Simetrične matrice

Turić, Marija

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marija Turić

Simetrične matrice

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Marija Turić

Simetrične matrice

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Suzana Miodragović
Komentor: dr. sc. Matea Ugrica

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom radu definirat ćemo osnovne pojmove matrične algebre i navesti osnovna svojstva matrica. Proučavat ćemo pojam transponiranja matrica i njegova svojstva. Definirat ćemo simetričnu matricu te navesti i dokazati nekoliko svojstava takvih matrica. Detaljnije ćemo obraditi svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore realne simetrične matrice koji omogućavaju posebni tip dijagonalizacije.
Ključne riječi : matrice, simetrične matrice, svojstvena vrijednost, svojstveni vektor, dijagonalizacija

Abstract

In this paper we will define the basic notion of matrix algebra and state the basic properties of matrices. We will study the transpose of a matrix and some of its properties. The definition of a symmetric matrix will be given and we will formulate and prove some properties of such matrices. We will look at the eigenvalues and eigenvectors of a real symmetric matrix that allow a special type of diagonalization.
Key words : matrices, symmetric matrices, eigenvalues, eigenvectors, diagonalization

Sadržaj

1 Uvod

Jedan od najosnovnijih pojmova linearne algebre su upravo matrice s vrlo širokom primjenom. Najčešća primjena matrica je u rješavanju sustava jednadžbi. Osim što se koriste u matematici, one su korisne i u mnogim područjima drugih znanosti.
Tema ovog rada su simetrične matrice. Najprije ćemo definirati matricu te navesti osnovne matrične operacije i njihova svojstva. Definira se i pojam vektora i operacije s vektorima. Nakon uvođenja osnovnih definicija i svojstava matrica, u drugom poglavlju ćemo se detaljnije baviti simetričnim matricama. Definirat ćemo pojam transponirane matrice te iskazati i dokazati njezina svojstva. U trećem poglavlju bavit ćemo se sa svojstvenim problemom simetrične matrice. Tu ćemo definirati svojstvenu vrijednost i svojstveni vektor matrice. Pogledat ćemo kakve su svojstvene vrijednosti realne simetrične matrice te kakvi su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima. U konačnici ćemo iskazati i dokazati osnovni teorem za dijagonalizaciju realne simatrične matrice.

1.1 Matrice

U ovom poglavlju definirat će se osnovni pojmovi vezani uz matrice, standardne matrične operacije i navesti neka osnovna svojstva matrica koja su nužna za razumijevanje ovog rada. Više o samim matricama i njihovima svojstvima može se pronaći u [1, 2, 3, 4].

Definicija 1.1. Neka je $\mathbb{F}$ bilo koje polje, koje ćemo zvati osnovno polje, a njegove elemente skalarima. Neka su, nadalje, $m, n \in \mathbb{N}$ prirodni brojevi, a s D_{mn} neka je označen Kartezijev produkt $D_{mn} = \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$. Svako preslikavanje $A : D_{mn} \to \mathbb{F}$ tog produkta u osnovno polje nazivamo **matrica tipa** (m, n) **nad poljem** $\mathbb{F}$.

Specijalno matrice nad poljem realnih brojeva nazivamo realne matrice. Vrijednost funkcije A na mjestu (i, j) označavamo s $A(i, j) = a_{ij} \in \mathbb{F}$. Kako je domena od A konačna, uobičajeno matricu A zapisujemo tablično

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Skalare a_{ij}, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ nazivamo elementima matrice A. Kažemo da uređena n-torka $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ elemenata iz A čini i-ti redak matrice A, a uređena m-torka $(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{mj})$ njezin j-ti stupac. Skup svih matrica s m redaka i n stupaca s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$ označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrica tipa $(1, n)$, tj. oblika $[a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}]$ naziva se retčana matrica ili matrica redak, a matrica tipa $(m, 1)$, tj. oblika

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

naziva se stupčana matrica ili matrica stupac. Ako se specijalno za matricu A broj stupaca i redaka podudara, tj. ako je tipa (n, n), kažemo da je A **kvadratna** matrica reda n. Za kvadratnu matricu definiramo glavnu dijagonalu kao n-torku njezinih elemenata

$(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$. Suma elemenata kvadratne matrice A, koji se nalaze na glavnoj dijagonali, zove se **trag** matrice A i označavamo s $\mathrm{tr}(A)$. Kvadratna matrica je **dijagonalna** ukoliko su joj svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki nula. **Jedinična matrica** I je dijagonalna matrica čiji su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 1. **Nul-matrica** O je matrica čiji su svi elementi jednaki 0. Kako su matrice specijalno i funkcije, matrice $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ nad istim poljem $(\mathbb{F})$ će biti jednake, $A = B$, ako su istog tipa i imaju jednake odgovarajuće elemente, odnosno $a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\, i, j$.

Definicija 1.2. Zbroj matrica $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ tipa $m \times n$ je matrica tipa $m \times n$ s elementima $a_{ij} + b_{ij}$, za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Prema tome je

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \ldots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \ldots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \ldots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Primijetimo da je zbroj dviju matrica definiran samo za matrice istog tipa.

Teorem 1.1. *Ako su A, B, C matrice tipa $m \times n$, onda vrijedi*

(1) $(A + B) + C = A + (B + C)$ *(asocijativnost);*

(2) $A + O = O + A = A$ *(postojanje neutralnog elementa);*

(3) $A + (-A) = -A + A = 0$ *(postojanje suprotnog elementa);*

(4) $A + B = B + A$ *(komutativnost).*

Dokaz. Vidi [4].

Prema prethodnom teoremu skup M_{mn} s obzirom na zbrajanje je komutativna ili Abelova grupa.

Definicija 1.3. Produkt matrice $A = [a_{ij}]$ tipa $m \times n$ i skalara $\lambda \in \mathbb{F}$ je matrica :

$$\lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \ldots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Skup $M_{mn}(\mathbb{F})$ uz standardne operacije zbrajanja matrica i množenje skalarom je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Uz zbrajanje i množenje skalarom može se definirati i množenje matrica, a za to su nam potrebne ulančane matrice. Neka je $A \in M_{mr}$ i $B \in M_{sn}$. Kažemo da su matrice A i B ulančane ako je $r = s$.

Definicija 1.4. Za dvije ulančane matrice $A \in M_{mr}$, $B \in M_{rn}$ njihov produkt AB je matrica $C \in M_{mn}$ s elementima $c_{ij} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik} b_{kj}$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Teorem 1.2. *Skup svih kvadratnih matrica M_n snabdjeven binarnom operacijom množenja je asocijativna algebra s jedinicom, tj. za sve $A, B, C \in M_n$ i za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

(1) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$;

(2) $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$;

(3) $(\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B) = \alpha(A \cdot B)$;

(4) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

(5) $I \cdot A = A \cdot I = A$.

Dokaz. Vidi [4].

Sa M_n označavamo skup svih kvadratnih matrica reda n, a sa I jediničnu matricu reda n.

Definicija 1.5. Za matricu $A \in M_n$ kažemo da je regularna (invertibilna) matrica ako postoji matrica $B \in M_n$ takva da je $AB = BA = I$.

Budući da je matrica B jednoznačno određena gornjim uvjetom pišemo $B = A^{-1}$ i matricu A^{-1} zovemo inverzna matrica matrice A. Kažemo da je matrica singularna ako ona nije regularna. Skup svih regularnih matrica reda n označavamo s GL_n. Sljedeći teorem pokazuje da je skup GL_n snabdjeven binarnom operacijom množenja grupa.

Teorem 1.3. *(Opća linearna grupa reda n)*

- *Produkt dviju regularnih matrica je regularna matrica;*
- *Vrijedi asocijativnost;*
- *Jedinična matrica je u skupu GL_n i za nju vrijedi $AI = IA = A$, za svaku $A \in GL_n$;*
- *Za svaku regularnu matricu $A \in GL_n$ postoji inverzna matrica $A^{-1} \in GL_n$.*

Dokaz. Vidi [2].

Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Ako su $v_1, \dots, v_n \in V$ zadani vektori, a $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ skalari, tada $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$ nazivamo linearna kombinacija vektora $v_1, \dots, v_n$ s koeficijentima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Kažemo da su vektori $v_1, \dots, v_n$ linearno nezavisni ako njihova linearna kombinacija iščezava jedino na trivijalan način, tj. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. U protivnom kažemo da je skup vektora linearno zavisan, tj. $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$ pri čemu postoji $\lambda_i \neq 0$.

Definicija 1.6. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ i $S \subseteq V$, $S \neq \varnothing$. Linearna ljuska skupa S označava se simbolom $[S]$ i definira kao $[S]=\left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}$.

Definicija 1.7. Neka je V vektorski prostor i $S \subseteq V$. Kaže se da je S sustav izvodnica za V ako vrijedi $[S] = V$.

Definicija 1.8. Konačan skup $B = \{b_1, \dots, b_n\}, n \in \mathbb{N}$, u vektorskom prostoru V se naziva baza za V ako je B linearno nezavisan sustav izvodnica za V.

U vektorskom prostoru $V = \mathbb{R}^n$ imamo tzv. standardni ili euklidski skalarni produkt koji se definira kao funkcija $(\cdot|\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadana formulom

$$(x|y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \text{ gdje su } x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Euklidski skalarani produkt na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ ima sljedeća svojstva:

(1) $(x|x) \geq 0$ (nenegativnost);

(2) $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (definitnost);

(3) $(x|y) = (y|x)$ (simetričnost);

(4) $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$ (aditivnost u odnosu na prvu varijablu);

(5) $(\lambda x|y) = \lambda(x|y)$ (homogenost u odnosu na prvu varijablu).

Neka je V bilo koji realan vektorski prostor. Skalarni produkt na V je svaka funkcija $(\cdot|\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uvjete (1)-(5).
Svakom vektoru $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ možemo pridružiti nenegativan realan broj $\|x\| := \sqrt{(x|x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$.
Za skup $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vektora prostora $\mathbb{R}^n$ kažemo da je:

(a) ortogonalan ako je $(v_i|v_j) = 0$ za svaki i, j;

(b) ortonormiran ako je ortogonalan i ako je $\|v_i\| = 1$ za svaki i.

Za bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ prostora $\mathbb{R}^n$ kažemo da je ortonormirana ako je $(b_i|b_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$.

2 Simetrične matrice

2.1 Pojam i karakterizacija simetrične matrice

Osnovni pojmovi i tvrdnje koje su korištene u ovom poglavlju su preuzete iz [4] te [5]. Kako bismo mogli definirati simetričnu matricu, najprije se moramo upoznati s pojmom transponirane matrice.

Definicija 2.1. Transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}]$ tipa $m \times n$ je matrica $A^T = [b_{ji}]$ tipa $n \times m$ za koju je $b_{ji} = a_{ij}$, za sve $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Primjer 2.1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ onda je $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

Uočimo da redci matrice A predstavljaju stupce matrice A^T.

Teorem 2.1. *Operacija transponiranja ima sljedeća svojstva:*

(1) za $A \in M_{mn}$ vrijedi $(A^T)^T = A$;

(2) za $A, B \in M_{mn}$ vrijedi $(A + B)^T = A^T + B^T$;

(3) za $A \in M_{mn}, \alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi $(\alpha A)^T = \alpha A^T$;

(4) za $A \in M_{mr}$, $B \in M_{rn}$ vrijedi $(AB)^T = B^T A^T$.

Dokaz.

Treba pokazati da je proizvoljni element matrice na lijevoj strani jednak odgovarajućem elementu matrice na desnoj strani.
(1) Kako je ij-ti element matrice A^T prema definiciji transponiranja jednak a_{ji}, mora vrijediti da je ij-ti element matrice $(A^T)^T$ jednak a_{ij}. No, to je ij-ti element matrice A, pa je prva jednakost dokazana.
(2) Analogno, ij-ti element matrice $(A + B)^T$ jednak $a_{ji} + b_{ji}$, a to je upravo ij-ti element matrice $A^T + B^T$.
(3) Slično, ij-ti element matrice $(\alpha A)^T$ je ji-ti element matrice αA, a to je αa_{ji}.
S druge strane ij-ti element matrice αA^T je αa_{ji}, pa je dokazana jednakost.
(4) Konačno, ij-ti element matrice $(AB)^T$ je ji-ti element matrice AB, odnosno
$((AB)^T)_{ij} = (AB)_{ji} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$.
S druge strane, ij-ti element matrice $B^T A^T$ je
$(B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (B^T)_{ik} (A^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} a_{jk} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$, čime je dokazana i zadnja jednakost. □

Definicija 2.2. Za matricu A kažemo da je simetrična ako je $A^T = A$.

Simetrična matrica je nužno kvadratna matrica jer je broj redaka matrice A jednak broju stupaca matrice A^T, koje su jednake u slučaju simteri\u010dne matrice.

Primjer 2.2. Primjeri simetričnih matrica : $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Uočimo da za elemente simetrične matrice vrijedi : $a_{ij} = a_{ji}$, za sve $i, j = 1, \ldots, n$.
Zbroj simetričnih matrica je ponovno simetrična matrica te ako simetričnu matricu pomnožimo skalarom opet ćemo dobiti simetričnu matricu. Općenito, produkt simetričnih matrica ne mora biti simetrična matrica.
Navest ćemo primjer prethodnih tvrdnji.

Primjer 2.3. Neka su $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ simetrične matrice te neka je $\alpha = 3$ skalar.
Računamo :

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$
$$\alpha A = 3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}, \alpha B = 3 \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 15 \end{bmatrix}$$
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Propozicija 2.2. *Neka su A i B simetrične matrice. Produkt AB je simetrična matrica ako i samo ako A i B komutiraju, odnosno $AB = BA$.*

Dokaz.

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da je AB simetrična matrica. Tada je

$$AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$$

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da A i B komutiraju. Tada je

$$AB = BA = B^T A^T = (AB)^T.$$

□

Navest ćemo primjer vezan za prethodnu propoziciju.

Primjer 2.4. Neka su $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ i $B=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ simetrične matrice. Računamo produkt matrica AB i BA:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$
$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matrice A i B komutiraju te je njihov produkt simetrična matrica.

Propozicija 2.3. *Matrica A je simetrična ako i samo ako za svaki $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi*

$$(Ax|y) = (x|Ay). \tag{2.1}$$

Dokaz.

$\Rightarrow$
Neka je e_j j-ti stupac jedinične matrice reda n. Tada je

$$a_j = Ae_j = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \cdots + a_{nj}e_n, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Množenjem sklarano zdesna sa e_i i uzimajući u obzir da je baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ortonormirana dobivamo

$$a_{ij} = (Ae_j|e_i). \tag{2.2}$$

Jednakost (2.2) vrijedi za svaku matricu A. Ako je A simetrična matrica, onda je $a_{ij} = a_{ji}$ te primjenom simteričnosti skalarnog produkta dobivamo

$$(Ae_j|e_i) = (Ae_i|e_j) = (e_j|Ae_i).$$

Dakle,

$$(Ae_j|e_i) = (e_j|Ae_i), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.3}$$

Ako je $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$ i $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, množenjem (2.3) sa $x_j \cdot y_i$ te zbrajanjem po i i j od 1 do n dobivamo

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} x_j y_i \cdot (Ae_j|e_i) &= \sum_{i,j=1}^{n} x_j y_i \cdot (e_j|Ae_i) \Rightarrow \\
\sum_{i,j=1}^{n} (Ax_j e_j|y_i e_i) &= \sum_{i,j=1}^{n} (x_j e_j|Ay_i e_i) \Rightarrow \\
\left(\sum_{j=1}^{n} Ax_j e_j | \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right) &= \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j | \sum_{i=1}^{n} Ay_i e_i \right) \Rightarrow \\
\left(A \sum_{j=1}^{n} x_j e_j | y \right) &= \left(x | A \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right).
\end{aligned}$$

Time je dokazana jednakost (2.1).
$\Leftarrow$
Ako vrijedi (2.1), onda za $x = e_j$, $y = e_i$ dobivamo (2.3), odakle zbog (2.2) dobivamo $a_{ij} = a_{ji}$, a to je $A^T = A$.

$\square$

3 Svojstveni problem simetrične matrice

U ovom poglavlju se bavimo svojstvenim vrijednostima, svojstvenim vektorima te dijagonalizacijom simterične matrice. Sve definicije i tvrdnje su preuzete iz [4].

3.1 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektor simetrične matrice

Definicija 3.1. Neka je A realna matrica n-tog reda. Realan broj λ_0 zove se **svojstvena (karakteristična) vrijednost** matrice A ako postoji vektor $x_0 \in \mathbb{R}^n, x_0 \neq 0$ takav da je

$$Ax_0 = \lambda_0 x_0.$$

Za vektor x_0 kažemo da je **svojstveni vektor** matrice A i da pripada svojstvenoj vrijednosti λ_0.

Propozicija 3.1. *Svojstvene vrijednosti realne simetrične matrice su realne.*

Dokaz.

Neka je x svojstveni vektor simetrične matrice A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Primjenom definicije svojstvene vrijednosti matrice A i svojstava skalarnog produkta slijedi

$$\lambda(x|x) = (\lambda x|x) = (Ax|x) = (x|Ax) = (x|\lambda x) = \overline{\lambda}(x|x)$$

pa je $(\lambda - \overline{\lambda})(x|x) = 0$, a $x \neq 0$ pa je $(x|x) > 0$, stoga slijedi da je $\lambda = \overline{\lambda}$ što znači da je $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

Propozicija 3.2. *Svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima realne simetrične matrice su ortogonalni.*

Dokaz.

Neka su x i y svojstveni vektori simetrične matrice A pridruženi svojstvenim vrijednostima α i β , $\alpha \neq \beta$, $Ax = \alpha x$, $Ay = \beta y$, $x, y \neq 0$. Primjenom svojstava skalarnog produkta slijedi

$$\alpha(x|y) = (\alpha x|y) = (Ax|y) = (x|Ay) = (x|\beta y) = \overline{\beta}(x|y) = \beta(x|y)$$

pa je $(\alpha - \beta)(x|y) = 0$, a kako je $\alpha \neq \beta$ slijedi $(x|y) = 0$, tj. x i y su ortogonalni.

□

Definicija 3.2. Realna matrica A n-tog reda je ortogonalna ako je $A^T A = AA^T = I$.

Primjer 3.1. Primjer ortogonalne matrice : $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ako je A ortogonalna matrica, onda je i $A^{-1} = A^T$ također ortogonalna, odnosno svaka ortogonalna matrica je i regularna.
Ako je A simetrična matrica i $V = [v_1, \ldots, v_n]$ ortogonalna matrica takva da je

$$V^T AV \cdot e_k = \lambda_k e_k, \quad k = 1, \ldots, n \tag{3.1}$$

onda množenjem slijeva s V jednakosti (3.1) dobivamo

$$A(Ve_k) = \lambda_k V e_k$$

odnosno

$$Av_k = \lambda_k v_k, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{3.2}$$

Jednakost (3.2) pokazuje da za simetričnu realnu matricu A postoji ortonormirana baza u prostoru $\mathbb{R}^n$ takva da je svaki vektor te baze svojstven vektor matrice A. Matrica V kojom se matrica A dijagonalizira ima za stupce normirane linearno nezavisne svojstvene vektore matrice A, a kako je matrica A simetrična njezini svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima su ortogonalni.

Primjer 3.2. Odredimo svojstvene vrijednosti i svojstvene vektore matrice $A= \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
Svojstvene vrijednosti matrice A mogu se izračunati kao nultočke svojstvenog polinoma $\det(A - \lambda I)$.
$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - 4 = -2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$
$$\lambda_1 = 2$$
$$\lambda_2 = -3.$$

Sada ćemo odrediti svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= 2 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \\ -2x_1 + 2x_2 &= 2x_1 \\ 2x_1 + x_2 &= 2x_2 \\ -4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ 2x_1 - x_2 &= 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1 \\ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} &= x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Analogno za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = -3$. Svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost $\lambda_2 = -3$ je $x = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. U ovom primjeru možemo vidjeti kako su svojstvene vrijednosti realne simetrične matrice realne. Pokažimo da su svojstveni vektori pridruženi takvim svojstvenim vrijednostima ortogonalni. Označimo s $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_1 te $v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti λ_2. Primjenimo skalarni produkt na vektore v_1 i v_2 :

$$(v_1 | v_2) = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = 0.$$

Dobili smo da su vektori v_1 i v_2 ortogonalni. U konačnici vektore v_1 i v_2 podijelit ćemo s njihovom normom :

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vektori u_1 i u_2 su ortonormirani i oni čine ortonormiranu bazu u $\mathbb{R}^2$.

3.2 Dijagonalizacija simetrične matrice

Osnovni rezultat ovog potpoglavlja je sljedeći teorem čiji se iskaz i dokaz može pronaći u [4].

Teorem 3.3. *Ako je A realna simetrična matrica n-tog reda, onda postoji realna ortogonalna matrica V takva da je $V^T AV$ dijagonalna matrica.*

Za dokaz prethodnog teorema potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 3.4. *Ako je B realna simetrična matrica i $t \neq 0$ realan broj, onda*

$$((B^2 + t^2 I)x|x) = 0 \Rightarrow x = 0. \tag{3.3}$$

Dokaz.

Primjenom aditivnosti i homogenosti u odnosu na prvu varijablu lijeva strana od (3.3) prelazi u $(B^2x|x) + t^2(x|x) = 0$ te zbog simetričnosti od B imamo $(Bx|Bx) + t^2(x|x) = 0$.
Zbog svojstva nenegativnosti skalarnog produkta slijedi $(Bx|Bx) \geq 0$ i $(x|x) \geq 0$, time je $t^2(x|x) = 0$, ali kako je $t \neq 0$ dobivamo da je $(x|x) = 0$. No $(x|x) = |x|^2 = 0$ povlači da je $x = 0$ zbog svojstva pozitivne definitnosti sklaranog produkta.

□

Iskazat ćemo i jedan korolar koji će nam biti potreban u dokazu Teorema 3.3.

Korolar 3.5. *Ako je $v_1, \ldots, v_k$ ortonormiran skup u $\mathbb{R}^n$ $(n > k)$, onda postoje vektori $v_{k+1}, \ldots, v_n$ takvi da je matrica $V = [v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n]$ ortogonalna.*

Dokaz. Dokaz ovog korolara možete pogledati u [4].

Dokaz Teorema 3.3.

Neka je $e \in \mathbb{R}^n$, vektor različit od nule. Budući da je svakih $n+1$ vektora u $\mathbb{R}^n$ linearno zavisno, onda u nizu $e, Ae, A^2e, \ldots, A^ne$ postoji linearna zavisnost. Neka je m prirodni broj sa svojstvom da su vektori

$$e, Ae, \ldots, A^{m-1}e \tag{3.4}$$

nezavisni, ali da je vektor $A^m e$ linearna kombinacija vektora (3.4) odnosno

$$A^m e = a_1 A^{m-1} e + \cdots + a_{m-1} Ae + a_m e, \tag{3.5}$$

gdje su $a_1, \ldots, a_m$ realni brojevi. S obzirom na (3.5) definiramo polinom

$$P(\lambda) = \lambda^m - a_1 \lambda^{m-1} - \cdots - a_{m-1}\lambda - a_m. \tag{3.6}$$

Tada (3.5) možemo zapisati kao

$$P(A)e = 0. \tag{3.7}$$

Tvrdimo da polinom (3.6) ima samo realne nultočke. Zaista, neka je $\lambda_0 = \sigma + it$, $t \neq 0$ nultočka polinoma (3.6). Zbog realnih koeficijenata polinoma (3.6) i činjenice da je $\sigma - it$ je nultočka polinoma (3.6). No tada je

$$P(\lambda) = (\lambda - \sigma - it)(\lambda - \sigma + it)P_o(\lambda) = [(\lambda - \sigma)^2 + t^2]P_0(\lambda), \tag{3.8}$$

gdje je P_0 normiran polinom stupnja $m - 2$ s realnim koeficijentima. Zbog nezavisnosti vektora (3.4), vektor $x = P_0(A)e$ je različit od nule, pa (3.8) i (3.7) daju

$$[(A - \sigma I)^2 + t^2 I]x = 0. \tag{3.9}$$

Kako je $A - \sigma I$ simterična matrica, Lema 3.4 i izraz (3.9) povlače da je $x = 0$, što je kontradikcija. Zaključujemo da je $t = 0$, a time je dokazano da polinom (3.6) ima realne nultočke.
Neka je λ_1 realna nultočka polinoma (3.6) odnosno $P(\lambda_1) = 0$. Dijeljenjem polinoma (3.6) sa $(\lambda - \lambda_1)$ dobivamo $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)P_1(\lambda)$, gdje je P_1 normiran polinom stupnja $m - 1$. Ako stavimo da je $w_1 = P_1(A)e$, onda (3.7) daje $(A - \lambda_1 I)w_1 = 0$, tj. $Aw_1 = \lambda_1 w_1$. Neka je v_1 jedinični vektor vektora w_1. Tada je

$$Av_1 = \lambda_1 v_1. \tag{3.10}$$

Skup u kojem se nalazi vektor v_1 nadopunimo vektorima $\{w_2, \ldots, w_n\}$ do ortonormirane baze (Korolar 3.11). Tada je $V_1 = [v_1, w_2, \ldots, w_n]$ ortogonalna matrica. Matrica $V_1^T AV_1$ je simetrična i $V_1^T AV_1 \cdot e_1 = V_1^T A(V_1 e_1) = V_1^T Av_1 = V_1^T \lambda_1 v_1 = \lambda_1 V_1^T v_1 = \lambda_1 e_1$.
Kako je $\lambda_1 e_1$ prvi stupac simetrične matrice $V_1^T AV_1$ imamo

$$V_1^T AV_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{bmatrix}. \tag{3.11}$$

Ako je $n = 2$, onda je matrica (3.11) dijagonalna. Time je dokazan Teorem 3.3 za matrice drugog reda, a za dokaz matrice proizvoljnog reda provest ćemo metodu matematičke indukcije. Pretpostavimo da Teorem 3.3 vrijedi za sve simetrične realne matrice $(n-1)$-og reda. Tada za simetričnu matricu $B = (b_{ij})$ pri čemu $i, j = 2, \ldots, n$ $(n-1)$-og reda postoji ortogonalna matrica W takva da je

$$W^T BW = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

dijagonalna matrica. Sada je matrica $V = V_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix}$ ortogonalna i

$$V^T AV = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix} V_1^T AV_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & W^T BW \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$V^T AV = [\lambda_1 e_1, \lambda_2 e_2, \ldots, \lambda_n e_n]$$

je dijagonalna matrica.

□

Postupak određivanja ortogonalne matrice V počinje pronalaženjem svojstvenih vrijednosti pomoću svojstvenog polinoma. Ako su svojstvene vrijednosti različite, dijagonalizacija se provodi pomoću matrice čiji su stupci međusobno ortogonalni svojstveni vektori pridruženi tim svojstvenim vrijednostima. Ukoliko sve svojstvene vrijednosti nisu različite, mogu se pronaći ortogonalni vektori, no potrebno je ortogonalizirati linearno nezavisne vektore pridružene svojstvenim vrijednostima nekim postupkom ortogonalizacije, poput Gram-Schmidtovog.
Navest ćemo primjer za određivanje ortogonalne matrice u kojima svojstvene vrijednosti nisu različite.

Primjer 3.3. Svojstvene vrijednosti matrice $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ dobijemo kao nultočke svojstvenog polinoma i to su $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ i $\lambda_3 = 3$.
Sada ćemo odrediti svojstveni vektor za svojstvenu vrijednost $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= 3x_1 \Rightarrow x_1 = 0 \\ 2x_2 - x_3 &= 3x_2 \\ -x_2 + 2x_3 &= 3x_3 \\ -x_2 - x_3 &= 0 \Rightarrow x_3 = -x_2 \\ x &= \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix} = x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

Na sličan način određujemo svojstvene vektore za $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = x_1$$

$$2x_2 - x_3 = x_2 \Rightarrow x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3$$

$$-x_2 + 2x_3 = x_3 \Rightarrow -x_2 + x_3 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Označimo s $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ i $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ svojstvene vektore pridružene svojstvenim vrijednostima λ_1, λ_2 i λ_3. Lako se pokaže da su ti vektori međusobno ortogonalni, a da bi bili normirani podijelit ćemo s njihovom normom. Dobiveni vektori

$$u_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

čine stupce matrice V. Preostaje još izračunati dijagonalnu matricu $V^T AV$.

$$\begin{aligned} V^T AV &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Literatura

[1] V. Bahovec, N. Erjavec, Uvod u ekonometrijsku analizu, Element, Zagreb, 2009.

[2] D. Bakić, Linearna algebra, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[3] K. Horvatić, Linearna algebra II. dio, Prirodoslovno-matematički faklutet,Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 1995.

[4] S. Kurepa, Uvod u linearnu algebru, Školska knjiga, Zagreb, 1985.

[5] http://www.mathos.unios.hr/la1/Fizika/matrice.pdf, kolovoz, 2021.