Napoleonov teorem

Marović, Iva

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Marović

Napoleonov teorem

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Iva Marović

Napoleonov teorem

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Zdenka Kolar-Begović

Osijek, 2021.

Sažetak

U ovom radu razmatrat ćemo Napoleonov teorem. Ukratko ćemo se upoznati s poviješću ovog teorema i navesti nekoliko dokaza ove poznate tvrdnje. Najprije ćemo se susresti s trigonometrijskim dokazom, zatim dokazom pomoću kompleksnih brojeva. Na kraju ćemo navesti i planimetrijski dokaz ove tvrdnje.

Ključne riječi

trokut, jednakostraničan trokut, Napoleonov teorem, težište trokuta.

Napoleon's theorem

Summary

In this paper we will consider Napoleon's theorem. We will briefly get acquainted with the history of this theorem and mention several proofs of this well-known claim. First we will encounter with trigonometric proof, then with proof using complex numbers. In the end we will mention the planimetric proof of this claim.

Key words

triangle, equilateral triangle, Napoleon's theorem, centroid of a triangle.

Sadržaj

Uvod **i**

1 Iz povijesti Napoleonovog teorema **1**

2 Napoleonov teorem **2**

2.1 Trigonometrijski dokaz 2

2.2 Dokazi pomoću kompleksnih brojeva 4

2.3 Planimetrijski dokaz 7

Literatura **9**

Uvod

U ovom radu razmatrat ćemo teorem, nazvan po samom Napoleonu, koji kaže da ako nad stranicama trokuta konstruiramo jednakostranične trokute prema van ili unutra, onda središta tih trokuta određuju jednakostranični trokut.

U literaturi postoji veliki broj dokaza Napoleonovog teorema, a mi ćemo u ovom radu razmotriti nekoliko dokaza. U trigonometrijskom dokazu korištenjem znanja o težišnici i kosinusovog poučka, preko površine trokuta, dolazimo do tražene tvrdnje. U literaturi su česti dokazi ovog teorema korištenjem kompleksnih brojeva pa ćemo se baviti i tom vrstom dokaza. U planimetrijskom dokazu se koristi poznati Pitagorin teorem.

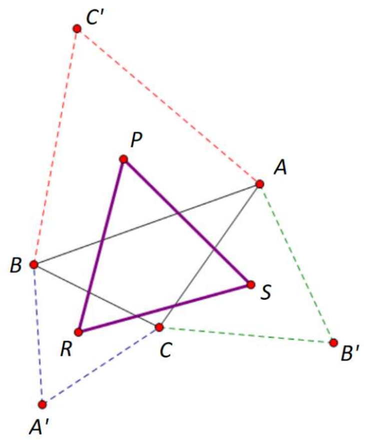
1 Iz povijesti Napoleonovog teorema

Napoleon Bonaparte (1769.-1821.), francuski vladar i vojskovođa, ostavio je trag u povijesti svojim osvajačkim pohodima i revolucionarnim pothvatima. Osim po moćnom vladanju poznat je i po reformama koje su pozitivno utjecale na ekonomiju, politiku i školstvo tadašnjeg sustava.
Još kao dječak pokazivao je talent za matematiku, a školujući se za topničkog časnika na vojnoj akademiji uvelike se zainteresirao za geometriju. Kao ponosni član Francuskog instituta, vodećeg znanstvenog društva Francuske, bio je u dobrim odnosima s nekoliko danas poznatih i važnih matematičara, Lagrangeom, Laplaceom, Fourierom i mnogim drugim znanstvenicima toga vremena. Zapravo, postoji priča da prije nego što je postao vladar Francuske, upustio se u raspravu s velikim matematičarima Lagrangeom i Laplaceom sve dok mu ovaj nije rekao, strogo: „Posljednje što želimo od vas, generale, je pouka iz geometrije." Laplace je postao njegov glavni vojni inženjer ([5]).
Jednom prilikom je, čitajući knjigu o geometrijskim konstrukcijama talijanskog matematičara Lorenza Mascheronija, postavio zadatak kolegama: *Kružnicu, poznatog središta, treba podijeliti na četiri jednaka dijela koristeći samo šestar.* (rješenje možemo pronaći u [1], str. 147)
U ovom radu bavit ćemo se Napoleonovim teoremom koji tvrdi da ako nad stranicama danog trokuta konstruiramo jednakostranične trokute, onda njihova središta određuju jednakostraničan trokut. Ovaj teorem pripisuje se Napoleonu, iako neki autori iskazuju sumnju u to te napominju da postoji mogućnost njegovog nedovoljnog poznavanja geometrije za ovakav teorem.

Slika 1: Napoleon Bonaparte

2 Napoleonov teorem

Teorem 1. *Ako nad svakom stranicom trokuta konstruiramo jednakostranične trokute prema van (ili unutra), onda su središta tako dobivenih trokuta vrhovi jednog jednakostraničnog trokuta (Slika 2).*



Slika 2: Geometrijska interpretacija Napoleonovog teorema

U literaturi se često trokut čiji su vrhovi središta jednakostraničnih trokuta konstruiranih izvana, nad stranicama trokuta ABC, zove *vanjski Napoleonov trokut* trokuta ABC. Analogno, ako su jednakostranični trokuti konstruirani unutar, nad stranicama trokuta ABC, njihova središta su vrhovi *unutarnjeg Napoleonovog trokuta*.

2.1 Trigonometrijski dokaz

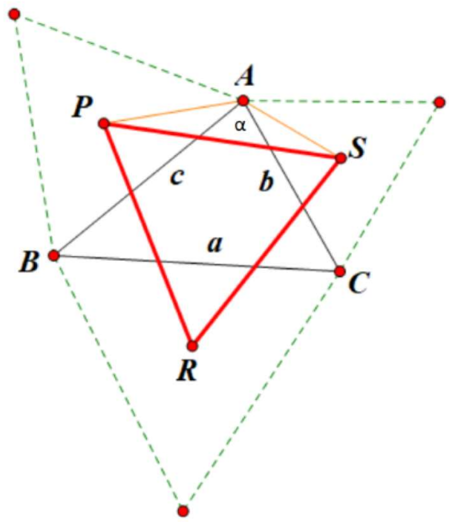
U ovom dijelu rada razmatrat ćemo dokaz Napoleonovog teorema korištenjem trigonometrije ([2]).

Nad stranicama trokuta ABC konstruiramo jednakostranične trokute sa središtima P, R i S. Trebamo dokazati da je trokut PRS jednakostraničan.
Promatramo trokut APS označen na Slici 3.

Znamo da težište trokuta dijeli težišnicu u omjeru 2:1, odnosno težište je od vrha trokuta udaljeno $\frac{2}{3}$ duljine težišnice. Kako je u ovom slučaju riječ o jednakostraničnim trokutima, težišnica i visina trokuta se podudaraju pa vrijedi

$$|AP|^2 = \frac{2}{3}v_c,$$
$$|SA|^2 = \frac{2}{3}v_b,$$

gdje su v_b i v_c duljine visina jednakostraničnog trokuta s duljinama stranica b, odnosno c, a



Slika 3

poznavajući formulu za duljinu visine trokuta dobivamo

$$|AP|^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} c = \frac{\sqrt{3}}{3} c,$$
$$|SA|^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} b = \frac{\sqrt{3}}{3} b,$$

Također, pravac na kojem leži visina jednakostraničnog trokuta je ujedno i simetrala kuta pa slijedi da su $\angle SAC = \angle BAP = 30°$.
Sada, primjenom kosinusovog poučka na trokut PSA dobivamo sljedeće

$$|PS|^2 = |SA|^2 + |AP|^2 - 2|SA||AP| \cos(\alpha + 60°),$$

tj.

$$|PS|^2 = \frac{1}{3} b^2 + \frac{1}{3} c^2 - \frac{2}{3} bc \cos(\alpha + 60°).$$

Pomnožimo li prethodnu jednakost s 3 dobivamo

$$3|PS|^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha + 60°).$$

te koristeći adicijsku formulu za kosinus slijedi

$$3|PS|^2 = b^2 + c^2 - bc \cos \alpha + \sqrt{3} bc \sin \alpha. \tag{1}$$

Prema kosinusovom poučku za trokut ABC vrijedi

$$bc \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \tag{2}$$

a prema formuli za površinu trokuta ABC imamo $P_\triangle = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ odakle slijedi

$$bc \sin \alpha = 2P_\triangle \tag{3}$$

pa uvrštavanjem (2) i (3) u (1) dobivamo

$$3|PS|^2 = b^2 + c^2 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + 2\sqrt{3}P_{\triangle},$$

odnosno

$$3|PS|^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2\sqrt{3}P_{\triangle}.$$

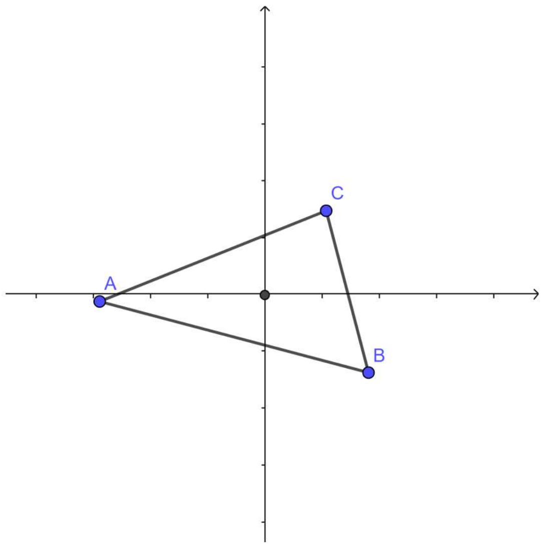
Zbog simetričnosti po a, b i c je $|PS| = |SA| = |AP|$ pa slijedi da je $\triangle APS$ jednakostraničan.

$\square$

2.2 Dokazi pomoću kompleksnih brojeva

U ovom dijelu rada razmatrat ćemo dokaze Napoleonovog teorema pomoću kompleksnih brojeva ([3]).

Neka su A, B i C kompleksni brojevi koji predstavljaju vrhove trokuta smještenog u koordinatni sustav tako da mu je težište u ishodištu.



Slika 4: Trokut u koordinatnoj ravnini

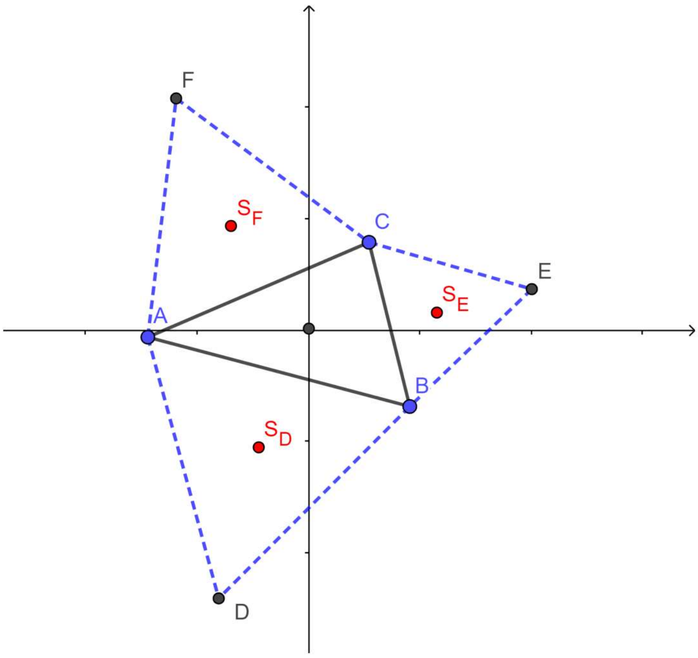
Pretpostavimo da je

$$A + B + C = 0.$$

Neka je $d = e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$. Množenje s d predstavljat će nam rotaciju za $60°$ u pozitivnom smjeru. Vrijedi $d^3 = -1$.

Konstruiranjem jednakostraničnih trokuta na stranicama trokuta ABC za kompleskne brojeve D, E i F, koji predstavljaju vrhove konstruiranih jednakostraničnih trokuta, dobivamo:

$$D = A + d(B - A),$$
$$E = B + d(C - B),$$
$$F = C + d(A - C).$$



Slika 5: Vizualizacija dokaza pomoću kompleksnih brojeva

Težište trokuta ADB dobivamo iz izraza

$$S_D = \frac{2A + B + d(B - A)}{3}.$$

Analogno, težišta trokuta BEC i CFA su redom

$$S_E = \frac{2B + C + d(C - B)}{3},$$
$$S_F = \frac{2C + A + d(A - C)}{3}.$$

Sada moramo dokazati da je trokut $S_D S_E S_F$ jednakostraničan. Odredimo duljine njegovih stranica:

$$\begin{aligned} S_D S_E = S_E - S_D &= \frac{B + C - 2A + d(C + A - 2B)}{3} \\ S_E S_F = S_F - S_E &= \frac{C + A - 2B + d(A + B - 2C)}{3} \\ S_F S_D = S_D - S_F &= \frac{A + B - 2C + d(B + C - 2A)}{3}. \end{aligned} \tag{4}$$

Označimo

$$X_D = \frac{B + C - 2A}{3}, \quad X_E = \frac{C + A - 2B}{3}, \quad X_F = \frac{A + B - 2C}{3}$$

pa (4) jednostavnije možemo zapisati kao

$$S_D S_E = X_E + dX_F,$$
$$S_E S_F = X_F + dX_D,$$
$$S_F S_D = X_D + dX_E.$$

Dobili smo trokut $X_D X_E X_F$ koji je u odnosu na $\triangle S_D S_E S_F$, zbog d, rotiran za $60°$ u pozitivnom smjeru oko ishodišta. Ako su ti trokuti jednakostranični, rotacijom $\triangle X_D X_E X_F$ za $120°$ vrh X_D trebao bi se poklopiti s vrhom S_E, X_E s vrhom S_F te X_F s vrhom S_D.
Zato nam preostaje provjeriti vrijedi li

$$d^2(X_E + dX_F) = X_D + dX_E.$$

Znamo da je $d^3 = 1$ pa imamo

$$d^2 X_E - X_F = X_D + dX_E.$$

Nadalje, analogno prethodnim razmatranjima, $X_D + X_E + X_F = 0$ i vrijedi

$$d^2 X_E + X_D + X_E = X_D + dX_E$$

što implicira kvadratnu jednadžbu $d^2 - d + 1 = 0$ koja je zadovoljena za d pa slijedi da je trokut $X_D X_E X_F$, odnosno $S_D S_E S_F$ jednakostraničan. □

Dokaz pomoću kompleksnih brojeva možemo izvesti i na nešto jednostavniji način ([4]). Neka je trokut ABC smješten u koordinatnoj ravnini i neka su nad njegovim stranicama konstruirani jednakostranični trokuti ABC_1, BCA_1 i CAB_1. Vrhove svih trokuta promatramo kao kompleksne brojeve. Neka j označava rotaciju za $120°$ u pozitivnom smjeru. Tada je $j^3 = 1$ i kako je $j \neq 1$ vrijedi $j^2 + j + 1 = 0$. Kako su trokuti $\triangle ABC_1$, $\triangle CAB_1$ i $\triangle BCA_1$ jednakostranični vrijedi

$$\begin{aligned} A + jB + j^2 C_1 &= 0, \\ C + jA + j^2 B_1 &= 0, \\ B + jC + J^2 A_1 &= 0, \end{aligned}$$

dok središta tih trokuta redom računamo na sljedeći način

$$\begin{aligned} P &= \frac{A + B + C_1}{3}, \\ R &= \frac{C + A + B_1}{3}, \\ S &= \frac{B + C + A_1}{3} \end{aligned}$$

Da bi trokut s vrhovima P, R i S bio jednakostraničan mora vrijediti $P + jQ + j^2 R = 0$.

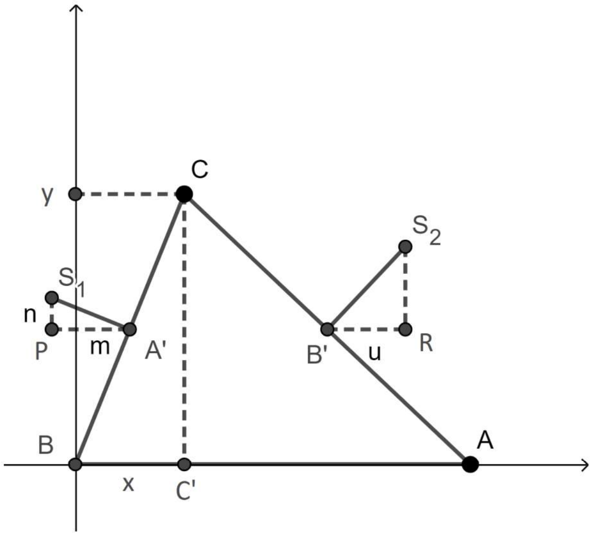
$$\begin{aligned} P + jQ + j^2 R &= \frac{1}{3}(A + B + C_1) + \frac{1}{3}j(C + A + B_1) + \frac{1}{3}j^2(B + C + A_1) = \\ &= \frac{1}{3}((B + jC + j^2 A_1) + j(A + jB + j^2 C_1) + j^2(C + jA + j^2 B_1)) = \\ &= 0 \end{aligned}$$

Dakle, trokut PRS je jednakostraničan. □

2.3 Planimetrijski dokaz

U ovom dijelu rada razmotrit ćemo planimetrijski dokaz Napoleonovog teorema i tijekom dokaza dobit ćemo izraz koji povezuje duljinu stranice Napoleonovog trokuta i duljine stranica početnog trokuta ([6]).

Neka je trokut ABC smješten u koordinatnoj ravnini tako da mu stranica c leži na osi apscisa. Nad stranicama a i b konstruirajmo jednakostranične trokute s težištima S_1 i S_2 te označimo pripadna sjecišta stranica i težišnica s A' i B'. Tada vrijedi



Slika 6

$$|S_1A'| = \frac{a}{\sqrt{12}},$$
$$|S_2B'| = \frac{b}{\sqrt{12}}.$$

Trokut S_1PA' je pravokutan pa prema Pitagorinom poučku slijedi da je

$$m^2 + n^2 = \frac{a^2}{12} \tag{5}$$

dok zbog sličnosti trokuta S_1PA' i $BC'C$ vrijedi

$$\frac{n}{m} = \frac{x}{y}.$$

Kako je $x^2 + y^2 = a^2$ i vrijedi (5), dobivamo

$$m = \frac{y}{\sqrt{12}} \qquad \text{i} \qquad n = \frac{x}{\sqrt{12}}.$$

Analogno, trokut $S_2B'R$ je pravokutan trokut sličan trokutu $AC'C$ pa vrijedi

$$u^2 + v^2 = \frac{b^2}{12}$$

i

$$\frac{v}{u} = \frac{c-x}{y}.$$

Kako je $y^2 + (c-x)^2 = b^2$ i vrijedi $x = \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$, dobivamo

$$u = \frac{y}{\sqrt{12}} \qquad \text{i} \qquad v = \frac{c-x}{\sqrt{12}}.$$

Sada možemo odrediti udaljenost između S_1 i S_2. Označimo tu udaljenost sa s. Imamo sljedeće:

$$\begin{aligned} s^2 &= \left[\left(\frac{x}{2} - m\right) - \left(\frac{c+x}{2} + u\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{y}{2} + n\right) - \left(\frac{y}{2} + v\right)\right]^2 = \\ &= \left(\frac{c}{2} + \frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{-c+2x}{\sqrt{12}}\right)^2 = \\ &= \frac{c^2}{4} + \frac{cy}{\sqrt{3}} + \frac{y^2}{3} + \frac{c^2}{12} + \frac{cx}{3} + \frac{x^2}{3} \end{aligned}$$

Vrijedi

$$\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} = \frac{a^2}{3},$$
$$\frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{12} = \frac{c^2}{3}$$

i

$$2cx = a^2 - b^2 + c^2$$

pa slijedi

$$s^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{cy}{\sqrt{3}}.$$

Kako je $y^2 = a^2 - x^2$, cy možemo zapisati u obliku

$$cy = c\sqrt{a^2 - \left(\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}\right)}$$

što je, prema Heronovoj formuli, dvostruka površina trokuta ABC koja ima simetričnu faktorizaciju

$$cy = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}$$

Sada je udaljenost između točaka S_1 i S_2 jednaka

$$s = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{6} + \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}}{2\sqrt{3}}}$$

te zbog simetričnosti po a, b i c, međusobne udaljenosti težišta jednakostraničnih trokuta konstruiranih na stranicama početnog trokuta su jednake pa je i trokut, kojemu su ta težišta vrhovi, jednakostraničan. $\square$

Literatura

[1] Š. Arslanagić, *Metodička zbirka zadataka sa osnovama teorije i elementarne matematike*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2006.

[2] A. Bogomolny, *Napoleon's theorem, Two simple proofs*, https://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon.shtml

[3] A. Bogomolny, *Napoleon's theorem, A proof with complex numbers*, https://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon_complex.shtml

[4] A. Bogomolny, *Napoleon's theorem, A second proof with complex numbers*, https://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon_complex2.shtml

[5] H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer, *Geometry revisited*, Washington, D.C: Mathematical Association of America, 1967.

[6] *Napoleon's theorem*, https://www.mathpages.com/home/kmath270/kmath270.htm