Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Nataša Ujić

Gegenbauerovi polinomi

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Nataša Ujić

Gegenbauerovi polinomi

Završni rad

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Mihaela Ribičić Penava

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom ćemo radu definirati Gegenbauerove polinome i predstaviti neka njihova osnovna svojstva. Pokazat ćemo da se mogu zapisati pomoću funkcija izvodnica, ali i da predstavljaju rješenje homogene linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda. Izvest ćemo izraze za neke rekurzivne relacije koje zadovoljavaju. Štoviše, pokazat ćemo da zadovoljavaju tročlanu rekurziju. U nastavku rada prikazat ćemo oblik Rodriguesove formule u slučaju Gegenbauerovih polinoma. Osim toga, ukratko ćemo navesti osnovne informacije o Jacobijevim polinomima, kao proširenju Gegenbauerovih polinoma, te povezanost s ostalim klasama ortogonalnih polinoma. Na kraju ćemo navesti neke od primjena Gegenbauerovih polinoma u području matematičke fizike, s naglaskom na entropiji, i numeričke matematike, gdje ćemo istaknuti Gaussove kvadraturne formule.

Ključne riječi: tročlana rekurzija, Rodriguesova formula, Jacobijevi polinomi, Gegenbauerovi polinomi

Abstract

In this paper we will define Gegenbauer polynomials and present some of their basic properties. We will show that they can be written using generating functions, but also that they represent solution of homogeneous linear differential equation of the second order. We will derive some recurrence relations that they satisfy. Moreover, it will be shown that they satisfy the three-term recurrence relation. In the continuation of the paper, we will present Rodrigues' formula in the case of Gegenbauer polynomials. Furthermore, we will briefly provide basic information about Jacobi polynomials, as generalization of Gegenbauer polynomials, and the connection with other classes of orthogonal polynomials. Finally, there will be given some of the applications of Gegenbauer polynomials in the field of mathematical physics, with emphasis on information entropy, and numerical mathematics, where Gaussian quadrature formulas will be pointed out.

Keywords: three-term recurrence relation, Rodrigues' formula, Jacobi polynomials, Gegenbauer polynomials

Sadržaj

1 Uvod

Ortogonalni polinomi pripadaju nizu polinoma čiji su elementi međusobno ortogonalni s obzirom na zadani (težinski) skalarni produkt. Značajniji interes za njihovim proučavanjem započeo je u 19. stoljeću u radovima ruskog matematičara P. L. Čebiševljeva[1], koji se bavio istraživanjem verižnih razlomaka, a njegov rad nastavili su matematičari A. A. Markov[2] i T. J. Stieltjes[3]. Postupno su verižni razlomci napušteni kao polazište u istraživanju ortogonalnih polinoma te su se znanstvenici počeli usmjeravati na proučavanje svojstva ortogonalnosti. Pokazalo se da ortogonalni polinomi predstavljaju vrlo elegantna rješenja nekih diferencijalnih jednadžbi, kao i da imaju širok spektar primjena u raznim područjima matematike (npr. numerička analiza, teorija vjerojatnosti), ali i fizike. U drugom poglavlju ovoga rada upoznat ćemo se s osnovnim pojmovima vezanim za ortogonalne polinome.

U trećem poglavlju predstavljeni su Jacobijevi polinomi koji pripadaju klasičnim ortogonalnim polinomima na segmentu $[-1, 1]$. Predstavio ih je Jacobi[4] te su po njemu i nazvani. Unutar poglavlja navedena su neka njihova osnovna svojstva, kao i diferencijalna jednadžba koju zadovoljavaju. Na kraju su ukratko opisani specijalni slučajevi Jacobijevih polinoma, odnosno njihova povezanost s drugim klasičnim ortogonalnim polinomima.

Četvrto poglavlje bavi se Gegenbauerovim polinomima. Njih je 1875. godine u svojoj doktorskoj disertaciji predstavio austrijski matematičar Leopold Gegenbauer[5] te su po njemu i dobili naziv. Unutar poglavlja, dokazana su neka osnovna svojstva Gegenbauerovih polinoma, njihova karakterizacija pomoću diferencijalnih jednadžbi te rekurzivne relacije koje zadovoljavaju. Osim toga, pokazano je da su Legendreovi polinomi te Čebiševljevi polinomi prve i druge vrste specijalni slučajevi Gegenbauerovih polinoma. Na kraju su navedene primjene Gegenbauerovih polinoma u području matematičke fizike i numeričke matematike.

[1] Pafnuty Lvovich Chebyshev (1821. - 1894.) - ruski matematičar
[2] Andrey Andreyevich Markov (1856. - 1922.) - ruski matematičar
[3] Thomas Joannes Stieltjes (1856. - 1894.) - nizozemski matematičar
[4] Carl Gustav Jacobi (1804. - 1851.) - njemački matematičar
[5] Leopold Bernhard Gegenbauer (1849. - 1903.) - austrijski matematičar

2 Osnovni pojmovi i rezultati

Prije nego što započnemo proučavanje Jacobijevih i Gegenbauerovih polinoma, navedimo neke osnovne pojmove i rezultate koji će nam koristiti u daljnjim razmatranjima i pomoću kojih ćemo moći elegantnije zapisati određene identitete.

Definicija 2.1. Binomni koeficijent, u oznaci $\binom{n}{k}$, definiran je izrazom

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

za $n, k \in \mathbb{Z}_0$.

Napomena 2.1. Definiciju 2.1 možemo proširiti i na negativne brojeve:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Teorem 2.1 (Binomni red)**.** *Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Tada je*

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n.$$

Propozicija 2.2 (Leibnizovo pravilo)**.** *Neka su f i g n-puta derivabilne funkcije. Tada je produkt $f \cdot g$ n-puta derivabilna funkcija čija je n-ta derivacija dana izrazom*

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)},$$

pri čemu je $f^{(i)}$ i-ta derivacija funkcije f.

Dokaz se provodi matematičkom indukcijom pa ga nećemo navoditi, a može se pronaći u [4, str. 181].

Definicija 2.2. Pochhammerov simbol ili rastući faktorijel, u oznaci $(m)_n$, definiran je izrazom

$$(m)_n = m(m+1)(m+2)\cdots(m+n-1) = \prod_{i=0}^{n-1}(m+i),$$

za $m \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}_0$.

Napomena 2.2. Vrijede sljedeća svojstva Pochhammerovog simbola:

- $(m)_0 = 1,$
- $(1)_n = n!,$

- $(m)_n = n!\binom{m+n-1}{n} = \dfrac{(m+n-1)!}{(m-1)!}$,

- $(-m)_n = (-1)^n (m-n+1)_n$,

- $(m)_{n+k} = (m)_n (m+n)_k$,

- $(m)_{-n} = (-n)!\binom{m-n-1}{-n}$.

Definicija 2.3. Funkciju $\Gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ zadanu formulom

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

nazivamo gama funkcija.

Napomena 2.3. Vrijede sljedeće tvrdnje:

- $(x)_n = \dfrac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)},\ n \in \mathbb{N}_0$,

- $$\frac{(x)_n}{(y)_n} = \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)} \cdot \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(y+n)} \sim \frac{\Gamma(y)}{\Gamma(x)} \cdot n^{x-y}, \tag{1}$$

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x),\ x \in \mathbb{R}_+$,

- $\Gamma(x) = (x-1)!,\ x \in \mathbb{N}$.

Izraz (1) posljedica je Stirlingove formule i vrijedi za $x, y > 0$, $n \to \infty$, a simbol "$\sim$" označava asimptotsku jednakost.

Više o svojstvima, ali i primjenama gama funkcije, može se pronaći u [6] i [8].

2.1 Ortogonalni polinomi

Unutar ovog potpoglavlja navest ćemo neke osnovne tvrdnje o ortogonalnim polinomima kako bismo ih kasnije mogli detaljnije proučavati kod Jacobijevih i Gegenbauerovih polinoma.

Definicija 2.4. Polinomi p i q ortogonalni su na segmentu $[a, b]$ ukoliko je njihov težinski skalarni produkt u odnosu na težinsku funkciju w, $w(x) \geq 0$, $\forall x \in [a, b]$, jednak nuli, odnosno

$$\langle p, q \rangle_w = \int_a^b w(x)p(x)q(x)\, dx = 0.$$

Napomena 2.4. Težinski skalarni produkt posjeduje ista svojstva kao i "obični" skalarni produkt. Uočimo da je "običan" skalarni produkt zapravo skalarni produkt težine $w \equiv 1$. Osim toga, važno je napomenuti da ortogonalnost u odnosu na jedan težinski skalarni produkt ne implicira ortogonalnost u odnosu na drugi težinski skalarni produkt.

Analogno prethodnoj definiciji, niz polinoma $p_0,\ p_1,\ p_2, \ldots,$ pri čemu je p_i polinom i-tog stupnja, $i \in \mathbb{N}_0$, ortogonalan je na segmentu $[a, b]$ ukoliko zadovoljava uvjet ortogonalnosti

$$\langle p_i, p_j \rangle_w = \int_a^b w(x) p_i(x) p_j(x)\, dx = 0,$$

za $i \neq j,\ i, j \in \mathbb{N}_0$, s obzirom na pripadnu težinsku funkciju $w,\ w(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$.

Definicija 2.5. Težinska norma polinoma p inducirana težinskim skalarnim produktom uz pripadnu težinsku funkciju $w,\ w(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$, funkcija je definirana izrazom

$$||p||_w = \sqrt{\langle p, p \rangle_w} = \sqrt{\int_a^b w(x) p^2(x)\, dx}.$$

Definicija 2.6. Kažemo da je polinom p normiran ukoliko mu je vodeći koeficijent jednak 1.

Više informacija o ortogonalnim polinomima može se pronaći u [3], [5], [10] i [11]. U nastavku ćemo s $\{p_\mu(x),\ \mu \in \mathbb{N}_0\}$ označavati familiju ortogonalnih polinoma na segmentu $[a, b]$, pri čemu je stupanj polinoma p_μ jednak $\mu,\ \mu \in \mathbb{N}_0$.

Sljedeći teorem govori o egzistenciji nultočaka ortogonalnih polinoma na intervalu $\langle a, b \rangle$, a dokaz se može pronaći [10].

Teorem 2.3. *Neka je $\{p_\mu(x),\ \mu \in \mathbb{N}_0\}$ familija ortogonalnih polinoma na intervalu $\langle a, b \rangle$ i $w,\ w(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$, težinska funkcija. Tada svaki polinom p_μ ima točno μ različitih jednostrukih realnih nultočaka na $\langle a, b \rangle$.*

Napomena 2.5. Nultočke ortogonalnih polinoma uvijek se nalaze unutar onog segmenta na kojemu su polinomi ortogonalni.

Ortogonalni polinomi mogu se zapisati pomoću odgovarajućih funkcija izvodnica. Općenito, pomoću funkcija izvodnica članovi beskonačnog niza postaju koeficijenti u tzv. formalnom redu potencija[6]. Opći oblik funkcije izvodnice za familiju ortogonalnih polinoma $\{p_\mu(x),\ \mu \in \mathbb{N}_0\}$ na segmentu $[a, b]$ s težinskom funkcijom $w,\ w(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$, je $G(x, z) = \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} a_i p_i z^i$, pri čemu je (a_i) niz realnih brojeva.

Osim toga, važno je napomenuti da su ortogonalni polinomi rješenja diferencijalne jednadžbe oblika

$$q_2(x) y'' + q_1(x) y' + q_0(x) y = 0, \tag{2}$$

[6]Formalni red potencija je generalizacija polinoma u kojoj se pojavljuje beskonačno mnogo članova i ne bavi se pitanjem konvergencije.

pri čemu su $q_i,\ i=0,1,2,$ polinomi karakteristični za određenu vrstu ortogonalnih polinoma.

Osim funkcija izvodnica i diferencijalnih jednadžbi, istaknimo da ortogonalni polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju

$$p_{\mu+1}(x)+\alpha_\mu(x)p_\mu(x)+\beta_\mu(x)p_{\mu-1}(x)=0, \qquad \mu=1,2,3,\dots \tag{3}$$

za poznate $p_0,\ p_1,\ \alpha_\mu$ i $\beta_\mu,\ \forall\mu\in\mathbb{N}$.

Napomena 2.6. Rekurziju (3) zadovoljavaju i neke specijalne funkcije koje nisu ortogonalne pa tako definirana rekurzija sama po sebi nije dovoljna za konstrukciju ortogonalnih polinoma.

Neka je zadana familija ortogonalnih polinoma $\{p_\mu(x),\ \mu\in\mathbb{N}_0\}$ na $[a,b]$ te neka su A_μ i B_μ prva dva vodeća koeficijenta polinoma $p_\mu(x)$, tj. koeficijenti uz x^μ i $x^{\mu-1}$:

$$p_\mu(x)=A_\mu x^\mu+B_\mu x^{\mu-1}+\dots, \qquad A_\mu\neq 0.$$

Tada polinom $p_\mu(x)$ možemo zapisati pomoću njegovih nultočaka. Uočimo da prema Teoremu 2.3 slijedi da polinom p_μ ima točno μ različitih nultočaka pa imamo:

$$p_\mu(x)=A_\mu(x-x_{\mu,1})(x-x_{\mu,2})\cdots(x-x_{\mu,\mu}),$$

pri čemu su $x_{\mu,i},\ i=1,2,\dots,\mu,\ \mu\in\mathbb{N}$, nultočke polinoma $p_\mu(x)$.

Sada možemo iskazati teorem o tročlanoj rekurziji za ortogonalne polinome.

Teorem 2.4 (Tročlana rekurzija). *Neka je $\{p_\mu(x),\ \mu\in\mathbb{N}_0\}$ familija ortogonalnih polinoma na $[a,b]$ s težinskom funkcijom $w,\ w(x)\geq 0,\ \forall x\in[a,b]$. Tada za svaki $\mu\in\mathbb{N}$ vrijedi tročlana rekurzija*

$$p_{\mu+1}(x)=(a_\mu x+b_\mu)p_\mu(x)-c_\mu p_{\mu-1}(x), \tag{4}$$

pri čemu su koeficijenti u rekurziji dani izrazima

$$a_\mu:=\frac{A_{\mu+1}}{A_\mu}, \tag{5}$$

$$b_\mu:=a_\mu\left(\frac{B_{\mu+1}}{A_{\mu+1}}-\frac{B_\mu}{A_\mu}\right)=-\frac{a_\mu}{\lambda_\mu}\langle xp_\mu,p_\mu\rangle, \tag{6}$$

$$c_\mu:=\frac{A_{\mu+1}A_{\mu-1}}{A_\mu^2}\cdot\frac{\lambda_\mu}{\lambda_{\mu-1}}=\frac{a_\mu}{a_{\mu-1}}\cdot\frac{\lambda_\mu}{\lambda_{\mu-1}}, \tag{7}$$

gdje je

$$\lambda_\mu:=\|p_\mu\|^2=\langle p_\mu,p_\mu\rangle\ >0.$$

Detaljan dokaz prethodnog teorema može se pronaći u [10].

Napomena 2.7. Uočimo kako rekurzija (4) vrijedi i za $\mu = 0$, no u tom slučaju dogovorno uzimamo da je $p_{-1}(x) = 0$. Naime,

$$p_1(x) = (a_0 x + b_0) p_0(x), \quad A_0 \neq 0.$$

Također vrijede uvjeti $c_\mu \neq 0$, $a_{\mu-1} a_\mu c_\mu > 0, \forall \mu \in \mathbb{N}$, te $p_0(x) = 1$.

Navedimo još jednu formulu koja će nam biti korisna u poglavljima koja slijede.
Za familiju $\{p_\mu(x),\ \mu \in \mathbb{N}_0\}$ ortogonalnih polinoma na $[a, b]$ s težinskom funkcijom w, $w(x) \geq 0,\ \forall x \in [a, b]$, vrijedi Rodriguesova formula

$$p_\mu(x) = \frac{1}{e_\mu w(x)} \frac{d^\mu}{dx^\mu} \left[w(x) (g(x))^\mu \right], \tag{8}$$

pri čemu konstanta e_μ i polinom g ovise o vrsti ortogonalnih polinoma. Formulu je prvi predstavio O. Rodrigues[7] za Legendreove polinome, a kasnije je ona poopćena i za druge vrste ortogonalnih polinoma.

[7] Benjamin Olinde Rodrigues (1795. - 1851.) - francuski matematičar

3 Jacobijevi polinomi

3.1 Definicija i osnovni rezultati

Jacobijevi polinomi, u oznaci $P_\mu^{(\alpha,\beta)}$, pripadaju klasi ortogonalnih polinoma na segmentu $[-1,1]$ s obzirom na težinsku funkciju $w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha,\ \beta > -1$. Definirani su formulom

$$P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu \mu!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left[(1-x)^{\mu+\alpha}(1+x)^{\mu+\beta}\right], \tag{9}$$

što je zapravo zapis pomoću Rodriguesove formule (8) iz koje lako možemo očitati koeficijente:

$$\begin{aligned}
&e_\mu = (-1)^\mu 2^\mu \mu!,\\
&w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta,\\
&g(x) = 1-x^2.
\end{aligned}$$

Primjenom Propozicije 2.2 na izraz (9) dobivamo sljedeći zapis:

$$\begin{aligned}
&(-2)^\mu \mu!(1-x)^\alpha(1+x)^\beta P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x)\\
&\qquad = \sum_{k=0}^{\mu}\binom{\mu}{k}\frac{d^{\mu-k}}{dx^{\mu-k}}(1-x)^{\mu+\alpha}\frac{d^k}{dx^k}(1+x)^{\mu+\beta}\\
&\qquad = (-1)^\mu(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\mu!\sum_{k=0}^{\mu}\binom{\mu+\alpha}{\mu-k}\binom{\mu+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{\mu-k}.
\end{aligned}$$

Dakle, Jacobijeve polinome možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x) = 2^{-\mu}\sum_{k=0}^{\mu}\binom{\mu+\alpha}{\mu-k}\binom{\mu+\beta}{k}(x-1)^k(x+1)^{\mu-k}. \tag{10}$$

Funkcija izvodnica za Jacobijeve polinome dana je izrazom

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x)z^\mu = 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-z+R)^{-\alpha}(1+z+R)^{-\beta},$$

gdje je $R = R(x,z) = \sqrt{1-2xz+z^2}$. Ovu funkciju izvodnicu izveo je Jacobi, a izvod se može pronaći u [5, str. 144] ili [11, str. 69].

Navedimo sada prvih nekoliko Jacobijevih polinoma:

$$\begin{aligned}
&P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1,\\
&P_1^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2}\left[2(\alpha+1)+(\alpha+\beta+2)(x-1)\right],
\end{aligned}$$

$$P_2^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{8}\left[4(\alpha+1)_2 + 4(\alpha+\beta+3)(\alpha+2)(x-1) + (\alpha+\beta+3)_2(x-1)^2\right].$$

Koeficijenti za generiranje Jacobijevih polinoma proizvoljnog stupnja mogu se pronaći u [1, str. 793].

Iz (10) se lako može uočiti da je vodeći koeficijent polinoma $P_\mu^{(\alpha,\beta)}$ μ-tog stupnja jednak

$$2^{-\mu}\sum_{k=0}^{\mu}\binom{\mu+\alpha}{k}\binom{\mu+\beta}{\mu-k} = 2^{-\mu}\binom{2\mu+\alpha+\beta}{\mu}.$$

Također se može pokazati da vrijedi relacija

$$P_\mu^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^\mu P_\mu^{(\beta,\alpha)}(x).$$

Nadalje, iz

$$P_\mu^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{\mu+\alpha}{\mu}$$

slijedi

$$P_\mu^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^\mu\binom{\mu+\beta}{\mu}.$$

Deriviranjem $P_\mu^{(\alpha,\beta)}$ dobivamo izraz

$$\frac{d}{dx}P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\alpha+\beta+\mu+1}{2}P_{\mu-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Derivacije višeg reda računaju se prema formuli

$$\frac{d^k}{dx^k}P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+\beta+\mu+1)_k}{2^k}P_{\mu-k}^{(\alpha+k,\beta+k)}(x).$$

Kako smo u prethodnom poglavlju naveli da su ortogonalni polinomi rješenja diferencijalne jednadžbe (2), za Jacobijeve polinome vrijede sljedeći teoremi:

Teorem 3.1. *Jacobijevi polinomi $y = P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x)$ zadovoljavaju homogenu linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda*

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y' + \mu(\mu+\alpha+\beta+1)y = 0.$$

Teorem 3.2. *Neka su $\alpha, \beta > -1$. Diferencijalna jednadžba*

$$(1-x^2)y'' + [\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y' + \lambda y = 0,$$

gdje je λ parametar, ima za rješenje polinom koji je različit od nule ako i samo ako je λ oblika $\mu(\mu+\alpha+\beta+1)$, $\mu = 0, 1, 2, \ldots$ Tada je rješenje oblika const $\cdot P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x)$. Osim toga, niti jedno rješenje linearno nezavisno s $P_\mu^{(\alpha,\beta)}(x)$ ne može biti polinom.

Dokazi prethodno navedenih teorema mogu se pronaći u [11, str. 60-62].
Nadalje, Jacobijevi polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju (4), pri čemu su koeficijenti dani sljedećim izrazima:

$$a_\mu = \frac{(\alpha+\beta+2\mu+2)(\alpha+\beta+2\mu+1)}{2(\mu+1)(\alpha+\beta+\mu+1)},$$

$$b_\mu = \frac{(\alpha^2-\beta^2)(\alpha+\beta+2\mu+1)}{2(\mu+1)(\alpha+\beta+2\mu)(\alpha+\beta+\mu+1)},$$

$$c_\mu = \frac{(\alpha+\mu)(\beta+\mu)(\alpha+\beta+2\mu+2)}{(\mu+1)(\alpha+\beta+2\mu)(\alpha+\beta+\mu+1)}.$$

Više informacija o tročlanoj rekurziji za Jacobijeve polinome može se pronaći u [5, str. 145], a još neke rekurzivne relacije navedene su u [1, str. 782].

3.2 Specijalni slučajevi

Navedimo za kraj neke podvrste Jacobijevih polinoma.

- Legendreovi polinomi, u oznaci P_μ, slučaj su Jacobijevih polinoma za $\alpha=\beta=0$, tj.
$$P_\mu(x) = P_\mu^{(0,0)}(x).$$
- Čebiševljevi polinomi prve vrste, u oznaci T_μ, slučaj su Jacobijevih polinoma za $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, tj.
$$T_\mu(x) = 2^{2\mu}\binom{2\mu}{\mu}^{-1} P_\mu^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}(x).$$
- Čebiševljevi polinomi druge vrste, u oznaci U_μ, slučaj su Jacobijevih polinoma za $\alpha=\beta=\frac{1}{2}$, tj.
$$U_\mu(x) = 2^{2\mu}\binom{2\mu+1}{\mu+1}^{-1} P_\mu^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}.$$
- Gegenbauerovi polinomi, u oznaci C_μ^λ, slučaj su Jacobijevih polinoma za $\alpha=\beta=\lambda-\frac{1}{2}$, tj.
$$C_\mu^\lambda(x) = \binom{2\alpha}{\alpha}^{-1}\binom{\mu+2\alpha}{\alpha} P_\mu^{(\alpha,\alpha)}(x).$$

U nastavku rada detaljnije ćemo se baviti Gegenbauerovim polinomima jer se može pokazati da su sve ostale navedene podvrste specijalni slučajevi Gegenbauerovih polinoma.

4 Gegenbauerovi polinomi

Gegenbauerovi polinomi, u oznaci C_μ^λ, ortogonalni su polinomi na segmentu $[-1,1]$ s obzirom na težinsku funkciju $w(x) = (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$. Predstavljaju generalizaciju Legendreovih i Čebiševljevih polinoma te specijalan slučaj Jacobijevih polinoma.

U prethodnome smo potpoglavlju naveli odnos između Gegenbauerovih i Jacobijevih polinoma. Koristeći Definiciju 2.2, taj odnos možemo zapisati pomoću Pochhammerovog simbola na sljedeći način:

$$C_\mu^\lambda(x) = \frac{(2\lambda)_\mu}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_\mu} P_\mu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(x),$$

dok iz Napomene 2.3 slijedi zapis pomoću gama funkcije:

$$C_\mu^\lambda(x) = \frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(\mu+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma\left(\mu+\lambda+\frac{1}{2}\right)} P_\mu^{\left(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2}\right)}(x).$$

4.1 Funkcija izvodnica

Do eksplicitnog izraza za Gegenbauerove polinome može se doći pomoću funkcija izvodnica. Prilikom raspisivanja, koristit će nam Teorem 2.1 koji je zapravo generalizacija binomnog poučka.

Neka je $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Funkcija izvodnica za Gegenbauerove polinome dana je izrazom

$$G^\lambda(x,z) := \frac{1}{(1-2xz+z^2)^\lambda}, \tag{11}$$

za $x \in [-1,1]$, $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. Razvojem u Taylorov red dobivamo

$$G^\lambda(x,z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^\lambda(x) z^\mu \tag{12}$$

(više informacija i dokaz ovog identiteta može se pronaći u [5, str. 118]). Na taj način dolazimo do koeficijenata Gegenbauerovih polinoma C_μ^λ. Naime, uz pretpostavku da je $|z|$ dovoljno malo i koristeći Teorem 2.1, dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned}
G^\lambda(x,z) &= \frac{1}{(1-2xz+z^2)^\lambda} \\
&= \frac{1}{[1+z(z-2x)]^\lambda} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{k} z^k (z-2x)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\lambda}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} z^{2k-j} (-2x)^j.
\end{aligned}$$

Kako bismo lakše došli do samog izraza za C_μ^λ, uvodimo supstituciju

$$\begin{aligned}\mu &= 2k - j,\\ \nu &= k - j.\end{aligned}$$

Oduzimanjem i zbrajanjem ovih dviju jednakosti dobivamo da je $k = \mu - \nu$ i $j = \mu - 2\nu$. Uvrštavajući to u prethodno raspisani izraz za G^λ, dobivamo

$$G^\lambda(x,z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} z^\mu \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} \binom{-\lambda}{\mu-\nu}\binom{\mu-\nu}{\mu-2\nu}(-2x)^{\mu-2\nu}.$$

Uspoređivanjem s (12) i korištenjem svojstava Pochhammerovog simbola iz Napomene 2.2, slijedi izraz za Gegenbauerove polinome:

$$\begin{aligned}
C_\mu^\lambda(x) &= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} \binom{-\lambda}{\mu-\nu}\binom{\mu-\nu}{\mu-2\nu}(-2x)^{\mu-2\nu}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^{\mu-\nu}\binom{\lambda+\mu-\nu-1}{\mu-\nu}\binom{\mu-\nu}{\mu-2\nu}(-1)^{\mu-2\nu}(2x)^{\mu-2\nu}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^{2\mu-3\nu}\cdot\frac{(\lambda+\mu-\nu-1)!}{(\mu-\nu)!(\lambda-1)!}\cdot\frac{(\mu-\nu)!}{(\mu-2\nu)!\nu!}\cdot(2x)^{\mu-2\nu}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^{\nu}\frac{(\lambda+\mu-\nu-1)!}{(\lambda-1)!\nu!(\mu-2\nu)!}\cdot(2x)^{\mu-2\nu}\\
&= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^{\nu}\frac{(\lambda)_{\mu-\nu}}{(1)_\nu(1)_{\mu-2\nu}}\cdot(2x)^{\mu-2\nu},
\end{aligned}$$

za $\lambda \neq 0$ i $\mu \in \mathbb{N}_0$. Dakle,

$$C_\mu^\lambda(x) = \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^{\nu}\frac{(\lambda)_{\mu-\nu}}{(1)_\nu(1)_{\mu-2\nu}}\cdot(2x)^{\mu-2\nu} \tag{13}$$

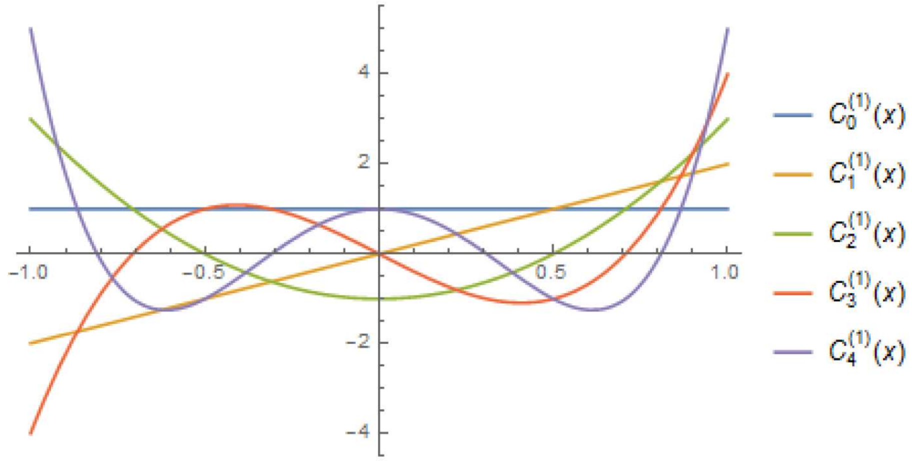
je Gegenbauerov polinom stupnja μ i indeksa λ. Dogovorno je $C_{-1}^\lambda \equiv 0$.

Navedimo prvih nekoliko Gegenbauerovih polinoma:

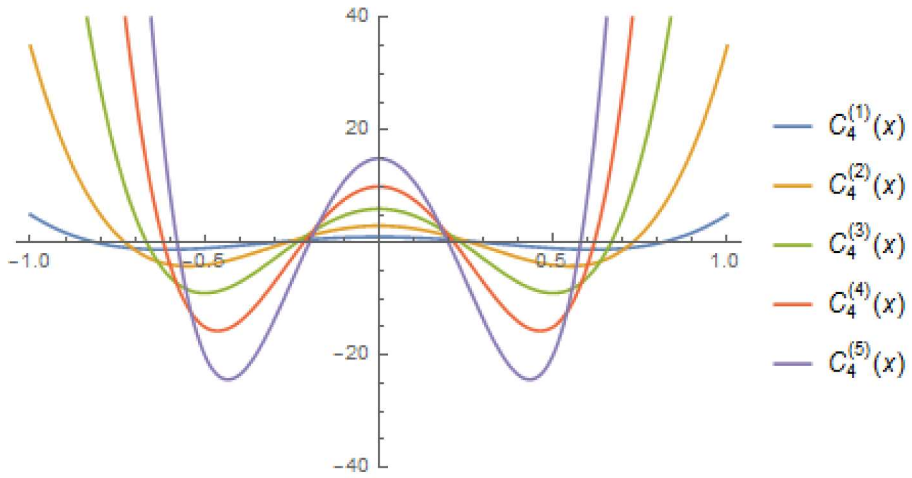
$$\begin{aligned}
C_0^\lambda(x) &= 1,\\
C_1^\lambda(x) &= 2\lambda x,\\
C_2^\lambda(x) &= -\lambda + 2(\lambda)_2 x^2,
\end{aligned}$$

$$C_3^\lambda(x) = -2(\lambda)_2 x + \frac{4}{3}(\lambda)_3 x^3,$$
$$C_4^\lambda(x) = \frac{1}{2}(\lambda)_2 - 2(\lambda)_3 x^2 + \frac{2}{3}(\lambda)_4 x^4,$$
$$C_5^\lambda(x) = (\lambda)_3 x - \frac{4}{3}(\lambda)_4 x^3 + \frac{4}{15}(\lambda)_5 x^5,$$
$$C_6^\lambda(x) = -\frac{1}{6}(\lambda)_3 + (\lambda)_4 x^2 - \frac{2}{3}(\lambda)_5 x^4 + \frac{4}{45}(\lambda)_6 x^6.$$

Koeficijenti za generiranje Gegenbauerovog polinoma proizvoljnog stupnja mogu se pronaći u [1, str. 794]. Na Slici 1 prikazani su Gegenbauerovi polinomi C_μ^1 za $\mu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, dok su na Slici 2 prikazani Gegenbauerovi polinomi C_4^λ za $\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Slika 1: Gegenbauerovi polinomi $C_\mu^1(x)$ za $\mu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$



Slika 2: Gegenbauerovi polinomi $C_4^\lambda(x)$ za $\lambda \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Kako za $\lambda = 0$ funkcija (11) degenerira, tj. $G^0 \equiv 1$, izraz (12) nije u potpunosti prikladan za definiciju pa (11) i (12) možemo zamijeniti s

$$G^0(x, z) := 1 - \ln(1 - 2xz + z^2) = \sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^0(x) z^\mu, \tag{14}$$

za $x \in [-1,1]$ i $|z| < 1$. Iz toga slijede poveznice Gegenbauerovih polinoma s Čebiševljevim polinomima prve i druge vrste. Naime, može se pokazati da iz (14) možemo dobiti izraz

$$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2} = 1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu}{2} \cdot C_\mu^0(x) z^\mu.$$

Koristeći funkcije izvodnice Čebiševljevih polinoma prve vrste

$$\frac{1-xz}{1-2xz+z^2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} T_\mu(x) z^\mu$$

i druge vrste

$$\frac{1}{1-2xz+z^2} = \sum_{\mu=0}^{\infty} U_\mu(x) z^\mu,$$

slijedi

$$\begin{aligned} C_0^0 &= T_0, \\ C_\mu^0 &= \frac{2}{\mu} \cdot T_\mu, \ \mu \in \mathbb{N}, \\ C_\mu^1 &= U_\mu, \ \mu \in \mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{15}$$

4.2 Svojstva

Kao i ostali ortogonalni polinomi, ali i polinomi općenito, i Gegenbauerovi polinomi zadovoljavaju određena svojstva i identitete. Tako se, na primjer, iz izraza (13) lako uočava da je vodeći koeficijent polinoma C_μ^λ jednak upravo

$$2^\mu \binom{\lambda+\mu-1}{\mu}.$$

Nadalje, izračunajmo $C_\mu^\lambda(-x)$:

$$\begin{aligned} C_\mu^\lambda(-x) &= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^\nu \frac{(\lambda)_{\mu-\nu}}{(1)_\nu (1)_{\mu-2\nu}} \cdot (-2x)^{\mu-2\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^{\mu-\nu} \frac{(\lambda)_{\mu-\nu}}{(1)_\nu (1)_{\mu-2\nu}} \cdot (2x)^{\mu-2\nu} \\ &= (-1)^\mu \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} (-1)^\nu \frac{(\lambda)_{\mu-\nu}}{(1)_\nu (1)_{\mu-2\nu}} \cdot (2x)^{\mu-2\nu}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$C_\mu^\lambda(-x) = (-1)^\mu C_\mu^\lambda(x).$$

Deriviranjem izraza (13) slijedi

$$\frac{d}{dx}C_\mu^\lambda(x) = 2\lambda C_{\mu-1}^{\lambda+1}(x), \tag{16}$$

pri čemu je $\lambda \neq 0$ i $\mu \in \mathbb{N}_0$.
Općenito, formula za k-tu derivaciju je

$$\frac{d^k}{dx^k}C_\mu^\lambda(x) = 2^k(\lambda)_k C_{\mu-k}^{\lambda+k}(x).$$

Za $\lambda = 0$, iz (14) slijedi relacija

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{d}{dx}C_\mu^0(x)z^\mu = \frac{2z}{1-2xz+z^2} = \sum_{\mu=1}^{\infty}2C_{\mu-1}^1(x)z^\mu,$$

iz čega uspoređivanjem koeficijenata dobivamo

$$\frac{d}{dx}C_\mu^0(x) = 2C_{\mu-1}^1(x), \quad \mu \in \mathbb{N}_0,$$

što je u skladu s izrazom (16).

Izračunajmo još neke specijalne vrijednosti Gegenbauerovih polinoma za $\lambda \neq 0$ i $\mu \in \mathbb{N}_0$:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=0}^{\infty}C_\mu^\lambda(0)z^\mu &= \frac{1}{(1+z^2)^\lambda} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{-\lambda}{\nu}z^{2\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\binom{\lambda+\nu-1}{\nu}z^{2\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{(\lambda+\nu-1)!}{\nu!(\lambda-1)!}z^{2\nu} \\
&= \sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu\frac{(\lambda)_\nu}{(1)_\nu}z^{2\nu}.
\end{aligned}$$

Iz ovog raspisa, za $\nu \in \mathbb{N}_0$, direktno slijedi

$$C_{2\nu}^\lambda(0) = (-1)^\nu\frac{(\lambda)_\nu}{(1)_\nu},$$

dok je

$$C_{2\nu+1}^\lambda(0) = 0,$$

što se lako vidi i iz (13).

Na sličan način pokaže se i da je $C_\mu^\lambda(1) = \binom{\mu+2\lambda-1}{\mu} = \frac{(2\lambda)_\mu}{(1)_\mu}$, za $\mu \in \mathbb{N}_0$ i $\lambda \neq 0$. Imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=0}^{\infty} C_\mu^\lambda(1) z^\mu &= \frac{1}{(1-2z+z^2)^\lambda} \\
&= \frac{1}{(1-z)^{2\lambda}} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\mu+1)(\mu+2)\cdots(\mu+2\lambda-1)}{(2\lambda-1)!} z^\mu \\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(\mu+2\lambda-1)!}{\mu!(2\lambda-1)!} z^\mu \\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(2\lambda)_\mu}{(1)_\mu} z^\mu.
\end{aligned}$$

4.3 Diferencijalna jednadžba

Gegenbauerovi polinomi zadovoljavaju tzv. Gegenbauerovu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. U tu ćemo svrhu, za diferencijabilnu funkciju $F(x, z)$, s F_x označavati njezinu prvu, a s F_{xx} njezinu drugu parcijalnu derivaciju po varijabli x. Sukladno tomu, za parcijalne derivacije funkcije F po varijabli z koristit ćemo oznake F_z i F_{zz}.

Lema 4.1. *Neka je $\lambda \neq 0$. G^λ je rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe*

$$(1-x^2)G_{xx}^\lambda + z^2 G_{zz}^\lambda + (2\lambda+1)\left[zG_z^\lambda - xG_x^\lambda\right] = 0. \tag{17}$$

Dokaz. Iz (11) znamo da je $G^\lambda(x, z) = \frac{1}{(1-2xz+z^2)^\lambda}$. Dakle, trebamo izračunati parcijalne derivacije funkcije G^λ po varijablama x i z te ih uvrstiti u (17) i pokazati da to zaista iščezava. Parcijalnim deriviranjem dobivamo:

$$G_x^\lambda = \frac{2\lambda z}{(1-2xz+z^2)^{\lambda+1}},$$

$$G_{xx}^\lambda = \frac{4\lambda(\lambda+1)z^2}{(1-2xz+z^2)^{\lambda+2}},$$

$$G_z^\lambda = \frac{2\lambda(x-z)}{(1-2xz+z^2)^{\lambda+1}},$$

$$G_{zz}^\lambda = \frac{4\lambda(\lambda+1)(x-z)^2}{(1-2xz+z^2)^{\lambda+2}} - \frac{2\lambda}{(1-2xz+z^2)^{\lambda+1}}.$$

Tvrdnja slijedi direktnim uvrštavanjem u polaznu jednadžbu. ■

Teorem 4.2. *Za $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{N}_0$, Gegenbauerovi polinomi C_μ^λ su rješenja homogene linerane diferencijalne jednadžbe drugog reda*

$$(1-x)^2 y'' - (2\lambda+1)xy' + \mu(\mu+2\lambda)y = 0. \tag{18}$$

Dokaz. Neka je $\lambda \neq 0$ i označimo $y_\mu(x) := C_\mu^\lambda(x)$ tako da je (12) oblika $G^\lambda(x,z) = \sum_{\mu=0}^{\infty} y_\mu(x) z^\mu$. Nadalje, za diferencijabilnu funkciju F definirajmo diferencijalni operator D izrazom $DF := zF_z$. Koristeći $Dz^\mu = \mu z^\mu$, imamo:

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \left[(1-x^2)y_\mu'' - (2\lambda+1)xy_\mu' + \mu(\mu+2\lambda)y_\mu\right] z^\mu = (1-x^2)G_{xx}^\lambda - (2\lambda+1)xG_x^\lambda + D(D+2\lambda)G^\lambda.$$

Koristeći definiciju operatora D, može se pokazati da vrijedi

$$D(D+2\lambda)G^\lambda = z^2 G_{zz}^\lambda + (2\lambda+1)zG_z^\lambda$$

pa dobivamo izraz oblika

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \left[(1-x^2)y_\mu'' - (2\lambda+1)xy_\mu' + \mu(\mu+2\lambda)y_\mu\right] z^\mu$$
$$= (1-x^2)G_{xx}^\lambda + z^2 G_{zz}^\lambda + (2\lambda+1)\left[zG_z^\lambda - xG_x^\lambda\right],$$

što iščezava prema Lemi 4.1. Dakle,

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \left[(1-x^2)y_\mu'' - (2\lambda+1)xy_\mu' + \mu(\mu+2\lambda)y_\mu\right] z^\mu = 0.$$

Budući da je $z^\mu \neq 0$, $\forall \mu \in \mathbb{N}_0$, iz prethodne jednadžbe direktno slijedi tražena tvrdnja, tj.

$$(1-x)^2 y'' - (2\lambda+1)xy' + \mu(\mu+2\lambda)y = 0.$$

Za $\lambda = 0$ tvrdnja slijedi iz analogne tvrdnje za Čebiševljeve polinome prve vrste. ■

Navedimo još jednu karakterizaciju Gegenbauerovih polinoma.

Teorem 4.3. *Neka je $\lambda > -\frac{1}{2}$ i $\mu \in \mathbb{N}_0$. Svako rješenje y diferencijalne jednadžbe* (18) *sa svojstvima*

(i) y je polinom stupnja μ,

$$(ii)\;\; y(-x) = (-1)^\mu y(x),$$

je oblika $y = const \cdot C_\mu^\lambda$. *Gegenbauerov polinom* C_μ^λ *je jedinstveno određeno rješenje koje zadovoljava (i), (ii) i*

$$(iii)\;\; y(1) = C_\mu^\lambda(1).$$

Dokaz. Neka je y rješenje diferencijalne jednadžbe (18) koje zadovoljava svojstva (i) i (ii). Tada je $y(x) = \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} a_\nu x^{\mu-2\nu}$ i vrijedi

$$(1-x^2)\sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}(\mu-2\nu)(\mu-2\nu-1)a_\nu x^{\mu-2\nu-2} - (2\lambda+1)\sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}(\mu-2\nu)a_\nu x^{\mu-2\nu} + \mu(\mu+2\lambda)\sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor} a_\nu x^{\mu-2\nu} = 0.$$

Uočimo da se prvi član s desne strane jednakosti može zapisati i na sljedeći način:

$$(1-x^2)\sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}(\mu-2\nu)(\mu-2\nu-1)a_\nu x^{\mu-2\nu-2}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}(\mu-2\nu)(\mu-2\nu-1)a_\nu x^{\mu-2\nu-2} - \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}(\mu-2\nu)(\mu-2\nu-1)a_\nu x^{\mu-2\nu}$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}(\mu-2\nu+2)(\mu-2\nu+1)a_{\nu-1} x^{\mu-2\nu} - \sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}(\mu-2\nu)(\mu-2\nu-1)a_\nu x^{\mu-2\nu},$$

pri čemu je dogovorno $a_{-1} := 0$.
Prema tome, imamo sljedeću jednakost:

$$\sum_{\nu=0}^{\lfloor \frac{\mu}{2} \rfloor}\{(\mu-2\nu+2)(\mu-2\nu+1)a_{\nu-1} \\ - [(\mu-2\nu)(\mu-2\nu-1) + (2\lambda+1)(\mu-2\nu) - \mu(\mu+2\lambda)]a_\nu\}x^{\mu-2\nu} = 0.$$

Usporedbom koeficijenata slijedi

$$4\nu(\mu-\nu+\lambda)a_\nu = -(\mu-2\nu+2)(\mu-2\nu+1)a_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \left\lfloor \frac{\mu}{2} \right\rfloor.$$

Dakle, koeficijent a_0 je proizvoljan, dok su preostali koeficijenti njegovi višekratnici. Iz toga slijedi da je $y(x) = a_0 z(x)$, pri čemu je vodeći koeficijent od z jednak 1.
Kako je C_μ^λ rješenje jednadžbe (18), slijedi

$$C_\mu^\lambda(x) = \alpha_0 z(x),$$

gdje je α_0 vodeći koeficijent od C_μ^λ. Iz toga uočavamo da je $z(x) = \alpha_0^{-1}C_\mu^\lambda(x)$, što uvrštavanjem daje traženu tvrdnju, tj. $y = \frac{a_0}{\alpha_0} \cdot C_\mu^\lambda = const \cdot C_\mu^\lambda$.
Budući da je $C_\mu^\lambda \neq 0$, direktno slijedi i druga tvrdnja, pri čemu je konstanta jedinstveno određena vrijednošću $y(1)$. ■

Osim toga, vrijedi i sljedeća propozicija.

Propozicija 4.4. *Za proizvoljan* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i* $\mu \in \mathbb{N}_0$ *vrijedi*

$$(1-x^2)\frac{d}{dx}C_\mu^\lambda = -\mu x C_\mu^\lambda + (\mu + 2\lambda - 1)C_{\mu-1}^\lambda, \tag{19}$$

gdje su $C_{-1}^\lambda \equiv 0$, $C_\mu^\lambda = C_\mu^\lambda(x)$.

Dokaz. Neka je $\lambda \neq 0$. Definiramo diferencijalni operator $D := z\frac{\partial}{\partial z}$ i imamo:

$$\begin{aligned}
\sum_{\mu=0}^{\infty}\left[-\mu x C_\mu^\lambda + (\mu+2\lambda-1)C_{\mu-1}^\lambda\right] z^\mu &= -x \cdot D\, \frac{1}{(1-2xz+z^2)^\lambda} + z\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+2\lambda)C_\mu^\lambda \cdot z^\mu \\
&= -x \cdot D\, \frac{1}{(1-2xz+z^2)^\lambda} + z(D+2\lambda)\, \frac{1}{(1-2xz+z^2)^\lambda} \\
&= \frac{2\lambda(1-x^2)z}{(1-2xz+z^2)^{\lambda+1}} \\
&= \sum_{\mu=0}^{\infty} 2\lambda(1-x^2)C_{\mu-1}^{\lambda+1} \cdot z^\mu.
\end{aligned}$$

Sada iz (16) slijedi tvrdnja.

Za $\lambda = 0$ koristimo izraz (15), a potpun dokaz može se pronaći u [7, str. 326]. ■

Napomena 4.1. Relacija (19) može se napisati i u sljedećem obliku:

$$2\lambda(1-x^2)C_{\mu-1}^{\lambda+1}(x) = (\mu+2\lambda)xC_\mu^\lambda(x) - (\mu+1)C_{\mu+1}^\lambda(x).$$

4.4 Rekurzivne relacije

Gegenbauerovi polinomi zadovoljavaju tročlanu rekurziju (4), tj. za $\mu \in \mathbb{N}$ i $\lambda \neq 0$ vrijedi

$$C_{\mu+1}^\lambda(x) = 2\frac{\mu+\lambda}{\mu+1}C_\mu^\lambda(x) - \frac{\mu+2\lambda-1}{\mu+1}C_{\mu-1}^\lambda(x), \tag{20}$$

gdje je $C_0^\lambda(x) = 1$ i $C_1^\lambda(x) = 2\lambda x$. Naime, uz operator $D = z\frac{\partial}{\partial z}$ i $C_{-1}^\lambda \equiv 0$, slično kao u dokazu Teorema 4.2, imamo:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\mu=0}^{\infty} z^\mu[(\mu+1)C_{\mu+1}^\lambda - 2(\mu+\lambda)xC_\mu^\lambda + (\mu+2\lambda-1)C_{\mu-1}^\lambda] \\
&\qquad = \sum_{\mu=1}^{\infty} \mu z^{\mu-1}C_\mu^\lambda - 2x\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+\lambda)z^\mu C_\mu^\lambda + z\sum_{\mu=0}^{\infty}(\mu+2\lambda)z^\mu C_\mu^\lambda \\
&\qquad = G_z^\lambda - 2x(D+\lambda)G^\lambda + z(D+2\lambda)G^\lambda \\
&\qquad = G_z^\lambda - 2xzG_z^\lambda - 2x\lambda G^\lambda + z^2G_z^\lambda + 2\lambda zG^\lambda \\
&\qquad = 2\lambda(z-x)G^\lambda + (1-2xz+z^2)G_z^\lambda \\
&\qquad = 2\lambda(z-x)\cdot\frac{1}{(1-2xz+z^2)^\lambda} + (1-2xz+z^2)\cdot\frac{2\lambda(x-z)}{(1-2xz+z^2)^{\lambda+1}} \\
&\qquad = 0.
\end{aligned}$$

Iz navedenog raspisa slijedi

$$(\mu+1)C_{\mu+1}^\lambda - 2(\mu+\lambda)xC_\mu^\lambda + (\mu+2\lambda-1)C_{\mu-1}^\lambda = 0,$$

što dokazuje rekurziju (20).

Napomena 4.2. Na sličan se način može pokazati da vrijedi sljedeća rekurzivna relacija:

$$(\mu+\lambda)C_{\mu+1}^{\lambda-1}(x) = (\lambda-1)\left[C_{\mu+1}^\lambda(x) - C_{\mu-1}^\lambda(x)\right].$$

4.5 Rodriguesova formula

U poglavlju 2 naveli smo opći oblik Rodriguesove formule za ortogonalne polinome. Uz supstituciju

$$\begin{aligned}
e_\mu &= (-1)^\mu 2^\mu \mu! \cdot \frac{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_\mu}{(2\lambda)_\mu}, \\
w(x) &= (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}, \\
g(x) &= 1-x^2,
\end{aligned}$$

iz formule (8) slijedi Rodriguesova formula za Gegenbauerove polinome:

$$C_\mu^\lambda(x) = \frac{(-1)^\mu}{2^\mu \mu!}\frac{(2\lambda)_\mu}{\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)_\mu}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-\lambda}\frac{d^\mu}{dx^\mu}\left[(1-x^2)^{\mu+\lambda-\frac{1}{2}}\right].$$

4.6 Specijalni slučajevi

Normirane Gegenbauerove polinome definiramo izrazom

$$\tilde{C}_\mu^\lambda := \frac{C_\mu^\lambda}{C_\mu^\lambda(1)},$$

pri čemu je $\mu \in \mathbb{N}_0$ i vrijedi $\tilde{C}_\mu^\lambda(1) = 1$.

Kao što je već ranije navedeno, Gegenbauerovi se polinomi mogu povezati s Legendreovim i Čebiševljevim polinomima.

- Legendreovi polinomi slučaj su Gegenbauerovih polinoma za $\lambda = \frac{1}{2}$, tj.

$$P_\mu(x) = C_\mu^{\frac{1}{2}}(x).$$

- Čebiševljevi polinomi prve vrste slučaj su Gegenbauerovih polinoma za $\lambda = 0$, tj.

$$T_\mu(x) = \frac{\mu}{2} C_\mu^0(x),$$

  odnosno

$$T_\mu(x) = \frac{\mu}{2} \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda} C_\mu^\lambda(x).$$

- Čebiševljevi polinomi druge vrste slučaj su Gegenbauerovih polinoma za $\lambda = 1$. Dakle,

$$U_\mu(x) = C_\mu^1(x).$$

4.7 Primjene

Gegenbauerovi polinomi imaju vrlo važnu ulogu u području matematičke fizike, a zbog svojih svojstava i širokog spektra primjena danas bude interes sve više znanstvenika. U ovom ćemo potpoglavlju navesti kako se Gegenbauerovi polinomi mogu upotrebljavati u teoriji informacija, ali i u Gaussovim kvadraturnim formulama.

4.7.1 Entropija

Teorija informacija znanstvena je disciplina zasnovana na teoriji vjerojatnosti i statistici, a bavi se brojčanim određivanjem količine informacija u sustavima. Temelji ove discipline počivaju na radovima H. Nyquista[8], R. Hartleyja[9] i C. Shannona[10], koji je 1948. godine u radu *A Mathematical Theory of Communication* iznio koncept entropije te se u njegovu čast ona ponekad naziva i Shannonova entropija. Entropija je osnovna mjera u teoriji informacija koja brojčano određuje neizvjesnost sustava, odnosno prosječnu razinu nesigurnosti svojstvenu mogućim ishodima varijable. Dakle, entropija predstavlja prirodnu težnju sustava da dođe u stanje kaosa,

$$S(\rho) = -\int \rho(x) \log \rho(x)\, dx,$$

gdje je ρ funkcija gustoće. Posebno je zanimljiv slučaj kada je $\rho(x) = |\Psi(x)|^2$, gdje je $\Psi(x)$ valna funkcija u kvantnomehaničkome sustavu.

Informacija o entropiji značajna je za kvantnu mehaniku, harmonijske oscilatore i vodikov atom u D dimenzija. U takvim se slučajevima valna funkcija može izraziti pomoću ortogonalnih polinoma, a prilikom računanja pojavljuju se integrali oblika

$$E(p_\mu) = -\int_a^b [p_\mu(x)]^2 \log[p_\mu(x)]^2 w(x)\, dx,$$

[8]Harry Nyquist (1889. - 1976.) - švedski fizičar i inženjer

[9]Ralph Vinton Lyon Hartley (1888. - 1970.) - američki znanstvenik

[10]Claude Elwood Shannon (1916. - 2001.) - američki matematičar, inženjer i kriptograf

gdje je $\{p_\mu(x),\ \mu \in \mathbb{N}_0\}$ familija ortogonalnih polinoma na segmentu $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, a w, $w(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, težinska funkcija. Informacija o entropiji Gegenbauerovih polinoma dana je izrazom

$$E(C_\mu^\lambda) = -\int_{-1}^{1} [C_\mu^\lambda(x)]^2 \log[C_\mu^\lambda(x)]^2 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dx.$$

Više informacija o ovoj temi može se pronaći u [2] i [9].

4.7.2 Gaussove kvadraturne formule

Neka je zadana familija ortogonalnih polinoma $\{p_\mu(x),\ \mu \in \mathbb{N}_0\}$ na segmentu $[a,b]$ i neka je w, $w(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$, pripadna težinska funkcija. Tada postoji jedinstveno određeni niz realnih brojeva $c_1, c_2, \ldots, c_\mu$ takav da vrijedi

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\mu} c_j f(x_j), \tag{21}$$

gdje je f polinom stupnja manjeg ili jednakog $2\mu - 1$. Formula (21) naziva se Gaussova kvadraturna formula. Koeficijenti c_j ponekad se nazivaju i Christoffelovi brojevi, a x_j su čvorovi integracije (tj. nultočke polinoma $p_\mu(x)$, koje su prema Teoremu 2.3 realne i jednostruke). Općenito, koeficijenti c_j dani su izrazom

$$c_j = -\frac{A_{\mu+1}}{A_\mu}\frac{1}{p_{\mu+1}(x_j)p'_\mu(x_j)},$$

gdje je A_μ vodeći koeficijent polinoma $p_\mu(x)$.
Dakle, u slučaju Gegenbauerovih polinoma, formula (21) poprima oblik

$$\int_{-1}^{1} f(x)(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,dx = \sum_{j=1}^{\mu} c_j f(x_j),$$

pri čemu su x_j nultočke polinoma $C_\mu^\lambda(x)$, a koeficijenti c_j su oblika

$$c_j = \frac{2^{2-2\lambda}\pi\Gamma(\mu+2\lambda)}{\mu![\Gamma(\lambda)]^2}\frac{1}{(1-x_j^2)[C_\mu^{\lambda\prime}(x_j)]^2},$$

$j = 1, 2, \ldots, \mu$, $\lambda > -\frac{1}{2}$, $\lambda \neq 0$. Više detalja o ovoj temi može se pronaći u [9] i [11, str. 352].

Literatura

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, Dover Publications, New York, 1964.

[2] V. S. Buyarov, P. López-Artés, A. Martinéz-Finkelshtein, W. Van Assche, Information entropy of Gegenbauer polynomials, J. Phys. A: Math. Gen. 33 (2000), 6549-6560

[3] T. S. Chihara, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, Science Publishers, Inc., New York, 1978.

[4] M. Crnjac, D. Jukić, R. Scitovski, Matematika, Ekonomski fakultet, Osijek, 1994.

[5] B. G. S. Doman, The Classical Orthogonal Polynomials, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapur, 2016.

[6] T. Milas, M. Ribičić Penava, K. Sabo, Primjene gama funkcije, Osječki matematički list, 21 (2021), 1-18

[7] M. Reimer, Multivariate Polynomial Approximation, Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[8] M. Ribičić Penava, D. Škrobar, Gama i beta funkcije, Osječki matematički list, 15 (2015), 93-111

[9] J. Sánchez-Ruiz, Information entropy of Gegenbauer polynomials and Gaussian quadrature, J. Phys. A: Math. Gen. 36 (2003), 4857-4865

[10] S. Singer, Numerička matematika, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2008., (javno dostupno: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_mat/`)

[11] G. Szegö, Orthogonal Polynomials, American Mathematical Society, Providence, 1939.