# Turanov teorem

**Rechner, Matej**

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matej Rechner

# Turánov teorem

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Matej Rechner

# Turánov teorem

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Snježana Majstorović

Osijek, 2021.

# Turán's theorem


## Sažetak

U ovom radu naveden je Turánov teorem i neki njegovi dokazi. Najprije su navedena dva različita dokaza za jednostavni specijalni slučaj teorema, poznat kao Mantelov teorem, a zatim je detaljno navedeno pet različitih dokaza za općeniti slučaj. Prva tri dokaza se uglavnom oslanjaju na teoriju grafova i metode prebrojavanja, a preostala dva na matematičku analizu, algebru i vjerojatnost.



## Ključne riječi

multipartitan graf, klika, Turánov graf, Turánov teorem



## Abstract

This paper deals with Turán's theorem and some of it's proofs. At first, two different proofs are given for special simple case of Turán's theorem called Mantel's theorem. Then, five proofs are listed for the general case. First three rely almost exclusively on graph theory and counting methods, while the other two rely on mathematical analysis, algebra, and probability.



## Key words

multipartite graph, clique, Turán graph, Turán's theorem

# Sadržaj

# 1 Uvod

Pál Turán je bio vrsni mađarski matematičar čije je glavno područje istraživanja bila ekstremalna kombinatorika, a značajnu suradnju imao je s velikim matematičarom Paulom Erdösom: trajala je 46 godina i rezultirala s 28 zajedničkih znanstvenih radova.

Turán se rodio 18. kolovoza 1910. u Budimpešti. Učiteljsku diplomu iz matematike i znanosti dobio je na Sveučilištu u Budimpešti 1933., a doktorirao je pod vodstvom Leopolda Fejéra 1935. godine na Eötvös Loránd Sveučilištu. Skoro trideset godina je radio zajedno s Fejérom, što je vidljivo iz brojnih zajedničkih radova iz matematičke analize, no najviše je bio privučen teoriji brojeva i u tom području je ostvario rezultat međunarodnog značaja. Radi židovskog podrijetla Turán je bio diskriminiran pa mu je nakon završenog doktorskog studija bilo teško dobiti posao na sveučilištu. Godine 1938. kada je dobio posao pomoćnog učitelja, dodatno je zarađivao držeći instrukcije. Tijekom drugog svjetskog rada bio je prisiljen raditi u radnom logoru, no čak ni to nije zaustavilo njegovo istraživanje. Radio je bez knjiga i kolega te pisao ideje na komadiće papira. Nakon rata je dobio priliku da ostvari svoje sposobnosti. Godine 1949. dobio je posao redovitog profesora na budimpeštanskom sveučilištu. Predavao je algebru i teoriju brojeva i na toj poziciji je ostao skoro trideset godina. Dobio je dvije Kossuth nagrade mađarske vlade, te Szele nagradu János Bolyai Matematičkog Društva. Bio je visoko cijenjen u međunarodnim profesionalnim krugovima, što se vidi iz njegovih brojnih predavanja na drugim sveučilištima i sudjelovanja u uredništvu cijenjenih matematičkih časopisa. Brojni matematičari iz cijeloga svijeta dolazili su kod Turána pisati disertacije pod njegovim vodstvom. S prijateljima je volio raspravljati o matematici i matematičkim istraživanjima. Govorio je kako napredak u matematici dolazi kroz rješavanje otvorenih problema: ispočetka dokaz može biti vrlo kompliciran, no prije ili kasnije bit će pronađene lakše metode. Metoda i elegancija dokaza su sekundarni.

U ovom radu ćemo se fokusirati na Turánov doprinos teoriji grafova, konkretno na iznimno važan teorem koji danas nosi njegovo ime: Turánov teorem. Radi se o jednom od fundamentalnih rezultata u navedenom području koji služi kao početna točka za brojne druge probleme. Navest ćemo dokaze koji su otkriveni i ponovno otkriveni, od kojih se neki ne oslanjaju samo na teoriju grafova, nego i na druge grane matematike poput algebre i vjerojatnosti.

Drugi odjeljak sadrži osnovne pojmove, definicije i tvrdnje koje će nam trebati dalje u radu, a u trećem odjeljku su definirani Turánovi grafovi i neka njihova svojstva. Ostatak rada posvećen je dokazima Turánovog teorema, najprije dokazu specijalnog slučaja, poznatog kao Mantelov teorem, a zatim je navedeno pet različitih dokaza glavnog teorema.

# 2 Osnovni pojmovi i definicije

Pojasnimo najprije osnovne pojmove koji će nam trebati za proučavanje Turánovih grafova. Broj elemenata nekog skupa $A$ označit ćemo s $|A|$ i još ga zvati *kardinalitetom* skupa $A$. Također, s $\binom{n}{k}$ ćemo označiti broj svih podskupova s $k$ elemenata nekog skupa od $n$ elemenata.

**Definicija 1.** *Jednostavan neusmjeren graf* je uređen par $G = (V, E)$, gdje je $\emptyset \neq V = V(G)$ skup *vrhova*, a $E = E(G) \subseteq \binom{|V|}{2}$ skup *bridova* od $G$. Svaki brid $e \in E$ spaja dva vrha $u, v \in V$ koji se zovu *krajevi* od $e$.

Radi jednostavnosti ćemo u nastavku pisati o grafovima, a podrazumijevati da su to jednostavni neusmjereni grafovi.
Neka je $G$ graf sa skupom vrhova $V = \{1, 2, \ldots, n\}$. Za neka dva vrha kažemo da su *susjedni*

ako su krajevi istog brida. Tako s $ij$ ili $ji$ označavamo brid kojemu su $i$ i $j$ krajevi.
Za graf $G$ kojemu su svaka dva vrha spojena bridom kažemo da je *potpun*. Potpun graf s $n$ vrhova označavamo s $K_n$. Potpun graf $K_3$ se još zove i trokut.
Za graf *G'* kažemo da je podgraf grafa $G$ ako za skupove njegovih vrhova i bridova vrijedi $V' \subseteq V$ i $E' \subseteq E$, pri čemu krajevi svih bridova u $E'$ moraju biti sadržani u skupu $V'$. *K-klika* u $G$ je potpun podgraf od $G$ s $k$ vrhova i označavamo ju s $K_{(k)}$.
Stupanj $d(v)$ vrha $v$ u grafu $G$ je broj bridova kojima je $v$ krajnji vrh. Prema definiciji grafa, stupanj vrha jednak je broju njegovih susjeda. *Izolirani vrh* je vrh stupnja nula. Graf $G$ je $k-$*regularan* ako su mu svi vrhovi stupnja $k$. Ukoliko nije potrebno istaknuti koliki je stupanj vrha u takvom grafu, koristit ćemo naziv *regularan graf.*

Neka je $k$ prirodan broj i neka vrijedi $k \geq 2$. Graf $G$ je $k-$*partitan* ako mu se skup vrhova $V$ može particionirati u $k$ podskupova tako da nijedan brid nema oba kraja u istom podskupu. Za $k = 2$ takve grafove još zovemo i *bipartitnim grafovima. Potpun* $k-$*partitan graf* je jednostavan $k-$partitan graf u kojemu je svaki par vrhova iz različitih skupova $k-$particije spojen bridom. Ako su $V_1, \ldots, V_k$ skupovi $k$-particije od $V$ i $|V_i| = n_i$, $i = 1, \ldots, k$, tada potpun $k$-partitan graf označavamo s $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$. Za graf kažemo da je *potpun multipartitan* ako je potpun $k-$partitan za neko $k \geq 2$.
Slijedi tvrdnja koja će nekoliko puta biti primijenjena u ovom radu.

**Teorem 1.** *(Cauchyjeva nejednakost)[6] Za realne brojeve* $a_1, \ldots, a_n$ *i* $b_1, \ldots, b_n$ *vrijedi*

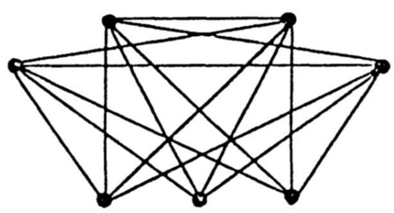
$$\left( \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \tag{2.1}$$

*Ako je* $a_i \neq 0$ *za barem jedno* $i$*, onda u (2.1) stoji znak jednakosti ako i samo ako postoji realan broj* $\lambda$ *takav da je*

$$b_k = \lambda a_k, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

# 3 Turánov graf i svojstva

Baveći se područjem teorije grafova, Turán je tražio odgovor na sljedeće pitanje: koliko najviše bridova može imati graf $G$ s $n$ vrhova koji ne sadrži kliku $K_{(k)}$? Označimo traženi broj s $t(n, k)$. Vrijedi $t(n, 2) = 0$ i $t(n, k)$ je rastuća funkcija po $k$. Primjer takvog grafa je potpun $(k-1)-$partitan graf $K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$, $n = n_1 + \cdots + n_{k-1}$ i upravo je to tvrdnja kojom ćemo se intenzivno baviti u ovome radu. Na slici 1 prikazan je $K_{2,2,3}$.



Slika 1. Potpun $3-$partitan graf $K_{2,2,3}$ [1].

Graf $K_{n_1,\dots,n_{k-1}}$ sadrži $\sum\limits_{i\neq j} n_i n_j$ bridova. Članovi ove sume mogu se dobiti iz jednakosti

$$(n_1 + \cdots + n_{k-1})^2 = \sum_{i=1}^{k-1} n_i^2 + 2\sum_{i\neq j} n_i n_j,$$

odnosno vrijedi

$$\sum_{i\neq j} n_i n_j = \frac{1}{2}\left(n^2 - \sum_{i=1}^{k-1} n_i^2\right). \tag{3.1}$$

Problem maksimizacije sume na lijevoj strani jednakosti (3.1) ekvivalentan je problemu minimizacije sume na desnoj strani iste jednakosti uz uvjet $\sum\limits_{i=1}^{k-1} n_i = n$. Prema Cauchyjevoj nejednakosti primjenjenoj na brojeve $n_1, \dots, n_{k-1}$ i $k-1$ jedinica $1, \dots, 1$ dobivamo

$$\left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i \cdot 1\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k-1} 1^2\right),$$

iz čega proizlazi

$$\sum_{i=1}^{k-1} n_i^2 \geq \frac{n^2}{k-1}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako $n_i = \frac{n}{k-1}$, $i = 1, \dots, k-1$. Zaključujemo da graf $K_{n_1,\dots,n_{k-1}}$ sadrži najveći mogući broj bridova ako i samo ako su svi skupovi particije jednakobrojni, odnosno $n_1 = n_2 = \cdots = n_{k-1} = \frac{n}{k-1}$. No, Turánovo pitanje podrazumijeva proizvoljno zadane brojeve $n$ i $k$ pa je jednakobrojnost skupova particije moguća ako i samo ako je $n$ djeljiv s $k-1$. U suprotnom je dovoljno zahtijevati da kardinaliteti skupova particije budu približno jednaki, odnosno $|n_i - n_j| \leq 1$, $\forall i, j = 1, \dots, k-1$, $i \neq j$.
Vratimo se na slučaj kada $k-1$ dijeli $n$. Iz (3.1) tada dobivamo

$$\sum_{i\neq j} n_i n_j = \frac{n^2}{2} \cdot \frac{k-2}{k-1} \tag{3.2}$$

pa je ovo najveći mogući broj bridova proizvoljnog jednostavnog grafa s $n$ vrhova koji ne sadrži kliku $K_{(k)}$.

Općenito, grafovi $K_{n_1,\dots,n_{k-1}}$ za koje vrijedi $|n_i - n_j| \leq 1$, $\forall i, j = 1, \dots, k-1$, $i \neq j$, zovu se *Turánovi grafovi* i označeni su s $T(n, k)$. Sada smo u mogućnosti iskazati Turánov teorem i navesti nekoliko različitih dokaza.

# 4 Turánov teorem

**Teorem 2.** ***(Turánov teorem, 1941.)*** *Neka je $G = (V, E)$ graf s $n$ vrhova koji ne sadrži kliku $K_{(k)}$. Tada vrijedi*

$$|E| \leq \frac{(k-2)n^2}{2(k-1)}. \tag{4.1}$$

Preciznija varijanta ovog teorema sadrži i tvrdnju da je graf $K_{n_1,\ldots,n_{k-1}}$ za koji vrijedi $|n_i - n_j| \leq 1$, $\forall i, j = 1, \ldots, k-1$, $i \neq j$, jedinstven graf bez klike $K_{(k)}$ s najvećim brojem bridova $t(n, k)$. Otuda i naziv za takav graf: *Turánov graf.* Mi ćemo se uglavnom usredotočiti na dokazivanje nejednakosti (4.1), ali ćemo u nekim dokazima pokazati da jednakost u (4.1) vrijedi ako i samo ako $G = T(n, k)$ za proizvoljan $k$.

## 4.1 Grafovi bez trokuta

Davne 1907. godine nizozemski matematičar Willem Mantel dokazao je tvrdnju [9] da graf bez trokuta sadrži najviše $n^2/4$ bridova, a ekstremalni graf (graf za koji se postiže gornja granica) je $K_{n/2,n/2}$ za $n$ paran, odnosno $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$ za $n$ neparan. Danas je ta tvrdnja u literaturi poznata kao *Mantelov teorem.* Time je dokaz Turánova teorema za slučaj $k = 3$ bio poznat prije nego se Turán počeo intenzivno baviti grafovima s proizvoljno zadanom vrijednošću $k$. U nastavku ćemo dokazati Mantelov teorem, a to zahtijeva uvođenje novih pojmova i korištenje nekih tvrdnji.

Ukoliko s $d_i$ označimo stupanj vrha $i$ u grafu s $n$ vrhova, tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E|. \tag{4.2}$$

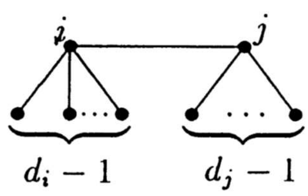
Stupanj vrha $i$ je broj bridova kojima je $i$ krajnji vrh. No, brid ima dva kraja pa smo u zbrajanju stupnjeva svih vrhova svaki brid grafa računali dva puta.

Skup $A \subseteq V$ vrhova u grafu zovemo *nezavisnim* ako ne sadrži susjedne vrhove. Primjerice, skup $V_i$ particije skupa vrhova u grafu $K_{n_1,\cdots,n_{k-1}}$ je nezavisan za svaki $i = 1, \ldots, k-1$. Broj $\alpha(G) = \max\{|U| : U \subseteq V,\ U \text{ nezavisan}\}$ naziva se *broj nezavisnosti* grafa $G$.

### 4.1.1 Dokaz $k = 3$: Mantel 1907.

Neka je $ij \in E$. S obzirom da $G$ ne sadrži trokute, vrhovi $i$ i $j$ nemaju zajedničkih susjeda. Slijedi $(d_i - 1) + (d_j - 1) \leq n - 2$ (vidi sliku 2), odnosno $d_i + d_j \leq n$. Sumirajući po bridovima dobivamo

$$\sum_{ij \in E} (d_i + d_j) \leq n|E|. \tag{4.3}$$




Slika 2. [1]

Broj $d_i$ se u sumi (4.3) pojavljuje $d_i$ puta pa zaključujemo

$$\sum_{ij\in E}(d_i + d_j) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq n|E|. \tag{4.4}$$

Primjenom nejednakosti (2.1) na brojeve $d_1, \ldots, d_n$ i na $n$ jedinica $1, \ldots, 1$, iz (4.2) i (4.4) dobivamo

$$n^2|E| \geq \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \cdot n \geq \left(\sum_{i=1}^{n} d_i\right)^2 = 4|E|^2, \tag{4.5}$$

iz čega slijedi $|E| \leq n^2/4$. □

Pokažimo još i jedinstvenost ekstremalnog grafa $K_{n/2,n/2}$ za $n$ paran. (Slučaj $n$ neparan se razmatra analogno.) Ako je $|E| = n^2/4$, onda vrijedi jednakost u (4.5), a prema teoremu 1 to znači da postoji prirodan broj $d$ takav da je $d_i = d \cdot 1$ za sve $i = 1, \ldots, n$, odnosno $G$ je regularan graf. Slijedi $n^2|E| = n^2 d^2$, odnosno $d = n/2$ zbog $|E| = n^2/4$. No, ovo odmah implicira $G = K_{n/2,n/2}$.

### 4.1.2 Dokaz $k = 3$: Folklore

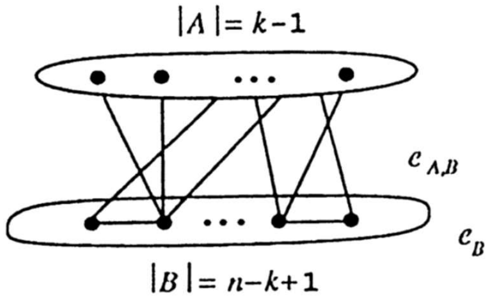
Neka je $A$ najveći nezavisni skup, odnosno $|A| = \alpha$. S obzirom da $G$ ne sadrži trokute, imamo $d_i \leq \alpha$ za svaki $i = 1, \ldots, n$. (Kada bi postojao neki $j$ takav da $d_j > \alpha$, onda bi neka dva susjeda od vrha $j$ morala bili spojena bridom, odnosno $G$ bi sadržavao barem jedan trokut.) Primijetimo da svaki brid od $G$ ima barem jedan kraj u skupu $B = V \backslash A$ pa zaključujemo $|E| \leq \sum_{i\in B} d_i$. Koristeći oznaku $|B| = \beta = n - \alpha$ te nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine [12], dobivamo

$$|E| \leq \sum_{i\in B} d_i \leq \alpha \cdot \beta \leq \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}. \qquad \square$$

U nastavku ćemo navesti pet različitih dokaza Turánovog teorema za proizvoljan $k$.

## 4.2 Prvi dokaz: Turán 1941.

Koristimo jaku indukciju po broju $n$, odnosno varijantu metode matematičke indukcije čija pretpostavka podrazumijeva da tvrdnja vrijedi za sve brojeve manje ili jednake od $n$. Nejednakost (4.1) trivijalno vrijedi za male $n$. Neka je $G$ graf sa skupom vrhova $V = \{1, \ldots, n\}$ koji ne sadrži $k-$klike, a ima najveći mogući broj bridova. Tada $G$ sadrži $(k-1)-$klike jer bismo u suprotnom mogli dodati bridove u $G$. Neka je $A$ skup vrhova $(k-1)-$klike i $B = V \backslash A$, $|B| = n - k + 1$ (slika 3).




Slika 3. [1]

Znamo da $(k-1)-$klika sadrži $\binom{k-1}{2}$ bridova. Slijedi procjena broja bridova $e_B$ koji spajaju vrhove u $B$ i broja bridova $e_{A,B}$ između $A$ i $B$. Prema pretpostavci indukcije (tvrdnja vrijedi za sve prirodne brojeve manje ili jednake od $n$) znamo da vrijedi

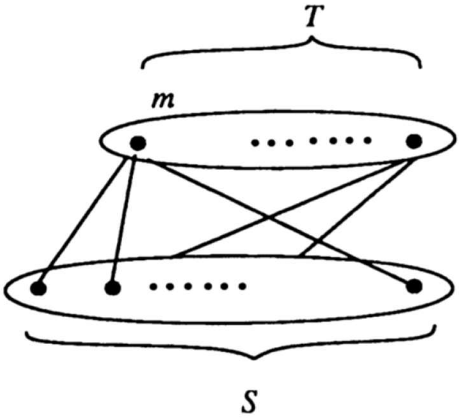
$$e_B \leq \frac{(k-2)}{2(k-1)}(n-k+1)^2.$$

S obzirom da $G$ ne sadrži $k-$klike, svaki $j \in B$ je susjed s najviše $k-2$ vrhova u $A$ pa dobivamo $e_{A,B} \leq (k-2)(n-k+1)$. Slijedi

$$|E| \leq \binom{k-1}{2} + \frac{k-2}{2(k-1)}(n-k+1)^2 + (k-2)(n-k+1) = \frac{k-2}{2(k-1)}n^2. \qquad \square$$

## 4.3 Drugi dokaz: Erdös 1970.

Ovaj dokaz koristi strukturu Turánovih grafova. Neka je $m \in V$ vrh najvećeg stupnja u grafu $G$, odnosno $d_m = \max\limits_{1\leq j\leq n} d_j$. Označimo sa $S$ susjede of $m$, $|S| = d_m$ i stavimo $T = V/S$. Kako $G$ ne sadrži $k-$klike i svi vrhovi iz $S$ su susjedi vrhu $m$, primjećujemo da $S$ ne sadrži $(k-1)-$klike. Konstruirajmo graf $H$ na skupu $V$ (slika 4). Graf $H$ odgovara grafu $G$ na $S$ i sadrži sve bridove između $S$ i $T$ (dakle, u $H$ je svaki vrh iz $S$ spojen bridom sa svakim vrhom iz $T$), ali ne i bridove među vrhovima iz $T$. Skup $T$ je nezavisan u $H$ te $H$ ne sadrži $k-$klike. Neka je $d'_j$ stupanj vrha $j$ u $H$. Ako je $j \in S$, tada iz konstrukcije grafa $H$ vrijedi $d'_j \geq d_j$. Ako je $j \in T$, tada imamo $d'_j = |S| = d_m \geq d_j$, prema izboru vrha $m$. Vidimo da je $|E(H)| \geq |E|$ i zaključujemo da od svih grafova s najvećim brojem bridova, jedan mora biti oblika kakvog je $H$. Koristeći indukciju na skupu $S$, zaključujemo da se među grafovima s najvećim brojem bridova nalazi graf $K_{n_1,\dots,n_{k-1}}$. Preciznije, graf $H$ na $S$ ima najviše bridova koliko i Turánov graf $K_{n_1,\dots,n_{k-2}}$ na $S$. Slijedi $|E| \leq K_{n_1,\dots,n_{k-1}}$, pri čemu $n_{k-1} = |T|$, odnosno $|E| \leq \sum\limits_{i\neq j} n_i n_j$, što implicira (4.1). $\square$




Slika 4. [1]

Navedeni dokaz se odnosi na precizniju varijantu teorema 2, odnosno uključuje i dokaz da jednakost u (4.1) vrijedi ako i samo ako $G = T(n,k)$.

## 4.4 Treći dokaz: Moon-Moser 1962.

Ovaj dokaz generalizira ideju prvog dokaza za slučaj $k = 3$ i daje kvantitativnu procjenu za broj $h-$klika. Neka je $G$ proizvoljan graf sa skupom vrhova $V = \{1, \dots, n\}$ i označimo s $\mathcal{C}_h$ skup $h-$klika u $G$, pri čemu $|\mathcal{C}_h| = C_h$. Primjerice, imamo $C_1 = n, C_2 = |E|, C_3 =$ broj trokuta u $G$. Za $A \in \mathcal{C}_h$ označimo s $d(A)$ broj $(h+1)-$klika koje sadrže $A$. Brojeći na dva načina, dobivamo

$$\sum_{A \in \mathcal{C}_h} d(A) = (h+1) C_{h+1}, \quad h \geq 1 \tag{4.6}$$

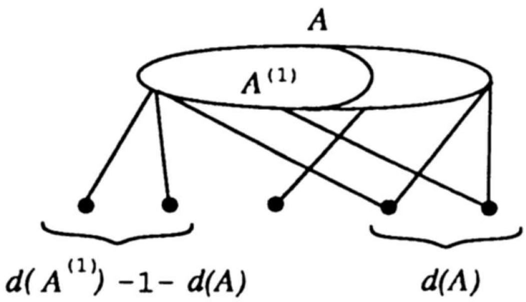
i ovo je poopćenje jednakosti (4.2). Neka je $h \geq 2$. Za $A \in \mathcal{C}_h$ označimo s $A^{(1)}, \dots, A^{(h)}$ $(h-1)-$klike sadržane u $A$ (takvih klika je ukupno $h$ jer je broj $(h-1)-$klika u $h-$kliki jednak broju načina da od ukupno $h$ vrhova odaberemo njih $h-1$).

**Tvrdnja 1.** *Vrijedi*

$$\frac{C_{h+1}}{C_h} \geq \frac{1}{h^2-1}\left(h^2 \frac{C_h}{C_{h-1}} - n\right), \ h \geq 2. \tag{4.7}$$

Uzmimo $A \in \mathcal{C}_h, B = V \backslash A, |B| = n-h$. Među vrhovima skupa $B$ postoji točno $d(A)$ vrhova koji su susjedni svim vrhovima u $A$. Svaki od preostalih vrhova u $B$ je susjed najviše jednoj $(h-1)-$kliki $A^{(i)}$, time tvoreći $h-$kliku (slika 5). Dobivamo (primijetite $-1$ zbog $A^{(i)} \subseteq A$)

$$\sum_{i=1}^{h} (d(A^{(i)}) - 1 - d(A)) + d(A) \leq n - h,$$




Slika 5. [1]

odnosno

$$\sum_{i=1}^{h} d(A^{(i)}) - (h-1)d(A) \leq n.$$

Sumiranjem po svim $A \in \mathcal{C}_h$ dobivamo

$$\sum_{A\in\mathcal{C}_h} \sum_{i=1}^{h} d(A^{(i)}) - (h-1) \sum_{A\in\mathcal{C}_h} d(A) \leq n\, C_h. \tag{4.8}$$

Kao u (4.4) zaključujemo

$$\sum_{A\in\mathcal{C}_h} \sum_{i=1}^{h} d(A^{(i)}) = \sum_{B\in\mathcal{C}_{h-1}} d(B)^2, \tag{4.9}$$

te prema (4.6) imamo

$$(h-1) \sum_{A\in\mathcal{C}_h} d(A) = (h^2-1)C_{h+1}. \tag{4.10}$$

Uvrštavanjem (4.9) i (4.10) u (4.8) dobivamo

$$\sum_{B\in\mathcal{C}_{h-1}} d(B)^2 \leq nC_h + (h^2-1)C_{h+1}.$$

Primjenom Cauchyjeve nejednakosti (2.1) na sve brojeve $d(B)$ iz skupa $\mathcal{C}_{h-1}$ te na $C_{h-1}$ jedinica, dobivamo

$$nC_h + (h^2-1)C_{h+1} \geq \sum_{B\in\mathcal{C}_{h-1}} d(B)^2 \geq \frac{1}{C_{h-1}} \left( \sum_{B\in\mathcal{C}_{h-1}} d(B) \right)^2 = \frac{h^2 C_h^2}{C_{h-1}},$$

što je upravo (4.7).

Da bismo dokazali (4.1), moramo naći vezu između nejednakosti (4.7) i broja bridova $|E|$. Stavimo

$$|E| = \left(1 - \frac{1}{\vartheta}\right) \frac{n^2}{2}, \ \vartheta \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

S obzirom da desna strana od (4.11) raste po $\vartheta$, moramo dokazati da vrijedi $\vartheta \leq k-1$ za grafove bez $k-$klika (jer se desna strana nejednakosti (4.1) može zapisati ovako: $\left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$).

**Tvrdnja 2.** *Neka je $h \geq 1$. Vrijedi*

$$\frac{C_{h+1}}{C_h} \geq \frac{\vartheta - h}{\vartheta} \cdot \frac{n}{h+1}. \tag{4.12}$$

Za $h = 1$ imamo $C_1 = n$ i $C_2 = |E|$ pa vrijedi (4.12) pri čemu jednakost vrijedi iz definicije $\vartheta$. Koristeći (4.7) i indukciju po $h$, zaključujemo

$$\frac{C_{h+1}}{C_h} \geq \frac{1}{h^2-1}\left(h^2 \cdot \frac{\vartheta - h + 1}{\vartheta} \cdot \frac{n}{h} - n\right) = \frac{1}{h^2-1} \cdot \frac{(\vartheta - h)(h-1)n}{\vartheta} = \frac{\vartheta - h}{\vartheta} \cdot \frac{n}{h+1},$$

što je i trebalo dokazati.

Ako $G$ ne sadrži $k-$klike, onda vrijedi $C_k = 0$ i zaključujemo $\vartheta \leq k-1$ iz (4.12) za $h+1 = k$. □

**Primjer 1.** Promotrimo nejednakost (4.7) za $h = 2$. U ovom slučaju za proizvoljan graf s $n$ vrhova vrijedi

$$C_3 \geq \frac{|E|}{3} \cdot \left(\frac{4|E|}{n} - n\right) = \frac{|E|}{3n}(4|E| - n^2).$$

Zaključujemo da graf $G$ s parnim brojem vrhova i brojem bridova $|E| = n^2/4 + 1$ ne sadrži samo jedan trokut (kako vrijedi prema Turánovom teoremu), nego više od $n/3$ trokuta. Ako dodamo jedan brid u $K_{n/2,n/2}$, dobivamo $n/2$ trokuta i onda se lako pokaže da ovo vrijedi za proizvoljan graf s $n^2/4 + 1$ bridova.

Do sada su se dokazi Turánova teorema oslanjali na razne metode prebrojavanja. Sljedeća tri dokaza koriste potpuno drugačije tehnike.

## 4.5 Četvrti dokaz: Motzkin-Straus 1965.

Neka je $G$ proizvoljan graf sa skupom vrhova $V = \{1, \ldots, n\}$. S $\omega = \omega(G)$ označimo broj vrhova u najvećoj kliki od $G$. Nadalje, svakom vrhu $i \in V$ pridružimo realnu varijablu $x_i$ i promatramo funkciju $f(x_1, \ldots, x_n) = 2\displaystyle\sum_{ij \in E} x_i x_j$.

**Tvrdnja 3.** *Vrijedi*

$$1 - \frac{1}{\omega} = \max\left\{2\sum_{ij \in E} x_i x_j : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\right\}. \tag{4.13}$$

S obzirom da je $f$ neprekidna funkcija na kompaktnom skupu, to postoji vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ u kome $f$ ima najveću vrijednost (vidi [14]). Među takvim vektorima $x$ odaberemo onoga koji ima najviše nul komponenti. (Primijetimo da ako $f$ postiže najveću vrijednost na rubu kompaktnog skupa $\{(x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$, tada je barem jedna komponenta $x_i$ jednaka nuli.) Neka je $C = \{i \in V : x_i > 0\}$. Pokažimo najprije da je $C$ skup vrhova klike. Pretpostavimo suprotno, tj. uzmimo $1, 2 \in C$, ali $12 \notin E$. Za svaki $t \in \mathbb{R}$ za koji vrijedi $-x_1 \leq t \leq x_2$ vektor $x_t = (x_1 + t, x_2 - t, x_3, \ldots, x_n)$ zadovoljava uvjete u (4.13) i dodatno je $f(x_t)$ linearna funkcija u varijabli $t$ jer se produkt $(x_1 + t)(x_2 - t)$ ne pojavljuje u $f(x_t)$ zbog $12 \notin E$. Zbog odabira $x$, $f(x_t)$ postiže maksimum u $t = 0$. Slijedi da je $f(x_t)$ konstanta za svaki $t$. Za $t = x_2$, $\bar{x} = (x_1 + x_2, 0, x_3, \ldots, x_n)$ dobivamo $f(\bar{x}) = f(x)$, što je u kontradikciji s izborom vektora $x$. Možemo pretpostaviti da

$f(x)$ ima najveću vrijednost za vektor $x$ za koji je $C = \{i : x_i > 0\}$ skup vrhova klike. Budući da je

$$1 = (x_1 + \cdots + x_n)^2 = 2\sum_{ij\in C} x_i x_j + \sum_{i\in C} x_i^2,$$

zaključujemo da je $f(x)$ najveći ako i samo ako je $\sum_{i\in C} x_i^2$ najmanji. Pod pretpostavkom da je $\sum_{i\in C} x_i = 1$ ovo je slučaj kada je $x_i = 1/|C|$ te dobivamo

$$f(x) = 1 - \sum_{i\in C} x_i^2 = 1 - \frac{1}{|C|} \leq 1 - \frac{1}{\omega},$$

pri čemu vrijedi jednakost za $|C| = \omega$, što smo i htjeli dokazati. Nejednakost (4.1) odmah slijedi. Postavljanjem $x_i = 1/n$ imamo $f(x) = 2|E|/n^2$ i zbog toga dobivamo

$$\frac{2|E|}{n^2} = f(x) \leq 1 - \frac{1}{k-1} = \frac{k-2}{k-1},$$

jer $G$ ne sadrži $K_{(k)}$. □

## 4.6 Peti dokaz: Alon-Spencer 1992.

Zadnji dokaz koristi alate iz područja teorije vjerojatnosti. Neka je $G$ proizvoljan graf sa skupom vrhova $V = \{1, \ldots, n\}$.

**Tvrdnja 4.** *Vrijedi*

$$\omega(G) \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d_i}. \tag{4.14}$$

S jednakom vjerojatnošću $1\backslash n!$ biramo permutaciju $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ skupa $V$ i konstruiramo skup $C$ na sljedeći način: stavimo $\pi_i$ u $C$ ako i samo ako je $\pi_i$ susjedan svim $\pi_j$, $j < i$. Prema definiciji $C$ je klika u $G$. Neka je $X = |C|$ odgovarajuća slučajna varijabla. Imamo $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, gdje je $X_i = 1$ ako $i \in C$, a $X_i = 0$ ako $i \notin C$. Sada zaključujemo da je $i \in C$ s obzirom na permutaciju $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ ako i samo ako se $i$ pojavljuje prije svih $n - 1 - d_i$ ne-susjeda od $i$, odnosno ako je $i$ prvi među $i$ i njegovim ne-susjedima. Zaključujemo da je očekivanje slučajne varijable $X_i$ dano s $EX_i = 1\backslash n - d_i$ i nadalje

$$E(|C|) = EX = \sum_{i=1}^{n} EX_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d_i},$$

zbog linearnosti očekivanja. Posljedično, mora postojati klika $C$ s najmanje $E(|C|)$ vrhova, što je upravo tvrdnja (4.14).
Da bismo iz (4.14) došli do tvrdnje Turánovog teorema, koristimo Cauchyjevu nejednakost oblika

$$n^2 = \left(\sum \sqrt{x_i}\sqrt{x_i^{-1}}\right)^2 \leq \sum x_i \cdot \sum x_i^{-1},$$

pri čemu $x_i = n - d_i$. Uistinu, (4.14) i (4.2) impliciraju

$$\omega(G) \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(n - d_i)} = \frac{n^2}{n^2 - 2|E|}. \tag{4.15}$$

Ako $G$ ne sadrži $K_{(k)}$, onda $\omega(G) \leq k - 1$ i (4.15) se svodi na (4.1). □

**Napomena 1.** Nejednakost (4.14) je prvi puta dokazana u [15] uzastopnim uklanjanjem vrhova, slično kao u drugom dokazu.

# 5 Zaključak

Pál Turán je bio izniman znanstvenik koji se protiv svih životnih nedaća borio razmišljanjem o matematičkim problemima. Unatoč diskriminaciji zbog židovskog podrijetla i velikom fizičkom naporu u radnom logoru tijekom drugog svjetskog rata, Turán je koristio svaku moguću priliku za istraživanje, bez dostupne literature i bez suradnje s kolegama. Njegovo najznačajnije postignuće u području teorije grafova je teorem o najvećem broju bridova u grafu koji ne sadrži kliku s $k$ vrhova. Danas se taj rezultat zove Turánov teorem, a zbog njegove važnosti, mnogi znanstvenici su ga dokazivali rabeći različita područja matematike.

# Literatura

[1] M. Aigner, *Turán's Graph Theorem*, Am. Math. Mon., 102 (1995), 808-816.

[2] N. Alon, J.H. Spencer, *The Probabilistic Method*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 2000.

[3] B. Bollobás, *Extremal graph theory*, Academic Press, New York, 1978.

[4] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[5] P. Erdös, *On the graph theorem of Turán (in Hungarian)*, Math. Fiz. Lapok 21 (1970), 249-251.

[6] N. Krička, *Cauchy-Schwarz-Buniakowskyjeva nejednakost*, Diplomski rad, Odjel za matematiku, 2012.

[7] SY.R. Li, WC.W. Li, *Independence numbers of graphs and generators of ideals*, Combinatorica 1 (1981), 55-61.

[8] L. Lovász, *Stable sets and polynomials*, Discrete Math. 124 (1994), 137-153.

[9] W. Mantel, *Problem 28*, Wiskundige Opgaven 10 (1906), 60-61.

[10] J.W. Moon, L. Moser, *On a problem of Turán*, Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. 7 (1962), 283-286.

[11] T.S. Motzkin, E.G. Straus, *Maxima for graphs and a new proof of a theorem of Turán*, Canad. J. Math. 17 (1965), 533-540.

[12] J. Pečarić, *Nejednakosti*, Element, Zagreb, 1996.

[13] P. Turán, *On an extremal problem in graph theory (in Hungarian)*, Math. Fiz. Lapok 48 (1941), 436-452.

[14] Š. Ungar, Matematička analiza 3, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2002.

[15] V.K. Wei, *A lower bound on the stability number of a simple graph*, Bell Lab. Tech. Mem. 81-11217-9, (1981).