Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Antonela Bogdanović

Pogled u povijesni razvoj geometrije do renesanse

Diplomski rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Integrirani sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike

Antonela Bogdanović

Pogled u povijesni razvoj geometrije do renesanse

Diplomski rad

Voditelj: izv. prof. dr. sc. Tomislav Marošević

Osijek, 2021.

Sadržaj

Uvod

Geometrija (grč. mjerenje Zemlje) jedna je od najstarijih grana matematike, a bavi se izučavanjem oblika, veličina, udaljenosti i međusobnom pozicijom figura. Kako se nalazi među najstarijim granama matematike poznatim čovječanstvu, ne čudi da ima bogatu i široku povijest nastanka i razvoja. U ovom diplomskom radu bit će predstavljene faze razvoja geometrije u kronološkom slijedu, gdje god je to moguće. Iznimka je razvoj geometrije u kontekstu velikih civilizacija kako bi se zadržala preglednost razvoja unutar svake civilizacije.

Ovaj rad proći će kroz povijesni razvoj geometrije u civilizacijama Egipta i Babilona, grčku geometriju, razvoj geometrije u civilizacijama dalekog Istoka, a zatim prijeći na razvoj geometrije u Europi od srednjeg vijeka do renesanse. Istaknuta su velika dostignuća koja su važna za moderno poznavanje geometrije, kao i velika imena koja danas poznajemo u povijesti matematike. Kako rad ne bi bio previše opsežan, predstavljene su osnovne ideje, a konkretni primjeri uključeni su ako su posebno zanimljivi ili slični načinu na koji se geometrija poučava u moderno doba.

1 Stare civilizacije

Od samih početaka civilizacije geometrija je zauzela svoje mjesto u ljudskoj svakodnevnici. Gradnja se zasnivala na trodimenzionalnim tijelima i omjerima, pletenjem su nastajali jednostavni dvodimenzionalni uzorci, a posude su krasili razni mnogokuti i linije koje su se presijecale i stvarale složene uzorke. S vremenom geometrija će prerasti u vlastitu znanstvenu disciplinu ponajprije iz potrebe za rješavanjem praktičnih problema vezanih uz gradnju, a u nekim civilizacijama i iz vjerskih razloga. Povijesni izvori iz antičkog doba su rijetki i najčešće nisu direktni, ali svejedno nam daju vrijedan uvid u razvoj geometrije. Među najpoznatijim i najznamenitijim civilizacijama vezanim uz povijest matematike nalaze se Egipćani i Babilonci, pa su na samom početku predstavljeni upravo njihovi rezultati na području geometrije.

1.1 Egipatska geometrija

Razvojem hijeroglifa od otprilike 2900. godine pr. Kr., stari Egipćani ostavili su iza sebe pisani trag svojih matematičkih dostignuća. Među najvažnijim izvorima egipatske matematike nalaze se dva papirusa: Rhindov, koji je nastao 1650. pr. Kr. i Moskovski, koji je nastao oko 1850. pr. Kr. Oba papirusa sadrže razne zadatke vezane za praktične probleme kojima su se susretali pisari. Konkretno Rhindov papirus (dug oko 5 i pol metara te širok oko pola metra) sadrži 84 zadatka, dok Moskovski (dug oko 5 i pol metara te širok oko 30 centimetara) sadrži njih 25. Među zadacima i rješenjima zadataka mogu se pronaći i razne vizualne reprezentacije problema. Kako crtanje u perspektivi nije bila tehnika poznata Egipćanima, trodimenzionalna tijela prikazivala su se pomoću njihovih tlocrta ili bokocrta. Geometrija je u starom Egiptu vjerojatno najuočljivija u arhitekturi, posebno u grobnicama velikih vladara u obliku piramida koje danas prepoznajemo kao simbole Egipta.

Među jednostavnijim geometrijskim problemima kojima su se stari Egipćani bavili je računanje površine pravokutnika, trapeza i trokuta. Za aproksimaciju površine bilo kojeg četverokuta korištena je formula

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}, \tag{1.1}$$

gdje su a, b, c i d duljine stranica četverokuta. Iz formule vidimo da su se koristili prosjekom duljina nasuprotnih stranica, a sličan princip koristili su i pri računanju površine trokuta i to tako da su jednostavno zanemarili četvrtu stranicu četverokuta (u današnjim terminima, izjednačili ju s nulom). Za površinu kruga Egipćani su se koristili formulom

$$P = \left(\frac{8}{9}d\right)^2, \tag{1.2}$$

gdje je d promjer kruga. Formulu su rabili zadanu riječima, a uputa je glasila da se od promjera oduzme $\frac{1}{9}$ njegove duljine i taj se broj pomnoži samim sobom. Objašnjenje ili ideja iza ove formule nije pronađena, ali daje nevjerojatno precizne rezultate. Iz formule za površinu kruga možemo vidjeti da su π aproksimirali sa 3.16.

Osim računanja površina, Egipćani su se bavili i računanjem volumena tijela. Uglavnom su se bavili prizmama i valjkastim posudama. Moskovski papirus sadrži formulu za računanje krnje pravilne četverostrane piramide:

$$V = \frac{h}{3} \cdot \left(a^2 + ab + b^2\right), \tag{1.3}$$

gdje je h visina krnje piramide, a duljina brida veće (donje) baze, a b duljina brida manje (gornje) baze. Nekada su volumen računali i pomoću prosjeka površina gornje i donje baze, no u nekim izvorima otkriveno je da su s vremenom formulu popravili ubacivanjem umnoška duljina obje baze te s vremenom došli do točne formule. Napomenimo kako uvrštavanjem vrijednosti 0 za površinu manje (gornje) baze dolazimo do točne formule za volumen piramide.

Egipatska matematika služila je kao svojevrstan temelj za razvoj matematike u Grčkoj: uz Talesa se veže anegdota o mjerenju visine velike piramide, a Herod i Platon pozitivno su komentirali poučavanje i primjenu matematike u Egipćana. Veza između Grčke i Egipta nastala je zbog trgovinske i vojne povezanosti, a vjeruje se da su Grci ideju razlomka dobili proučavajući zapise starih Egipćana.

1.2 Babilonska geometrija

Odabirom glinenih pločica kao materijala za dokumentiranje svojih otkrića, stari Babilonci osigurali su dugovječnost svojih zapisa. Povijesni izvori babilonske matematike daleko su brojniji od izvora egipatske matematike, upravo zbog trajnije prirode materijala korištenog za zapisivanje. Mnogi povijesni izvori potječu iz doba starog Babilonskog kraljevstva (oko 1900. – 1600. godine pr. Kr.), a dostupni su i izvori iz doba neposredno prije širenja kršćanstva. Babilonska matematika, kao i egipatska, bila je usmjerena na primjene na svakodnevne probleme, a očitovala se u područjima astronomije, ekonomije, razmjene dobara i graditeljstva. Planovima gradnje često su bili pridruženi razni računi i upute za računanje, no stručna terminologija uglavnom je izgubljena. Skice mnogokuta korištene za izračune površina daju naslutiti na interes u teorijsku prirodu geometrije, što je bilo daleko iznad potreba za svakodnevne probleme. Zanimljivo je istaknuti česte izračune duljina dijagonala pravokutnika, posebno zato što se mogu pronaći u povijesnim izvorima koji prethode rođenju Pitagore čak nekoliko stoljeća. Babilonski matematičari računali su kvadratne korijene koristeći aproksimacije kroz iteriranje ili Heronovom formulom:

$$\sqrt{n} = \sqrt{a^2 \pm r} \approxeq a \pm \frac{r}{2a}, \tag{1.4}$$

gdje je n rastavljen na najbliži kvadrat (a^2) koji je bio uvećan ili umanjen za ostatak r. Među povijesnim izvorima mogu se pronaći i razni problemi vezani za Pitagorin poučak i određivanje duljina stranica u pravokutnom trokutu.

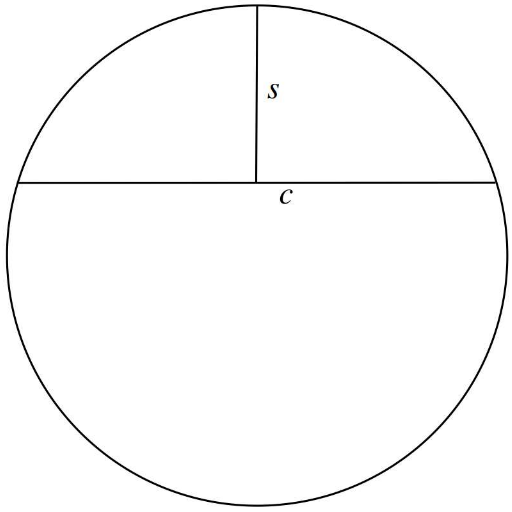
Osim površina mnogokuta, Babilonci su se bavili i računanjem površine kruga za što su koristili metodu koja koristi opseg kruga. Za površinu P kruga Babilonci su uzimali dvanaestinu kvadrata opsega kruga, tj.

$$P = \frac{o^2}{12}, \tag{1.5}$$

gdje je o opseg kruga čiju su vrijednost uzimali kao 3 duljine promjera ($o = 3d, d$ promjer). Dakle za površinu kruga dobivamo vrijednost

$$P = \frac{9d^2}{12} = \frac{9 \cdot 4 \cdot r^2}{12} = 3r^2. \tag{1.6}$$

Iz formule možemo vidjeti da su koristili aproksimaciju $\pi = 3$. Postavlja se pitanje kako su Babilonci došli do ovakvog izraza, a jedna teorija je da su izračunali prosjek površine kružnici upisanog ($\frac{d^2}{2}$) i opisanog (d^2) kvadrata. Osim površine kruga, Babilonci su se bavili i računom vezanim za segmente kruga dobivenih „odsijecanjem" preko tetive c.



Slika 1: Tetiva kružnice c i visina s na tetivu kružnice.

U takvim segmentima visina s je postavljena u središte tetive c i okomita je na nju. Duljina visine s računata je pomoću promjera d i duljine tetive c formulom

$$s = \frac{1}{2}\left(d - \sqrt{d^2 - c^2}\right), \tag{1.7}$$

a duljina tetive c računata je pomoću promjera d i duljine visine s formulom

$$c = \sqrt{d^2 - (d - 2s)^2}. \tag{1.8}$$

Takvo proučavanje tetiva kružnice kasnije će nastaviti Hiparh i Ptolomej koji je tu temu uvrstio u svoju knjigu posvećenu astronomiji, a poznata je pod arapskim nazivom *Almagest*.

Babilonci su se također bavili i izračunima u trodimenzionalnom prostoru. Volumene prizmi i valjaka računali su množenjem visine tijela s površinom baze. Volumen krnje pravilne četverostrane piramide Babilonci su računali na isti način kao i Egipćani što dovodi do zaključka da je pronalaženje prosjeka jedna od najranijih metoda aproksimacije. Volumen krnjeg stošca računali su koristeći se istom idejom, prosječnu vrijednost površina krugova koji čine baze krnjeg stošca pomnožili su s njegovom visinom:

$$V = \frac{P_1 + P_2}{2} \cdot h, \tag{1.9}$$

gdje je P_1 površina gornje baze, P_2 površina donje baze i h visina krnjeg stošca.

Među povijesnim izvorima nalazi se i glinena pločica pod nazivom *Plimpton 322* za koju se vjeruje da sadrži omjere vezane za pravokutne trokute koji se oblikom kreću od jednakokračnog do trokuta s kutovima koji su aproksimativno mjere 30° i 60°. Vjeruje se da se radi o trigonometrijskoj tablici, ali postoji i teorija da se radi o tablici koja je služila za podučavanje. Kako današnje poimanje kuta nije jednako kao poimanje kuta kod starih Babilonaca te zbog oštećenja nastalih s vremenom, gotovo je nemoguće dokučiti koja je stvarna svrha pločice. Ipak pločica daje vrijedan uvid u znanje i poimanje geometrije trokuta u babilonskoj matematici, a danas se čuva u Columbia University u New Yorku.

2 Geometrija u grčko-helenističko doba i u kasnoj antici

Izvrsna morska povezanost Grcima je omogućila razmjenu raznih dobara s ostatkom svijeta te povezanost s ljudima. Ta povezanost donijela im je mnoge znanstvene izvore iz vremena prije njihovog, a te su rezultate produbljivali i poboljšavali. Upravo Grcima dugujemo principe zaključivanja koje danas poznajemo u modernoj matematici, kao i ideju deduktivnog dokaza i logičkog zaključivanja. Mnoga imena grčkih matematičara poznata su i danas, kao i njihov trag na razvoj geometrije. Povijest Grčke obilježilo je nekoliko velikih razdoblja, svako sa svojom povijesnom značajnošću, a u nastavku su predstavljena neka temeljna dostignuća u geometriji.

2.1 Jonsko doba (oko 600. – 450. godine pr. Kr.)

2.1.1 Tales iz Mileta (oko 624. - 547. pr. Kr.)

Jonsko doba obilježili su prvi veliki filozofi (Tales, Anaksimandar i Anaksimen) kao i deduktivne metode u matematici. Povijesni izvori iz tog doba gotovo nikad nisu direktni, nego su bilježeni iz perspektive autora što narušava objektivnost. Unatoč tome možemo saznati da se Tales smatra ne samo prvim grčkim filozofom nego i prvim grčkim matematičarom koji je matematiku u Grčku donio iz Egipta te je doprinio i vlastitim otkrićima. Neki od teorema koji mu se pripisuju su:

1. Kutovi koje krakovi jednakokračnog trokuta zatvaraju s bazom su sukladni.
2. Vršni kutovi su sukladni.
3. Trokut je određen jednom stranicom i kutovima koji uz nju leže, ili drugim riječima, dva trokuta koji se podudaraju u jednoj stranici i toj stranici priležećim kutovima podudaraju se u svim elementima trokuta.
4. Promjer raspolavlja kružnicu.
5. Dijagonale pravokutnika sukladne su i raspolavljaju se.
6. Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi.

Posljednji od navedenih teorema poznat je pod nazivom Talesov teorem, a činjenica da mu se ostali teoremi pripisuju može značiti da ih je on prvi zabilježio i formalno iskazao te kasnije i dokazao. Uz Talesa se dodatno vežu anegdote o određivanju visina građevina koristeći se sjenama. Mjerenja je izvršavao tako da je čekao doba dana u kojem će duljina njegove sjene biti jednaka njegovoj visini, te bi izmjerio duljinu sjene zgrade. Ta ideja kasnije će se razviti u promatranja sličnosti trokuta.

2.1.2 Pitagora i pitagorejci

Pitagorino ime poznato je svima koji su se ikada susreli s matematikom, a za njega se vjeruje da je svoje znanje stekao na putovanjima na kojima se upoznao s materijalima babilonskog porijekla. Potječe s otoka Samosa, a živio je u 6. stoljeću pr. Kr. Nakon što se odselio na otok Croton (današnja Italija) osnovao je religijsku i filozofsku zajednicu čije je članove sam Aristotel nazvao pitagorejcima, naziv koji se održao sve do danas. Nedugo nakon osnutka svoje škole stekao je reputaciju mističnosti, a vjeruje se da je u njegovoj školi geometrija poučavana u svrhu geometrije bez potrebe da se primjenjuje na praktične probleme što je obilježilo početak proučavanja čiste matematike. Pitagorini sljedbenici sva su svoja otkrića pripisivali Pitagori, pa se zbog toga ne zna koja su dostignuća zaista njegova. Najpoznatiji rezultat koji nosi njegovo ime je Pitagorin teorem koji je u povijesti razvoja matematike bio poznat još i u starim civilizacijama, a prema legendi Pitagora je bogovima žrtvovao stotinu volova u znak zahvale za otkriće teorema. Poznati teorem glasi:

Teorem 2.1 (Pitagorin teorem) *Zbroj kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak je kvadratu nad hipotenuzom. Obratno, ako neki trokut ima svojstvo da je zbroj kvadrata nad dvije njegove stranice jednak kvadratu nad trećom, onda se radi o pravokutnom trokutu.*

Pitagorejsko shvaćanje pojma kvadrat podrazumijeva geometrijski lik, a ne potenciju broja (duljine stranica trokuta).

Većina Pitagorine škole okrenuta je na mističnost, pa su matematičkim objektima pripisivali razna mistična svojstva. Primjerice, prema Proklosu, Pitagora je pravi kut opisao kao estetski i etički superiornim nad šiljastim i tupim kutovima jer „stoji uspravno i nepomično", dok je tupe i šiljaste kutove vezao uz promjenjivost. Vjerojatno najpoznatija anegdota vezana za pitagorejce je otkriće iracionalnih brojeva pri proučavanju dijagonale kvadrata. Pitagorejci su vjerovali da svi omjeri koji se pojavljuju u prirodi moraju biti racionalni, što ne vrijedi za omjer duljine stranice kvadrata i njegove dijagonale. Ta spoznaja dovela je do svojevrsne krize u pitagorejskim redovima, a prema legendama je nesretni sljedbenik Pitagore koji je došao do tog otkrića prognan iz škole, dok neke legende tvrde da je čak i ubijen.

2.2 Stara Grčka (atensko doba)

U razdoblju od otprilike 450. do 300. godine pr. Kr. središte svih matematičkih istraživanja i otkrića bila je Atena. U tom razdoblju nastaje ograničenje u korištenju geometrijskih alata, konkretno dozvoljava se korištenje isključivo ravnala i šestara pri geometrijskim konstrukcijama. Vjeruje se da je to ograničenje nastalo pod utjecajem Platonove akademije.

2.2.1 Tri klasična problema

U izučavanju geometrijskih problema konstrukcija korištenjem isključivo ravnala i šestara, pojavila su se tri problema koja su ostavila značajan trag na razvoj geometrije. Danas su ti problemi zajedno poznati pod nazivom tri klasična problema, a uključuju udvostručenje kocke, trisekciju kuta i kvadraturu kruga. Prilaskom 19. stoljeću i sagledavanjem problema iz perspektive algebre, zaključeno je da odgovor o rješivosti tih problema leži upravo u samom području algebre. Poznavanjem tih činjenica možemo zaključiti da su se Grci, da bi riješili te probleme, morali koristiti dodatnim krivuljama ili rabiti ravnalo na način koji Platon nije smatrao dopuštenim u geometriji (ravnalo se treba koristiti isključivo za spajanje dvije točke). U nastavku su sva tri problema predstavljena pojedinačno.

Udvostručenje kocke

Priča koja slijedi taj problem legendarne je prirode, a najčešće uključuje priču o proroku Apolona koji je prenio narodu otoka Del poruku da Apolon zahtijeva oltar dvostruko veći od onog koji je trenutno u hramu kako bi ih oslobodio bolesti koja ih je zahvatila. Druga priča vezana uz problem govori da je kralj Minos želio udvostručiti grob pjesnika Glaukusa. Hipokrat s Hiosa (oko 470. – 410. pr. Kr.) problem je povezao sa srednjim geometrijskim proporcionalama x i y između duljine stranice kocke a i njezine dvostruke duljine $2a$:

$$a : x = x : y = y : 2a. \tag{2.1}$$

Danas je poznato da se taj problem svodi na kubnu jednadžbu $V_1 = 2 \cdot V$, tj. $x^3 = 2 \cdot a^3$, a svi pokušaji rješenja problema udvostručenja kocke svode se upravo na tu jednakost.

Jedno rješenje dao je i Arhita iz Tarenta koji je srednje geometrijske proporcionale odredio korištenjem presjeka valjka, stošca i torusa. U modernom zapisu, radi se o presjeku tijela zadanih jednadžbama

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2ax \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 4x^2 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 2a\sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

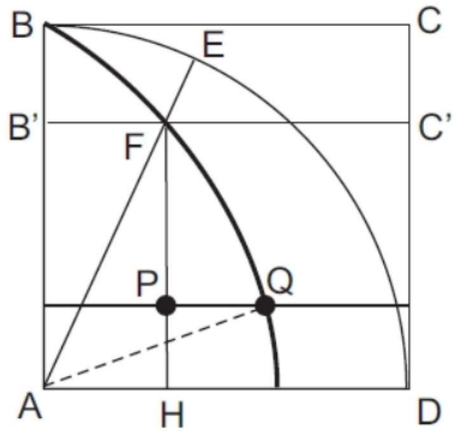
Rješenje je ponudio i Eudoksov učenik Menehmo kojemu se pripisuje otkriće konika kao presjeka stošca s ravninama koje nisu paralelne bazi. Njegovo rješenje, koristeći moderne termine, kaže da ako je $a : x = x : y = y : b$, onda je

$$\begin{aligned} x^2 &= ay \\ y^2 &= bx \\ xy &= ab, \end{aligned} \tag{2.3}$$

a x i y se mogu dobiti kao koordinate presjeka jedne od parabola (prve dvije jednadžbe) s hiperbolom (treća jednadžba). Način na koji je Menehmo konstruirao te krivulje nije poznat.

Trisekcija kuta

Problem trisekcije kuta nešto je drugačiji od ostala dva problema jer za određene slučajeve rješenje postoji (npr. kutovi mjere 60° i 90°), no valja ga riješiti općenito. Suvremenije metode algebre dokazale su da je problem trisekcije kuta ravnalom i šestarom nemoguć. Jedno od rješenja kojima su se koristili Grci bilo je uporaba krivulje koja je poznata pod nazivom kvadratisa. Radi se o mehaničkoj krivulji koja se ne može konstruirati ravnalom i šestarom pa ne zadovoljava uvjet ograničenja korištenja tog alata za crtanje. Ta krivulja se za trisekciju kuta može iskoristiti na sljedeći način (Slika 2): ako je dan kut EAD određen jednim položajem rotirajuće stranice $\overline{AB}$ kvadrata i pripadna točka F kvadratise, odredi se točka P na okomici FH na AD takva da je $|FP| : |PH| = 2 : 1$. Paralela kroz P sa stranicom $\overline{AD}$ siječe kvadratisu u točki Q. Tada je kut QAD tražena trećina kuta EAD.

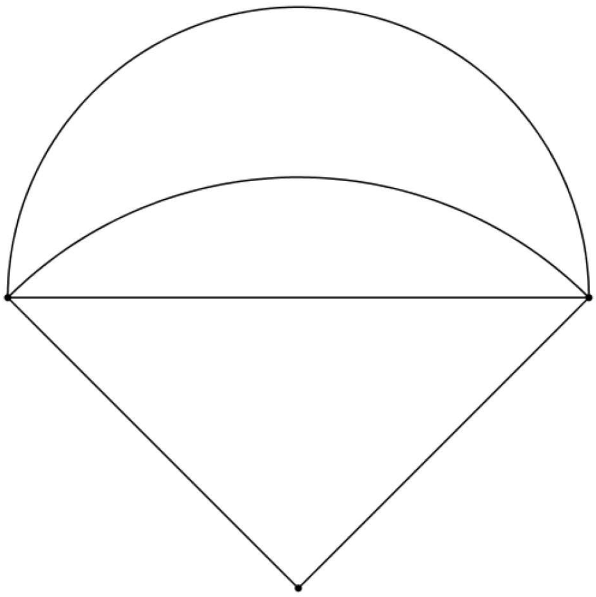


Slika 2: Trisekcija kuta pomoću kvadratise. Preuzeto iz [1], str. 47.

Kvadratura kruga

Problem kvadrature kruga podrazumijeva konstrukciju (ravnalom i šestarom) kvadrata čija je površina jednaka površini danog kruga. Jedno rješenje problema predložio je Antifont (480. - 411. pr. Kr.), a sastojalo se od upisivanja pravilnih poligona u krug. Upisivanje bi se započelo kvadratom, zatim bi se broj stranica udvostručio da se dobije osmerokut te se postupak nastavlja analogno. Cilj je doći do dovoljno velikog broja stranica mnogokuta koji bi imao površinu gotovo jednaku površini kruga u koji je taj mnogokut upisan. Ideja je ustvari metoda ekshaustije i prethodi Eudoksovoj metodi ekshaustije.

Pokušajem rješavanja problema kvadrature kruga, Hipokrat s Hiosa (oko 470. - 410. pr. Kr.) došao je do površina Hipokratovih mjeseca (geometrijski lik omeđen lukovima dviju kružnica različitih središta i polumjera). Postoji pet mjeseca kojima se kvadrat jednake površine može konstruirati ravnalom i šestarom, a Hipokratu su bila poznata njih tri. Jedan od tih mjeseca je mjesec omeđen polukružnicom nad hipotenuzom jednakokračnog pravokutnog trokuta te kružnicom kojoj je središte vrh pri pravom kutu, a prolazi kroz druga dva vrha:



Slika 3: Hipokratov mjesec

Za rješenje problema kvadratura kruga također se može primijeniti ranije spomenuta kvadratisa, a do tog otkrića došao je Hipija iz Elide (oko 460. - 400. pr. Kr.) što mu je bilo jedino značajno otkriće u matematici.

2.3 Euklid

Euklid (330. – 275. pr. Kr.) živio je i djelovao u dobu između atenskog doba i helenističkog doba. Malo toga se zna o njegovom životu, ali njegovi doprinosi geometriji dovoljno su utjecajni da mnogi pojmovi nose njegovo ime, npr. euklidski prostor i euklidska geometrija. Vjeruje se da je osnovao školu matematike u Aleksandriji, a Arhimed ga naziva najvećim matematičarom koji je ikada živio te ga često navodi u vlastitim radovima. Najpoznatiji trag ostavio je svojim djelom pod nazivom *Elementi* (u originalu *Stoicheia*) koje je među najstarijim većim djelima iz doba antičke Grčke. *Elementi* se sastoje od 13 knjiga, svaka nazvana odgovarajućim rimskim brojem, a jedna knjiga odgovara jednom svitku koji odgovara veličini današnjeg shvaćanja jednog poglavlja. Kroz vrijeme nadodane su još dvije knjige, no kako je pokazano da Euklid nije njihov autor, one se ne ubrajaju u originalno djelo. Imena knjiga (poglavlja) i teme kojima se bave navedene su u sljedećoj listi:

I. Početak aksiomatske izgradnje geometrije ravnine do pitagorejske grupe teorema.

II. Temelji algebarskih operacija s geometrijskim veličinama (duljine dužina, površine, volumeni), pitagorejske ideje, područje danas poznato kao geometrijska algebra

III. Planimetrija kruga i kružnice

IV. Konstrukcije kružnici opisanih i upisanih mnogokuta

V. Eudoksova opća teorija omjera i razmjera

VI. Primjena opće teorije omjera i razmjera na planimetriju

VII. Teoremi o prirodnim brojevima

VIII. Teoremi o prirodnim brojevima

IX. Teoremi o prirodnim brojevima

X. Klasifikacija kvadratnih iracionalnosti

XI. Osnove stereometrije

XII. Primjena metode ekshaustije na stereometriju

XIII. Teorija pravilnih poliedara.

Većina knjiga, posebice knjiga I, započinje iskazom definicija, njih čak 23. Među te 23 definicije nalaze se definicije točke, pravca, dužine, šiljastih i tupih kutova, geometrijske figure kao kombinacije točaka, pravaca i ravnina, kružnice, klasifikacije trokuta prema duljinama stranica i veličinama kutova, paralelnih pravaca i drugih pojmova. Definicije slijedi 5 postulata. [1]
"Neka se postulira:

I. Da se od svake točke do svake druge točke povlači dužina.

II. Da se konačan dio pravca produži na bilo koju stranu beskonačno daleko.

III. Da se oko svakog središta sa svakim promjerom opiše kružnica.

IV. Da su svi pravi kutovi međusobno sukladni.

V. Da će se, ako jedan pravac u presjeku s druga dva pravca tvori s njima s iste strane dva unutrašnja kuta čiji je zbroj manji od dva prava kuta, ta dva pravca sjeći i to s one strane prvog pravca na kojoj je zbroj kuteva manji od dva prava kuta."

Peti postulat pokazat će se posebno zanimljiv matematičarima, odnosno pitanje njegovog izvođenja iz prethodna četiri postulata. Problem Euklidovog petog postulata zadržat će se sve do 19. stoljeća kada će doći do interesantnih napredaka u razvoju geometrije. Zanimljivo je izdvojiti i neke opće tvrdnje koje Euklid navodi u svom djelu. Danas su ove tvrdnje često smatrane aksiomima. Tvrdnje glase: [2]

i. Objekti koji su jednaki istom objektu međusobno su jednaki.

ii. Ako su jednaki dodani jednakima, cjeline su jednake.

iii. Ako su jednaki oduzeti od jednakih, razlike su jednake.

iv. Objekti koji se međusobno podudaraju jednaki su jedan drugome.

v. Cijelo je veće od dijela.

[1] Citirano iz [4], str. 5.
[2] Citirano iz [4], str. 9.

Iako je danas u geometriji točnije koristiti izraz sukladno, Euklid je jednake objekte smatrao one koji imaju jednaku mjeru. Iz ovih tvrdnji možemo razaznati ideje klasa ekvivalencije koje će se na geometriju odraziti u obliku sukladnosti objekata. Teoremi su poredani tako da svaki slijedi isključivo iz već dokazanih ili iz navedenih definicija i osnovnih tvrdnji. Svi se zaključci izvode strogo deduktivno i slijede ideju da se matematika treba izvesti iz malog broja početnih pretpostavki. Euklid je koristio velika slova grčke abecede za označavanje točaka, pravce je nazivao po dvije točke koje leže na pravcu, a kružnice po tri točke koje leže na kružnici.

Važnost *Elemenata* leži ponajviše u stilu pisanja, a zatim u matematičkim dostignućima koje oni donose. Kroz povijest mnogi će matematičari koristiti *Elemente* kao izvore u vlastitom radu te će njegove rezultate također i navoditi. Najviše kritika *Elementi* dobivaju na račun svog suhog stila koji samo navodi rezultate bez posebne motivacije, no kasniji komentari i prijevodi pokušat će nadomjestiti taj nedostatak. S obzirom na broj izvora korištenih u stvaranju *Elemenata*, ne može se sa sigurnošću tvrditi da je ijedan rezultat uistinu Euklidov (rezultati u *Elementima* pripisuju se Eudoksu, Teetetu i pitagorejcima).

2.4 Aleksandrijsko doba (Helenističko doba)

Helenističko doba obilježila su osvajanja Aleksandra Velikoga (365. – 323. pr. Kr.) koji je 331. godine pr. Kr. osnovao Aleksandriju koja je postala glavni znanstveni centar tog doba. Grad je ležao na zapadnoj obali delte Nila, a u njemu su prebivali Grci, Egipćani i Židovi. U gradu je osnovana poznata Aleksandrijska knjižnica u kojoj su umjetnici i učenjaci djelovali jedni uz druge. Poziciju glavnog centra znanosti Aleksandrija je držala više od 600 godina, a u njoj su djelovala neka od najvećih imena znanosti u tom dobu.

2.4.1 Aristarh

Jedno od tih imena bio je Aristarh sa Samosa (310. – 250. pr. Kr.) koji je najveći trag ostavio na području primijenjene matematike na astronomiju. Formirajući pravokutan trokut između Zemlje, Sunca i Mjeseca kada je osvijetljeno točno pola Mjesečeve površine, pravi kut je tada pri Mjesecu, a za veličinu šiljastog kuta pri Zemlji pretpostavio je 87° (u stvarnosti, ova mjera je $89^\circ 50'$) što je tada bilo teško za izmjeriti. U njegovo doba trigonometrija nije bila poznata, pa se koristio svojstvima pomrčine Sunca i Mjeseca. U tim razmatranjima došao je do tri zaključka:

1. Udaljenost između Zemlje i Sunca je između 18 i 20 puta veća od udaljenosti između Mjeseca i Zemlje.

2. Promjer Sunca i Mjeseca odnose se na jednak način kao u prethodnom zaključku.

3. Omjer promjera Sunca naprama promjeru Zemlje je veći od 19:3, ali manji od 43:6.

Iako omjeri ne predstavljaju omjere koje poznajemo danas, rezultati koje je Aristarh postigao nisu ništa manje vrijedni hvale.

2.4.2 Arhimed

Arhimed iz Sirakuze (oko 287 – 212. pr. Kr.) odrastao je u Sirakuzi, a vjeruje se da se školovao u Aleksandriji prije povratka u rodni grad. Osim u matematici, trag je ostavio i u mehanici, optici, hidrostatici i inženjerstvu. Jedini njegov tekst u potpunosti posvećen geometriji pod nazivom *O mjerenju kruga* je izgubljen, a bavio se polu-pravilnim poliedrima.

Od poznatijih teorema koji mu se pripisuju izdvaja se teorem koji kaže da je površina kruga jednaka površini pravokutnog trokuta čije su katete radijus i opseg kruga. Došao je do sličnog rezultata za volumen kugle ($V = \frac{4}{3}r^3\pi$), konkretno da je volumen kugle jednak volumenu uspravnog stošca kojemu je visina jednaka radijusu kugle, a površina baze jednaka oplošju te kugle. Došao je i do točne formule za oplošje kugle ($O = 4r^2\pi$) te do zaključka da je volumen kugle jednak $\frac{2}{3}$ volumena valjka koji sadrži tu kuglu (polumjer baze jednak je polumjeru kugle, a visina je jednaka promjeru kugle). Opisivanjem pravilnih mnogokuta krugu omeđio je π s vrijednostima $3\frac{1}{7}$ i $3\frac{10}{71}$. Korištenje te ocjene za π je posebno zanimljivo u usporedbi s aproksimacijama koje su se dotad koristile.

2.4.3 Apolonije iz Perge

Apolonije iz Perge (oko 260. – 190. pr. Kr.) također se školovao u Aleksandriji, a poučavali su ga Euklidovi sljedbenici. Trag je ostavio u razvoju teorije konika, koje je otkrio Menehmo, u 8 knjiga pod nazivom *Konike* od kojih su 4 sačuvane na izvornom grčkom jeziku, tri na arapskom, a posljednja je izgubljena. Kada je u pitanju organizacija osnova, Apolonije slijedi Euklidov stil usustavljivanjem čitave teorije konika u prve četiri knjige, a zatim prelazi na specijaliziranije probleme u slijedećim knjigama. Također, za razliku od Euklida, svakoj knjizi je dodao predgovor u kojem je izložio koje su mu namjere u pisanju svake knjige.

Apolonije je konike promatrao kao presjeke ravnina i uspravnih i neuspravnih stožaca pod raznim kutovima, za razliku od svog prethodnika Menehma koji je promatrao samo presjeke uspravnih stožaca (hiperbolu je dobio tako da je stožac „produžio“ preko vrha i dodao još jedan stožac okrenut naopako). Upravo Apoloniju možemo zahvaliti na današnjim imenima konika, odnosno pojmovima parabola, hiperbola i elipsa. U svom radu bavi se i tangentama, sekantama i asimptotama konika, njihovim fokusima te presjecima i dodirima dviju konika. Osim tog djela, koje je proučavano u islamskim zemljama, a kasnije i u Europi nakon Keplerovog otkrića eliptične putanje planeta, Apolonije je poznat po problemu koji nosi njegovo ime, a on podrazumijeva pronalaženje kružnica koje dodiruju tri dane kružnice u ravnini, ili kružnice degenerirane u pravce (pravci se smatraju kružnicama beskonačnog radijusa). Također je došao do rezultata da se oplošja dodekaedra i ikosaedra upisana u istu kuglu odnose kao njihovi volumeni.

2.5 Kasna antika

Posljedicom rimskih osvajanja Grčke, vrijeme koje je slijedilo Euklida, Arhimeda i Apolonija nije dalo matematičare koji su svojim doprinosom bili usporedivi s njima. Najveći dio matematike koji se razvio u tom dobu bio je vezan uz primjene, a najviše za primjene na astronomiju. Ipak ovo doba dalo je nekoliko poznatih imena za povijest matematike, a njihovi doprinosi predstavljeni su u nastavku.

2.5.1 Heron

O Heronovom životu poznato je jako malo, a pretpostavlja se da je živio u razdoblju između 150. i 200. godine pr. Kr. Njegovo djelovanje bilo je okrenuto na primjene i korištenje metoda koje su barem aproksimativno dobre. Dao je komentare na Euklidove *Elemente* te je indirektne dokaze zamijenio direktnima. Od poznatijih djela izdvaja se knjiga pod nazivom *Metrika*, a bavi se mjerenjem, plohama, tijelima i volumenima. Poznata formula koja nosi njegovo ime je formula za računanje površine trokuta ako su poznate duljine stranica:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \tag{2.4}$$

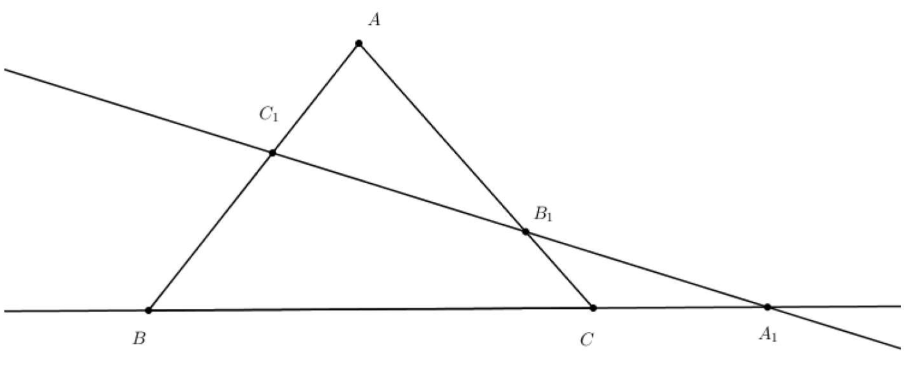
gdje su a, b i c duljine stranica trokuta, a $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ polupseg trokuta. Formulu predstavlja tako da daje trokute sa cjelobrojnim duljinama stranica i opisuje račun kojim će doći do površine trokuta. Račun je direktna primjena Heronove formule, a Heron ističe da je njegov rezultat više numerički nego matematički. Iako formula nosi njegovo ime, ona je bila poznata već i Arhimedu što je vidljivo iz Heronovog dokaza ove formule. Zanimljivo je napomenuti da u svom dokazu formule Heron nije naveo nijednu lemu koju je koristio.

2.5.2 Menelaj

Menelaj iz Aleksandrije (1. - 2. st.) trag je ostavio na području sferne geometrije. U svom djelu *Sphaerica* pisao je o osnovama sferne geometrije, te je dao teoreme za sukladnost sfernih trokuta analogne Euklidovim teoremima za ravninske trokute. U tom djelu nalazi se i poznati teorem koji danas nosi njegovo ime, a glasi:

Teorem 2.2 (Menelajev teorem) *Zadan je trokut ABC. Na pravcima BC, AC i AB redom je odabrana po jedna točka A_1, B_1 i C_1. Ukoliko su točno dvije ili pak nijedna od točaka A_1, B_1, C_1 na stranicama trokuta, vrijedi: točke A_1, B_1 i C_1 su kolinearne ako i samo ako vrijedi*

$$|BA_1| \cdot |CB_1| \cdot |AC_1| = |CA_1| \cdot |AB_1| \cdot |BC_1|.$$

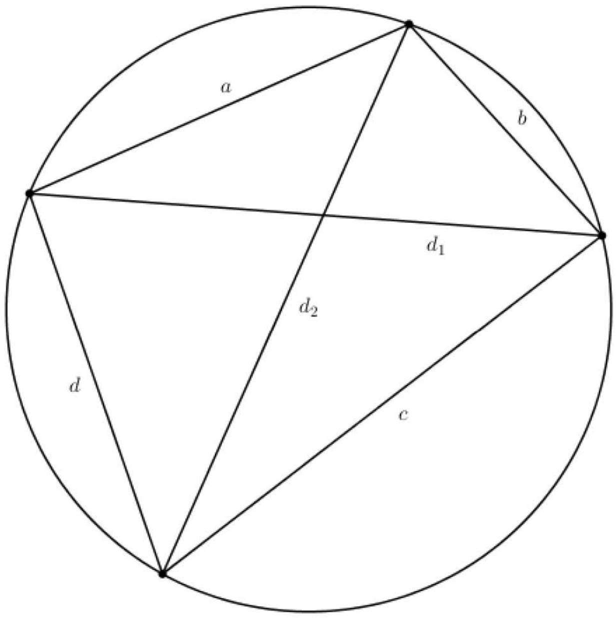


Slika 4: Menelajev teorem

2.5.3 Ptolomej Aleksandrijski

Ptolomej Aleksandrijski (2. stoljeće) najveći trag u povijesti znanosti ostavio je kao astronom, a u matematici je doprinio njezinim primjenama na astronomiju. Njegovo djelo poznato pod nazivom *Almagest* (arapski prijevod originala koji je izgubljen) sadrži tablicu duljina tetiva s njihovim pripadnim kutevima u rasponu od $\frac{1}{2}^\circ$ do 90°, originalno izračunate u seksagezimalnom sustavu prema babilonskoj tradiciji astronomije. Za izračune je koristio teorem koji je danas poznat po njegovom imenu:

Teorem 2.3 (Ptolomejev teorem) *U tetivnom četverokutu je produkt dijagonala jednak zbroju produkata nasuprotnih stranica (tj., $d_1 \cdot d_2 = a \cdot c + b \cdot d$).*



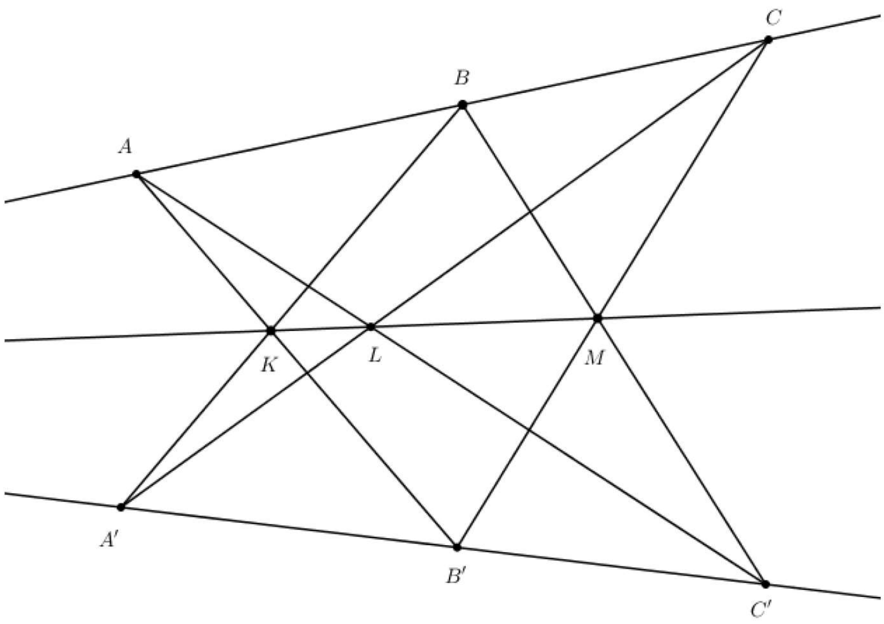
Slika 5: Ptolomejev teorem

Almagest je neupitno zauzeo svoje mjesto među najutjecajnijim znanstvenim djelima činjenicom da je sve do renesanse služio kao osnova astronomije, a komentirala su ga mnoga velika imena znanosti.

2.5.4 Papus

Papusovo ime veže se uz njegovo djelo *Kolekcija* u kojoj su, u 8 knjiga, sadržani razni tekstovi Euklida, Apolonija, Arhimeda i drugih matematičara. Papus je te tekstove komentirao i proširio, a kasnije su služili kao inspiracija europskim matematičarima. Dao je nekoliko teorema, od kojih je najpoznatiji onaj kojeg se smatra fundamentalnim za projektivnu geometriju. Teorem je iskazan u nastavku.

Teorem 2.4 (Papusov teorem) *Dana su dva pravca i na njima po tri točke: A, B, C odnosno A', B', C'. Neka je točka K sjecište AB' i $A'B$, točka L sjecište AC' i $A'C$ te točka M sjecište BC' i $B'C$. Tada su točke K, L i M kolinearne.*



Slika 6: Papusov teorem

3 Geometrija dalekog Istoka

3.1 Kina

U antičkoj i srednjovjekovnoj Kini, matematiku su izučavali službenici za koje se pored administrativnih poslova očekivalo da poznaju osnove matematike. Osim njih matematiku su izučavali astronomi i geodeti. Kini možemo zahvaliti na mnogim tehničkim postignućima kao što su kompas, seizmograf, barut, porculan i izrada papira, a matematika je bila okrenuta uglavnom na primjene i rješavanje konkretnih problema.

Povijesni razvoj geometrije u Kini razmatrat ćemo u tri povijesna razdoblja:

1) od početka do ere Sanguozhi (podjela na tri kraljevstva)

2) od podjele Kine u tri kraljevstva (između 221. i 280.) do početka vladavine dinastije Song

3) doba dinastija Song (960. - 1278.), Yuan (1278. - 1368.) i Ming (1368. - 1644.)

3.1.1 Doba od početka do podjele Kine u tri kraljevstva

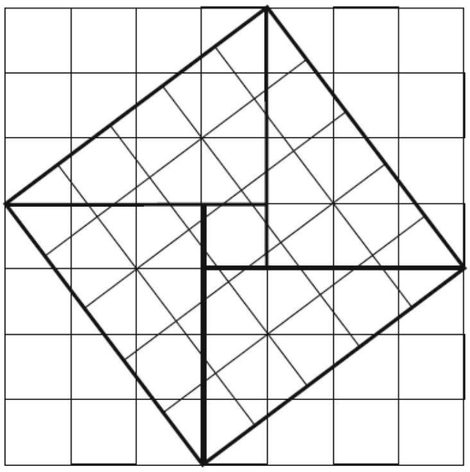
Geometrija je svoje mjesto pronašla u kulturi Kine još na samom početku njihove povijesti, konkretno među ukrasima na predmetima korištenim svakog dana. Ukrasi su bili u obliku peterokuta, sedmerokuta, osmerokuta ili deveterokuta, no njihova pravilnost nije pretjerano zanimala stare Kineze. S druge strane veću fascinaciju imali su s pravokutnim trokutom kojeg su izučavali. Međutim rana matematička povijest Kine je izgubljena jer su po nalogu cara Huangdija morale biti spaljene sve knjige, a mnogi učenjaci su bili pogubljeni. Ipak povijest je uspjela zadržati nekoliko djela koja nam daju uvid u područje zanimanja, a ona su ukratko predstavljena u nastavku.

Zhou Bi Suan Jing (Chou Pei Suan Ching)

Najstarija poznata očuvana knjiga nosi naziv *Zhou Bi Suan Jing (Chou Pei Suan Ching)* ili u prijevodu *Aritmetički klasik gnomona*[3] *i kružni putevi raja*. Pretpostavlja se da je knjiga nastala najranije u 4. stoljeću pr. Kr., a glavne teme su joj astronomija i računanje kalendara kojima matematika služi kao pomoćni alat (podrazumijeva se poznavanje razlomaka i kvadratnih korijena). Knjiga obrađuje Pitagorin teorem, svojstva pravokutnog trokuta, kvadrat i kružnicu. Dokazi tvrdnji nisu formalni, ali je Pitagorin teorem dokazan opisno, i to metodom „sastavljanja pravokutnika“. Opis kaže: Nacrtaj pravokutan trokut sa stranicama $3, 4, 5$ i kvadrat iznad hipotenuze takav da ga se može smjestiti unutar kvadrata s duljinom stranice 7. Kvadrate podijeli u mreže 5×5 i 7×7 tako da se mreže preklapaju. Manji kvadrat je površine 25 jediničnih kvadrata, a vanjski je podijeljen na pravokutnike dimenzija 3×4 uz jedan jedinični kvadrat u sredini. Taj opis odgovara općenitoj formuli

$$c^2 = 4 \cdot \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = a^2 + b^2. \tag{3.1}$$

Možemo vidjeti da je najstariji poznati kineski dokaz ustvari kombinacija vizualne reprezentacije i razmatranja i računanja.



Slika 7: Slikovni dokaz Pitagorinog teorema. Preuzeto iz [8], str. 124.

Jiu Zhang Suanshu (Chiu Chang Suan Shu)

Sljedeće djelo je drugo najstarije, a radi se o poznatom tekstu pod nazivom *Devet poglavlja matematičkog umijeća*. Procijenjeno je da djelo datira iz doba dinastije Han (od 202. pr. Kr. – 9.). Za razliku od prethodnog djela, *Devet poglavlja matematičkog umijeća* svojom je prirodom u potpunosti matematičko. Sadrži 240 zadataka zajedno s rješenjima i uputama, a to djelo služilo je i kao udžbenik za poučavanje činovnika čime je steklo status

[3] Riječ gnomon odnosi se na dio sunčanog sata koji pokazuje vrijeme svojom sjenom.

najutjecajnije matematičke knjige u čitavoj Kini. Prvo, četvrto i peto poglavlje posvećena su geometriji dok se ostala poglavlja bave primijenjenom matematikom. Prvo poglavlje bavi se računanjem površina pravokutnika, trokuta, trapeza, kruga i kružnih segmenata. Kako je djelo nastalo pod utjecajem Babilonaca, površina kruga računata je koristeći babilonsko pravilo koje glasi: $P = 3r^2$. Četvrto se bavi transformacijama površina, gdje je potrebno mijenjati širinu i visinu lika tako da površina ostane ista. Peto poglavlje bavi se računima vezanim za volumene zidova, brana, kanala i slično, dakle primjenama stereometrije. Poglavlje spominje i prizme, piramide, tetraedre, valjke i slična tijela.

Haidao Suanjing (Hai Tao Suan Ching)

Ovo djelo objavljeno 263. godine autora Liu Huija nastavlja se na njegove prethodno objavljene komentare *Devet poglavlja* i proučava mjerenje visina i udaljenosti. Mjerenja se koriste svojstvima sličnosti pravokutnih trokuta, a kao pomoćni alat pri mjerenju Liu Hui koristio je štapove. U knjizi nema govora o kutovima niti trigonometriji kao ni algebarskih poopćenja, nego se govori samo o konkretnim problemima koje je potrebno riješiti.

3.1.2 Doba od podjele Kine u tri kraljevstva do početka vladavine dinastije Song

Taj period povijesti Kine obilježio je kontakt s indijskim učenjacima. U tom periodu indijski učenjaci radili su s glavnim astronomima u Kini te su uz poboljšanje kalendara u Kinu donijeli i rani oblik trigonometrije. Međutim netočno je pretpostaviti da je to doba doživjelo konstantan razvoj i komunikaciju između dvije zemlje. Stvarnost je takva da su nova otkrića ostajala u uskom krugu učenjaka koji su dolazili do rezultata i njihovih učenika. U kombinaciji s političkim problemima unutar Kine te teškim putovanjima kojim bi se mladi učenjaci trebali podvrgnuti kako bi dobili priliku učiti od velikana tog doba, ne čudi da je došlo do stagnacije u razvoju znanosti.

3.1.3 Doba dinastija Song, Yuan i Ming

Nakon stagnacije u prethodnom dobu, doba velikih dinastija doživjet će što je poznato kao zlatno doba kineske matematike. To doba obilježilo je i nekoliko velikih matematičara, a neki od njih predstavljeni su u nastavku. Qin Jiushao (Ch'in Chiu-Shao), koristeći *Devet poglavlja* kao glavni izvor svog rada, također je odabrao strukturu 9 poglavlja u svom djelu *Shushu jiuzhang* (*Shu-shu chiu-chang, Matematička rasprava u devet odjeljaka*) koju je objavio 1247. godine. U svom radu u svakom od 9 poglavlja predstavio je 9 problema (ukupno njih 81) nakon kojih je slijedio odgovor, općenito objašnjenje, a zatim numeričko rješenje. Jedno se pitanje posebno ističe jer se bavi računanjem površina likova u ravnini. Konkretnije prezentira formulu ekvivalentnu Heronovoj formuli, a ona glasi:

$$P = \sqrt{\frac{1}{4}\left[c^2a^2 - \left(\frac{c^2+a^2+b^2}{2}\right)^2\right]}, \tag{3.2}$$

gdje su a, b, c duljine stranica trokuta. Volumen krnje kvadratne piramide računa formulom

$$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3} \tag{3.3}$$

za a, b duljine donje, odnosno gornje baze, h visina piramide. Formula je jednaka formuli pronađenoj na Moskovskom papirusu. Jedan od problema uključuje i računanje visine planine koristeći se svojstvima sličnih trokuta.

Li Ye (Li Zhi) bavio se svojstvima kruga i kružnice te kružnica upisanih u trokut. Napisao je knjigu *Ceyuan Heijing* (*Tshe Yuan Hai Ching, Morsko zrcalo mjera kružnice*) koja se bavi tim temama kao i brojem π, ali ne predstavlja kako je broj π izračunat. Poznat je po svojem radu na području algebre.

Guo Shojing (Kuo Shou-Shing) bio je matematičar, astronom i inženjer. U povijesti matematike istaknuo se svojim razvojem teorije sfernih trokuta. O njegovom radu nema direktnih izvora pa je nemoguće tvrditi je li se koristio trigonometrijom u svom radu. Osmislio je metodu računanja duljine kružnog luka koja uključuje promjer kruga d, duljinu luka b i visinu kružnog odsječka s (dužina okomita na tetivu kojoj je jedan kraj na kružnom luku, a drugi u polovištu tetive):

$$d^2 \cdot \left(\frac{b}{2}\right)^2 - d^2 \cdot s - (d^2 - bd) \cdot s^2 + s^4 = 0. \tag{3.4}$$

Matematika u Kini bila je okrenuta gotovo isključivo na primjere, a najviše se pažnje posvećivalo efektivnim algoritmima računanja. Sličan tretman doživjela je i geometrija koja je također bila najviše okrenuta na konkretne primjere koje je trebalo riješiti. Od tri klasična grčka problema najviše ih je zanimao problem kvadrature kruga, a bavili su se i upisivanjem kružnica i sfera u druge likove. Dok su se Grci geometrijom bavili deduktivno, Kinezi su heurističke metode primjenjivali induktivno i dolazili do raznih rezultata. Prvi prijevod Euklidovih *Elemenata* koji je stigao u Kinu nije dobro prihvaćen, ali s vremenom su se kineski matematičari naviknuli i na takav pristup geometriji. Osim u praktičnim primjenama, Kinezi su geometriju koristili i u svrhe zabave. Jedna od poznatijih igara koja se zadržala sve do danas je tangram, a njezin cilj je od trokuta i četverokuta raznih oblika njihovim preslagivanjem dobiti druge oblike koji budu zadani u obliku sjene.

3.2 Japan

Kulturalni utjecaj Kine na Japan započeo je kada je Japan preuzeo kinesko pismo. Preuzimanjem kulture preuzeli su i kineske izume i način učenja zbog čega nema izvora o matematici Japana prije 17. stoljeća. Kako gotovo ništa nije poznato o razvoju matematike u ranoj povijesti Japana, fokus će biti okrenut na kasnije doba povijesnog razvoja Japana za čije doba su neki povijesni izvori dostupni. Do 17. stoljeća japanska matematika bila je okrenuta većinom na primjene u administrativnim poslovima jer se matematika poučavala uglavnom samo u krugovima činovnika i u drugim relevantnim područjima (npr. astronomija, astrologija i slaganje kalendara).

3.2.1 Renesansno doba u Japanu

Nakon kraja feudalizma u Japanu u 1603. godini ostvarene su razne veze s drugim državama, npr. Portugalom i Nizozemskom, te nakon kratkog perioda utjecaja kršćanstva, Japan je zatvorio svoje granice koje se nisu ponovno otvarale do 1868. godine. To potpuno odcjepljenje od svijeta (koje je bilo moguće zbog činjenice da je Japan otočna nacija) dovelo je do jedinstvenog razvoja čitave japanske kulture što uključuje i matematiku. Novi pokret matematike pod nazivom *wasan* bio je predmet izučavanja samuraja koji su se njime bavili iz razonode. Taj pokret matematike nije bio usmjeren niti na teoriju niti na praksu, ali razvio se iz europskih i kineskih utjecaja prije zatvaranja japanskih granica.

Geometrija kao dio *wasan* matematike

Matematička djela koja su nastajala u Japanu u to doba uglavnom su pratila sličnu formu. Pod utjecajem matematičara poznatog kao Mitsuyoshi, kojemu je pravo ime Yoshida Shichibei Kōyō, nastala su mnoga djela koja su pratila njegov stil pisanja. Napisao je djelo pod nazivom *Jinko-ki* (*Rasprava o brojevima od najvećih do najmanjih*) u svrhu rekreacijske matematike u kojoj je izazvao čitatelje da se okušaju u rješavanju problema koje je on u knjizi naveo kao neriješene.

Imamura Chishō objavio je svoj rad 1639. godine, a u njemu se bavio računima vezanim za pravilne mnogokute, od trokuta sve do deseterokuta, što je postala popularna tema među matematičarima. Jedan od problema predstavljenih u tom radu je problem u kojem je 9 kružnica upisano unutar veće kružnice na određen način tako da se poštuju ograničenja udaljenosti od velike kružnice i svih 9 manjih kružnica međusobno. Središta 8 kružnica složena u prsten formiraju pravilan osmerokut, a zadatak čitatelja je odrediti radijus kružnice koja je upisana u sredini. Osim tog problema, dani su slični problemi računanja polumjera i promjera kružnica ako se kružnice dodiruju ili su složene u neke druge položaje. Svi ti problemi uključivali su račune vezane uz pravilne mnogokute, a nerijetko ih se predstavljalo tako da se čine da imaju neku praktičnu primjenu kako bi zainteresirali čitatelja.

Princip kružnice

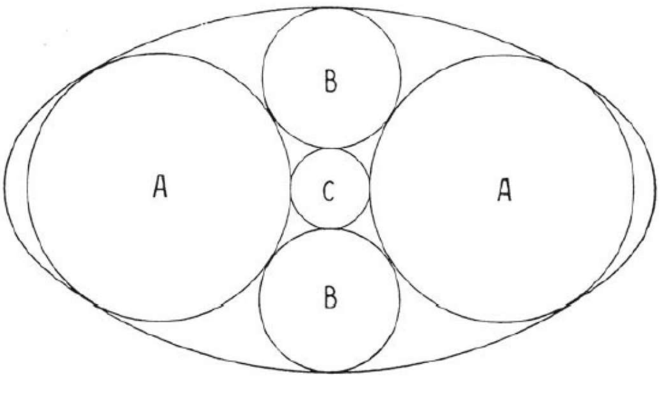
Yenri princip (ili *enri* princip), također poznat kao princip kružnice, bavio se metodom računanja duljine kružnog luka i opsega kruga s ciljem da se broj π izračuna s velikom preciznošću. Začetnik tog pokreta ostao je nepoznat, ali najčešće se pripisuje poznatom matematičaru imena Seki Kowa ili njegovom učeniku koji je bio poznat pod imenom Takabe, koji je svoj život posvetio problemu kvadrature kruga. Promatranjem *yenri* principa sa stajališta moderne matematike on se svrstava u infinitezimalni račun, no zanimljivo je što je problemu najprije pristupljeno geometrijski. Uzevši dovoljno malene vrijednosti za duljinu kružnog luka i pripadne visine kružnog isječka kako bi mogao pretpostaviti pravce te primjenom Pitagorinog teorema došao je do niza razlika koje je rekurzivno uvrštavao u prethodne i tako došao do beskonačnog reda čije su razvoje kasnije proučavali i europski matematičari. Dodatnim poboljšavanjima te metode Takabe je u jednom trenutku došao do jako precizne aproksimacije za π kod površine sfere, doduše pomnožene sa 100 jer tada još nije bila poznata formula za površinu sfere koja je izazvala grešku u rezultatu. Kada je Takabe tu grešku spoznao, popravio je svoj rezultat i zaključio da površina sfere mora biti $P = d^2\pi$ (gdje je d promjer kružnice). Takabe je sve račune provodio na specifičnim slučajevima, no kasniji matematičari te su metode poopćili.

Problem slaganja kružnica u druge likove pod davnim utjecajem Kine bio je popularan i u Japanu, a tijekom posljednjih godina 17. stoljeća pojavio se običaj u kojemu su matematičari na drvenim pločicama ispisivali probleme s rješenjima bez postupka i ostavljali ih ispred hramova. Običaj se zadržao još dva stoljeća, a smatra se da je započeo kao način zahvale Shinto božanstvima ili Budi. Osim kao simbol zahvale, pločice su služile kao svojevrsna reklama ili izazov drugim matematičarima (u Europi su se razni zadaci širili pomoću raznih letaka). Neki od problema koji su se našli na takvim pločicama, a vezani su uz geometriju su:

1. Dane su dvije kružnice, jedna opisana četverokutu, a druga upisana istom četverokutu. Poznat je promjer opisane kružnice i umnožak dijagonala četverokuta. Potrebno je odrediti promjer upisane kružnice.

2. Pet kružnica je simetrično upisano u elipsu s velikom osi a i malom osi b (vidjeti Sliku 5). Odredi promjer kružnice A.

3. Dane su dvije sfere veličine A, dvije sfere veličine B i dvije sfere veličine C koje su upisane unutar velike sfere te se sve međusobno dodiruju. Ako su poznati promjeri sfera A i C, odredi promjer sfere B.



Slika 8: Slikovni prikaz zadatka s pet kružnica upisanih u elipsu. Preuzeto iz [8], str. 148.

Početkom 19. stoljeća matematičar Aida Ammei izučavao je elipse i njima vezane probleme te je svojim radom nadahnuo druge matematičare da se bave istim područjem. Aida je u svojim radovima opisao instrument s pomičnim fokusima koji mogu crtati razne elipse, a izučavanjem je došao do jednadžbe za elipsu kao afine slike kružnice, izračunao je površinu segmenta elipse te duljinu luka elipse. Drugi japanski matematičari počeli su se zanimati za površinu elipsoida. Raznim rezanjima elipsoida dobili su oblike prstenova, kora naranče, dijelove stošca čije su površine tada domišljato morali aproksimirati te su dolazili do složenih razvoja redova što je bio često viđen korak u japanskom izučavanju površina i duljina. Iako japanski matematičari nisu proučavali geometriju u širine na koje smo se naviknuli u modernoj geometriji, nisu niti trebali jer je matematika njima bila točka razonode umjesto alata za postizanje velikih znanstvenih dostignuća. Matematiku su tretirali više kao umjetnost nego kao znanstvenu granu, što je dosta neobična pojava u usporedbi s ostatkom svijeta.

3.3 Indija

3.3.1 Antika (Stari vijek)

Sulvasutre (*Pravila konopa*) jedan su od najstarijih izvora indijske matematike, a služile su kao upute vedskim svećenicima za pravilnu konstrukciju oltara potrebnih za vjerske obrede. Ovisno o namjeni oltara, oni su mogli biti raznih oblika koji su se slagali od cigli unaprijed propisanih oblika. Svaki korak gradnje imao je mistično značenje, a detaljni su do te mjere da opisuju i označivanje zemlje na kojoj je oltar trebao biti podignut.

Dakle geometrija je i u Indiji na svom početku bila okrenuta na primjene. Tekstovi opisuju konstrukcije i primjene raznih matematičkih rezultata, uključujući posebne slučajeve Pitagorinog teorema, teoreme sličnosti te nadopunjavanja do paralelograma. Navedeno je i nekoliko tvrdnji koje se bave povećavanjima površine oltara kvadratnog oblika (umnažanje površine prirodnim brojem), a svode se na primjenu Pitagorinog teorema za pravokutne jednakokračne trokute. U *Sulvasutrama* je navedeno i 6 Pitagorinih trojki ((3, 4, 5), (12, 5, 13), (15, 8, 17), (7, 24, 25), (12, 35, 37) i (15, 36, 39)), ali Pitagorin teorem nigdje nije općenito iskazan. Geometrija se, dakle, razvila iz korijena spiritualnosti i ispunjavanja vjerskih obreda.

3.3.2 Srednji vijek

Indijski matematičari svoja otkrića i rezultate marljivo su zapisivali u obliku stihova, a mnogi radovi preživjeli su test vremena. Radovi nisu bili u potpunosti posvećeni matematici jer se nastavila praksa podučavanja matematike čisto u svrhe primjene. Jedan od najstarijih preživjelih tekstova je rukopis *Bakhshāli* za koji se pretpostavlja da je nastao u šestom stoljeću. Najviše se bavi problemima vezanim uz ekonomiju i izračune, komentare na starija djela te elementarnim računom. Na području geometrije, bavi se računima vezanim za sjene krnjih tijela (piramide, stošca i slično) što su bili vrlo važni izračuni za astronomiju.

Sūrya Siddhāntas zbirka je tekstova koji se bave astronomijom, a pretpostavlja se da je nastala u otprilike isto vrijeme kada i rukopis *Bakhshāli*. Dio djela posvećen je izračunima vezanim za geometriju tetiva kružnice, račune kojima se helenistički matematičari nisu previše zamarali. U jednoj knjižici iz otprilike četvrtog ili petog stoljeća nalazi se prvi trag funkcije sinus, a *Sūrya Siddhāntas* nudi izračun vrijednosti funkcije sinus do kuta veličine 90° u intervalima veličine $\frac{15}{4}$ stupnjeva. Funkcijom sinus uspjeli su pojednostaviti račune vezane za tetive kružnica, a tako i račune vezane uz astronomiju.

Jedno od poznatijih imena indijske matematike svakako je Āryabhata I, kao i njegovo djelo jednakog imena, *Āryabhata*. U svom radu bavio se pitanjem površine trokuta, piramide, i površine kugle, no ne daje točne formule za sve račune kojima se bavi. Računi i ideje zapisani su u stihovima koji se lako pamte, međutim knjiga ne nudi nikakav trag o tome kako su Āryabhati pale na pamet ideje računa koje je predstavio. U jednom od stihova dao je aproksimaciju za broj π koja bi modernim zapisom glasila

$\pi = \frac{62832}{20000} = 3.1416$; neki stihovi se bave i pitanjem sličnosti, a spominju se i neka svojstva pravokutnih trokuta.

Još jedno znamenito ime indijske matematike je Brahmagupta (598. – poslije 665.), koji je ostavio trag i na području geometrije. Zabilježio je formulu za računanje površine četverokuta sa stranicama duljine a, b, c i d, koja glasi

$$P = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}, \tag{3.5}$$

gdje je $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ i koja podsjeća na Heronovu formulu. Danas je poznato da se radi o aproksimaciji površine, ali može se primijeniti na četverokute upisane u kružnicu (tetivne četverokute). Oko 950. godine matematičar Āryabhata II pokazao je da prethodna formula nije primjenjiva na bilo koji četverokut. U Brahmaguptinu radu možemo pronaći i Ptolomejev teorem o tetivama za tetivni četverokut sa stranicama duljine a, b, c, d te duljinama dijagonala e i f:

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d. \tag{3.6}$$

3.3.3 Bhaskara II

Bhaskara II živio je i djelovao u 12. stoljeću, a velik trag u povijesti geometrije ostavio je svojim računom oplošja kugle. Oplošje je izračunao tako da je površinu kugle podijelio pomoću mnogokuta. Mnogokute je dobio tako da je glavnu kružnicu kugle podijelio na 96 jednakih dijelova, a zatim zamišljenim linijama spojio tih 96 jednako raspodijeljenih točaka s oba pola kugle, analogno meridijanima na Zemlji. Tako je dobio 96 međudobno jednakih odjeljaka, a njih je dodatno podijelio tako da je zamišljao kružnice paralelne s glavnom kružnicom koja je originalno podijeljena, u ovom slučaju analogno paralelama na Zemlji. Te su kružnice dijelile svaki luk koji spaja glavnu kružnicu s polom kugle na 24 jednaka dijela, odnosno 48 jednakih dijelova od pola do pola. Tako je dobio 4608 mnogokuta od kojih su njih 4416 trapezi sa zaobljenim stranicama, a preostala 192 trokuti sa zaobljenim stranicama. Bhaskara se koristio aproksimacijama i tretirao je mnogokute kao planarne te je došao do zaključka da je oplošje sfere jednako umnošku promjera i opsega sfere (opsega glavne kružnice). Taj račun zabilježen je u njegovom djelu *Siddhanta Siromani* napisanom 1150. godine, a sadrži čitav numerički račun ideje za izračun oplošja koja je predstavljena.

Euklidov utjecaj na indijsku matematiku nije se pretjerano očitovao. Pretpostavlja se da su Euklidove definicije i propozicije u Indiji bile poznate od šestog stoljeća, ali deduktivni dokazi nisu zaživjeli na području Indije.

3.4 Islamske zemlje

Matematika u islamskim zemljama, poznata i pod nazivom arapska matematika, bazirala se na matematici stare Mezopotamije, suvremenoj indijskoj matematici te grčkoj matematici. Mnogi važni povijesni izvori očuvani su upravo na arapskom jeziku, a njihovi su prijepisi nastajali u razdoblju između 10. i 19. stoljeća. Matematičke tekstove su često prevodili učenjaci koji se nisu bavili matematikom, a matematike se moglo pronaći u tekstovima koji su se bavili drugim znanostima, primjerice astronomijom, optikom i slično. Najvažniji tekstovi očuvani su u knjižnicama na Srednjem istoku, Europi, Indiji i Sjevernoj Africi. Upravo arapskim matematičarima možemo zahvaliti na kvalitetnim prijevodima grčkih klasika koji su bili dostupni od još oko 900. godine. Ponajviše preko Španjolske ti prijevodi došli su do Europe te su bili prevedeni na latinski.

3.4.1 Teorijska geometrija

Dolaskom Euklidovih *Elemenata* u krugove arapskih matematičara stvorio se i interes za proučavanje matematike. Matematičar al-Khwārizmī primarno se bavio algebrom, ali ostavio je iza sebe i ilustrativni primjer dokaza Pitagorinog teorema za slučaj jednakokračnih pravokutnih trokuta. Njegovo područje zanimanja za geometriju vezano je za prve dvije knjige *Elemenata*. Sredinom devetog stoljeća, braća Musa napisala su vlastito djelo s geometrijskom temom. Djelo je očuvano na latinskom jeziku, poznato je pod nazivom *Liber trium fratrum de geometria*. Glavno područje zanimanja trojice braće bile su teme kružnice, sfere i stošca, a opisali su i starogrčku metodu ekshaustije.

3.4.2 Konstrukcije pravilnih mnogokuta

Jedno od popularnijih pitanja među matematičarima sa zanimanjem u geometriji je pitanje konstrukcije pravilnih sedmerokuta i pravilnih deveterokuta (dotad su već bile poznate metode konstrukcije trokuta, kvadrata i peterokuta). Konstrukcija deveterokuta bila je posebno zanimljiva jer je povezana uz problem trisekcije kuta. Danas je poznato da je problem u suštini algebarski i da se svodi na kubnu jednadžbu, a Arapi su nastavili jednak pristup problemu kao Grci, pokušajem nalaženja rješenja putem presjeka konika. Abū'l-Wafā (10. stoljeće) posebno se zanimao za pravilne mnogokute, a autor je rasprave pod nazivom *Knjiga o potrebnome za geometrijske konstrukcije za obrtnike*. U njoj je opisao konstrukcije pravilnih mnogokuta do deseterokuta, a među njima su se našle i konstrukcije izvedive ravnalom i šestarom.

Detaljni arapski uzorci poznati su nam i danas, a pored zanimanja za konstrukciju pravilnih mnogokuta pokazuju i zanimanje za simetriju u uzorcima te popločavanje ravnine raznim oblicima. Izvori o direktnoj primjeni geometrijskih znanja na umjetnost nisu dostupni, pa ne možemo tvrditi ništa o znanstvenom pristupu izrade mozaika. Neki stručnjaci vjeruju da se radi o empirijski stečenim znanjima te razvijanjem vještina preciznosti prilikom izrade.

3.4.3 Računi kruga

Izučavanjem *Elemenata* i teorema kružnice, Arapi su nastojali unaprijediti dostupnu teoriju i primijeniti nova znanja na više problema. Bavili su se preciznijim određivanjem broja π, a koristili su aproksimacije iz grčke, ali i indijske matematike. Jedna od formula za izračun površine kružnice koje je al-Khwārizmī (prva polovica 9. stoljeća) koristio glasila je

$$P = d^2 - \frac{1}{7} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} d^2, \tag{3.7}$$

gdje je d promjer kružnice. Dao je formule za kružne odsječke veće i manje od polukruga u kojima koristi indijsku terminologiju otkrivši izvore kojima se koristio. Posebno dostignuće u računanju broja π postigao je al-Kāshī (14. - 15. stoljeće) koji je koristeći mnogokut upisan kružnici sa 805 306 368 stranica izračunao π s točnošću na 17 decimala. Rezultat je prikazao u decimalnom i seksagezimalnom sustavu, a zanimljivo je istaknuti da je to prvo mjesto na kojem su pronađeni decimalni razlomci u islamskoj matematici.

3.4.4 Postulat o paralelama

Česta je pojava u islamskoj geometriji ideja dokazivosti Euklidovog petog postulata (postulata o paralelama). Grčki matematičari su na razne načine pokušali dokazati da peti postulat slijedi iz prethodna četiri, a islamske zemlje nisu bile iznimka. Jedan od poznatijih pokušaja bio je taj matematičara ibn al-Haythama (10. - 11. stoljeće) u djelu pod nazivom *Maqāla fī sharh musādarāt kitāb Uqlīdis* (*Komentari o pretpostavkama Euklidovih Elemenata*). U djelu se pobliže zabavio redefiniranjem koncepta paralelnih pravaca jer je smatrao da su Euklidove definicije neadekvatne. Predstavio je definiciju koja se oslanjala na karakterizaciju paralelnih pravaca da su uvijek na jednakoj udaljenosti jedan od drugoga. Al-Khayyāmī u svom djelu *Sharh mā ashkala min musādarāt kitāb Uqlīdis* (*Komentari na problematične postulate u knjizi Euklida*) konstruirao je četverokut s dvjema nasuprotnim stranicama koje su sukladne i obje okomite na jednu stranicu četverokuta. Tada četverokut ima dva prava kuta, a za preostala je dva kuta promatrao slučajeve kada su oba šiljasta ili oba tupa. Ta razmatranja dovela su do kontradikcija, nasuprotne stranice četverokuta ne bi bile sukladne što se protivi pretpostavci.

Problem petog postulata nastavit će fascinirati matematičare, a kasnije će se iz tog problema razviti potpuno nova grana geometrije - neeuklidske geometrije.

4 Geometrija u srednjovjekovnoj Europi

Najvažniji dio obrazovanja i znanosti u Europi u srednjem vijeku činilo je sedam *artes liberales*, odnosno sedam *slobodnih umijeća* podučavanih u školama i sveučilištima koja su se sastojala od *triviuma* (gramatika, retorika, dijalektika) te *quadriviuma* (aritmetika, geometrija, astronomija, glazba). *Quadrivium* je bio zadužen za predstavljanje raznih znanosti vezanih uz matematiku. Ranije je spomenuto da su arapski izvori došli do Europe putem Španjolske (zbog arapskih osvajanja Španjolske), a s njima i zanimanje za matematiku, i to uglavnom umijeće računanja. Geometrija se najviše javlja u sklopu astronomije i računa vezanih za nebeska tijela, a u opisu *artes liberales* koje je napisao Cassidor geometrija je opisana na tek dvije stranice. Znanost je najprije zaživjela u samostanima, a poseban utjecaj imao je redovnik Alcuin iz Yorka koji je osnovao niz škola.

Do nastanka Boecijevih djela, matematika je uglavnom služila za rekreaciju ili kao alat za obavljanje drugih poslova. Njegova djela poznata pod nazivima *Geometrija I* i *Geometrija II* sadrže izvode iz Euklidovih *Elemenata*, nekoliko dodanih dokaza te prijevoda na latinski. U tom trenutku europsko poznavanje geometrije je na poprilično niskoj razini, a većina razvoja matematike odvijala se na području aritmetike. Adelard od Batha zaslužan je za prijevod Euklidovih *Elemenata* s arapskog na latinski, a vjeruje se da je to prvi prijevod koji je uključio svih 13 knjiga uz dodatne dvije za koje se ispostavilo da ne pripadaju *Elementima*. Prijevod je nastao oko 1120. godine, dok su Arapi imali pristup *Elementima* još u osmom stoljeću. Neovisno od Adelarda, Herman od Carinthie i Gerard od Cremone također su preveli *Elemente* u 12. stoljeću. Prije tih verzija za izučavanje na latinskom jeziku bili su dostupni jedino Boecijevi komentari i tumačenja, a ranije navedeni prijevodi su se nekada znali osvrnuti na njih. Nakon prvih prijevoda nastajale su razne verzije s dodatnim komentarima i uređene tako da dokazi budu razumljiviji. Jedan primjer je prijevod Campanusa koji je dokaze znatno proširio i napisao ih u obliku komentara tako da ih je lakše razumjeti, što je postigao pisanjem punih rečenica. Njegov prijevod nastao je prije 1260. godine. Treba napomenuti da su se pored prijevoda *Elemenata* i tradicije deduktivnih dokaza pojavile knjige i rukopisi koji su više bili okrenuti na praktičnu geometriju. Jedan takav rukopis nastao u 12. stoljeću pripisuje se Hugu od Sant Victora, a tekst je pisan na puno zanimljiviji i tečniji način od suhog stila *Elemenata*. Dio knjige posvećen je radu s astronomskim instrumentima.

Početkom 13. stoljeća u povijesti matematike ističe se ime Leonardo iz Pise, poznat još kao Fibonacci. Najpoznatiji je po djelu *Liber abaci* te po nizu brojeva koji nosi njegovo ime. S druge strane njegovo drugo poznato djelo *Practica Geometriae* ne smatra se revolucionarnim djelom, ali sadrži nekoliko teorema i dokaza vezanih za mjerenje, planimetriju i stereometriju. Kao izvore koristio je grčku i arapsku literaturu, ali dodao je i neke svoje rezultate.

4.1 Prijevodi s grčkog

Nakon velikog broja djela prevedenih s arapskog na latinski, počeli su se pojavljivati i prijevodi s grčkog jezika. Najvažniji prevoditelj bio je Wilhelm von Moerbeke iz 13. stoljeća. Osobno je dva puta otputovao u Grčku u potrazi za rukopisima, a preveo je radove Arhimeda, Herona i Ptolomeja. Prijevodi Arhimedovih djela bili su posebno zanimljivi europskim matematičarima tog doba. Jedan dokaz te tvrdnje je činjenica da Galileo spominje Arhimeda preko stotinu puta i hvali njegov rad i djelo. Mnogi znanstvenici pokušali su unaprijediti Arhimedova djela dodavanjem komentara i pažljivim dokazima koristeći druga Arhimedova djela. Bavili su se Arhimedovom metodom mjerenja kruga, konkretno određivanja površine, i predlagali svoje ideje s raznim stupnjevima uspješnosti. Najvažniji zaključak za donijeti iz tog dijela povijesti je taj da se europski znanstvenici nisu oslanjali samo na Euklida kada je u pitanju geometrija, nego su se okretali i drugim grčkim matematičarima.

Dolaskom 14. stoljeća, sveučilišta u Parizu i Oxfordu postala su središta matematike i fizike. Najpoznatije ime vezano uz 14. stoljeće je Thomas Bradwardine koji je zaslužan za nekoliko matematičkih tekstova. *Geometria speculativa* nastavlja se na Campanusovu verziju Euklidovih *Elemenata*, ali sadrži i autorove doprinose, konkretno konstrukcije zvjezdastih mnogokuta produživanjem stranica pravilnih mnogokuta. Bavio se i popunjavanjem prostora pomoću pravilnih poliedara bez ostavljanja praznina u prostoru. Djelo je tiskano oko 1500. godine i visoko je cijenjeno generacijama matematičara. Do kraja srednjeg vijeka, geometrija se ponovno okrenula prema primjenama. Napisane su mnoge knjižice i vodiči vezani za gradnju i konstrukciju geometrijskih oblika i uzoraka koji će u jednom trenutku krasiti mnoge građevine, ali najviše crkve i katedrale. Knjižice sadrže mnoge upute i konstrukcije, a za neke od njih nisu potrebna nikakva mjerenja te se sve veličine mogu izvesti iz jedne, unaprijed zadane. Dane su konstrukcije pravog kuta, pravilnog peterokuta, pravilnog sedmerokuta (iako je danas poznato da je ta konstrukcija aproksimativna), pravilnog osmerokuta, konstrukcija središta kružnice uz matematička opravdanja, iako ne tako stroga kao u djelima posvećenima samoj geometriji.

5 Razvoj geometrije u renesansi

Renesansa pokriva vremensko razdoblje od oko 1400. do oko 1630. godine i povezuje se s ponovnim rođenjem znanosti. Zanimljivo obilježje tog perioda je to što većina napredaka na području znanosti ne dolazi od obrazovanih znanstvenika, nego praktičara sa svih područja (inženjeri, umjetnici, trgovci) i amatera[4] koji su se znanošću bavili rekreativno. Paralelno uz razvoj amaterske znanosti razvijale su se i institucije za visoko obrazovanje koje su dobivale novčanu potporu vlasti. U doba renesanse vratio se interes za starogrčkim jezikom u svrhu tumačenja originalnih grčkih tekstova koji su dosad bili dostupni samo na arapskom. Izumom tiskarskog stroja oko 1445. širenje znanstvenih tekstova u velikim količinama postalo je znatno jednostavnije, što je dodatno omogućilo bolji napredak znanosti. Među prvim tiskanim knjigama našli su se *Elementi*, a sljedećih 500 godina vidjet će mnoge njezine prijevode i izdanja.

5.1 Geometrija u školama

Druga polovica četrnaestog i petnaesto stoljeće imali su priliku svjedočiti otvaranju mnogih europskih sveučilišta. U doba renesanse geometrija je još dio sedam *artes liberales*, a dijelila se na dva ogranka: *geometria speculativa* (teorijski orijentirana) i *geometria practica* (orijentirana na primjene). Teorijska geometrija bavila se temama kao što su problem kvadrature kruga te problem kuta između kružnice i tangente na kružnicu, koji je svojom prirodom počeo zalaziti i u infinitezimalni račun. Henry Savile, profesor Sveučilišta u Oxfordu, osnovao je katedru za geometriju koja je kroz svoj rad uspjela sistematizatizirati i klasificirati geometrijske rezultate. Primjerice nabrajanjem svih mogućnosti zadanih elemenata potrebnih za konstrukciju trokuta otkriven je četvrti teorem sukladnosti trokuta koji Euklid nije naveo. Osim teorijskom geometrijom sveučilišni profesori bavili su se i primijenjenom geometrijom, konkretno njezinim primjenama u geodeziji, kartografiji, balistici, arhitekturi i građevini. Clavius je u 17. stoljeću napisao djelo pod nazivom *Geometria Practica* koja se sastojala od 8 knjiga. U njoj je osnovne probleme sferne geometrije preveo na probleme ravninske geometrije koristeći stereografsku projekciju. Joachim Jungius je u svom djelu *Geometria empirica* iz 1627. primijenjenoj geometriji pristupio na nešto drugačiji način. Svojim učenicima je dao da sami eksperimentiraju ravnalom i šestarom te tako sami dođu do nekih geometrijskih odnosa.

5.2 Geometrija u astronomiji, geodeziji i kartografiji

Kada je u pitanju primjena matematike na znanost, astronomija od davnina zauzima prvo mjesto, što zbog praktičnih, što zbog mističnih razloga. Kako se astronomija bavi proučavanjem nebeskih tijela, ne čudi da se sferna trigonometrija razvijala zajedno s trigonometrijom ravnine. Trigonometrija se nije smatrala zasebnom granom matematike sve do 15. stoljeća, nego je uvijek bila vezana uz astronomiju koja je bila vezana

[4]amater, lat. amare - voljeti

za *quadrivium*. Tako su dokazane mnoge trigonometrijske tvrdnje, konkretno Viete je iskazao i dokazao sinusov poučak još u 1593. godini. Računate su i vrijednosti trigonometrijskih funkcija, no rijetko su tablice davale vrijednosti za jediničnu kružnicu u svrhu izbjegavanja razlomaka. Prvo odvajanje trigonometrije od astronomije postigao je Regiomontanus (15. stoljeće) napisavši pet knjiga pod naslovom *De triangulis omnimodis* (*O trokutima svih vrsta*). Prve četiri knjige bave se sinusovim poučkom u ravnini i na sferi, a sve predstavljene probleme rješava rastavljanjem trokuta na pravokutne trokute. Peta knjiga daje i dokazuje kosinusov poučak za bilo koji sferni trokut. Koperniku se pripisuje prva primjena funkcije tangens, dok je Rheticus zaslužan za definiranje svih trigonometrijskih funkcija (sin, cos, tg, ctg) kao omjera stranica u pravokutnom trokutu i njihov popis u tablici s vrijednostima kutova između 0° i 45°. Pitiscus je zaslužan za naziv „trigonometrija“ svojim djelom *Trigonometriae sive dimensionae* objavljenoj 1595. godine.

5.3 Geometrija u renesansnoj umjetnosti

Već naveden ponovni interes u stare kulture sa sobom je povukao i interes umjetnika za geometriju. Piero della Francesca bio je umjetnik koji je djelovao u 15. stoljeću, a inspiriran Fibonaccijevim radovima napisao je raspravu o pet pravilnih poliedara. Njegov rad nadahnuo je Lucu Paciolija (1445. – 1517.), učenjaka koji je bio prijatelj poznatog umjetnika Leonarda da Vincija, da i sam napiše raspravu na temu aritmetike i geometrije u 1494. godini. Njegovo poznato djelo *De divina proportione* objavljeno 1509. godine dalo je ime omjeru koji danas poznajemo kao zlatni rez. Leonardo da Vinci bavio se pravilnim poliedrima i krnjim poliedrima koji od njih nastaju. Izradio je pripadne modele, a oni su prikazani u Paciolijevoj raspravi. Od poznatijih primjera izdvaja se krnji ikosaedar, a on nastaje tako da se „odreže“ 12 vrhova ikosaedra čime se dobiju peterokuti. Kada je taj „rez“ takav da se dobiju pravilni šesterokuti i peterokuti, dobiva se tijelo poznato kao krnji ikosaedar. To tijelo omeđeno je s 20 pravilnih šesterokuta i 12 pravilnih peterokuta. Oblik krnjeg ikosaedra i danas se često vidi najčešće kao dizajn nogometne lopte.

Perspektiva

Kako se renesansna umjetnost odmaknula od simboličke prirode umjetnosti koja je obilježila stil srednjeg vijeka, razvile su se razne metode za slikanje u perspektivi. Trikovi za postizanje pravilne perspektive na početku su ostali „tajna zanata“ među talijanskim slikarima. Među najjednostavnijim trikovima koji su se mogli naučiti nalazio se tzv. *pavimento*[5]. *Pavimento* se odnosio na popločen pod kojem je donji dio popločenog dijela paralelan s donjim rubom slike. Zatim bi se postavila točka na platnu u koju bi pod trebao „nestati“ i iz nje se povlačile zrake prema donjem rubu slike. Pravcima paralelnim s donjim rubom odsijecane su pločice koje su nalikovale na šahovsku ploču. *Pavimento* je s vremenom napredovao i razvila se tehnika popločavanja bez potrebe za paralelnošću s rubom slike, a te verzije su se razvile u tehnike za crtanje bilo koje nagnute perspektive. Kroz razvoj perspektive nastali su mnogi pojmovi koje danas vežemo uz crtanje u perspektivi, primjerice linija horizonta i točka nestajanja.

[5]pavimento, tal. pod

Iako su trikovi ostali unutar slikarskih krugova, nastali su i tekstovi koji se bave perspektivom. Od poznatijih autora i tekstova izdvajaju se Leone Batista Alberti i njegovo djelo *Della pittura libri tre* (1436.), Antonio Averlino Filarete i njegovo djelo *Trattato della architectura* (oko 1460.) i Piero della Francesca sa svojim djelom *De prospectiva pingendi* (oko 1475.). Oko 1600. godine Guidobaldo del Monte napisao je prvi udžbenik o perspektivi sa strogim dokazima. Djelo je bilo sadržajem opsežno, ali su predstavljene ideje bile jednostavne za shvatiti. Izvan Italije Simon Stevin napisao je svoj udžbenik o perspektivi 1605. godine pod nazivom *Van de deursichtighe*. Mnogi njemački i danski umjetnici putovali su u Italiju kako bi naučili „tajne zanata" direktno od talijanskih majstora, a učenje perspektive širilo se i po Francuskoj, Nizozemskoj i Engleskoj.

Literatura

[1] Brückler, Franka-Miriam: *Povijest matematike 1*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2007.

[2] Brückler, Franka-Miriam: *Povijest matematike 2*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku, Osijek, 2010.

[3] Cooke, Roger L.: *The History of Mathematics, A Brief Course, Third Edition*, John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, Sjedinjene Američke Države, 2013.

[4] Dillon, Meighan I.: *Geometry Through History Euclidean, Hyperbolic, and Projective Geometries*, Springer, 2018.

[5] Gregersen, Erik: *The Britannica Guide to the History of Mathematics*, Britannica Educational Publishing, New York, Sjedinjene Američke Države, 2011.

[6] Hodgkin, Luke: *A History of Mathematics From Mesopotamia to Modernity*, Oxford University Press Inc., New York, Sjedinjene Američke Države, 2005.

[7] Katz, Victor J.: *A History of Mathematics, an Introduction, Third edition*, Pearson Education, Inc., Sjedinjene Američke Države, 2009.

[8] Scriba, Christoph J., Schreiber, Peter: *5000 Years of Geometry Mathematics in History and Culture*, Birkhäuser Basel, 2015.

Sažetak

U ovom diplomskom radu prikazan je povijesni razvoj geometrije od samih početaka civilizacije sve do razdoblja renesanse. Na početku je predstavljen razvoj geometrije u starom Egiptu i starobabilonskoj civilizaciji. Nakon toga govori se o razvoju grčke geometrije kroz povijesna razdoblja države, a posebna pažnja pridana je Euklidu kao utjecajnom imenu na području geometrije. U svakom razdoblju navedena su imena najznačajnijih matematičara i njihovi doprinosi. Slijedi razvoj geometrije na Dalekom istoku, i to u kontekstu kineske i japanske civilizacije te islamskih zemalja. Ovdje su predstavljena temeljna djela koja bilježe geometrijske rezultate tog doba i područja. Slijedi kronološki slijed razvoja geometrije na europskom kontinentu gdje se govori o utjecaju primijenjene geometrije, teorijske geometrije te su navedeni poznati matematičari, njihovi doprinosi i utjecaj koji su imali na područje geometrije općenito, kao i na manje grane geometrije.

Ključne riječi: egipatska geometrija, babilonska geometrija, starogrčka geometrija, Tales iz Mileta, Pitagora, tri klasična problema, Aristarh, Arhimed, Apolonije iz Perge, Heron, Menelaj, Ptolomej Aleksandrijski, kineska geometrija, japanska geometrija, geometrija islamskih zemalja, geometrija srednjovjekovne Europe, geometrija u renesansi

Summary

This final thesis presents the historical development of geometry from the very beginning of civilization to approachment to the Renaissance period. The beginning presents the development of geometry in ancient Egypt and the old Babylonian civilizations. After that follows the development of Greek geometry through the historic periods of the state with special regard towards Euclid as an influential name in geometry. Every period names the most influential mathematicians and their contributions. What follows is the development of geometry of the East in the context of China, Japan and Islamic countries. Here, the most influential works which document geometric results of the time and location. Chronological development of geometry in Europe to the Renaissance period follows next, where there is word of famous mathematicians, their contributions to geometry in general, as well as subdivisions of geometry.

Key words: Egyptian geometry, Babylonian geometry, old Greek geometry, Thales of Miletus, Pythagoras, the three classical problems, Aristarchus, Archimedes, Apollonius of Perga, Hero, Menelaus, Ptolemy of Alexandria, Chinese geometry, Japanese geometry, geometry of Islamic countries, geometry of medieval Europe, geometry in the Renaissance

Životopis

Rođena sam 10. kolovoza 1997. godine u Đakovu. Osnovnu školu završila sam u Antunovcu 2012. godine, nakon čega sam upisala i završila II. gimnaziju u Osijeku. U 2016. godini upisujem sveučilišni integrirani nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku na Sveučilištu Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Godinu dana provela sam volontirajući u dječjem kreativnom centru „Dokkica" gdje sam vodila individualne poduke iz matematike u sklopu programa „Alternativni centri podrške za djecu i roditelje".