Primijetimo da je $V_A(\lambda_0)$ doista potprostor jer vrijedi

$$V_A(\lambda_0) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I).$$

Uočimo da je skup $V_A(\lambda)$ uvijek potprostor od vektorskog prostora V, za svaki skalar λ. Ali svojstvene vrijednosti su oni skalari λ_0 za koje je vektorski potprostor $V_A(\lambda_0)$ netrivijalan.

(c) Ako je $\lambda_0 \in \sigma(A)$ onda se dimenzija svojstvenog potprostora $V_A(\lambda_0)$ naziva geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti λ_0 i označava se s $d(\lambda_0)$.

Definicija 2.3. *Neka je A kvadratna matrica. Polinom*

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

naziva se svojstveni polinom matrice A.

Definicija 2.4. *Neka su A, $B \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da je matrica B slična matrici A ako postoji regularna matrica $S \in GL(n, \mathbb{F})$ takva da je*

$$B = S^{-1}AS.$$

Propozicija 2.5. *Slične matrice imaju jednake svojstvene polinome.*

Dokaz. Uzmimo A, $B \in M_n$ i regularnu matricu $S \in M_n$ takvu da vrijedi

$$B = S^{-1}AS.$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned} k_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}AS - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \end{aligned}$$

Ove jednakosti vrijede zbog toga što jedinična matrica komutira s bilo kojom matricom. Zatim iskoristimo *Binet-Cauchyjev teorem* pa imamo:

$$\begin{aligned} k_B(\lambda) &= \det(S^{-1})\det(A-\lambda I)\det S \\ &= \det(A-\lambda I) \\ &= k_A(\lambda) \end{aligned}$$

$\square$

Propozicija (2.5) nam omogućuje da definiramo pojam svojstvenog polinoma i za linearne operatore $A : V \to V$, gdje je vektorski prostor V konačnodimenzionalan. Dakle, možemo odabrati neku bazu e za vektorski prostor V, pa možemo definirati matrični prikaz linearnog operatora u bazi e te možemo izračunati svojstveni polinom takve matrice. Kako je u svakoj drugoj bazi matrični prikaz tog operatora slična matrica matrici $[A]_e^e$, propozicija (2.5) povlači da svaki matrični prikaz operatora A dovodi do istog svojstvenog polinoma.

Definicija 2.6. *Neka je V konačnodimenzionalni prostor, neka je $A \in L(V)$ te neka je $[A]_e^e$ matrični zapis operatora A u nekoj bazi e prostora V. Svojstveni polinom operatora A, k_A definira se kao svojstveni polinom matrice $[A]_e^e$:*

$$k_A(\lambda) = k_{[A]_e^e}(\lambda)$$

Teorem 2.7. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $A \in L(V)$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{F}$ je svojstvena vrijednost operatora A ako i samo ako vrijedi*

$$k_A(\lambda_0) = 0.$$

Dokaz. Odaberemo neku bazu e za V. Sad imamo niz međusobno ekvivalentnih tvrdnji.
λ_0 je svojstvena vrijednost za A
$\Leftrightarrow \quad \exists x \in V, x \neq 0, Ax = \lambda_0 x$ (Ova ekvivalencija slijedi direktno iz definicije svojstvene vrijednosti)
$\Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I) \neq \{0\}$ (Ova ekvivalencija slijedi iz definicije jezgre)
$\Leftrightarrow \quad A - \lambda_0 I$ nije monomorfizam (Ovo slijedi iz propozicije koja kaže da je linearan operator A injekcija ako je $\mathrm{Ker}A = \{0\}$
$\Leftrightarrow \quad A - \lambda_0 I$ nije izomorfizam (Ovo slijedi iz korolara koji kaže da je linearan operator izomorfizam ako i samo ako je monomofrizam)
$\Leftrightarrow \quad [A - \lambda_0 I]_e^e$ nije regularna matrica
$\Leftrightarrow \quad [A]_e^e - \lambda_0 I$ nije regularna matrica
$\Leftrightarrow \quad \det([A]_e^e - \lambda_0 I) = 0$
$\Leftrightarrow \quad k_{[A]_e^e}(\lambda_0) = 0$, tj. $k_A(\lambda_0) = 0$ $\square$

Napomena 2.8. Možemo primijetiti kako teorem (2.7) tvrdi da su nultočke svojstvenog polinoma zapravo svojstvene vrijednosti tog operatora. Ali također možemo primijetiti kako je pretpostavka teorema da je $\lambda_0 \in \mathbb{F}$, odnosno to znači da u realnim prostorima svojstvene vrijednosti poprimaju samo vrijednosti realnih nultočkaka svojstvenog polinoma.

Napomena 2.9. Ako je dimenzija vektorskog prostora jednaka n, tj $\dim V = n$, i ako je $A \in L(V)$, onda linearan operator A može imati najviše n svojstvenih vrijednosti.

Napomena 2.10. Kod teorema (2.7) postaje nam vidljivo da se teorija treba posebno razmatrati s obzirom na polje nad kojem je definiran linearan operator. Polje komplesnih brojeva je algebarski zatvoreno, odnosno to znači da svaki polinom s kompleksnim koeficijentima ima nultočku u polju komplesnih brojeva, dok polje realnih brojeva nije algebarski zatvoreno, što znači da postoje polinomi s realnim koeficijentima koji nemaju realne nučtočke. Posljedica toga je što operatori na realnim prostorima ne moraju imati svojstvene vrijendosti.

Nakon što smo zapisali ove teoreme i definicije, možemo doći do algoritma za računanje svojstvenih vrijednosti. Za početak skalar λ je svojstvena vrijednost ako i samo ako je $k_A(\lambda) = 0$, tj. ako je λ nultočka svojstvenog polinoma k_A.
Algoritam za pronalaženje svih svojstvenih vrijednosti i njihovih svojstvenih vektora:

1. Rješavamo jednadžbu
$$\det(A - \lambda I) = 0.$$
2. Rješenja te jednadžbe su skalari $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$, $k \leq n$. Prema napomeni (2.10) teorija se dijeli na komplesknu i realnu. U slučaju operatora nad poljem komplesnih brojeva, svi skalari bit će svojstvene vrijednosti, dok u realnom slučaju, samo skalari iz skupa realnih brojeva bit će svojstvene vrijednosti.
3. Rješavamo sustav
$$(A - \lambda_i I)x = 0.$$
4. Rješavanjem tog sustava dobijemo svojstvene vektore pridružene tim svojstvenim vrijednostima.

Primjer 2.11. Neka je
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
Odredimo svojstvene vrijednosti, svojstvene vektore i svojstveni potprostor od A. Svojstvene vrijednosti su nultočke svojstvenog polinoma $k_A(\lambda)$.
$$\begin{aligned} k_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) \\ &= \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) \\ &= \det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \end{aligned}$$
Za $k_A(\lambda) = 0$ slijedi da su svojstvena vrijednost $\lambda_{1,2} = 1$.

Sad trebamo pronaći svojstveni vektor za $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned}
&Ax = \lambda x \\
&(A - \lambda I)x = 0 \\
&(A - I)x = 0 \\
&\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je $x_1 = 0$ i da je $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Svojstveni vektori svojstvene vrijednosti $\lambda_{1,2} = 1$ su oblika

$$\begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

za $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Npr.

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Svojstveni prostor:

$$V_A(1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Definicija 2.12. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Neka je*

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda), \quad p(\lambda_0) \neq 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Broj l zovemo algebarskom kratnošću svojstvene vrijednosti λ_0 i označavamo ga s $l(\lambda_0)$.

Teorem 2.13. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te neka je $A \in L(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Tada je*

$$d(\lambda_0) \leq l(\lambda_0).$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [1], str. 177, teorem 5.5.15.

Napomena 2.14. Zbog manjka svojstvenih vrijednosti, za proizvoljan linearan operator općenito je nemoguće pronaći bazu u kojoj bi njegov matrični prikaz bila dijagonalna matrica. Ali svejedno postoji mogućnost za operatore definirane na kompleksnim prostorima i za operatore definirane na realnim prostorima čiji svojstveni polinomi imaju samo realne nultočke.

Iz teorema (2.13) možemo vidjeti još jedan mogući problem za postojanje dijagonalnog matričnog zapisa operatora. Ako je za neku svojstvenu vrijednost geometrijska kratnost strogo manja od algebarske kratnosti, onda ne postoji dijagonalni matrični zapis operatora. Ako je matrični zapis operatora dijagonalna matrica, na dijagonali te matrice svojstvena vrijednost λ_0 mora se pojaviti točno $l(\lambda_0)$ puta. A ovo zahtjeva točno $l(\lambda_0)$ nezavisnih svojstvenih vektora pridruženih λ_0. Ovo pokazuje da je nužan uvjet dijagonalizacije operatora jednakost geometrijske i linearne kratnosti svih njegovih svojstvenih vrijednosti:

$$d(\lambda) = l(\lambda), \quad \forall \lambda \in \sigma(A)$$

Sljedeći teorem bit će potreban za dokaz korolara (2.16).

Teorem 2.15. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$,*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\},$$

te neka je $e^{(i)} = \{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}\}$ baza za svojstveni potprostor $V_A(\lambda_i)$, $i = 1, \dots, k$. Tada je unija $\bigcup_{i=1}^{k} e^{(i)}$ linearno nezavisan skup u V.

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [1], str. 179, teorem 5.5.18

Korolar 2.16. *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalan vektorski prostor, neka je $A \in L(V)$ te neka je*

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots \lambda_k\}.$$

Operator A se može dijagonalizirati (tj. postoji baza od V u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica) ako i samo ako su geometrijska i algebarska kratnost svih svojstvenih vrijednosti od A jednake.

Dokaz. U napomeni (2.14) vidjeli smo da je nužan uvjet jednakost geometrijske i algebarske kratnosti. Obratno, iz uvjeta korolara imamo da je vektorski prostor V kompleksan, pa je svojstveni polinom oblika

$$k_A(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{l_1} \cdots (\lambda - \lambda_k)^{l_k},$$

gdje je

$$l_1 + \cdots l_k = n = \dim V.$$

Kad iskoristimo teorem (2.15) imamo: unija baza svojstvenih potprostora je linearno nezavisan skup koji zbog pretpostavke o jednakosti geometrijskih i algebarskih kratnosti ima točno n elemenata i baš zato čini bazu za V. U toj bazi matrica operatora A je dijagonalna. □

2.2 Minimalni polinom

Za kraj ostalo nam je još objasniti minimalni polinom. Definicije i teoremi preuzeti su iz [4].

Neka je V konačnodimenzionalni prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te neka je $A \in L(V) = L(V, V)$. Definirajmo potencije operatora A:

$$\begin{aligned}
A^0 &= I \\
A^1 &= A \\
A^2 &= A \cdot A \\
A^3 &= A \cdot A^2 = A^2 \cdot A \\
&\vdots \\
A^k &= A \cdot A^{k-1}.
\end{aligned}$$

Hamilton-Cayleyev teorem ([1], stranica 185, teorem 5.5.22) nam garantira da operatori $I, A, A^2, \ldots, A^n$ ne mogu biti linearno nezavisni za svaki $n \in \mathbb{N}$. Zato, neka je m najmanji prirodan broj takav da je $A^m \in [\{I, A, \ldots, A^{m-1}\}]$. Drugim riječima, neka je m takav da su $I, A, \ldots, A^{m-1}$ linearno nezavisni, a $I, A, \ldots, A^{m-1}, A^m$ su linearno zavisni. Kako je $A^m \in [\{I, A, \ldots, A^{m-1}\}]$, njega možemo prikazati kao linearnu kombinaciju njegovih prethodnika. Neka su $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ skalari polja $\mathbb{F}$ takvi da je

$$A^m = \mu_1 A^{m-1} + \mu_2 A^{m-2} + \cdots + \mu_{m-1} A + \mu_m I.$$

Označimo s $\mu_A(\lambda)$ polinom

$$\mu_A(\lambda) = \lambda^m - \mu_1 \lambda^{m-1} - \cdots - \mu_{m-1}\lambda - \mu_m.$$

Tada je $\mu_A(A) = 0$. Polinom $\mu_A(\lambda)$ naziva se minimalni polinom operatora A. Minimalni polinom je normiran, odnosno vodeći koeficijent jednak je 1.

Teorem 2.17. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$ i neka je m stupanj minimalnog polinoma $\mu_A(\lambda)$ operatora A.*

(a) $\mu_A(\lambda)$ je polinom najnižeg stupnja među svim netrivijalnim polinomima $P(\lambda)$ takvima da je $P(A) = 0$.

(b) Za polinom $P(\lambda)$ vrijedi $P(\lambda) = 0$ ako i samo ako je polinom $P(\lambda)$ djeljiv s polinomom $\mu_A(\lambda)$, tj. ako i samo ako je $P(\lambda) = Q(\lambda)\mu_A(\lambda)$ za neki polinom $Q(\lambda)$.

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [4], str. 36, teorem 3.1

Teorem 2.18. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je spektar operatora A skup svih nultočaka njegovog minimalnog polinoma.*

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [4], str. 39, teorem 3.3

Teorem 2.19. *Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je*

$$\deg \mu_A(\lambda) \leq \dim V.$$

Dokaz. Dokaz se može pronaći u [4], str. 40, teorem 3.4

3 PageRank

PageRank je algoritam koji Google koristi za rangiranje mrežnih stranica. Pomoću PageRanka možemo mjeriti važnost internetskih stranica. PageRank radi po principu: stranica je bitna ako na nju ukazuju druge bitne stranice. Cilj ovog poglavlja je pokazati primjenu linearne algebre i svojstvenih vrijednosti pri definiranju algoritma. Objašnjenje algoritma preuzeto je iz [5].

3.1 Formula sumiranja

U daljnjem objašnjavanju, PageRank predstavlja rang određene stranice, a ne algoritam.

Napomena 3.1. Bitno je objasniti određene pojmove za bolje razumjevanje teksta:

- Dolazna poveznica (*eng. inlinks*) - hiperveza na tuđoj internetskoj stranici koja usmjeruje ljude na tvoju stranicu [2].
- Odlazna poveznica (*eng. outlinks*) - HTML kod na vašoj stranici koji posjetiteljima na vašoj stranici omogućuje pristup drugim internetskim stranicama [2].
- Matrica susjedstva - matrica koja sadrži nule i jedinice. Element ove matrice na poziciji (i, j) je 1 ako postoji brid između čvorova i i j, u suprotnom je 0 [5].
- Rijetka matrica - matrica u kojoj je većina elemenata jednaka 0 [8].
- Stohastička matrica - nenegativna matrica u kojoj je suma elemenata svakog reda jednaka 1 [5].
- Ireducibilna matrica - matrica A je reducibilna ako postoji matrica permutacije P takva da je
$$P^T AP = \begin{bmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{bmatrix}$$
gdje su X i Z kvadratne. Matrica je ireducibilna kada nije reducibilna [5].
- Viseći čvorovi - predstavljaju čvorove bez odlaznih poveznica [5].
- Gusta matrica - matrica u kojoj je većina elemenata različita od 0 [8].
- Aperiodička matrica - kvadratna matrica A za koju vrijedi $A^{k+1} = A$ za k pozitivan cijeli broj naziva se periodička. Matrica je aperiodička kada nije periodička [7].

Za početak, dobro je znati da su Brin i Page konstruirali PageRank. Objašnjavanje algoritma, oni su započeli jednostavnom formulom sumiranja. PageRank neke stranice P_i, označeno s $r(P_i)$, je zbroj PageRankova svih stranica usmjerenih prema P_i. Formula sumiranja, na početku izgledala je ovako:

$$r(P_i) = \sum_{P_j \in B_{P_i}} \frac{r(P_j)}{|P_j|} \tag{1}$$

gdje je B_{P_j} skup svih stranica usmjerenih prema P_i i $|P_j|$ je broj svih odlaznih poveznica stranice P_j. Prvi problem koji se pojavio s ovom formulom sumiranja (1) je taj što su vrijednosti $r(P_j)$, koje predstavljaju PageRank stranica koje imaju dolazne poveznice do stranice P_i, bile nepoznate. Kako bi se riješio taj problem nepoznatih vrijednosti, potrebno je koristiti iterativnu metodu. Brin i Page, kako bi riješili ovaj problem, na početku su pretpostavili da svaka stranica ima jednak PageRank (na početku su uzeli vrijednost $1/n$, gdje je n broj stranica u Googlevom indeksu). Sada formula sumiranja (1) može izračunati $r(P_i)$ za svaku stranicu P_i. Sada se formula (1) može uspješno primijeniti tako da zamijeni vrijednosti prethodnog ponavljanja u $r(P_j)$. Kako bismo definirali iterativnu metodu, potrebno je uvesti još nekoliko oznaka. Neka je $r_{k+1}(P_i)$ PageRank stranice P_i na iteraciji $k+1$. Tada je

$$r_{k+1}(P_i) = \sum_{P_j \in B_{P_i}} \frac{r_k(P_j)}{|P_j|} \tag{2}$$

Ovaj proces započinje vrijednošću $r_0(P_i) = 1/n$ za sve stranice P_i. Ovaj proces ponavlja se s očekivanjem da će rezultat PageRanka nakon nekog vremena konvergirati u neku konačnu vrijednost.

Jednadžbe (1) i (2) računaju PageRank jedne stranice u jednom trenutku. Kada bismo koristili matrice, dobili bismo mogućnost da zamijenimo sumiranje te bismo na svakoj iteraciji mogli izračunati PageRank vektor, koji je oblika $1 \times n$. Taj bi vektor sadržavao informacije o PageRank vrijednostima svake stranice u indeksu. Kako bi ovo bilo moguće, potrebno je definirati $n \times n$ matricu $\mathbf{H}$ i $1 \times n$ vektor π^T. Matrica $\mathbf{H}$ je hiperlink normirana po redu matrica pri čemu je $\mathbf{H}_{ij} = 1/|P_i|$ ako ima poveznicu od čvora i do čvora j, u suprotnom iznosi 0. Matrica $\mathbf{H}$ strukturom podsjeća na binarnu matricu susjedstva, ali ipak su njezini nenul elementi vjerojatnosti.

U toj matrici $\mathbf{H}$, nenul elementi reda i odgovaraju odlaznim poveznicama stranica stranice i, dok nenul elementi stupaca i odgovaraju dolaznim poveznicama stranica stranice i. Nakon svega ovoga možemo definirati vektor $\pi^{(k)T}$. Taj vektor je PageRank vektor k-te iteracije. Korištenjem ovih ovih oznaka, jednadžba (2) može biti zapisana u obliku

$$\pi^{(k+1)T} = \pi^{(k)T}\mathbf{H} \tag{3}$$

Neka opažanja koja su proizašla iz novo definirane jednadžbe (3).

1. $\mathbf{H}$ je jako rijetka matrica.
2. Iterativni proces jednadžbe (3) je jednostavan linearan stacionarni proces.
3. $\mathbf{H}$ izgleda kao prijelazna stohastička matrica vjerojatnosti za Markovljev lanac.

3.2 Teorija Markovljevih lanaca

Uz znanje iz Markovljevih lanaca, možemo znati kako za bilo koji početni vektor, metoda potencija korištena na Markovljevoj matrici $\mathbf{P}$ konvergira u jedinstven pozitivan vektor koji zovemo stacionarni vekor dok god je Markovljeva matrica $\mathbf{P}$ stohastička, ireducibilna i aperiodička. Možemo riješiti probleme konvergencije ako se matrica $\mathbf{H}$ jako malo izmijeni pa postane Markovljeva matrica s ovim svojstvima.

3.3 Prilagođavanja osnovnom modelu

Godine 1998, Brin i Page, opisali su svoje prilagodbe u radu. Zanimljivost njihovog tadašnjeg rada je ta što se ni jednom ne spominju Markovljevi lanci, iako vidimo njihovu važnost za ovaj algoritam.

Kako Brin i Page nisu koristili Markovljeve lance i njihova svojstva, morali su na drugačiji način opisati svoje promjene. Kako bi to napravili uveli su pojam **slučajnog surfera.** Za početak zamislite nekog internet surfera koji nasumično poskakuje po strukturi hiperveza na mreži. Odnosno, kad dođe na neku stranicu s nekoliko odlaznih poveznica, on nasumično izabere jednu odlaznu poveznicu pa napravi hipervezu s novom stranicom. I tako nastavi ovaj posve slučajan postupan odlučivanja na neodređeno vrijeme. Iz ovoga dobijemo kako je omjer vremena koju slučajni surfer provede na stranici mjera relativne važnosti te stranice. Odnosno, ako on velik dio svog vremena provede na nekoj stranici, a nasumično je pratio strukturu hiperveza, onda se taj slučajni surfer mora više puta naći baš na toj stranici. Iz toga možemo zaključiti kako stranice koje ponovno posjeti moraju biti bitne zato što je baš na te stranice bio usmjeren preko drugih bitnih stranica. Ali čak i slučajni surfer stvara nove probleme. Problemi sa slučajnim surferom nastaju kad dođe do visećih čvorova.

Algoritam za sortiranje ne bi bio potpun da se nisu riješili problemi, pa su Brin i Page morali pronaći rješenje i za ovaj problem. Kako bi se riješio ovaj problem, Brin i Page su definirali novu promjenu koja se zove stohastička promjena jer su 0^T red u matrici $\mathbf{H}$ zamijenili s $1/n\mathbf{e}^T$ te su tako matricu $\mathbf{H}$ napravili stohastičkom. Kao rezultat te promjene je bilo da kad slučajni surfer dođe do visećeg čvora, može koristit hipervezu i otići na bilo koju nasumičnu stranicu.

Zbog stohastičke promjene, matematički možemo pokazati kako je matrica $\mathbf{S}$ nastala iz matrice $\mathbf{H}$. Odnosno, $\mathbf{S} = \mathbf{H} + \mathbf{a}(1/n\mathbf{e}^T)$, gdje je $a_i = 1$ ako je stranica i visećeg čvora i 0 u suprotnom. Binarni vektor $\mathbf{a}$ naziva se vektor visećeg čvora.

Promjene osiguravaju da je matrica $\mathbf{S}$ stohastička, a to znači da je ta matrica $\mathbf{S}$ stohastička matrica prijelaza za Markovljev lanac. Ali, ta matrica sama ne može osigurati konvergenciju rezultata. Zbog toga bila je potrebna još jedna promjena, pa su Brin i Page napravili još jednu promjenu - promjenu primitivnosti. S ovom promjenom matrica koja se dobije kao rezultat je stohastička i primitivna. Matrica je primitivna kad je reducibilna i aperiodička. Iz ovoga slijedi kako postoji jedinstven stacionarni vektor lanca, koji je u ovom slučaju PageRank vektor, i koji se može pronaći jednostavnom iteracijom potencija. Sad opet Brin i Page koriste pojam slučajnog surfera kako bi, ovog puta, objasnili Markovljeva svojstva.

Točno je to da slučajni surfer slijedi strukturu hiperveza, ali ponekad dosadi slučajnom surferu samo to slijediti pa onda napusti surfanje metodom hiperveza tako da pristupi nekom novom odredištu. A kad se ovo dogodi, slučajni surfer se zapravo "teleportira" na novu stranicu, gdje započinje surfanje metodom hiperveza, i tako sve do sljedeće teleportacije. Kako bi se ovo matematički modeliralo, bilo je potrebno uvesti novu matricu $\mathbf{G}$,

$$\mathbf{G} = \alpha\mathbf{S} + (1-\alpha)1/n\mathbf{e}\mathbf{e}^T$$

gdje je α skalar od 0 do 1. Matrica $\mathbf{G}$ zove se Google matrica. U ovom modelu, α je parametar koji kontrolira proporciju vremena koju slučajni surfer prati hiperveze u odnosu na teleportiranje. Na primjer, neka je $\alpha = 0.7$. Tada 70% vremena slučajni surfer prati hiperveze, a 30% vremena teleportira se na nove stranice. Teleportiranje surfera je u potpunosti nasumično zato što je matrica teleportiranja $\mathbf{E} = 1/n\mathbf{e}\mathbf{e}^T$ uniformna, što znači da je surferu jednako vjerojatno, kad se teleportira, da skoči na bilo koju stranicu.

Nekoliko posljedica zbog primitivnih promjena:

- $\mathbf{G}$ je stohastička
- $\mathbf{G}$ je ireducubilna
- $\mathbf{G}$ je aperiodička
- $\mathbf{G}$ je primitivna
- $\mathbf{G}$ je gusta matrica

Ukratko, Googleova prilagođena PageRank metoda je

$$\pi^{(k+1)T} = \pi^{(k)T}\mathbf{G} \tag{4}$$

što je jednostavno metoda potencija primijenjena na matricu $\mathbf{G}$.

3.4 Računanje PageRank vektora

Kako je glavna tema ovog završnog rada svojstva vrijednost, zapravo nam je najbitnije povezati PageRank sa svojstvenim vrijednostima. A to je objašnjeno upravo u ovom poglavlju.

Problem PageRanka može se riješiti na dva načina:

1. Riješiti problem svojstvene vrijednosti za π^T.

$$\begin{aligned} \pi^T &= \pi^T\mathbf{G} \\ \pi^T\mathbf{e} &= 1. \end{aligned}$$

2. Riješiti sustav linearnih homogenih jednadžbi za π^T.

$$\begin{aligned} \pi^T(\mathbf{I} - \mathbf{G}) &= 0^T \\ \pi^T\mathbf{e} &= 1. \end{aligned}$$

U prvom slučaju, cilj je pronaći normirani svojstveni vektor matrice $\mathbf{G}$. Kako je matrica $\mathbf{G}$ stohastička, znamo da je svojstvena vrijednost $\lambda_1 = 1$. Zato je cilj pronaći vektor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti $\lambda_1 = 1$. U drugom slučaju, cilj je pronaći normirani vektor od $\mathbf{I}-\mathbf{G}$. Kada bi matrica $\mathbf{G}$ bila dimenzije 6×6, samo bismo pronašli π^T i normirali ga. Ali za matricu veličine interneta, pri čemu internet sadrži najmanje 5,11 milijardi stranica, proces pronalaska normiranog vektora bio bi puno kompliciraniji. Bilo bi potrebno upotrijebiti neke napredne i efektivne metode. Kako je π^T stacionaran vektor Markovljevog lanca s matricom tranzicije $\mathbf{G}$, provedeno je mnogo istraživanja o računanju stacionarnog vektora za generalan Markovljev lanac, pa imamo ideju o računanju. Ali, zbog posebnih svojstava PageRank matrice $\mathbf{G}$, jedna numerička metoda čini se najboljim izborom. A to je metoda potencija.

Metoda potencije je jedna od najstarijih i najjednostavnih iterativnih metoda za pronalaženje dominantnih svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora matrice. Ali, ono što je nama bitno, može se koristiti i za pronalazak stacionarnih vektora Markovljevog lanca. Stacionarni vektor je jednostavno dominantan svojstveni vektor Markovljeve matrice. Problem kod metode potencija je taj što je metoda potencija najsporija od svih dostupnih iterativnih metoda. Iako je ta metoda najsporija, postoji nekoliko dobrih razloga zašto su baš nju odabrali Brin i Page.

Prvo, metoda potencija je jednostavna. Metoda potencije primijenjena na matricu $\mathbf{G}$ (jednadžba (4)), može biti napisana u terminima matrice $\mathbf{H}$.

$$\begin{aligned}
\pi^{(k+1)T} &= \pi^{(k)T}\mathbf{G} \\
&= \alpha\pi^{(k)T}\mathbf{S} + \frac{1-\alpha}{n}\pi^{(k)T}\mathbf{e}\mathbf{e}^T \\
&= \alpha\pi^{(k)T}\mathbf{H} + (\alpha\pi^{(k)T}\mathbf{a} + 1 - \alpha)\mathbf{e}^T/n.
\end{aligned}$$

Množenje vektora i matrice ($\pi^{(k)T}\mathbf{H}$) izvode se na rijetkoj matricu $\mathbf{H}$, i matrice $\mathbf{S}$ i $\mathbf{G}$ nikad se ne pohranjuju, jedino njihove komponente prvog ranga, $\mathbf{a}$ i $\mathbf{e}$ su potrebne.

Drugi razlog, metoda potencija dobro koristi prostor, odnosno ne zauzima previše prostora. Mora se pohraniti samo trenutna iteracija vektora $\pi^{(k)T}$.

Zadnji je razlog korištenja metode potencije zbog potrebnog broja iteracija.

Literatura

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, d. d., Zagreb, 2008.

[2] Easy tech junkie, What is an Outlink?, URL: `https://www.easytechjunkie.com/what-is-an-outlink.htm` (zadnji put posjećeno 21.8.2021.)

[3] D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika I*, Odjel za matematiku, Osijek, 1998.

[4] H. Kraljević, *Vektorski prostori*, Odjel za matematiku, Osijek, 2008.

[5] N. Langville i D. Mexer, *Google's PageRank and beyond: the science of search engine rankings*, Princeton University Press, New Jersey, 2006.

[6] PageRank, URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/PageRank` (zadnji put posjećeno 31.8.2021.)

[7] Periodic matrix, URL: `https://mathworld.wolfram.com/PeriodicMatrix.html` (zadnji put posjećeno 21.9.2021.)

[8] Sparse matrix, URL: `https://en.wikipedia.org/wiki/Sparse_matrix` (zadnji put posjećeno 1.9.2021.)

[9] The size of the World Wide Web (The Internet), URL: `https://www.worldwidewebsize.com/` (zadnji put posjećeno 21.9.2021.)