Taylorov teorem i Taylorovi redovi

Rečić, Ivana

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Rečić

Taylorov teorem i Taylorovi redovi

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ivana Rečić

Taylorov teorem i Taylorovi redovi

Završni rad

Mentor: izv. prof. dr. sc. Ivan Soldo

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom radu iskazat ćemo i dokazati Taylorov teorem te se upoznati s razvojem najčešće korištenih funkcija u Taylorov red. Prije svega podsjetit ćemo se važnijih definicija i rezultata koji se spominju u samom Taylorovom teoremu i koji će nam pomoći pri kasnijem rješavanju zadataka. Na kraju ćemo vidjeti primjene razvoja funkcija u Taylorov red u različitim prirodoslovnim granama.

Ključne riječi

analitička funkcija, konvergencija, Taylorov red, Maclaurinov red, Taylorov polinom, Taylorov teorem, Taylorova formula, razvoj analitičke funkcije u Taylorov red

Taylor theorem and Taylor series

Summary

In this final paper, we will state and proof Taylor theorem and consider some Taylor series expansion of the most frequently used functions. First of all, we will mark some basic definitions and results that are mentioned in Taylor theorem. Later, it will help us in solving problems. Finally, we will see the applications of Taylor series expansion of functions in different branches of science.

Keywords

analytical function, convergence, Taylor series, Maclaurin series, Taylor polynomial, Taylor theorem, Taylor formula, development of analytical function

Sadržaj

Uvod

Taylor Brook, engleski matematičar, rođen je u Edmontonu 18. ožujka 1685. godine, a umro je u Londonu 29. prosinca 1731. godine. U djelu *Izravna i inverzna metoda razvoja* (engl. *Methods incrementorum directa et inversa, 1715.*) predstavio je svoj najvažniji rezultat, a to je prikaz funkcije u obliku polinoma, to jest, u obliku reda. Danas takav prikaz nazivamo Taylorovom formulom.

Prije nego li definiramo Taylorove polinome, odnosno redove, prisjetimo se najprije sljedećih pojmova.

Definicija 1. *Kažemo da je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna u točki $x_0 \in \langle a, b\rangle$ ako ona ima limes u točki x_0 koji je jednak $f(x_0)$, tj. ako je*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je neprekidna na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako je ona neprekidna u svakoj točki tog intervala.

Primjer 1. *Pogledajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu kao*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 16, \text{ ako je } x < -2 \\ 16 - x^4, \text{ ako je } x \in [-2, 2]. \\ x^4 - 16, \text{ ako je } x > 2 \end{cases}$$

Znamo da su polinomi neprekidne funkcije (pogledati [1, Primjer 5.29]) i vidimo da je naša funkcija f neprekidna na $\mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$ te da bi eventualni problem mogao biti u točkama $x = -2$ i $x = 2$. Pogledajmo je li funkcija neprekidna i u tim točkama. U tim točkama je $f(x) = 16 - x^4$ pa imamo:

$$\lim_{x\to -2} f(x) = \lim_{x\to -2} 16 - x^4 = 16 - (-2)^4 = 16 - 16 = 0 \tag{1}$$

$$f(-2) = 16 - (-2)^4 = 16 - 16 = 0 \tag{2}$$

Vidimo da su (1) i (2) međusobno jednaki, odnosno funkcija f je neprekidna u $x = -2$.
Analogno se pokaže da je funkcija f neprekidna u $x = 2$.
Dakle, funkcija f je neprekidna na cijelom $\mathbb{R}$.

Primjer 2. *Funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana kao*

$$f(x) = \begin{cases} -4x, & \text{ako je } x < 0 \\ x^2 + 1, & \text{ako je } x > 0 \end{cases}$$

ima prekid u točki $x = 0$. Stoga ona nije neprekidna funkcija.

Definicija 2. *Neka je (a_n) niz realnih brojeva. Za $a \in \mathbb{R}$ kažemo da je gomilište toga niza ako se u svakoj njegovoj ϵ okolini nalazi beskonačno mnogo članova promatranog niza tj.*

$$(\forall \epsilon > 0)(\forall n_0 \in \mathbb{N})(\exists n \in \mathbb{N}) : n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \epsilon \Rightarrow a - \epsilon < a_n < a + \epsilon.$$

Definicija 3. *Kažemo da je $a \in \mathbb{R}$ limes ili granična vrijednost niza realnih brojeva (a_n) ukoliko za svaki $\epsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $|a_n - a| < \epsilon$, za svaki $n \geq n_0$. Limes niza (a_n) zapisujemo u obliku*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Vrijedi da je limes promatranog niza (a_n) ujedno i njegovo gomilište, međutim, obrat ne mora vrijediti.

Definicija 4. *Definiramo limes superior kao najveće gomilište niza (a_n) i vrijedi da ukoliko je niz konvergentan, limes superior jednak je limesu toga niza, tj.*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Analogno, definiramo limes inferior kao najmanje gomilište niza (a_n) i označavamo ga kao

$$\liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Primjer 3. *Niz $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ima dva gomilišta i to su -1 i 1. Dakle, niz nije konvergentan, a*

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} &= 1\\ \liminf_{n\to\infty} &= -1.\end{aligned}$$

Definicija 5. *Neka je $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$ skup, funkcija $f_n : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ te $(f_n)_n$ niz funkcija. Red $\sum f_n$ zovemo redom funkcija. Red*

$$\sum f_n(x) = \sum a_n(x-c)^n = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + \dots \tag{3}$$

nazivamo redom potencija oko točke $c \in \mathbb{R}$ ukoliko za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi $f_n(x) = a_n(x-c)^n$, pri čemu su x i a realni brojevi. Ukoliko nam je $c = 0$ dobivamo red

$$\sum a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \tag{4}$$

*Sa **I** ćemo označiti skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje će gornja dva reda konvergirati i nazivamo ga interval konvergencije. Primijetimo da nam je $\boldsymbol{I} \neq \emptyset$ jer za $x = c$ imamo konvergentan red potencija čija je suma jednaka a_0. Pri tome se dogovorno uzima da je $0^0 = 1$. Nadalje, definiramo radijus konvergencije s $r = sup\{|\ x - c\ |: red\ \ potencija\ \ (3)\ \ konvergira\}$.*

Ukoliko deriviramo i integriramo red (3) dobit ćemo ponovno redove potencija i sva ta tri reda imaju iste radijuse konvergencije. Kao i kod redova realnih brojeva i za redove potencija postoje određeni kriteriji konvergencije. Za određivanje radijusa konvergencije poslužit će nam sljedeći teorem.

Teorem 1 (Vidjeti [4, Teorem 10.6], [1, Stranica 110.], [1, Stranica 111.]). *Neka je $\sum f_n = \sum a_n(x-c)^n$ red potencija i r njegov radijus konvergencije. Vrijedi sljedeće:*

a) *(Cauchy-Hadamardova formula) Radijus konvergencije r reda (3) jednak je*

$$r = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{5}$$

pri čemu je $r = 0$ *ukoliko je* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ *te* $r = +\infty$ *ukoliko je* $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

b) *(D'Alabertov kriterij u formi limesa) Neka je* $\lim_{n\to\infty} |\frac{f_{n+1}}{f_n}| = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| \cdot |x-c| = L \cdot |x-c|$. *Ukoliko je taj limes manji od* 1 *tj.* $|x-c| < \frac{1}{L}$ *red potencija (3) konvergira i njegic radijus konvergencije jednak je* $r = \frac{1}{L}$. *U protivnom, ukoliko je limes veći od* 1, *tj.* $|x-c| > \frac{1}{L}$ *red potencija (3) divergira. Za* $L \cdot |x-c| = 1$ *nema odluke o konvergenciji reda (3).*

c) *(Cauchyjev kriterij u formi limesa) Neka je* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-c| = L \cdot |x-c|$. *Ukoliko je taj limes manji od* 1 *tj.* $|x-c| < \frac{1}{L}$ *red potencija (3) konvergira i njegov radijus konvergencije jednak je* $r = \frac{1}{L}$. *U protivnom, ukoliko je limes veći od* 1, *tj.* $|x-c| > \frac{1}{L}$ *red potenicija (3) divergira. Za* $L \cdot |x-c| = 1$ *nema odluke o konvergenciji reda (3).*

Dokaz Cauchy-Hadamardove formule može se pogledati u [4, Stranica 184]. Kako su iskazi b) i c) analogoni iskazima za D'Almbertov, odnosno, Cauchyjev kriterij u formi limesa za redove realnih brojeva, njihovi su dokazi analogni dokazima koji se mogu pronaći [1, Stranica 110,111].

Za konvergenciju reda mora vrijediti nužan uvjet koji je dan u sljedećem teoremu.

Teorem 2 (Pogledati [1, Stranica 104.]). *Neka je* $\sum a_n$ *red realnih brojeva. Ako je red* $\sum a_n$ *konvergentan, onda je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Dokaz. Označimo sa $s = \lim_{n\to\infty} S_n$, pri čemu je S_n niz parcijalnih suma reda $\sum a_n$. Znamo da limes niza ne ovisi o pomicanju indeksa za konačan broj mjesta. Stoga je i $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = s$. Sada imamo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_{n-1} - S_n) = s - s = 0$. □

Napomena 1. *Obrat prethodnog teorema ne vrijedi. Međutim, možemo ga izreći i na drugi način, odnosno, ako limes općeg člana reda nije jednak nuli, onda red nije konvergentan.*

Definicija 6. *Neka je* $r > 0$ *radijus konvergencije pripadnog reda potencija* $\sum a_n \cdot (x-c)^n$. *Funkciju* $f : \langle c-r, c+r\rangle \to \mathbb{R}$ *definiranu s* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-c)^n$ *nazivamo analitička funkcija.*

Analitička funkcija ima derivaciju svakog reda na intervalu $\langle c-r, c+r\rangle$, tj. kažemo da je ona klase C^∞ na tom intervalu i pišemo $f \in C^\infty(\langle c-r, c+r\rangle)$. Primitivna funkcija funkcije f je $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot (x-c)^{n+1}$, a njena prva derivacija $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x-c)^{n-1}$. Ako je $f(x) = a_0 + a_1 \cdot (x-c) + a_2 \cdot (x-c)^2 + a_3 \cdot (x-c)^3 + a_4 \cdot (x-c)^4, \ldots$ i znamo da je $f \in C^\infty$, onda je $f(c) = a_0, f'(c) = a_1, f''(c) = 2a_2, f'''(c) = 6a_3, f^{IV}(c) = 24a_4, \ldots, f^n(c) = n!a_n$. Stoga su koeficijenti $a_n, n \geq 0$ jednaki

$$a_n = \frac{f^n(c)}{n!}, \tag{6}$$

pri čemu se dogovorno uzima $f^0(c) = f(c)$.

1 Taylorov teorem i redovi

U sljedećem poglavlju definirat ćemo Maclaurinov i Taylorov red te Taylorove polinome. Nakon toga ćemo iskazati i dokazati Taylorov teorem te pokazati kako se razvijaju elementarne i češće korištene funkcije u Taylorov red. Zatim ćemo vidjeti razvoje nekih nestandardnih funkcija u Taylorov red, a na kraju primjene razvoja nekih funkcija u Taylorov red.

1.1 Taylorov red i polinomi

Promotrimo ponovno red potencija $\sum a_n \cdot (x-c)^n$. Ukoliko uvrstimo formulu (6) za koeficijente a_n u taj red, dobivamo novi red potencija $\sum \frac{f^n(c)}{n!} \cdot (x-c)^n$.

Definicija 7. *Neka je $f : \langle c-r, c+r\rangle \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^∞ na intervalu $\langle c-r, c+r\rangle$. Red potencija*

$$\sum \frac{f^n(c)}{n!} \cdot (x-c)^n \tag{7}$$

nazivamo Taylorov red funkcije f oko točke c Ukoliko je $c = 0$ red se naziva Maclaurinov red.

Raspišemo li Taylorov red funkcije f oko točke c dobivamo funkciju $f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \ldots$, dok je prikaz za $c = 0$, odnosno za Maclaurinov red jednak $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots$.

Definicija 8. *Parcijalne sume Taylorova reda nazivaju se Taylorovi polinomi i označavamo ih kao $T_n(f, c; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(c)}{k!} \cdot (x-c)^k$.*

Taylorov polinom je polinom $n-tog$ stupnja i on je među svim polinomima toga stupnja u okolini točke c najbolja aproksimacija funckije f. Općenito, ta aproksimacija postaje sve bolja kako n raste.
Iskažimo i dokažimo sada glavni teorem ovog rada.

Teorem 3 (Taylorov teorem, vidi [8, Teorem 8.25]). *Pretpostavimo da su funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ i njenih prvih n derivacija neprekidne na $[a, b]$. Nadalje, pretpostavimo da postoji $(n+1)$-a derivacija funkcije f, za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ i ona je također neprekidna. Tada za svaki $x \in \langle a, b\rangle$ postoji $\epsilon_x \in \langle c, x\rangle$ takav da je*

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(c)}{i!} \cdot (x-c)^i + R_n(f, c; x), \tag{8}$$

pri čemu je

$$R_n(f, c; x) = \frac{f^{n+1}(\epsilon_x)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}. \tag{9}$$

Raspišemo li izraz (7), tzv. Taylorovu formulu dobijemo $f(x) = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \cdots + \frac{f^n(c)}{n!}(x-c)^n + R_n(f, c; x)$, pri čemu izraz (8), nazivamo Taylorov n-ti ostatak.

Za dokazivanje Taylorove formule, poslužit će nam sljedeći teorem.

Teorem 4 (Rolleov teorem, vidi [6, Teorem 36.]). *Neka za funkciju $f : I = [a, b] \to \mathbb{R}$ vrijedi:*

i) f je neprekidna funkcija na domeni I;

ii) $f(a) = f(b) = 0$;

iii) f je diferencijabilna u svakoj točki intervala $\langle a, b\rangle$.

Tada postoji barem jedna točka c iz intervala $\langle a, b\rangle$ za koju je $f'(c) = 0$.

Dokaz Rolleovog teorema kao i njegova geometrijska interpretacija može se pronaći u [6, Stranica 128.].

Provedimo sada dokaz Taylorovog teorema.

Dokaz. Kako smo R_n Taylorov n-ti ostatak definirali kao $R_n(f, c; x) = \frac{f^{n+1}(\epsilon_x)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$, možemo zapravo pisati $R_n(f, c; x) = f(x) - f(c) - f'(c) - \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$. Odaberemo x i c iz skupa realnih brojeva. Tada za m koji se nalazi između x i c definiramo

$$F(m) = f(x) - f(m) - f'(m) - \frac{f''(m)}{2!}(x-m)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(m)}{n!}(x-m)^n$$

takav da je $F(c) = R_n(f, c; x)$. Tada je

$$\begin{aligned} F'(m) = & - f'(m) - f''(m)(x-m) + f'(m) - \frac{f'''(m)}{2!}(x-m)^2 \\ & + f''(m)(x-m) - \cdots - \frac{f^{n+1}(m)}{n!}(x-m)^n + \frac{f^n(m)}{(n-1)!}(x-m)^{n-1}. \end{aligned}$$

Primjećujemo kako se drugi i četvrti sumand ponište $(-f''(m)(x-m) + f''(m)(x-m))$. Analogno, poništavaju se treći i šesti sumand, itd. Dakle, preostaje $F'(m) = -\frac{f^{(n+1)}(m)}{n!}(x-m)^n$.

Definirajmo sada funkciju G tako da je $G(m) = F(m) - (\frac{x-m}{x-c})^{n+1}F(c)$. Za $m = c$ je $G(c) = 0$. Isto tako za $m = x$ je $G(x) = 0$. Štoviše i $F(x) = 0$. Sada na funkciju G primijenimo Rolleov teorem. Znamo da postoji ϵ_x koji se nalazi između c i x takav da je $G'(\epsilon_x) = 0$.

Sada imamo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} 0 &= G'(\epsilon_x) = F'(\epsilon_x) + (n+1)\frac{(x-\epsilon_x)^n}{(x-c)^{n+1}}F(c) \\ &= -\frac{f^{(n+1)}(\epsilon_x)}{n!}(x-\epsilon_x)^n + (n+1)\frac{(x-\epsilon_x)^n}{(x-c)^{n+1}}F(c) \end{aligned}$$

Sjetimo se da smo funkciju F definirali tako da je $F(c) = R_n(f, c; x)$. Preslagivanjem posljednje jednadžbe dobivamo da je $R_n(f, c; x) = \frac{f^{n+1}(\epsilon_x)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$. □

Prethodni Taylorov teorem iskazan je za realnu funkciju jedne realne varijable. Međutim, teorem se može iskazati za funkcije više varijabli te za kompleksne funkcije. Pogledajmo najprije za funkcije dviju varijabli.

Teorem 5 (Vidi [7, Teorem 12]). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^{n+1} na Ω. Ako su (x_0, y_0) i $(x_0 + h, y_0 + k)$ dvije točke iz Ω i ako njihova spojnica ležu u Ω, onda vrijedi Taylorova formula*

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + \frac{f'(x_0, y_0)}{1!}(h, k) + \cdots + \frac{f^n(x_0, y_0)}{n!}(h, k) + R_n,$$

pri čemu je

$$R_n(x_0, y_0; h, k) = \frac{f^{n+1}(x_0 + \xi \cdot h, y_0 + \xi \cdot k)}{(n+1)!}(h, k)$$

ostatak Taylorove formule u Lagrangeovom obliku za $\xi \in \langle 0, 1\rangle$.

Dokaz ovog teorema može se pogledati u [7, Stranica 97].

Napomena 2. *Važno svojstvo Taylorova polinoma je da se vrijednost tog polinoma i vrijednosti njegovih derivacija poklapaju s vrijednostima funkcije i odgovarajućih derivacija u (x_0, y_0).*

Napomena 3. *Za funkciju dvije varijable Taylorovu formulu smo mogli zapisati u obliku*

$$\begin{aligned} f(x, y) = \quad & f(x_0, y_0) + \left(\tfrac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \tfrac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right) f(x_0, y_0) + \cdots + \tfrac{1}{n!}\Bigg(\tfrac{\partial}{\partial x}(x - x_0) \\ & + \tfrac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\Bigg)^n f(x_0, y_0) + \tfrac{1}{(n+1)!}\left(\tfrac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \tfrac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^{(n+1)} f(x_c, y_c), \end{aligned}$$

pri čemu je $T_c = (x_c, y_c)$ jedna od točaka koja se nalazi na spojnici $T = (x, y)$ i $T_0 = (x_0, y_0)$. Dodatno, možemo pisati $x - x_0 = dx = \Delta x$ te analogno $y - y_0 = dy = \Delta y$.

Pogledajmo sada Taylorov teorem te još neke dodatne informacije za kompleksne funkcije.

Teorem 6 (Vidi [5, Teorem 23]). *Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup i $f : \Omega \to \mathbb{C}$ analitička funkcija.*

1) Funkcija f ima derivaciju svakog reda na Ω i svaka od tih derivacija je također analitička funkcija.

2) Vrijednost n-te derivacije funkcije f u točki $z_0 \in \Omega$ dana je formulom

$$f^n(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz,$$

pri čemu je Γ neka proizvoljna kontura koja je pozitivno orijentirana i zajedno sa svojim unutarnjim područjem D leži u Ω, a $z_0 \in D$.

3) Taylorov red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

apsolutno konvergira na svakom krugu $\boldsymbol{K}(zo, r) \subseteq \Omega$ i suma reda je jednaka f(z) u svakoj točki $z \in \boldsymbol{K}(zo, r)$.

Dokaz ovoga teorema može se pronaći u [5, Stranica 74,75].

1.2 Razvoj nekih elementarnih i korisnih funkcija u Taylorov red

- Pogledajmo najprije razvoj eksponenacijalne funkcije e^x u Taylorov red oko točke $c = 0$. Kako smo ranije pokazali za razvoj funkcije u Taylorov red potrebne su nam derivacije te funkcije. Primijetimo da je svaka derivacija funkcije $f(x) = e^x$ jednaka e^x, tj. imamo $f(x) = f^{(0)}(x) = f'(x) = \cdots = f^{(n)}(x) = e^x$ za sve $n \in \mathbb{N}_0$. Kako je derivacija $f^n(0) = 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, koristeći formulu (7) dobivamo sljedeći Taylorov red oko točke $c = 0$:
$$\sum \frac{f^n(0)}{n!} x^n = \sum \frac{x^n}{n!}. \tag{10}$$
Kako Taylorov red kovergira ka broju $f(c)$ samo za $x = c$, želimo pokazati da to vrijedi i za $x \neq c$, tj. pokazati da je funkcijom $f(x) = e^x$ predstavljen red (10). Za to će nam pomoći sljedeća dva teorema.

Teorem 7 (Vidi [10, Theorem, Stranica 756]). *Ukoliko je $f(x) = T_n + R_n$, pri čemu je T_n Taylorov polinom n-tog stupnja funkcije f u c, R_n n-ti Taylorov ostatak takav da je $\lim_{n\to\infty} R_n(f, c; x) = 0$ za $|x - c| < r$ i r radijus konvergencije, tada je funkcija f predstavljena Taylorovim redom na intervalu $|x - c| < r$.*

Teorem 8 (Vidi [10, Taylor's Inequality, Stranica 756]). *Neka je funkcija $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ klase c^∞ na intervalu $\langle a, b\rangle$ i neka je $c \in \langle a, b\rangle$. Ukoliko je za $M \in \mathbb{R}$, $M > 0$ je $|f^{n+1}(x)| \leqslant M$, za $|x - c| \leqslant r$, onda za n-ti Taylorov ostatak R_n vrijedi $|R_n(f, c; x)| \leqslant M \cdot \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)}$ za $|x - c| \leqslant r$.*

Teorem 8. interpretiramo na sljedeći način: ako uzmemo realne brojeve $\delta, M > 0$ takve da za svaki $x \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle$ i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|f^{n+1}(x)| \leqslant M$, onda je $lim_{n\to\infty} R_n(f, c; x) = 0$. Znamo prema Teoremu 7 da je tada funkcija f predstavljena Taylorovim redom, odnosno $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(c)}{n!}(x - c)^n$. Nadalje, to znači da je f analitička na intervalu $\langle a, b\rangle$ i može se, uz postojanje $c \in \langle a, b\rangle$, predstaviti redom, takvim da Taylorov red funkcije f oko točke c predstavlja funkciju f u svakoj toči x. Dokažimo sada Teorem 8.

Dokaz. Definirali smo n-ti Taylorov ostatak kao $R_n(f, c; x) = \frac{f^{n+1}(\epsilon_x)}{(n+1)!} \cdot (x-c)^{n+1}$ i znamo da je $R_n \geqslant 0$. Tada je $0 \leqslant |R_n(f, c; x)| = |\frac{(x-c)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}(\epsilon_x)|$. Kako je $|f^{n+1}(x)| \leqslant M$ za proizvoljan realan $M > 0$, onda je i $f^{n+1}(\epsilon_x) \geqslant M$ pa imamo sljedeću nejednakost:
$$0 \leqslant |R_n(f, c; x)| = |\frac{(x - c)^{n+1}}{(n + 1)!} f^{n+1}(\epsilon_x)| \geqslant M \cdot \frac{|x - c|^{n+1}}{(n + 1)!}.$$
Ukoliko imamo $x = c$ dokazali smo tvrdnju.
Neka je $x \neq c$. Pogledajmo red $\sum \frac{a^n}{n!}$, $a > 0$ i primjenimo D'Alambertov kriterij u formi limesa. Imamo
$$lim_{n\to\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n + 1}$$

i dijeljenjem sa n te puštanjem n u ∞ dobijemo 0 što je manje od 1 pa znamo da promatrani red konvergira. Stavimo sada da je $a = |x - c|$ i iskoristimo nužan uvjet konvergencije reda tj. da je $\lim_{n\to\infty} \frac{|x-c|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. Primjenom teorema o sendviču slijedi da je i $lim_{n\to\infty} R_n(f, c; x) = 0$. Iskoristimo Teorem 7 i dokazali smo tvrdnju. □

Vratimo se sada na red (10). Odaberemo $\delta > 0$ takav da nam je $x \in \mathbb{R}$, $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$. Funkcija e^x je monotono rastuća funkcija pa je $e^{-\delta} < e^x < e^{\delta}$, tj. $|e^x| < e^{\delta}$. Uzmimo $M = e^{\delta}$ i primjenimo prethodni teorem. Dakle, Taylorov red $\sum \frac{x^n}{n!}$ predstavlja funkciju $f(x) = e^x$, odnosno,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{11}$$

- Promatrajmo sada funkciju $f(x) = cos(x)$. Derivacije višeg reda te funkcije su:

$$f^{(0)}(x) = 1, f'(x) = -sin(x), f''(x) = -cos(x), f'''(x) = sin(x),$$
$$f^{IV}(x) = cos(x), \dots, f^n(x) = \cos(\frac{n\pi}{2} + x).$$

Uvrstimo li $x = 0$ dobijemo

$$f^{(0)}(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f^{IV}(0) = 1, \dots,$$
$$f^n(0) = \cos(\frac{n\pi}{2}).$$

Vrijedi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ je $|f^{n+1}(x)| \leqslant 1$ pa prema Teoremu 8 i prema formuli (7) dobivamo Taylorov red oko točke $c = 0$

$$1 + 0 - \frac{x^2}{2!} + 0 + \frac{x^4}{4!} + 0 - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

Dakle, razvoj funkcije $f(x) = \cos(x)$ u Taylorov red oko točke $c = 0$ jednak je

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}. \tag{12}$$

- Znamo da je $\int cos(x) = sin(x)$. Ukoliko želimo razviti funkciju $f(x) = sin(x)$ u Taylorov red oko točke $c = 0$, to možemo pomoću razvoja od $cos(x)$. Integriramo li izraz (12) dobijemo

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + k$$

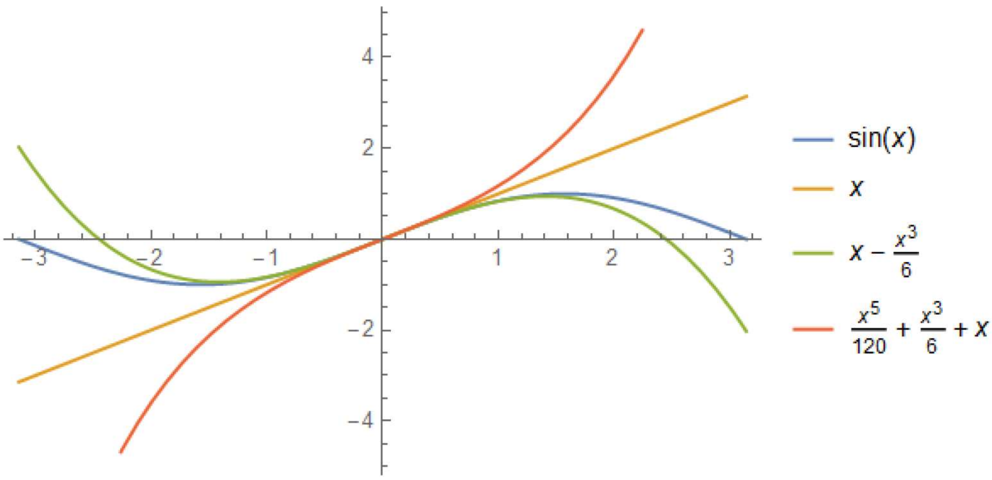
Odredimo još konstantu k. Ako stavimo $x = 0$ imamo

$$0 = sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \cdot 0 + k$$

iz čega slijedi da je $k = 0$.
Dakle,

$$sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{13}$$

Napomena 4. *Pogledajmo sljedeći prikaz funkcije* $sin(x)$ *i pripadnih Taylorovih polinoma* T_n *za* $n = 1, 2, 3$.



Slika 1

Ranije smo spomenuli da Taylorovi polinomi predstavljaju aprksimaciju određene funkcije te da ista postaje bolja kako n *raste, što sada vidimo i iz prikazanog grafa.*

Napomena 5. *Iz izraza (12) primjećujemo da za* x *koji je jako blizu nule je* $cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!}$. *Analogno, ako raspišemo izraz (13) dobijemo* $x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$ *i za* x *jako blizak 0 je* $sin(x) \approx x$.

Napomena 6. *Prethodno razvijene funkcije u Taylorov red oko točke* $c = 0$ *konvergiraju za svaki* $x \in \mathbb{R}$.

- Razvijmo sada funkciju $f(x) = \frac{1}{1-x}$ u Taylorov red oko točke $c = 0$. Derivacije te funkcije su redom $f^{(0)}(x) = 1, f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}, f'''(x) = \frac{6}{(1-x)^4}, f^{IV}(x) = \frac{24}{(1-x)^5}, \dots, f^n(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$, odnosno za $x = 0$ imamo $f^{(0)}(0) = 1, f'(0) = 1, f''(0) = 2, f'''(0) = 6, f^{IV}(0) = 24, \dots, f^n(0) = n!$. Prema tome, primjernom formule (7) slijedi nam razvoj
$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots \tag{14}$$
Kako je prva derivacija funkcje f pozitivna, za svaki x funkcija je monotono rastuća. Odaberemo $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ takav da je $\frac{-1}{1-\delta} < \frac{1}{1-x} < \frac{1}{1-\delta}$, tj. $|\frac{1}{1-x}| < \frac{1}{1-\delta}$. Uzmimo $M = \frac{1}{1-\delta}$ i primjenimo Teorem 8. Dakle,
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{15}$$

Napomena 7. *Formulu (15) mogli smo dobiti iz formule za georetrijski red koja je ekvivalentna formuli (14). Naime, ako označimo* $S = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$, *pomnožimo taj* S *s* x *te pogledamo razliku* $S - xS$, *slijedi nam:*
$$S - xS = S(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots - x - x^2 - x^3 - \dots = 1.$$

Dijeljenjem prethodne jednakosti sa (1-x) dobijemo $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$.

- Pogledajmo sada funkciju $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Njen razvoj u Taylorov red oko točke $c = 0$ dobit ćemo pomoću razvoja iz prethodne točke. Funkciju f možemo zapisati kao

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n. \tag{16}$$

- Sada pomoću prethodno razvijene funkcije možemo u Taylorov red oko točke c=0 razviti funkciju $f(x) = ln(1+x)$. Naime, kako je $f'(x) = \frac{1}{1+x}$ i $\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ integriranjem dobijemo

$$ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

Najprije uvedimo supstituciju, $d = n + 1$. tada je $n = d - 1$ i za $n = 0$ je $d = 1$ te za $n = \infty$ je $d = \infty$. Odredimo vrijednost konstante k. Neka je $x = 0$. Tada je $f(x) = ln(1+0) = ln(1) = 0$, odnosno $\sum_{d=1}^{\infty} (-1)^{d-1} \frac{0^d}{d} + k = 0$ iz čega slijedi da je $k = 0$. Dakle,

$$ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}. \tag{17}$$

Napomena 8. *Budući da smo u Napomeni 7. izveli Taylorov red funkcije* $\frac{1}{1-x}$ *oko točke* $c = 0$ *pomoću geometrijskog reda, pomoću njega možemo doći i do intervala kovergencije. Kako geometrijski red konvergira za* $-1 < x < 1$ *onda je područje konvergencije reda (15)* $I = \langle -1, 1 \rangle$, *tj.* $|x| < 1$. *Prema tome, isti radijus konvergencije vrijedi i za redove (16) i (17).*

Dakle,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n, za|x| < 1, \\
\frac{1}{1+x} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, za|x| < 1, \\
ln(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, za|x| < 1.
\end{aligned}$$

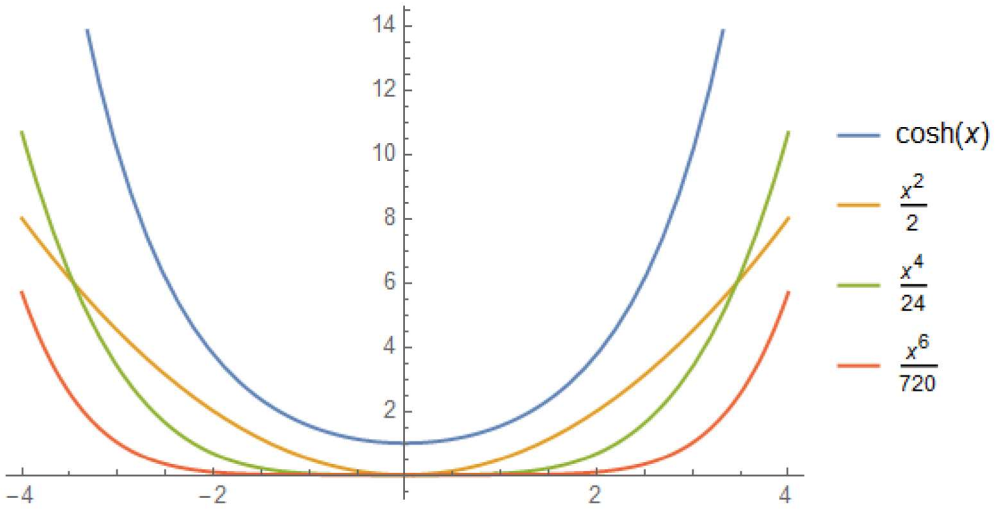
- Pogledajmo sada funkciju $f(x) = ch(x)$. Kosinus hiperbolni definiran je kao $ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$. Derivacije te funkcije su redom $f^{(0)}(x) = 1, f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $f'''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, f^{IV}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \ldots, f^n(x) = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}$. Prema tome, primjenom formule (7) za $c = 0$ direktno nam slijedi razvoj

$$1 + 0 + \frac{1}{2!}x^2 + 0 + \frac{1}{4!}x^4 + 0 \ldots.$$

Kako je prva derivacija funkcje f pozitivna, funkcija je monotono rastuća. Odaberemo $\delta > 0$, $\delta \in \mathbb{R}$ takav da je $\frac{-(e^{\delta}+e^{-\delta})}{2} < \frac{e^x+e^{-x}}{2} < \frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}$, tj. $|\frac{e^x+e^{-x}}{2}| < \frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}$. Uzmimo $M = \frac{e^{\delta}+e^{-\delta}}{2}$ i primjenimo Teorem 8. Dakle,

$$ch(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{18}$$

Napomena 9. *Kao kod primjera funkcije $sin(x)$, pogledajmo prikaz funkcije $f(x) = ch(x)$ te pripadnih Taylorovih polinoma za $n = 1, 2, 3$.*



Slika 2

Dakle, kako se n povećava, tako se polinomi približavaju samoj funckiji, odnosno, funkcija je jednaka sumi pripadnog Taylorova reda.

- Neka nam je dana funkcija $f(x) = sh(x)$. Znamo da je $sh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$. Pogledajmo najprije derivacije te funkcije: $f^{(0)}(x) = 1, f'(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, f''(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, f'''(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}, f^{IV}(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}, \ldots, f^n(x) = \frac{e^x+(-1)^{n+1}e^{-x}}{2}$.
  Za $c = 0$ iz formule (7) slijedi:

  $$1 + x + 0 + \frac{1}{3!}x^3 + 0 + \ldots.$$

  Kako je $f'(x) > 0, \forall x$, funkcija je monotono rastuća. Zato odaberemo $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$ takav da je $\frac{-(e^{\delta}-e^{-\delta})}{2} < \frac{e^x-e^{-x}}{2} < \frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}$, tj. $|\frac{e^x-e^{-x}}{2}| < \frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}$. Neka nam je $M = \frac{e^{\delta}-e^{-\delta}}{2}$ te primjenom Teorema 8 dobijemo

  $$sh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \tag{19}$$

Napomena 10. *Prethodno izvedeni razvoj kosinusa, odnosno sinusa hiperbolnog u Taylorov red oko točke $c = 0$ vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$.*

Napomena 11. *Osim ranije izvedenih razvoja, postoji još poznatih, češće korišteni razvoja funkcija u Taylorov red oko točke $c = 0$. Neke od njih prikazane su u sljedećoj tablici.*

FUNKCIJA	TAYLOROV RED OKO $c = 0$
$log(1-x)$	$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $\lvert x\rvert<1$
$(1+x)^{\alpha}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$, $\lvert x\rvert<1$, $\alpha \in \mathbb{C}$
$arcsin(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n(n!)^2(2n+1)} x^{2n+1}$, $\lvert x\rvert < 1$
$arctan(x)$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}$, $\lvert x\rvert \leq 1$
$\sqrt{1+x}$	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n)!}{(1-2n)n!4^n} x^n$, $\lvert x\rvert < 1$

Tablica 1

1.3 Razvoj nestandardnih funkcija u Taylorov red

Pomoću prethodno izvedenih Taylorovih redova oko $c = 0$ možemo riješiti mnogo složenije zadatke, odnosno razviti složenije funkcije u Taylorov red. Stoga, pogledajmo sljedeće primjere:

Primjer 4. *Razvijte funkciju $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$ u Taylorov red oko točke $c = 0$.*

Rješenje:
Pogledamo li jednakost (15) imamo da je $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, za $|x| < 1$ te zamjenom x s x^2 imamo:

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \ldots, |x^2| < 1.$$

Dakle, područje konvergencije dobivenog Taylorovog reda je $|x| < 1$.

Primjer 5. *Funkciju $f(x) = ln(\frac{7+x}{7-x})$ razvijmo u Taylorov red oko točke $c = 0$.*

Rješenje:
Najprije transformiramo funkciju f primjenom svojstava logaritma

$$\begin{aligned} f(x) &= ln(7+x) - ln(7-x) = ln\left(7\left(1+\frac{x}{7}\right)\right) - ln\left(7\left(1-\frac{x}{7}\right)\right) \\ &= ln(7) + ln\left(1+\frac{x}{7}\right) - ln(7) - ln\left(1-\frac{x}{7}\right) = ln\left(1+\frac{x}{7}\right) - ln\left(1-\frac{x}{7}\right). \end{aligned}$$

Svaki od logaritama razvijamo u Taylorov red oko točke $c = 0$ kao zasebnu funkciju. Iz (17) imamo

$$ln(1+\frac{x}{7}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\frac{x}{7})^n}{n}, \tag{20}$$

pri čemu je $|\frac{x}{7}| < 1$, odnosno, $|x| < 7$.
Iz Tablice 1 direktno nam slijedi

$$ln(1-\frac{x}{7}) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{7})^n}{n}, \tag{21}$$

uz uvjet $|\frac{x}{7}| < 1$, odnosno, $|x| < 7$.
Iz (20) i (21) slijedi nam

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{x}{7}\right)^n - \left(- \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{x}{7})^n}{n} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n-1} + 1 \right) \cdot \frac{x^n}{7^n n}, \end{aligned}$$

za sve $x \in \mathbb{R}$ sa svojstvom $|x| < 7$.

Primjer 6. *Izračunajmo Taylorov red funkcije $f(x) = 2 \cdot cos^2(x)$ oko točke $c = 0$.*

Rješenje:
Kako vrijedi osnovni trigonometrijski identitet te formula za kosinus dvostrukog kuta, odnosno jednakosti:

$$\begin{aligned} cos(2x) &= cos^2(x) - sin^2(x) \\ sin^2(x) + cos^2(x) &= 1, \end{aligned}$$

slijedi da je

$$\begin{aligned} cos^2(x) &= cos(2x) + sin^2(x) \\ &= cos(2x) + 1 - cos^2(x) \end{aligned}$$

pa je $2 \cdot cos^2(x) = 1 + cos(2x)$. Direktnom primjenom razvoja (12) dobivamo $cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(2x)^{2n}$, odnosno,

$$f(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-4)^n}{(2n)!}(x)^{2n}.$$

Kao što smo vidjeli u prethodnom primjeru, ukoliko je funkcija zadana kao suma drugih funkcija, razvoj u Taylorov red će biti jednak sumi razvoja pojedinog sumanda. Pokažimo to na još jednom, složenijem primjeru.

Primjer 7. *Razvijmo funkciju $f(x) = x \cdot cos(\frac{1}{2}x^2) + 2e^{-x} - ln(1+x)$ u Taylorov red oko $c = 0$.*

Rješenje:
Neka je $h(x) = x \cdot cos(\frac{1}{2}x^2)$, $g(x) = 2e^{-x}$ te $k(x) = ln(1+x)$.
Iz jednakosti (12) dobivamo $cos(\frac{1}{2}x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}(\frac{1}{2}x^2)^{2n}$. Tada je

$$\begin{aligned} h(x) &= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n)!} x^{4n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n)!} x^{4n+1}. \end{aligned}$$

U prethodnom poglavnju pokazali smo da je $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Sada

$$\begin{aligned} g(x) &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \\ &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n. \end{aligned}$$

Iz razvoja (17) direktno slijedi da je

$$k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Zbog toga je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (2n)!} x^2 + 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Do sada smo imali primjere razvoja funkcije u Taylorov red oko $c = 0$. Pogledajmo sljedeće primjere gdje nam je $c \neq 0$.

Primjer 8. *Razvijmo funciju $f(x) = \sqrt{x}$ u Taylorov red oko točke $c = 1$ te odredimo interval konvergencije.*

Rješenje:
Uvedemo li supstituciju $y = x - 1$, iz čega slijedi da je $x = y + 1$, imamo funkciju $f(x) = f(1 + y) = \sqrt{1 + y}$. Iz Tablice 1 iščitamo da je $\sqrt{1 + y} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1-2n) n! 4^n} y^n$ za $|y| < 1$. Iz toga slijedi da je razvoj od $\sqrt{x}$ oko $c = 1$ dan sa

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n)!}{(1 - 2n) n! 4^n} (x - 1)^n,$$

za $|x - 1| < 1$. Prema tome, $0 < x < 2$, odnosno interval kovergencije je $I = \langle 0, 2 \rangle$.

U Primjeru 7 vidjeli smo kako razviti funkciju u Taylorov red ako je ona zadana kao suma nekoliko funkcija. Pogledajmo sada kako se u takvim slučajevima određuje interval konvergencije.

Primjer 9. *Razvijmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^2+11x+30}$ u Taylorov red oko točke $c = -4$ te odredite interval konvergencije.*

Rješenje:
Kako su nultočke kvadratne funkcije koja se nalazi u nazivniku jednake $x = -6$ i $x = -5$ možemo pisati $f(x) = \frac{1}{(x+6)\cdot(x+5)}$. Sada napravimo rastav na parcijalne razlomke kako bi f zapisali kao sumu jednostavnijih funkcija. Dobivamo

$$f(x) = \frac{1}{(x + 6) \cdot (x + 5)} = \frac{A}{x + 6} + \frac{B}{x + 5}.$$

Množenjem sa $(x + 6)(x + 5)$ dobijemo jednakost

$$1 = (A + B)x + (5A + 6B),$$

iz čega slijedi sustav

$$A + B = 0, \tag{22}$$
$$5A + 6B = 1. \tag{23}$$

Dobijemo $B = 1$ i $A = -1$.
Sada funkciju $f(x) = \frac{1}{x+5} - \frac{1}{x+6}$ razvijamo u Taylorov red oko točke $c = -4$, odnosno razvijamo ju po potencijama od $x + 4$.
Neka je $g(x) = \frac{1}{x+5}$ te $h(x) = \frac{1}{x+6}$. Razvijmo najprije funkciju $g(x)$. Imamo

$$g(x) = \begin{vmatrix} y = x + 4 \\ x = y - 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{y - 4 + 5} = \frac{1}{y + 1} = \frac{1}{1 + y}.$$

Iz razvoja (16) imamo

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x + 4)^n, \tag{24}$$

za $|x + 4| < 1$ pa dobijemo interval konvergenicje $I_g = \langle -5, -3 \rangle$.
Analogno,

$$h(x) = \begin{vmatrix} y = x + 4 \\ x = y - 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{y - 4 + 6} = \frac{1}{y + 2} = \frac{1}{2 + y} = \frac{1}{2 \cdot (1 + \frac{y}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y}{2}}.$$

Ponovnom primjenom formule (16) imamo

$$h(x) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{y}{2})^n = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\frac{x+4}{2})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x + 4)^n, \tag{25}$$

pri čemu je $|\frac{x+4}{2}| < 1$, tj. $|x + 4| < 2$. Dobivamo interval konvergencije $I_h = \langle -6, -2 \rangle$.
Iz (24) i (25) dobijemo razvoj funkcije $f(x)$ u Taylorov red po potencijama od $x + 4$:

$$\begin{aligned} f(X) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x + 4)^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x + 4)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \frac{1}{2^{n+1}}) \cdot (-1)^n (x + 4)^n. \end{aligned}$$

Još treba vidjeti za koje $x \in \mathbb{R}$ to vrijedi. Dakle, za interval konvergencije funkcije f uzimamo presjek intervala konvergencije funkcija g i h, tj.

$$I = I_g \cap I_h = \langle -5, -3 \rangle \cap \langle -6, -2 \rangle = \langle -5, -3 \rangle.$$

Pogledajmo sada, ukoliko imamo analitičku funkciju, kako odrediti radijus te interval konvergencije.

Primjer 10. *Odredimo radijus i interval konvergencije analitičke funkcije* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} (\frac{x}{7})^n$.

Rješenje:
Vidimo da je $a_n = \frac{n}{(n+1)7^n}$. Radijus konvergencije potražit ćemo korištenjem D'Alambertovog kriterija u formi limesa.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{7^{n+1}(n+2)}}{\frac{n}{7^n(n+1)}}\right||x| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{7^n 7(n+2)}}{\frac{n}{7^n(n+1)}}\right||x| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{7n(n+2)}\right||x| \\ &= \frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right||x|\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right||x| = \frac{1}{7}|x|.\end{aligned}$$

Dakle, $L = \frac{1}{7}$ pa je radijus konvergencije $r = \frac{1}{L} = 7$.
Kako vrijedi da red konvergira za $L|x| < 1$ slijedi da konvergira za $|x| < 7$, tj. $-7 < x < 7$. Kako bi zaključili što je interval konvergencije ove analitičke funkcije, pogledajmo što se događa na rubovima $x = 7$ i $x = -7$.
Za $x = -7$ imamo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}(-1)^n$. Primjenimo li nužan uvjet konvergencije reda imamo $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(-1)^n}{n+1}$ i taj limes je različit od nule jer $\lim_{n\to\infty}(-1)^n$ divergira (za parni n $(-1)^n = 1$, a za neparni n $(-1)^n = -1$). Zbog toga $x = -7$ ne ulazi u interval konvergencije danoga reda.
Neka je sada $x = 7$. Tada je $a_n = \frac{n}{n+1}1^n = \frac{n}{n+1}$. Pogledamo li limes općeg člana dobit ćemo $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$. Dakle, niti $x = 7$ ne ulazi u interval konvergencije danoga reda.
Dakle, interval kovergencije ove analitičke funkcije je $I = \langle -7, 7\rangle$.

Osim Taylorova teorema za funkciju jedne verijable, iskazan je i teorem za funkcije dviju varijabli (Teorem 5.). Pogledajmo jedan jednostavan primjer primjene toga teorema.

Primjer 11. *Izračunajmo razvoj funckije $f(x, y) = e^{x+y}$ u Taylorov red u okolini točke $T_0 = (1, -1)$.*

Rješenje:
Vidimo da je funkcija f klase C^{n+1} te da je svaka derivacija jednaka polaznoj funkciji. Štoviše vrijednost derivacija u točki $(1, -1)$ je uvijek jednaka 1. Pogledajmo $d^n f(1, -1)$, gdje nam d^n označava parcijalnu derivaciju funkcije f n-tog reda:

$$\begin{aligned}d^n f(1,-1) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(1,-1) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\partial^n f(1,-1)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}(dx)^{n-i}(dy)^i \\ &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(dx)^{n-i}(dy)^i = (dx+dy)^n = (\Delta x + \Delta y)^n = [(x-1)+(y+1)]^n \\ &= [x-1+y+1]^n = (x+y)^n.\end{aligned}$$

Dakle, razvoj zadane funkcije u Taylorov red bit će jednak $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!}$ ukoliko ostatak $R_n(x, y) \to 0$, za svaku točku (x, y). Kako je

$$|R_n(x,y)| \leq \frac{1}{(n+1)!}|x+y|^{n+1},$$

za $\lim_{n\to\infty} |R_n(x, y)|$ dobijemo nulu.
Isti rezultat bi dobili direktnom primjenom razvoja (11), odnosno,

$$e^{x+y} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}.$$

Također smo iskazali Taylorov teorem za kompleksne funkcije. Kao i kod realnih funkcija vrijedi da je razvoj funkcije $f(z) = \frac{1}{1-z}$ u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$ oblika $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, pri čemu je $z \in \mathbb{C}$ i $|z| < 1$. Iz $|z| < 1$ slijedi da je radijus konvergencije $R = 1$.

Napomena 12. *Razvijemo li analitičku funkciju u red potencija, taj red možemo derivirati i integrirati "član po član". Derivirani, odnosno, integrirani red ima jednak radijus kovergencije kao polazni red.*

Pogledajmo sljedeći primjer u kojemu ćemo koristiti ranije spomenuti $f(z) = \frac{1}{1-z}$ te Napomenu 12.

Primjer 12. *Razvijmo u Taylorov red funkciju $g(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ oko točke $z_0 = 0$ te odredimo radijus konvergencije.*

Rješenje:
Deriviramo li funkciju $f(z) = \frac{1}{1-z}$ dobijemo

$$f'(z) = -(1-z)^{-2} \cdot (-1) = \frac{1}{(1-z)^2} = g(z). \tag{26}$$

Kako je $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$ i za $R = 1$, onda je

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nz^{n-1} = g(z), |z| < 1.$$

Zapišemo li sumu tako da n polazi od 0, iskoristimo jednakost (26) i primijenimo Napomenu 12, dobivamo

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, R = 1.$$

U Primjeru 9. gledali smo što se događa s intervalom konvergencije realne funkcije koja je zadana kao suma drugih funkcija. Pogledajmo sada što je s radijusom konvergencije kompleksne funkcije zadane na takav način.

Primjer 13. *Funkciju $f(z) = \frac{1}{z^2-2-2}$ razvijmo u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$ te odredimo radijus konvergencije.*

Rješenje:
Nultočke nazivnika funkcije f su $z_1 = 2$ i $z_2 = -1$ pa tu funkciju možemo zapisati kao $f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)}$. Radimo rastav na parcijalne razlomke:

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+1)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z+1}. \tag{27}$$

Množenjem (27) sa $(z-2)(z+1)$ dobijamo

$$1 = (A+B)z + (A-2B)$$

iz čega slijedi sustav

$$\begin{aligned} 1 &= A - 2B, & (28) \\ 0 &= A + B, & (29) \end{aligned}$$

te je $A = \frac{1}{3}$ i $B = -\frac{1}{3}$.
Dakle, imamo funkciju

$$f(z) = \frac{1}{3(z-2)} - \frac{1}{3(z+1)} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1} \right).$$

Neka je $g(z) = \frac{1}{z-2}$, a $h(z) = \frac{1}{z+1}$. Gledamo najprije razvoj od g:

$$g(z) = \frac{1}{z-2} = \frac{1}{-(2-z)} = \frac{-1}{2(1-\frac{z}{2})} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}}, \tag{30}$$

pri čemu je $|\frac{z}{2}| < 1$, odnosno $R_g = 2$.
Analogno, razvijamo funkciju h:

$$h(z) = \frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \tag{31}$$

pri čemu je $|-z| = |z| < 1$, odnosno, $R_h = 1$.
Iz (30) i (31) slijedi da je

$$f(z) = \frac{1}{3}\Bigg(-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n \Bigg) = \frac{-1}{3}\Bigg(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + (-1)^n \right) z^n \Bigg),$$

pri čemu je $R = \min\{R_g, R_h\} = \min\{2, 1\} = 1$, tj. $|z| < 1$.

1.4 Neke primjene razvoja nekih funkcija u Taylorov red

Do sada smo vidjeli primjere zadataka u kojima smo trebali određenu funkciju razviti u Taylorov red oko neke točke i primjere kako već razvijenoj funkciji odrediti radijus ili interval konvergencije. No, Taylorovi redovi imaju širu primjenu, odnosno mogu se koristiti u različitim područjima i različitim problemima. Pogledajmo neke od njih.

Primjer 14. *(Vidjeti [2, Zadatak 2738.]) Odredimo približno rješenje diferencijalne jednadžbe* $\begin{cases} y' = y = f(t, y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

Rješenje:
Približno rješenje tražimo pomoću Picardovih iteracija. Kako bi mogli provesti Picardove iteracije, moraju vrijediti uvjeti Picardova teorema:

a) Skup $S = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b] \subseteq \mathbb{R}^2$, za $t_0, y_0, a, b \in \mathbb{R}$, pri čemu su $a, b > 0$;

b) funkcija $f : S \to \mathbb{R}$ je neprekidna i neograničena, tj. $|f(t,y)| \leqslant M$, pri čemu je $(t,y) \in S$;

c) f je Lipsitzova po drugoj varijabli s konstantom koja ne ovisi o t.

Za $t \in [t_0 - T, t_0 + T]$, pri čemu je $T = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, definiramo niz funkcija (u_k), $\mathrm{k} \in \mathbb{N}_0$ na sljedeći način:

$$\begin{aligned} u_0(t) &= y_0 \\ u_1(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_0(s))ds = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y_0)ds \\ &\vdots \\ u_k(t) &= y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u_{k-1}(s))ds. \end{aligned}$$

Tada $u_k \rightrightarrows u$, gdje nam $\rightrightarrows$ označavaju uniformnu konvergenciju, što znači da se k-ta Picardova iteracija može uzeti za približno rješenje diferencijalne jednadžbe.
U našem primjeru je $t_0 = y_0 = 0$ pa imamo $S = [-a, a] \times [-b, b] \subseteq \mathbb{R}^2$. Stoga je a) uvjet zadovoljen. Funkcija $f(t,y) = y$ je polinom pa znamo da je f neprekidna. Pogledajmo sada $|f(t,y)| = |y|$. Budući da je $(t,y) \in S = [t_0 - a, t_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ slijedi da je $y \in [y_0 - b, y_0 + b]$. Kako je u našem primjeru $y_0 = 0$, onda je $y \in [-b, b]$, odnosno vrijedi nejednakost $|y| \leqslant b$. Označimo li $M := b$ imamo da je f i ograničena, odnosno zadovoljen je i b) uvjet. Pogledajmo još je li f Lipsitzova. Promatramo $|\frac{\partial f}{\partial y}| = |1| = 1$ što je ograničeno konstantom neovisnom o t. Dakle, f zadovoljava uvjete Picardova teorema te možemo provesti Picardove iteracije.

$$\begin{aligned} u_0(t) &= y_0 = 1 \\ u_1(t) &= 1 + \int_0^t f(s,1)ds = 1 + \int_0^t 1ds = 1 + t \\ u_2(t) &= 1 + \int_0^t f(s, 1+s)ds = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ u_3(t) &= 1 + \int_0^t f(s, 1 + s + \frac{s^2}{2})ds = 1 + \int_0^t (1 + s + \frac{s^2}{2})ds = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3!} \\ &\vdots \\ u(t) &= e^t. \end{aligned}$$

Dakle, raspisom Picardovih iteracija prepoznali smo Taylorov red funkcije e^t pa ta funkcija prestvalja približno rješenje polazne diferencijalne jednadžbe

Više o Picardovom teoremu, Picardovim iteracijama i općenito o diferencijalnim jednadžbama može se pronaći u [9].

Primjer 15 (Pogledati [3, Zadatak 11.8]). *Radioaktivni element, čije je vrijeme poluraspada 100 dana, emitira β-čestice srednje kinetičke energije $8 \cdot 10^{-14} J$. β-čestice apsorbira uređaj* *koji pretvara njihovu kinetičku energiju u električnu s efikasnošću 5%. Odredimo količinu tvari (množinu) tog elementa potrebno staviti u uređaj da bi generirana električna snaga bila 5W?*

Rješenje:
Naprije pretvorimo vrijeme poluraspada u sekunde. Dakle imamo $T_{\frac{1}{2}} = 8640000s$.
Koristimo sljedeće formule:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{P_{KOR}}{P_{ULO}} \\
P_{ULO} &= \frac{E_\beta}{t} N_\beta \\
n &= \frac{N_0}{N_A} N_\beta \\
N_\beta &= \Delta N = N_0 - N = N_0 - N_0 e^{-\lambda t} = N_0(1 - e^{-\lambda t}) \\
\lambda &= \frac{ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}},
\end{aligned}$$

pri čemu je η korisnost, P_{KOR} korištena snaga, P_{ULO} uložena snaga, $\frac{E_\beta}{t}$ uložena snaga jedne čestice, N_β broj čestica, n množina tvari, N_0 početan broj čestica, N_A Avogadrova konstanta, λ konstanta raspada.
Iz prethodno napisanih formula slijedi nam

$$n = \frac{P_{KOR} \cdot t}{\eta N_A (1 - e^{-\lambda t}) E_\beta}. \tag{32}$$

Osim množine, nepoznat nam je i t. Kako se $e^{-\lambda t}$ nalazi u nazivniku, onda je vrijednost $\frac{1}{1-e^{-\lambda t}}$ jako mala te je aproksimacija te funkcije s prva dva člana MacLaurentova reda dobra, odnosno imamo $e^{-\lambda t} = 1 - \lambda t$. Vraćanjem u (32) i uvrštavanjem $\lambda = \frac{ln(2)}{T_{\frac{1}{2}}}$ imamo

$$n = \frac{P_{KOR} \cdot t}{\eta N_A (1 - 1 + \lambda t) E_\beta} = \frac{P_{KOR} \cdot t}{\eta N_A \lambda t E_\beta} = \frac{P_{KOR} \cdot T_{\frac{1}{2}}}{\eta N_A ln(2) E_\beta}.$$

Uvrštavanjem zadanih vrijednosti dobijemo $n = 0.026\, mol$.

Pogledajmo još jedan primjer koji pripada grani fizike.

Primjer 16 (Vidjeti [11, Primjer, slajd 21]). *Za zračenje crnog tijela vrijedi Planckov zakon, odnosno formula*

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi hc}{\lambda^5 (e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1)}, \tag{33}$$

pri čemu je ρ spektralna gustoća energije zračenja valne duljine λ, h Planckova konstanta, c svjetlosna brzina i T temperatura zadana u Kelvinima.
Prije Planckova zakona, postojala je jednostavnija formula (Rayleigh i Jeans)

$$\rho(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}. \tag{34}$$

Pokažimo da se te dvije formule podudaraju.

Rješenje:
Iz formule (34) bi slijedilo da kako se λ približava nuli tako spektralna gustoća jako raste pri svakoj temperaturi. To bi značilo da sva tijela emitiraju ultraljubičasto zračenje koje je kratkovalno, tj. emitiraju tzv. ultraljubičastu katastrofu. Ako stavimo $x = \frac{hc}{\lambda kT}$ vrijedi da za velike valne duljine je taj x blizu nule. Zbog toga je aproksimacija funkcije $e^{\frac{hc}{\lambda kT}}$ s prva dva člana Taylorova reda oko točke 0 dobra. Štoviše, bolja je što se x približava nuli, ondosno što valna duljina postaje veća. Dakle. za veliki λ, nazivnik Planckova zakona je približno jednak $\lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}$ pa vrijedi

$$\rho(\lambda) \approx \frac{8\pi hc}{\lambda^5 \frac{hc}{\lambda kT}} = \frac{8\pi kT}{\lambda^4},$$

odnosno podudaraju se ranije navedene formule.

Literatura

[1] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, *Matematika*, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[2] B.P. Demidovič, *Zadatci i rješeni primjeri iz više matematike s primjenom na tehničke nauke*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[3] V. Henč-Bartolić i suradnici, *Riješeni zadaci iz valova i optike*, Školska knjiga, Zagreb, 1992.

[4] J.K. Hunter, *An Introduction to Real Analysis*, Department of Mathematics, University of California at Davis, Davis, 2014.

[5] H. Kraljević, S. Kurepa,*Matematička analiza, četvrti dio, Funkcije kompleksne varijable, prvi svezak*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1986.

[6] S. Kurepa, *Matematička analiza 2, Funkcije jedne varijable*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.

[7] S. Kurepa, *Matematička analiza, treći dio - Funkcije više varijabli*, Treće izdanje, Tehnička knjiga, Zagreb, 1979.

[8] M.H. Protter, *Basic Elements od Analysis*, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, USA, 1998.

[9] M. Starčević,*Sustavi diferencijalnih jednadžbi, Skripta*, PMF Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2015.

[10] J. Stewart,*Calculus 7th Edition*, McMaster University and University of Toronto, Brooks/Cole, Cengage Learning, Belmont, 2008.

[11] Prirodoslovno-matematički fakultet (Nastavni materijali), $https : //www.pmf.unizg.hr/_download/repository/mat2 - pred14.pdf$, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu (pristupljeno 13. srpnja 2021.)