

# Krivuljni integrali i neke njihove primjene

---

**Biškup, Ida**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:815840>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-03**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ida Biškup

# **Krivuljni integrali i neke njihove primjene**

Završni rad

Osijek, 2021.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Ida Biškup

# **Krivuljni integrali i neke njihove primjene**

Završni rad

Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Burazin  
Komentor: dr. sc. Jelena Jankov

Osijek, 2021.

## **Sažetak**

U ovom radu promatramo krivuljne integrale i njihove primjene. Najprije se bavimo krivuljnim integralom prve vrste. Motivacijskim primjerom dolazimo do definicije, a nakon toga postepeno navodimo svojstva i karakterizacije. Zatim prelazimo na primjene krivuljnog integrala prve vrste s naglaskom na primjene u matematici i fizici. Za svaku od primjena navodimo izvod kao i primjer kojim ilustriramo moguću primjenu u stvarnom životu. Nakon toga se posvećujemo krivuljnom integralu druge vrste i njegovim primjenama, uspostavljajući analogne tvrdnje i rezultate kao i u slučaju krivuljnog integrala prve vrste. Također, pronalazimo vezu između između ta dva krivuljna integrala, kao i vezu s dvostrukim integralom danu Greenovim teoremom. Na samom kraju bavimo se primjenama krivuljnog integrala druge vrste uz odgovarajuće primjere.

## **Ključne riječi**

krivulja, Jordanov luk, krivuljni integral prve vrste, orijentirana krivulja, krivuljni integral druge vrste

## **Line integrals and some of their applications**

### **Abstract**

In this paper, we will observe line integrals and their applications. First, we will focus on scalar line integrals. With a motivational example we come to a definition, and then we gradually state various properties and characterizations. Then, we move on to applications of scalar line integrals with emphasis on applications in mathematics and physics. For each of the applications, we derive the formula and provide an example to illustrate possible application in real life. After that, we devote to vector line integrals and their applications, establishing analogous statements and results as in the case of scalar line integral. Also, we find connection between the two types of line integrals, as well as a connection with the double integral given by Green's theorem. At the very end, we deal with applications of vector line integrals with appropriate examples.

### **Keywords**

curve, Jordan arc, scalar line integral, oriented curve, vector line integral



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Osnovni pojmovi . . . . .	1
<b>2</b>	<b>Krivuljni integral prve vrste</b>	<b>4</b>
2.1	Definicija i svojstva . . . . .	4
2.2	Primjene krivuljnog integrala prve vrste . . . . .	11
2.2.1	Duljina luka krivulje . . . . .	11
2.2.2	Površina rotacijske plohe . . . . .	14
2.2.3	Masa, moment tromosti i polumjer vrtnje žice . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Krivuljni integral druge vrste</b>	<b>19</b>
3.1	Definicija i svojstva . . . . .	19
3.2	Primjene krivuljnog integrala druge vrste . . . . .	28
3.2.1	Rad sile . . . . .	29
3.2.2	Površina omeđenog područja . . . . .	30
3.2.3	Elektromotorna sila . . . . .	31
3.2.4	Amperov zakon . . . . .	32
	<b>Literatura</b>	<b>35</b>

# 1 Uvod

Ideja krivuljnog integrala pojavila se u 18. stoljeću. Proučavajući kretanje žice kojoj je jedan kraj učvršćen, a ostatak pod utjecajem sila, J.-L. Lagrange je s  $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$  označio element krivulje u prostoru. Ulogu te krivulje imala je žica. Ta razmatranja navela su ga da razmotri integriranje obzirom na element  $ds$ . Slične integrale proučavao je i P.-S. Laplace, ali za sile koje djeluju na tijelo duž krivulja. U djelu *Mécanique analytique* iz 1811. Lagrange se približio modernoj primjeni krivuljnog integrala prilikom razmatranja pravokutnih komponenti  $X$ ,  $Y$  i  $Z$  sila koje djeluju u točkama žice. Iako im je danas glavna primjena u fizici, krivuljni integrali su se u njoj počeli koristiti tek četrdesetak godina kasnije. U međuvremenu, motivacija za njihov daljnji razvoj bila je primjena prilikom računanja kompleksnih integrala.

U pismu upućenom F. Besselu, C. F. Gauss raspravljao je o integriranju kompleksnih funkcija duž krivulja u kompleksnoj ravnini, ali nije objavio bitan rad u tom području. Tu ideju je dalje razvio A. L. Cauchy u svojim radovima iz 1825. i 1846. U radu *Sur les intégrales qui s'étendent a tous les points d'une courbe fermée* Cauchy je opisao koncept krivuljnih integrala u  $n$ -dimenzionalnom prostoru te je iskazao teorem koji je danas poznat kao Greenov teorem. Nekoliko godina kasnije B. Riemann je u svojoj disertaciji pojasnio i dokazao Greenov teorem kao i još neke Cauchyjeve rezultate. Nakon Riemannove disertacije krivuljne integrale počeli su koristiti fizičari, a neke važne rezultate iznijeli su C. Maxwell i C. Delauney. Delauney je u svojem djelu *Treatise on Rational Mechanics* sredinom 19. stoljeća raspravljao o radu sile  $F$  duž krivulje. Nakon toga krivuljni integrali su se dalje razvijali uglavnom u fizici i to u dinamici fluida.

U prvom dijelu rada bavimo se krivuljnim integralom prve vrste. Započinjemo motivacijskim primjerom iz fizike koji će nam poslužiti za uvođenje precizne definicije. Nakon toga iskazujemo i dokazujemo neka bitna svojstva i karakterizacije koje se koriste prilikom računanja. Zatim prelazimo na primjene krivuljnog integrala prve vrste. Fokusiramo se na duljinu luka krivulje, površinu rotacijske plohe te masu, moment tromosti i polumjer vrtnje žice. Za svaku od primjena navodimo teorijsku pozadinu kao i formule koje se koriste prilikom računanja.

U nastavku rada prelazimo na krivuljni integral druge vrste. Navodimo analogne tvrdnje kao i u prvom dijelu kod krivuljnog integrala prve vrste. Nadalje, uspostavljamo vezu između dvaju krivuljnih integrala, ali i povezujemo krivuljni integral druge vrste s dvostrukim integralom u Greenovom teoremu. Na kraju rada proučavamo neke primjene krivuljnog integrala druge vrste kao što su rad sile, površina omeđenog područja, elektromotorna sila i Amperov zakon.

## 1.1 Osnovni pojmovi

Kako bismo lakše iskazali definicije i tvrdnje vezane za krivuljne integrale, potrebno je uvesti nekoliko ključnih pojmova iz matematičke analize.

**Definicija 1.1.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Svaku funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo **skalarno polje** ili skalarna funkcija. Preciznije, skalarno polje  $f$  svakoj točki  $P \in \Omega$  pridružuje neki skalar.

**Primjer 1.1.** *Funkcija*

$$f(x, y, z) = 3x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xz, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

*je primjer skalarnog polja.*



**Definicija 1.2.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ . Svaku funkciju  $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivamo **vektorsko polje** ili vektorska funkcija. Preciznije, vektorsko polje  $\vec{F}$  svakoj točki  $P \in \Omega$  pridružuje neki vektor.

**Primjer 1.2.** *Funkcija*

$$\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + 2z)\vec{i} - (yz - 1)\vec{j} + x\vec{k}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

je primjer vektorskog polja.

**Definicija 1.3.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  otvoren skup. Za funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je **klase**  $C^1(\Omega)$  ako je ona neprekidna na  $\Omega$  i postoje sve parcijalne derivacije  $\partial_i f$ ,  $i = 1, \dots, n$ , te su neprekidne na  $\Omega$ .

Označimo s  $E$  prostor i neka je  $O$  točka ishodišta tog prostora. Svakoju točki  $P$  u prostoru možemo pridružiti radijvektor  $\vec{r} = \overrightarrow{OP}$ . Označimo s  $X_0 = \{\overrightarrow{OP} : P \in E\}$  skup svih radijvektora u prostoru.

**Definicija 1.4.** Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  interval i  $\vec{r} : I \rightarrow X_0$  neprekidna funkcija na  $I$ . Označimo s  $r(t) \in E$  vrh radijvektora  $\vec{r}(t) \in X_0$ , odnosno  $\vec{r}(t) = \overrightarrow{Or(t)}$ . Za skup

$$\Gamma = \{r(t) \in E : t \in I\}$$

kažemo da je **krivulja u prostoru**.

Pretpostavimo da se u prostoru kojeg promatramo nalazi krivulja  $\Gamma$ . Tada svakoj točki krivulje  $\Gamma$  možemo pridružiti radijvektor  $\vec{r}$ . U nastavku rada ćemo se pretežitno ograničavati na prostore  $\mathbb{R}^2$  i  $\mathbb{R}^3$ , budući da brojne primjene krivuljnih integrala koriste upravo takve realne prostore, te poistovjećivati vrijednosti radijvektora  $\vec{r}(t)$  i njegovog vrha  $r(t)$ , za  $t \in I$ .

Neka je  $P(x, y, z)$  proizvoljna točka krivulje  $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ . Tada je  $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  radijvektor pridružen toj točki. Pronađemo li *parametar*  $t$ , uz neke uvjete, takav da se radijvektor  $\vec{r}$  može zapisati kao  $\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ , za neke koordinatne funkcije  $x$ ,  $y$  i  $z$ , onda kažemo da smo *parametrizirali* krivulju  $\Gamma$ .

**Primjer 1.3.** *Parametrizirajmo krivulju  $\Gamma$  dobivenu kao presječnicu sfere  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$  i kružnog stošca  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  u prvom kvadrantu.*

Znamo da je  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  pa uvrstimo to u jednadžbu sfere:

$$4 = x^2 + y^2 + \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 = x^2 + y^2 + x^2 + y^2 = 2x^2 + 2y^2.$$

Korištenjem polarnih koordinata lako slijedi

$$x = \sqrt{2} \cos t, \quad y = \sqrt{2} \sin t, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

budući da se  $\Gamma$  nalazi u prvom kvadrantu. Ovako definirane  $x$  i  $y$  uvrstimo u jednadžbu kružnog stošca pa kao parametrizaciju krivulje  $\Gamma$  u konačnici dobivamo

$$\vec{r}(t) = \sqrt{2} \cos t \vec{i} + \sqrt{2} \sin t \vec{j} + \sqrt{2} \vec{k}, \quad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

U nastavku ovog rada će nas isključivo zanimati krivulje koje zadovoljavaju određena poželjna svojstva. Naime, promatrat ćemo krivulju  $\Gamma$  koja samu sebe ne presijeca, neprekidna je i ima tangentu u svakoj svojoj točki.

**Definicija 1.5.** Parametriziranu krivulju  $\Gamma$  koja ima barem jednu parametrizaciju  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \Gamma$  sa svojstvima

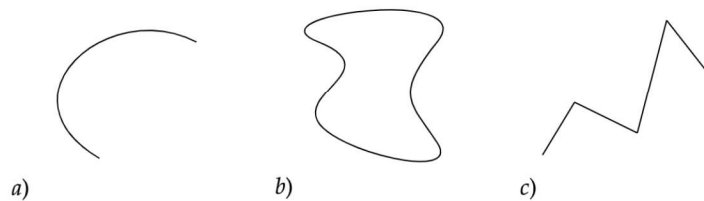
- 1)  $\vec{r}$  je injekcija,
- 2)  $\vec{r} \in C^1([a, b]; \mathbb{R}^3)$ ,
- 3)  $\vec{r}'(t) \neq 0, t \in [a, b]$ ,

nazivamo **Jordanov luk** ili jednostavna glatka krivulja.

**Napomena 1.1.** Ako uz uvjete iz Definicije 1.5 dodatno vrijedi da je  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$ , tj. da je početna točka ujedno i krajnja onda je krivulja  $\Gamma$  **zatvoren Jordanov luk** ili **kontura**.

**Definicija 1.6.** Za krivulju  $\Gamma$  kažemo da je **po dijelovima glatka** krivulja, ako se ona može dobiti nastavljanjem konačno mnogo Jordanovih lukova  $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$  na način da je krajnja točka luka  $\Gamma_{i-1}$  ujedno i početna točka luka  $\Gamma_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

**Primjer 1.4.** Pogledajmo primjere Jordanovog luka, zatvorenog Jordanovog luka i po dijelovima glatke krivulje prikazane na Slici 1.



Slika 1: a) Jordanov luk, b) zatvoren Jordanov luk, c) po dijelovima glatka krivulja.

Neka je sada  $\Gamma$  Jordanov luk u prostoru te  $\vec{r}(a) = A$  početna i  $\vec{r}(b) = B$  krajnja točka krivulje  $\Gamma$ . Svakoј točki krivulje  $\Gamma$  možemo pridružiti tangentu u toј točki. Orijentirati krivulju  $\Gamma$  znači u svakoj tangenti uzeti orijentaciju. To znači da se krivulja  $\Gamma$  može orijentirati na beskonačno načina, no nama će od interesa biti samo tzv. *neprekidne orijentacije*. Neprekidne orijentacije na krivulji  $\Gamma$  su one koje se dobivaju prenošenjem orijentacije sa skupa  $\mathbb{R}$  na  $\Gamma$  glatkim parametrizacijama. Tada imamo dvije mogućnosti za orijentaciju krivulje  $\Gamma$ , tako da jedinični vektori tangente pokazuju gibanje po krivulji u smjeru od  $A$  do  $B$ , ili u suprotnom smjeru, od  $B$  do  $A$ .

Ukoliko je  $\Gamma$  zatvoren Jordanov luk onda također imamo samo dvije moguće orijentacije. Ako vektori tangente pokazuju gibanje suprotno smjeru kazaljke na satu kažemo da je zatvorena krivulja  $\Gamma$  *pozitivno orijentirana*, a ako vektori tangente pokazuju gibanje u smjeru kazaljke na satu onda je zatvorena krivulja  $\Gamma$  *negativno orijentirana*.



## 2 Krivuljni integral prve vrste

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s motivacijom za uvođenje krivuljnog integrala prve vrste i njegovom definicijom. Također, navest ćemo neka bitna svojstva i karakterizacije koje ćemo koristiti prilikom računanja. Nakon toga ćemo detaljnije proučiti različite primjene krivuljnog integrala prve vrste u matematici i fizici.

### 2.1 Definicija i svojstva

Kako bismo motivirali uvođenje definicije krivuljnog integrala prve vrste, promotrimo sljedeću fizikalnu interpretaciju. Neka je  $\Gamma$  Jordanov luk te

$$\vec{r} = \vec{r}(t), t \in [a, b], \quad (2.1)$$

njegova glatka parametrizacija. Pretpostavimo da je duž  $\Gamma$  raspoređena neka materija linijske gustoće  $\rho$ . Želimo pronaći masu  $m$  te krivulje. U slučaju da je dana krivulja segment, masu bismo dobili integriranjem dane gustoće  $\rho$  duž segmenta, odnosno po zadanoj krivulji. Na analogan način pristupamo i ovom problemu. U tu svrhu napravimo razdiobu krivulje  $\Gamma$  na  $n$  dijelova po točkama

$$A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B. \quad (2.2)$$

Tada razdiobi (2.2) krivulje  $\Gamma$ , koristeći parametrizaciju (2.1), odgovara sljedeća razdioba segmenta  $[a, b]$ :

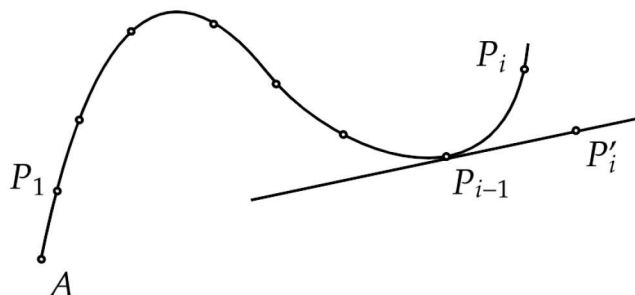
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = b, \quad (2.3)$$

gdje je  $\vec{r}(t_i) = P_i$ . Treba uočiti da vrijedi i obratno. Naime, razdiobi (2.3) segmenta  $[a, b]$  preko funkcije (2.1) odgovarat će razdioba (2.2) krivulje  $\Gamma$ . Označimo sada s  $l(P_{i-1}, P_i)$  duljinu luka krivulje  $\Gamma$  između točaka  $P_{i-1}$  i  $P_i$ . Ako je  $S_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , bilo koja točka luka  $P_{i-1}P_i$  onda je s

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(S_i) l(P_{i-1}, P_i) \quad (2.4)$$

približno dana masa krivulje  $\Gamma$ . Budući da nam duljina luka nije poznata, pokušat ćemo traženi luk linearno aproksimirati. Promotrimo sada tangentu na krivulju  $\Gamma$  u točki  $P_{i-1}$  prikazanu na Slici 2 danu s

$$t \rightarrow \vec{r}(t_{i-1}) + (t - t_{i-1}) \vec{r}'(t_{i-1}), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$



Slika 2: Tangenta na krivulju  $\Gamma$  u točki  $P_{i-1}$ .

Ukoliko u jednadžbi tangente stavimo  $t = t_i$ , na tangenti dobivamo točku

$$P'_i = \vec{r}(t_{i-1}) + (t_i - t_{i-1}) \vec{r}'(t_{i-1}),$$

pa duljinu luka  $\overline{P_{i-1}P_i}$  krivulje  $\Gamma$  možemo aproksimirati pomoću udaljenosti točaka  $P_{i-1}$  i  $P'_i$  na tangenti. Udaljenost tih točaka, odnosno norma vektora  $\overrightarrow{P_{i-1}P'_i}$ , jednaka je  $|\vec{r}'(t_{i-1})| \cdot (t_i - t_{i-1})$ . Uvrštavanjem tog izraza u (2.4) dobivamo

$$m \approx \sum_{i=1}^n \rho(\vec{r}(u_i)) |\vec{r}'(t_{i-1})| (t_i - t_{i-1}), \quad (2.6)$$

gdje je  $u_i \in [t_{i-1}, t_i]$  vrijednost za koju je  $\vec{r}(u_i) = S_i$ . Kako je s (2.6) dana integralna suma za funkciju  $t \rightarrow \rho(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)|$ , zaključujemo da je tražena masa krivulje  $\Gamma$  dana s

$$m = \int_a^b \rho(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt. \quad (2.7)$$

**Definicija 2.1.** Neka je  $\Gamma$  Jordanov luk,  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \Gamma$  njegova parametrizacija i  $f : \Gamma \rightarrow [a, b]$  funkcija takva da je  $(f \circ \vec{r})|\vec{r}'| : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Riemann-integrabilna na segmentu  $[a, b]$ . Broj

$$\int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt \quad (2.8)$$

nazivamo **krivuljni integral prve vrste** funkcije  $f$  po krivulji  $\Gamma$  i označavamo s

$$\int_{\Gamma} f ds,$$

pri čemu se izraz

$$ds = |\vec{r}'(t)| dt$$

naziva **element duljine luka**.

**Napomena 2.1.** Neka je  $\Gamma$  po dijelovima glatka krivulja koja nastaje nadovezivanjem Jordanovih lukova jednog na drugi:  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_k$ , gdje se početna točka luka  $\Gamma_2$  veže na krajnju točku luka  $\Gamma_1$ , itd. Tada se krivuljni integral po krivulji  $\Gamma$  može računati po formuli

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds + \dots + \int_{\Gamma_k} f ds.$$

Definicija krivuljnog integrala prve vrste zahtjeva poznavanje parametrizacije krivulje koju promatramo. No, poznato je kako krivulje ne moraju imati samo jednu parametrizaciju. Ilustrirajmo to na primjeru jedinične kružnice.

**Primjer 2.1.** Promotrimo jednadžbu jedinične kružnice u gornjoj poluravnini ( $y \geq 0$ ), koja je implicitno dana s  $x^2 + y^2 = 1$ . Kako bismo parametrizirali tu krivulju moramo pronaći neke  $x$  i  $y$  koji zadovoljavaju danu jednadžbu. Primjerice, odaberimo

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad t \in [0, \pi].$$

Direktnim uvrštavanjem se lako uvjerimo kako ovako definirani  $x$  i  $y$  zaista zadovoljavaju jednadžbu jedinične kružnice:

$$x^2 + y^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1.$$

Dakle, s  $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$ ,  $t \in [0, \pi]$ , dana je jedna parametrizacija jedinične kružnice u gornjoj poluravnini. Pogledajmo sada

$$x = t, \quad y = \sqrt{1 - t^2}, \quad t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Ponavljajući prethodni postupak, direktnim uvrštavanjem dobivamo

$$x^2 + y^2 = t^2 + \left(\sqrt{1 - t^2}\right)^2 = t^2 + 1 - t^2 = 1.$$

Sada vidimo da je i  $\vec{R}(t) = t \vec{i} + \sqrt{1 - t^2} \vec{j}$ ,  $t \in \langle -1, 1 \rangle$ , također jedna parametrizacija jedinične kružnice u gornjoj poluravnini.

Budući da parametrizacija krivulje  $\Gamma$  nije jedinstvena, zanima nas utječe li odabir parametrizacije na računanje samog integrala. Prije toga, iskazat ćemo važnu tvrdnju koja nam daje vezu bilo koje dvije parametrizacije neke glatke krivulje.

**Teorem 2.1.** *Neka je  $\Gamma$  Jordanov luk i*

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(t), \quad t \in [a, b], \quad a < b \\ \vec{R} &= \vec{R}(u), \quad u \in [c, d], \quad c < d, \end{aligned}$$

*bilo koje dvije glatke parametrizacije luka  $\Gamma$ . Tada postoji strogo monotona bijekcija*

$$\omega : [a, b] \rightarrow [c, d], \quad \omega \in C^1([a, b])$$

*takva da je  $\vec{r} = \vec{R} \circ \omega$ , odnosno  $\omega = \vec{R}^{-1} \circ \vec{r}$ .*

*Dokaz.* Za dokaz vidjeti [10], Teorem 32., str. 175. □

Prema prethodnoj tvrdnji svaka se parametrizacija dane krivulje može dobiti iz neke druge parametrizacije te krivulje bijektivnom transformacijom. To nam pomaže u pokazivanju neovisnosti krivuljnog integrala prve vrste o parametrizaciji krivulje, što je iskazano u sljedećoj lemi.

**Lema 2.1.** *Neka je  $\Gamma$  Jordanov luk i*

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(t), \quad t \in [a, b], \quad a < b \\ \vec{R} &= \vec{R}(u), \quad u \in [c, d], \quad c < d \end{aligned}$$

*bilo koje dvije parametrizacije luka  $\Gamma$ . Tada vrijedi*

$$\int_a^b (f \circ \vec{r})(t) |\vec{r}'(t)| dt = \int_c^d (f \circ \vec{R})(u) |\vec{R}'(u)| du. \quad (2.9)$$

*Dokaz.* Neka je  $\omega \in C^1([a, b]; [c, d])$  strogo monotona bijekcija takva da je  $\vec{r} = \vec{R} \circ \omega$ , odnosno  $\omega = \vec{R}^{-1} \circ \vec{r}$ . Kako je  $\omega'$  također neprekidna i vrijedi  $\omega'(t) \neq 0$ ,  $t \in [a, b]$ , možemo promatrati dva slučaja u ovisnosti o predznaku prve derivacije.



1. Ako je  $\omega'(t) > 0$ ,  $t \in [a, b]$ , onda  $\vec{r} = \vec{R} \circ \omega$  povlači da je  $|\vec{r}'(t)| = |\vec{R}'(\omega(t))| \omega'(t)$ . Uvrštavanjem u formulu (2.9) te korištenjem supstitucije  $u = \omega(t)$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \int_a^b (f \circ \vec{r})(t) |\vec{r}'(t)| dt &= \int_a^b (f \circ \vec{R} \circ \omega)(t) |\vec{R}'(\omega(t))| \omega'(t) dt \\ &= \int_{\omega(a)}^{\omega(b)} (f \circ \vec{R})(u) |\vec{R}'(u)| du = \int_c^d (f \circ \vec{R})(u) |\vec{R}'(u)| du. \end{aligned}$$

Granice u integralu mogli smo zamijeniti na ovaj način zato što je  $\omega(a) = c$  i  $\omega(b) = d$  posljedica rasta funkcije  $\omega$  i  $a < b$ ,  $c < d$ .

2. Neka je sada  $\omega'(t) < 0$ ,  $t \in [a, b]$ . Tada  $\vec{r} = \vec{R} \circ \omega$  povlači da je  $|\vec{r}'(t)| = |\vec{R}'(\omega(t))| (-\omega'(t))$ . Ponovnim uvrštavanjem u formulu (2.9) te korištenjem supstitucije  $u = \omega(t)$  dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b (f \circ \vec{r})(t) |\vec{r}'(t)| dt &= \int_a^b (f \circ \vec{R} \circ \omega)(t) |\vec{R}'(\omega(t))| (-\omega'(t)) dt \\ &= - \int_{\omega(a)}^{\omega(b)} (f \circ \vec{R})(u) |\vec{R}'(u)| du \\ &= - \int_d^c (f \circ \vec{R})(u) |\vec{R}'(u)| du = \int_c^d (f \circ \vec{R})(u) |\vec{R}'(u)| du. \end{aligned}$$

U ovom slučaju  $\omega$  pada,  $a < b$  i  $c < d$  pa je posljedično  $\omega(a) = d$  i  $\omega(b) = c$ .

Na ovaj način smo pokazali da, iako Jordanov luk  $\Gamma$  može imati više parametrizacija, vrijednost integrala ostaje ista.  $\square$

Promotrimo sada kako računati vrijednost tog integrala. Naime, računanje krivuljnog integrala ovisi o tome kako je zadana krivulja  $\Gamma$ .

- a) Neka je krivulja  $\Gamma$  zadana s  $y = \psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Ako uzmemo  $t := x$  za parametar onda je s

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b],$$

dana jedna parametrizacija krivulje  $\Gamma$  te vrijedi

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(t, \psi(t)) \sqrt{1 + (\psi'(t))^2} dt. \quad (2.10)$$

- b) Ako je ravninska krivulja  $\Gamma$  zadana u polarnom koordinatnom sustavu kao  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha, \beta]$ , onda  $\varphi$  možemo shvatiti kao parametar. Tada je jedna parametrizacija krivulje  $\Gamma$  dana s

$$\vec{r}(\varphi) = r(\varphi) \cos(\varphi)\vec{i} + r(\varphi) \sin(\varphi)\vec{j}, \quad \varphi \in [\alpha, \beta].$$

Uvrštavanjem u formulu (2.8) dobivamo

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi)) \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi. \quad (2.11)$$

c) Ako je ravninska krivulja  $\Gamma$  zadana parametarski s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b],$$

onda je

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \quad (2.12)$$

Prethodni zapis lako se generalizira ukoliko imamo zadanu krivulju u prostoru. Parametrizacija te krivulje dana je s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

i vrijedi

$$\int_{\Gamma} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (2.13)$$

Još jedno korisno svojstvo krivuljnog integrala prve vrste dano je u sljedećoj lemi.

**Lema 2.2.** *Krivuljni integral prve vrste ne ovisi o smjeru integriranja po krivulji  $\Gamma$ , tj.*

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{-\Gamma} f(x, y) ds.$$

*Dokaz.* Neka je s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b]$$

dana parametrizacija krivulje  $\Gamma$ . Tada prema [7], krivulju  $-\Gamma$  možemo parametrizirati s

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(a + b - t) = x(a + b - t)\vec{i} + y(a + b - t)\vec{j}, \quad t \in [a, b].$$

Budući da su krivulje  $\Gamma$  i  $-\Gamma$  zadane parametarski, koristimo formulu za računanje krivuljnog integrala parametarski zadanih funkcija danu s (2.12). Za krivulju  $\Gamma$  imamo

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt,$$

dok za krivulju  $-\Gamma$  vrijedi

$$\int_{-\Gamma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(a + b - t), y(a + b - t)) \sqrt{(x'(a + b - t))^2 + (y'(a + b - t))^2} dt.$$

Uz supstituciju  $a + b - t = u$  slijedi

$$\int_b^a f(x(u), y(u)) \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} (-du) = \int_a^b f(x(u), y(u)) \sqrt{(x'(u))^2 + (y'(u))^2} du.$$

Dakle, dobili smo da je

$$\int_{\Gamma} f(x, y) ds = \int_{-\Gamma} f(x, y) ds,$$

što je trebalo pokazati. □

Kako je krivuljni integral prve vrste definiran pomoću Riemannovog integrala, ne iznenađuje činjenica da imaju neka zajednička svojstva. Naime, vrijedi sljedeća lema.

**Lema 2.3.** *Neka su  $f, g : \Gamma \rightarrow [a, b]$  dvije funkcije definirane u svim točkama krivulje  $\Gamma$  koja je podijeljena na dvije krivulje  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , pri čemu je  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  i  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ , te neka je  $\alpha$  proizvoljan realan broj. Tada vrijedi:*

$$\int_{\Gamma} (\alpha f) ds = \alpha \int_{\Gamma} f ds, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{homogenost})$$

$$\int_{\Gamma} (f + g) ds = \int_{\Gamma} f ds + \int_{\Gamma} g ds, \quad (\text{aditivnost})$$

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds \quad (\text{aditivnost po području integracije}).$$

*Dokaz.* Pokažimo prvo homogenost. Ukoliko krivuljni integral prve vrste raspišemo po definiciji, dobivamo Riemannov integral. Za takav integral znamo da vrijedi homogenost:

$$\int_{\Gamma} (\alpha f) ds = \int_a^b (\alpha f(\vec{r}(t))) |\vec{r}'(t)| dt = \alpha \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt.$$

Nadalje, opet koristeći definiciju, možemo pisati

$$\alpha \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \alpha \int_{\Gamma} f ds.$$

Na sličan način dokazujemo aditivnost. Po definiciji raspišemo sumu krivuljnih integrala tako da dobijemo Riemannov integral, za koji znamo da vrijedi aditivnost:

$$\int_{\Gamma} (f + g) ds = \int_a^b (f(\vec{r}(t)) + g(\vec{r}(t))) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt + \int_a^b g(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt,$$

što je jednako upravo

$$\int_{\Gamma} f ds + \int_{\Gamma} g ds.$$

Za dokaz trećeg svojstva, potrebno je uočiti sljedeće: kako je  $\Gamma$  definirana na segmentu  $[a, b]$  te podijeljena na dvije krivulje  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  (koje su po dijelovima glatke krivulje), tada postoji neka točka  $c \in [a, b]$  takva da je, bez smanjenja općenitosti, s  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [a, c]$  dana parametrizacija krivulje  $\Gamma_1$ , dok je s  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ,  $t \in [c, b]$  dana parametrizacija krivulje  $\Gamma_2$ . Po definiciji, možemo pisati

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt.$$

Sada imamo Riemannov integral i točku  $c \in [a, b]$  pa vrijedi aditivnost po području integracije Riemannovog integrala:

$$\int_a^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_a^c f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt + \int_c^b f(\vec{r}(t)) |\vec{r}'(t)| dt = \int_{\Gamma_1} f ds + \int_{\Gamma_2} f ds.$$



Ovim smo pokazali da aditivnost po području integracije vrijedi i kod krivuljnih integrala prve vrste.  $\square$

Pogledajmo kako računanje krivuljnog integrala prve vrste izgleda na konkretnom primjeru.

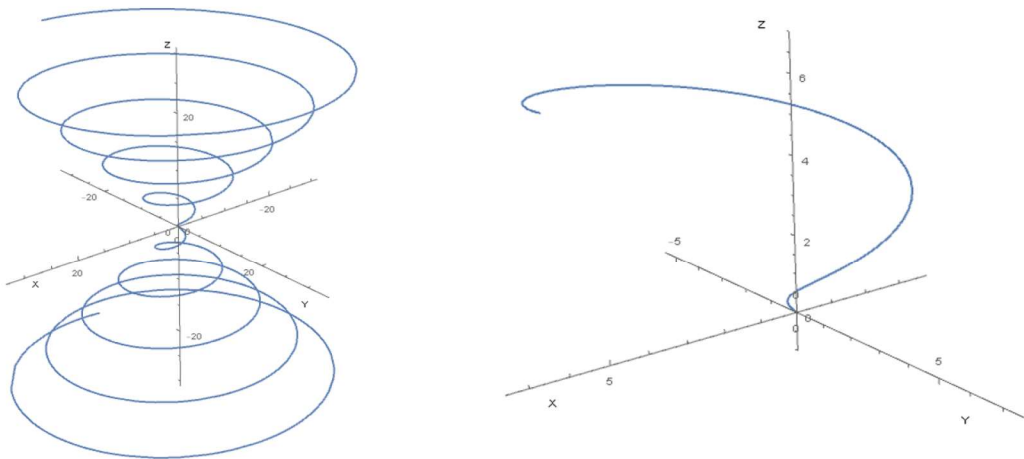
**Primjer 2.2.** Izračunajmo integral

$$\int_C \left( 2z - \sqrt{x^2 + y^2} \right) ds$$

gdje je  $C$  prvi zavoj stožaste spirale

$$\vec{r}(t) = t \cos t \vec{i} + t \sin t \vec{j} + t \vec{k}.$$

Stožasta spirala (Slika 3, lijevo) je prostorna krivulja koja je parametarski zadana. Budući da promatramo njen prvi zavoj (Slika 3, desno), slijedi da je  $t \in [0, 2\pi]$ .



Slika 3: Stožasta spirala i prvi zavoj stožaste spirale.

Imamo

$$\begin{aligned} \int_C \left( 2z - \sqrt{x^2 + y^2} \right) ds &= \int_0^{2\pi} \left( 2t - \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} \right) \sqrt{((t \cos t)')^2 + ((t \sin t)')^2 + (t')^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( 2t - \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} \right) \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2 + 1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( 2t - \sqrt{t^2} \right) \sqrt{\cos^2 t - 2t \sin t \cos t + t^2 \sin^2 t + \sin^2 t + 2t \sin t \cos t + t^2 \cos^2 t + 1} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2t - t) \sqrt{(\cos^2 t + \sin^2 t) + t^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + 1} dt = \int_0^{2\pi} t \sqrt{2 + t^2} dt. \end{aligned}$$

Uvodimo supstituciju  $2 + t^2 = u$  pa gornji integral postaje

$$\int_2^{2+4\pi^2} \frac{\sqrt{u}}{2} du = \frac{1}{2} \int_2^{2+4\pi^2} \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \Big|_2^{2+4\pi^2}.$$

Konačno, uvrštavanjem granica dobivamo

$$\frac{1}{3} \left[ (2 + 4\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{2\sqrt{2}}{3} \left[ (1 + 2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right].$$

## 2.2 Primjene krivuljnog integrala prve vrste

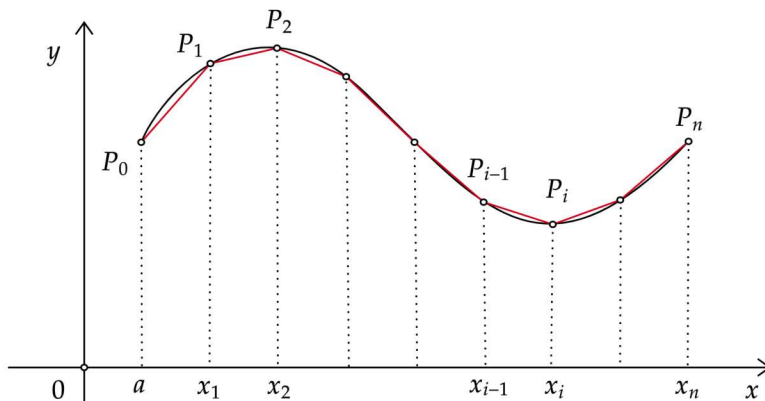
Kao što smo mogli vidjeti na početku ovog poglavlja, jedna od motivacija za proučavanje krivuljnih integrala potekla je iz fizike kod računanja mase zadane krivulje. Osim te postoje još mnoge primjene krivuljnog integrala prve vrste. Posebno ćemo proučiti samo neke od njih kao što su duljina luka dane krivulje, površina plohe nastale rotacijom krivulje oko zadane osi te moment tromosti i polumjer vrtnje žice.

### 2.2.1 Duljina luka krivulje

Neka je krivulja  $\Gamma$  zadana eksplicitno s  $y = f(x)$ ,  $f \in C([a, b])$ ,  $x \in [a, b]$ . Kako bismo odredili duljinu luka te krivulje napravimo najprije ekvidistantnu razdiobu segmenta  $[a, b]$ :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b,$$

te s  $\Delta x := x_i - x_{i-1}$  označimo širinu svakog podsegmenta te razdiobe. Ako stavimo da je  $y_i = f(x_i)$ , na krivulji  $\Gamma$  dobivamo točke  $P_i(x_i, y_i)$ , za  $i = 1, \dots, n$ . Te točke predstavljaju vrhove pravokutnih trapeza čija unija aproksimira lik omeđen krivuljom  $\Gamma$  i pozitivnim dijelom osi  $x$ , kao što je prikazano na Slici 4.



Slika 4: Aproximacija krivulje  $\Gamma$  pomoću mnogokuta.

Ovakva razdioba krivulje  $\Gamma$  omogućava nam da njenu duljinu aproksimiramo pomoću zbroja duljina gornjih krakova pravokutnih trapeza, odnosno zbrojem duljina dužina  $|P_{i-1}P_i|$ , za  $i = 1, \dots, n$ . Uočimo kako ćemo za veći  $n$  imati više točaka na krivulji pa će aproksimacija zbrojem njihovih međusobnih udaljenosti biti bliža stvarnoj duljini krivulje. Dakle, duljinu luka krivulje  $\Gamma$  možemo aproksimirati s

$$l(\Gamma) \approx \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|. \quad (2.14)$$

Kako bi prethodna formula bila primjenjiva u praktičnim zadacima, potrebno ju je izraziti pomoću funkcije  $f$  koja eksplicitno određuje zadanu krivulju  $\Gamma$ . Budući da se nalazimo u ravnini, udaljenost točaka  $P_{i-1}$  i  $P_i$  možemo zapisati kao

$$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2}, \quad (2.15)$$

gdje je  $\Delta y_i := y_i - y_{i-1}$ . Kako je funkcija  $f$  neprekidna na  $[x_{i-1}, x_i] \subseteq [a, b]$ , te uz dodatnu pretpostavku derivabilnosti funkcije  $f$  na  $\langle x_{i-1}, x_i \rangle \subseteq [a, b]$ , prema Lagrangeovom teoremu srednje vrijednosti postoji točka  $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$  takva da je

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x_i^*),$$

što se može zapisati kao

$$\Delta y_i = f'(x_i^*) \Delta x. \quad (2.16)$$

Ako (2.16) uvrstimo u (2.15) dobivamo

$$\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (f'(x_i^*) \Delta x)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 (1 + (f'(x_i^*))^2)} = \Delta x \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2}.$$

Sada je

$$l(\Gamma) \approx \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \Delta x \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2},$$

što odgovara integralnoj sumi za funkciju  $x \mapsto \sqrt{1 + (f'(x))^2}$ , pa je duljina krivulje  $\Gamma$  dana izrazom

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Time smo dokazali sljedeći teorem.

**Teorem 2.2.** *Ako je funkcija  $f \in C^1([a, b])$ , onda je duljina luka eksplicitno zadane krivulje  $y = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ , dana formulom*

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx. \quad (2.17)$$

Slično, ukoliko je krivulja  $\Gamma$  zadana parametarski s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

tada je duljina luka krivulje  $\Gamma$  dana formulom

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \quad (2.18)$$

Izvod nećemo navoditi, ali se on može pronaći u [8], Teorem 3.6., str. 44.

Uočimo kako analogan rezultat vrijedi i općenito, bez ograničavanja na poseban tip parametrizacije. Duljinu Jordanovog luka  $\Gamma$  zadanog proizvoljnom parametrizacijom  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \Gamma$  možemo izračunati integriranjem elementa duljine luka. Odnosno, prema definiciji krivuljnog integrala prve vrste, vrijedi sljedeća formula:

$$l(\Gamma) = \int_{\Gamma} ds = \int_a^b |\vec{r}'(t)| dt.$$

Ilustrirajmo sada korištenje krivuljnog integrala prve vrste u računanju duljine luka krivulje na idućem primjeru.



**Primjer 2.3.** Jednog sunčanog dana Bruno i Sven odlučili su se natjecati tko će prvi doći do slastičarnice. Do nje se može doći na dva načina, cestom u obliku krivulje  $y = x^{\frac{3}{2}}$ , i biciklističkom stazom u obliku krivulje  $x = \frac{1}{16}y^2$ . Dogovorili su se da će Bruno ići automobilom, a Sven biciklom. Zbog neočekivanih radova na cesti Bruno će na čekanju dodatno potrošiti 10 minuta. Uvedimo koordinatni sustav tako da točka iz koje Bruno i Sven kreću ima koordinate  $(0,0)$ , a slastičarnica se nalazi u točki  $(4,8)$ . Ako će Bruno voziti prosječnom brzinom od 45 km/h, a Sven prosječnom brzinom od 23 km/h, odredite tko će prvi doći do slastičarnice.

Kako su krivulje zadane eksplicitno, za računanje duljina njihovih lukova možemo koristiti formulu (2.17) danu s

$$l(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

Označimo s  $\Gamma_1$  krivulju  $y = x^{\frac{3}{2}}$ ,  $x \in [0,4]$ , a s  $\Gamma_2$  krivulju  $x = \frac{y^2}{16}$ ,  $y \in [0,8]$ . Odredimo prvo udaljenost koju će Bruno prijeći automobilom:

$$l(\Gamma_1) = \int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2} dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx.$$

Uvođenjem supstitucije  $t = 1 + \frac{9}{4}x$  gornji integral postaje

$$\frac{4}{9} \int_1^{10} \sqrt{t} dt = \frac{4}{9} \int_1^{10} t^{\frac{1}{2}} dt = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \frac{8}{27} (\sqrt{1000} - 1) = \frac{8}{27} (10\sqrt{10} - 1) = 9.073.$$

Dakle, Bruno je automobilom prešao 9.073 km. Koristeći istu formulu izračunajmo udaljenost koju je Sven prešao biciklom:

$$\begin{aligned} l(\Gamma_2) &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(y))^2} dy = \int_0^8 \sqrt{1 + \left(\frac{y}{8}\right)^2} dy = \int_0^8 \sqrt{1 + \frac{y^2}{64}} dy \\ &= \int_0^8 \sqrt{\frac{1}{64}(64 + y^2)} dy = \frac{1}{8} \int_0^8 \sqrt{64 + y^2} dy = I. \end{aligned}$$

Prethodni integral riješit ćemo pomoću hiperbolne supstitucije  $y = 8 \operatorname{sh} t$ ,  $t = \operatorname{arsh} \frac{y}{8}$ :

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8} \int_0^8 \sqrt{64 + y^2} dy = \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \operatorname{ch} t \sqrt{64 + 64 \operatorname{sh}^2 t} dt = \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \operatorname{ch} t \sqrt{64(1 + \operatorname{sh}^2 t)} dt \\ &= 8 \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \operatorname{ch} t \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} dt = 8 \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \operatorname{ch} t \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} dt = 8 \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \operatorname{ch}^2 t dt. \end{aligned}$$

Koristeći identitet  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  imamo



$$\begin{aligned}
8 \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \operatorname{ch}^2 t \, dt &= 8 \int_0^{\operatorname{arsh} 1} \left( \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 dt = 2 \int_0^{\operatorname{arsh} 1} (e^{2t} + 2 + e^{-2t}) \, dt \\
&= 2 \left( \frac{1}{2} e^{2t} + 2t - \frac{1}{2} e^{-2t} \right) \Big|_0^{\operatorname{arsh} 1} = (e^{2 \operatorname{arsh} 1} - 1) + 4 \operatorname{arsh} 1 - (e^{-2 \operatorname{arsh} 1} - 1) = 9.182.
\end{aligned}$$

Sven je prešao 9.182 km. Sada kada znamo koliku udaljenost su Bruno i Sven prešli, vrijeme koje im je trebalo možemo jednostavno izračunati kao kvocijent duljine puta i brzine:

$$t_B = \frac{l(\Gamma_1)}{v_B} = \frac{9.073 \text{ km}}{45 \text{ km/h}} = 0.2016 \text{ h} = 12.096 \text{ min.}$$

Ako uzmemo u obzir 10 minuta koje je Bruno proveo čekajući zbog radova na cesti ukupno vrijeme koje mu je trebalo da dođe do slastičarnice iznosi 22.096 min. Na isti način računamo vrijeme koje je Svenu bilo potrebno da biciklom dođe do slastičarnice:

$$t_S = \frac{l(\Gamma_2)}{v_S} = \frac{9.182 \text{ km}}{23 \text{ km/h}} = 0.3992 \text{ h} = 23.952 \text{ min.}$$

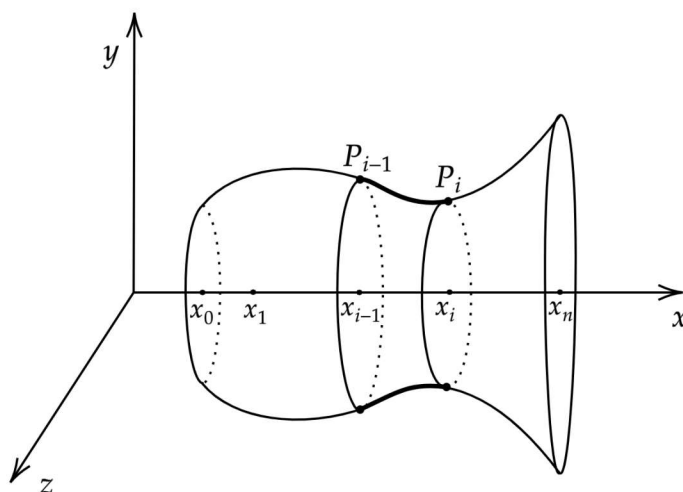
Bruno je do slastičarnice došao za 22.096 min, a Sven za 23.952 min pa zaključujemo da je Bruno bio brži.

## 2.2.2 Površina rotacijske plohe

Pretpostavimo sada da krivulja  $y = f(x) > 0$ ,  $x \in [a, b]$  rotira oko  $x$ -osi. Želimo odrediti površinu nastale rotacijske plohe. Kao i ranije, neka je s

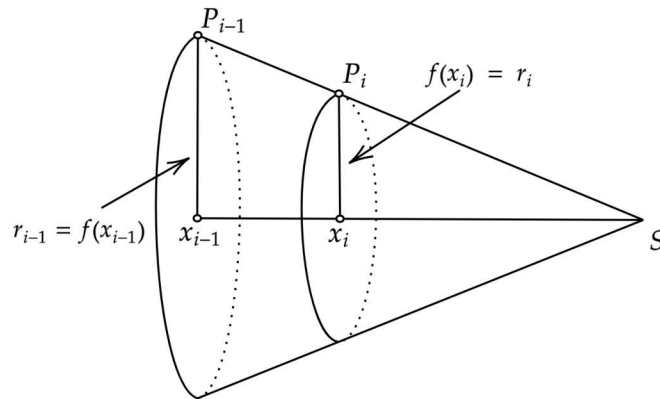
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

dana razdioba segmenta  $[a, b]$ , te neka su  $P_i(x_i, y_i)$  točke na krivulji. Ravninama kroz točke  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , okomitima na  $x$ -os, plohu podijelimo na trake (Slika 5).



Slika 5: Podjela plohe na trake.

Kako bismo aproksimirali površinu dobivenih traka, a time i površinu cijelog rotacijskog tijela, potrebno je postupiti na sličan način kao u slučaju aproksimacije duljine luka krivulje. Naime, dužine  $\overline{P_{i-1}P_i}$  linearno aproksimiraju dio krivulje  $\Gamma$  između točaka  $P_{i-1}$  i  $P_i$ . Ukoliko sada rotiramo dužine  $\overline{P_{i-1}P_i}$  oko  $x$ -osi, na isti način kao što smo rotirali početnu krivulju  $\Gamma$ , dobit ćemo tzv. *konusne trake* koje aproksimiraju trake s originalne plohe. Dakle, površinu pojedine trake možemo aproksimirati površinom odgovarajuće konusne trake, čija je izvodnica  $\overline{P_{i-1}P_i}$  kao što je prikazano na Slici 6.



Slika 6: Konusne trake.

Zbog tehničkih razloga, bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je dodatno  $f(x_i) < f(x_{i-1})$ . Uvođenjem oznaka

$$r_i := f(x_i), \quad d_i := |P_{i-1}P_i|, \quad d'_i := |P_iS|, \quad \Delta x := x_i - x_{i-1},$$

površinu  $i$ -te trake možemo izračunati kao razliku površina stožaca koji imaju zajednički vrh u točki  $S$ , a polumjeri baza jednaki su  $r_{i-1}$  i  $r_i$ . Kako je površina plašta stošca dana formulom  $A = r\pi s$ , gdje je  $r$  polumjer baze, a  $s$  izvodnica stošca, uz naše oznake površina  $i$ -te konusne trake glasi

$$A_t^i = r_{i-1} \pi (d_i + d'_i) - r_i \pi d'_i = r_{i-1} \pi d_i + d'_i \pi (r_{i-1} - r_i).$$

Iz sličnosti pravokutnih trokuta na Slici 6 možemo zaključiti da je

$$\frac{d'_i}{r_i} = \frac{d_i + d'_i}{r_{i-1}}, \quad \text{odnosno} \quad (r_{i-1} - r_i)d'_i = r_i d_i.$$

Ukoliko sada prethodni izraz uvrstimo u formulu za  $A_t^i$ , dobivamo

$$\begin{aligned} A_t^i &= r_{i-1} \pi d_i + r_i \pi d_i \\ &= d_i \pi (r_{i-1} + r_i) \\ &= |P_{i-1}P_i| \pi (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \\ &\approx 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x_i. \end{aligned}$$

Ovdje smo  $|P_{i-1}P_i|$  aproksimirali duljinom dijela luka na isti način kao u dokazu Teorema 2.2, a  $f(x_{i-1}) + f(x_i)$  s  $2f(x_i^*)$ , gdje je  $x_i^* \in \langle x_{i-1}, x_i \rangle$ . Površinu rotacijske plohe sada možemo zapisati kao

$$A \approx \sum_{i=1}^n A_t^i \approx \sum_{i=1}^n 2\pi f(x_i^*) \sqrt{1 + (f'(x_i^*))^2} \Delta x_i,$$

što predstavlja integralnu sumu funkcije  $x \mapsto 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}$  pa traženu površinu možemo računati korištenjem krivuljnog integrala prve vrste kao

$$A_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx = 2\pi \int_a^b f ds. \quad (2.19)$$

Prethodni izraz koristan nam je za računanje površine rotacijske plohe ukoliko je ona nastala rotacijom eksplicitno zadane krivulje  $y = f(x)$  oko  $x$ -osi. Analogna formula vrijedi i u slučaju kada krivulja  $x = g(y)$ ,  $y \in [c, d]$  rotira oko  $y$ -osi te je dana s

$$A_y = 2\pi \int_c^d g(y)\sqrt{1+(g'(y))^2} dy. \quad (2.20)$$

**Primjer 2.4.** Posada svemirskog broda radi na dizajniranju nove letjelice. Prema nacrtu, jedan od dijelova dobiven je rotacijom krivulje  $f(x) = \sqrt{12-x^2}$ ,  $x \in [-3, 2]$ , oko  $x$ -osi. Ako za izgradnju posada na raspolaganju ima aluminijske ploče čija je ukupna površina jednaka  $100 \text{ m}^2$ , hoće li im to biti dovoljno za izgradnju dijela letjelice?

Kako bismo provjerili hoće li posada imati dovoljno aluminijskih ploča za izgradnju dijela letjelice, trebamo odrediti površinu rotacijske plohe koja nastaje rotacijom krivulje  $f(x) = \sqrt{12-x^2}$ ,  $x \in [-3, 2]$ , oko  $x$ -osi. Možemo koristiti formulu (2.19):

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_a^b f ds = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2} dx = 2\pi \int_{-3}^2 \sqrt{12-x^2} \sqrt{1+\left(\frac{-x}{\sqrt{12-x^2}}\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-3}^2 \sqrt{(12-x^2)\left(1+\frac{x^2}{12-x^2}\right)} dx = 2\pi \int_{-3}^2 \sqrt{12-x^2+x^2} dx = 2\pi \int_{-3}^2 \sqrt{12} dx \\ &= 2\pi 2\sqrt{3}x \Big|_{-3}^2 = 4\sqrt{3}\pi(2-(-3)) = 20\sqrt{3}\pi = 108.83. \end{aligned}$$

Površina dijela letjelice iznosi  $108.83 \text{ m}^2$ , a posada na raspolaganju ima samo  $100 \text{ m}^2$  aluminijskih ploča. Dakle, neće moći izgraditi taj dio letjelice.

### 2.2.3 Masa, moment tromosti i polumjer vrtnje žice

Zamislimo da krivulja  $\Gamma$ , koja je zadana parametrizacijom

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b], \quad (2.21)$$

predstavlja položaj žice u prostoru čija je gustoća dana funkcijom  $\rho$ . Već u motivacijskom primjeru mogli smo vidjeti kako se masa zadane žice, čiji smo položaj opisali parametarski zadanom krivuljom, može dobiti integriranjem funkcije gustoće  $\rho$  po danoj krivulji  $\Gamma$  s obzirom na parametrizaciju  $\vec{r}$ , odnosno kao

$$\begin{aligned} m &= \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds = \int_a^b \rho(t) |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \int_a^b \rho(t) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt. \end{aligned} \quad (2.22)$$



U mehanici čvrstih tijela pojam koji se često spominje je **moment tromosti**. Prema [11], str. 345., on se definira kao mjera otpornosti tijela na okretanje, odnosno na rotaciju tijela oko zadane osi. Za česticu mase  $m$  čija udaljenost od osi rotacije iznosi  $R$ , moment tromosti računa se po formuli

$$I = mR^2. \quad (2.23)$$

No, kako bismo odredili moment tromosti žice čija gustoća nije konstantna u svim točkama te koja nije u svim točkama jednako udaljena od osi rotacije, potrebno je postupiti analogno kao u izvodu integralne formule za masu krivulje.

Pretpostavimo bez smanjenja općenitosti da krivulja rotira oko  $z$ -osi. Ukoliko podijelimo segment  $[a, b]$  na  $n$  manjih podsegmenta  $[t_{i-1}, t_i]$ , za  $i = 1, \dots, n$ , parametrizacija (2.21) nam daje razdiobu krivulje  $\Gamma$  na  $n$  dijelova po točkama

$$P_i(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) := (x_i, y_i, z_i).$$

Ako s  $l(P_{i-1}, P_i)$  označimo duljinu luka krivulje između točaka  $P_{i-1}$  i  $P_i$  te odaberemo proizvoljnu točku  $S_i(x_i^*, y_i^*, z_i^*)$  s toga luka, onda moment tromosti krivulje oko  $z$ -osi možemo aproksimirati izrazom

$$I_z \approx \sum_{i=1}^n ((x_i^*)^2 + (y_i^*)^2) \rho(S_i) l(P_{i-1}, P_i),$$

pri čemu izraz  $((x_i^*)^2 + (y_i^*)^2)$  predstavlja kvadrat udaljenosti točke  $S_i$  od  $z$ -osi. Uočimo analogiju s formulom (2.23) koja će vrijediti u specijalnom slučaju kada je krivulja  $\Gamma$  pravac paralelan s osi rotacije. Linearnim aproksimiranjem duljine luka  $\overline{P_{i-1}P_i}$ , prateći argumente slične onima iz potpoglavlja 2.1 te profinjenjem početne subdivizije, dolazimo do sve bolje podjele žice pa možemo pisati

$$I_z = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n ((x_i^*)^2 + (y_i^*)^2) \rho(x_i^*, y_i^*, z_i^*) l(P_{i-1}, P_i) = \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds. \quad (2.24)$$

Ovime smo moment tromosti oko  $z$ -osi izrazili pomoću krivuljnog integrala prve vrste. Analogno, moment tromosti žice obzirom na ostale koordinatne osi dan je formulama

$$I_x = \int_{\Gamma} (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds, \quad I_y = \int_{\Gamma} (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) ds.$$

Prethodno opisani moment tromosti može se, primjerice, iskoristiti u izračunu **polumjera vrtnje tijela** obzirom na os rotacije (engl. *radius of gyration*). Definira se kao udaljenost  $k$  od osi rotacije na kojoj bi se trebala nalaziti točka u kojoj je koncentrirana sva masa tijela, tako da moment tromosti ostane isti, te je dan formulom

$$k = \sqrt{\frac{I}{m}},$$

gdje je  $I$  moment tromosti tijela obzirom na os rotacije, a  $m$  masa tijela (vidi [6], str. 385.).

Dakle, kod računanja momenta tromosti znamo udaljenost krivulje od osi rotacije, dok nas kod polumjera vrtnje zanima na kojoj udaljenosti ostvarujemo unaprijed zadani moment tromosti, uz uvjet da je sva masa te krivulje koncentrirana u jednoj točki. U slučaju žice, formule za polumjer vrtnje obzirom na koordinatne osi su oblika

$$k_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}, \quad k_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}, \quad k_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}}.$$

Pogledajmo kako izgleda primjena prethodnih formula na konkretnom primjeru.

**Primjer 2.5.** Tanka žica savijena je tako da ima oblik krivulje dane parametrizacijom

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j} + 4t \vec{k}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Neka je gustoća u svakoj točki krivulje jednaka kvadratu udaljenosti te točke do ishodišta. Ako žica rotira oko z-osi odredite masu, moment tromosti i polumjer vrtnje te žice.

Znamo da se u prostoru udaljenost točke do ishodišta računa po formuli  $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Koristeći tu činjenicu, gustoću zadane krivulje možemo zapisati kao  $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , odnosno  $\rho(t) = 4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t + 16t^2 = 4 + 16t^2$ , što odgovara kvadratu udaljenosti proizvoljne točke krivulje do ishodišta. Masu žice računamo po formuli (2.22):

$$\begin{aligned} m &= \int_{\Gamma} \rho(x, y, z) ds = \int_0^{2\pi} (4 + 16t^2) \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 16} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{20}(4 + 16t^2) dt \\ &= 2\sqrt{5} \left( 4t + 16 \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 2\sqrt{5} \left( 8\pi + 128 \frac{\pi^3}{3} \right) = 16\sqrt{5} \left( \pi + 16 \frac{\pi^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Žica rotira oko z-osi pa koristimo formulu (2.24) za računanje momenta tromosti obzirom na z-os:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_{\Gamma} (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) ds = \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t) (4 + 16t^2) \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t + 16} dt \\ &= \int_0^{2\pi} 4\sqrt{20}(4 + 16t^2) dt = 8\sqrt{5} \left( 4t + 16 \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^{2\pi} = 8\sqrt{5} \left( 8\pi + 128 \frac{\pi^3}{3} \right) = 64\sqrt{5} \left( \pi + 16 \frac{\pi^3}{3} \right). \end{aligned}$$

Preostalo je izračunati polumjer vrtnje obzirom na z-os:

$$k_z = \sqrt{\frac{I_z}{m}} = \sqrt{\frac{64\sqrt{5} \left( \pi + 16 \frac{\pi^3}{3} \right)}{16\sqrt{5} \left( \pi + 16 \frac{\pi^3}{3} \right)}} = \sqrt{\frac{64}{16}} = \sqrt{4} = 2.$$

### 3 Krivuljni integral druge vrste

U nastavku rada baviti ćemo se krivuljnim integralom druge vrste. Kao i u prethodnom poglavlju, navest ćemo motivaciju, njegovu definiciju te neka bitna svojstva i karakterizacije. Nakon toga ćemo proučiti neke primjene krivuljnog integrala druge vrste.

#### 3.1 Definicija i svojstva

Kao u slučaju krivuljnog integrala prve vrste, i ovdje ćemo definiciju integrala od interesa najprije motivirati fizikalnim primjerom. Neka je  $\vec{\Gamma}$  orijentirani Jordanov luk u prostoru s početnom točkom  $A$  i završnom točkom  $B$ , te neka je

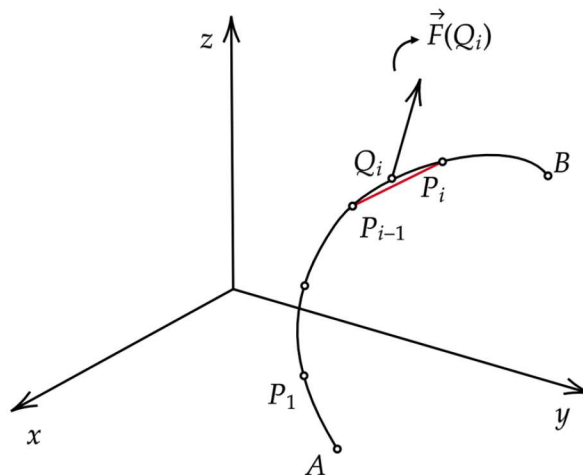
$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in [a, b],$$

njegova glatka parametrizacija, pri čemu je  $\vec{r}(a) = A$  i  $\vec{r}(b) = B$ . Neka je  $\vec{F} : \vec{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^3$  sila koja djeluje u svakoj točki luka  $\vec{\Gamma}$ . Želimo izračunati rad sile  $\vec{F}$  po luku  $\vec{\Gamma}$ . U slučaju kada je sila konstantna, a put pravocrtan i određen vektorom  $\vec{s}$ , rad sile duž puta računamo kao skalarni produkt  $W = \vec{F} \cdot \vec{s}$ . Kako bismo varijantu prethodne formule mogli koristiti i u slučaju kada je put sile određen lukom  $\vec{\Gamma}$ , za početak podijelimo krivulju  $\vec{\Gamma}$  po točkama:

$$A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B,$$

pri čemu je  $P_i = \vec{r}(t_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Ako silu  $\vec{F}$  na luku  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , aproksimiramo njezinom vrijednosti u proizvoljnoj točki  $Q_i$  tog luka, a sam luk  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$  s vektorom pripadne spojnice  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ , onda rad sile  $\vec{F}$  duž cijele krivulje  $\vec{\Gamma}$  možemo aproksimirati s

$$W \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(Q_i) \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i} = \sum_{i=1}^n \vec{F}(Q_i) \cdot (\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})). \quad (3.1)$$



Slika 7: Aproksimacija krivulje  $\vec{\Gamma}$ .

Sada primjenom Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti dobivamo

$$\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1}) = \vec{r}'(u_i)(t_i - t_{i-1}),$$



gdje je  $u_i \in [t_{i-1}, t_i]$  vrijednost za koju je  $\vec{r}(u_i) = Q_i$ . Uvrštavanjem prethodne jednakosti u (3.1), dobivamo

$$W \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(\vec{r}(u_i)) \cdot \vec{r}'(u_i)(t_i - t_{i-1}), \quad (3.2)$$

što predstavlja integralnu sumu za funkciju  $t \mapsto \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$ . Time smo dobili da je traženi rad sile  $\vec{F}$  duž krivulje  $\widehat{\Gamma}$  dan s

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt. \quad (3.3)$$

**Definicija 3.1.** Neka je  $\widehat{\Gamma}$  orijentiran Jordanov luk od točke  $A = \vec{r}(a)$  do točke  $B = \vec{r}(b)$  gdje je  $\vec{r} : [a, b] \rightarrow \widehat{\Gamma}$  njegova parametrizacija. Ako je  $\vec{F} : \widehat{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^3$  takva da je funkcija  $t \mapsto \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$  Riemann integrabilna na segmentu  $[a, b]$  onda broj

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \quad (3.4)$$

nazivamo **krivuljni integral druge vrste** vektorskog polja  $\vec{F}$  duž luka  $\widehat{\Gamma}$  i označavamo s

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (3.5)$$

Ako je krivulja  $\widehat{\Gamma}$  zatvorena, onda umjesto (3.5) pišemo

$$\oint_{\widehat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

i taj se broj naziva **cirkulacija** vektorskog polja  $\vec{F}$  po krivulji  $\widehat{\Gamma}$ .

**Napomena 3.1.** Ako je krivulja  $\widehat{\Gamma}$  dobivena na način da se početak Jordanovog luka  $\widehat{\Gamma}_2$  nadovezuje na kraj Jordanovog luka  $\widehat{\Gamma}_1$ , itd., tako da je  $\widehat{\Gamma} = \widehat{\Gamma}_1 \cup \widehat{\Gamma}_2 \cup \dots \cup \widehat{\Gamma}_k$ , onda krivuljni integral vektorskog polja  $\vec{F}$  duž luka  $\widehat{\Gamma}$  računamo po formuli

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\widehat{\Gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\widehat{\Gamma}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \dots + \int_{\widehat{\Gamma}_k} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

pri čemu su svi lukovi  $\widehat{\Gamma}_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  iste orijentacije.

U prethodnom poglavlju pokazali smo kako parametrizacija krivulje  $\Gamma$  ne mora biti jedinstvena, ali da to ne utječe na vrijednost krivuljnog integrala prve vrste po toj krivulji. Analogan rezultat vrijedi i za krivuljni integral druge vrste te se temelji na sličnoj tvrdnji da su dvije različite parametrizacije orijentirane krivulje  $\widehat{\Gamma}$  povezane bijektivnim preslikavanjem.

**Lema 3.1.** Neka je  $\widehat{\Gamma}$  orijentirani Jordanov luk i

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(t), & t &\in [a, b], & a < b \\ \vec{R} &= \vec{R}(u), & u &\in [c, d], & c < d \end{aligned}$$



bilo koje dvije parametrizacije luka  $\widehat{\Gamma}$ . Pretpostavimo da je  $u = \omega(t)$ ,  $t \in [a, b]$ , takav da je  $\omega(a) = c$  i  $\omega(b) = d$  te neka je  $\omega'(t) > 0$ ,  $t \in [a, b]$ . Tada vrijedi

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_c^d \vec{F}(\vec{R}(u)) \cdot \vec{R}'(u) du,$$

za svako vektorsko polje  $\vec{F}$ .

*Dokaz.* Za dokaz vidjeti [7], Teorem 4.2., str. 144. □

Ranije smo vidjeli kako računanje krivuljnog integrala prve vrste ovisi o načinu na koji je zadana krivulja  $\Gamma$ . Ista stvar vrijedi i za krivuljni integral druge vrste, tj. računanje će ovisiti o načinu zadavanja orijentirane krivulje  $\widehat{\Gamma}$ .

- a) Neka je krivulja  $\widehat{\Gamma}$  zadana s  $y = \psi(x)$ ,  $x \in [a, b]$ . Ako uzmemo  $t := x$  kao parametar onda je s

$$\vec{r}(t) = t\vec{i} + \psi(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b]$$

dana jedna parametrizacija krivulje  $\widehat{\Gamma}$ . Ako je vektorsko polje  $\vec{F}$  zadano po komponentama kao

$$\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j},$$

onda vrijedi

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b [f_1(t, \psi(t))\vec{i} + f_2(t, \psi(t))\vec{j}] \cdot [\vec{i} + \psi'(t)\vec{j}] dt.$$

Sada računanjem skalarnog produkta dobivamo

$$\int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b f_1(t, \psi(t)) dt + f_2(t, \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (3.6)$$

- b) Neka je krivulja  $\widehat{\Gamma}$  zadana parametarski s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b]$$

pri čemu je

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b],$$

njena derivacija. Ako je vektorsko polje  $\vec{F}$  zadano po komponentama s

$$\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j},$$

tada krivuljni integral druge vrste vektorskog polja  $\vec{F}$  duž orijentirane krivulje  $\widehat{\Gamma}$  računamo kao

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b [f_1(x(t), y(t))\vec{i} + f_2(x(t), y(t))\vec{j}] \cdot [x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}] dt \\ &= \int_a^b [f_1(x(t), y(t)) x'(t) + f_2(x(t), y(t)) y'(t)] dt = \int_{\widehat{\Gamma}} f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Primijetimo da zbog  $x = x(t)$  i  $y = y(t)$  slijedi  $dx = x'(t) dt$  i  $dy = y'(t) dt$ , što je korišteno u izvodu prethodnog izraza.

Prethodnu formulu možemo općenitije zapisati za slučaj kada imamo prostornu krivulju parametriziranu s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b],$$

i njenu derivaciju

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + z'(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b].$$

Tada vrijedi

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\Gamma}} f_1(x, y, z) dx + f_2(x, y, z) dy + f_3(x, y, z) dz. \quad (3.8)$$

Uočimo kako uvjet  $\omega'(t) > 0$ ,  $t \in [a, b]$  u iskazu Leme 3.1 ukazuje na to da su obje parametrizacije krivulje  $\vec{\Gamma}$  iste orijentacije. No, ukoliko je  $\omega'(t) < 0$ ,  $t \in [a, b]$ , onda prema [10] imamo dvije parametrizacije iste krivulje, ali suprotne orijentacije, što nas dovodi do sljedećeg rezultata.

**Lema 3.2.** *Krivuljni integral druge vrste vektorskog polja  $\vec{F}$  ovisi o smjeru integriranja po krivulji  $\vec{\Gamma}$ , tj.*

$$\int_{-\vec{\Gamma}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{s} = - \int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{s}.$$

*Dokaz.* Neka je  $\vec{\Gamma}$  orijentiran Jordanov luk čija je parametrizacija dana s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b].$$

Tada prema [7], luk  $-\vec{\Gamma}$  suprotne orijentacije od  $\vec{\Gamma}$  možemo parametrizirati s

$$\vec{R}(t) = \vec{r}(a+b-t) = x(a+b-t)\vec{i} + y(a+b-t)\vec{j}, \quad t \in [a, b].$$

Neka je  $\vec{F} : \vec{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}^2$  vektorsko polje zadano po komponentama s  $\vec{F}(x, y) = f_1(x, y)\vec{i} + f_2(x, y)\vec{j}$ , pri čemu su  $f_1, f_2 \in C^1(\vec{\Gamma})$ . Budući da su krivulje  $\vec{\Gamma}$  i  $-\vec{\Gamma}$  zadane parametarski, korištenjem definicije krivuljnog integrala druge vrste imamo

$$\int_{-\vec{\Gamma}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{R}(t)) \cdot \vec{R}'(t) dt.$$

Uvrštavanjem parametrizacije dobivamo

$$\int_a^b [f_1(x(a+b-t), y(a+b-t))\vec{i} + f_2(x(a+b-t), y(a+b-t))\vec{j}] \cdot [-x'(a+b-t)\vec{i} - y'(a+b-t)\vec{j}] dt.$$

Računanjem skalarnog produkta i korištenjem supstitucije  $u = a + b - t$  slijedi

$$\begin{aligned} & \int_b^a [f_1(x(u), y(u))(-x'(u)) + f_2(x(u), y(u))(-y'(u))] (-du) \\ &= - \int_a^b [f_1(x(u), y(u))x'(u) + f_2(x(u), y(u))y'(u)] du \\ &= - \left( \int_a^b f_1(x, y) dx + f_2(x, y) dy \right) = - \int_{\vec{\Gamma}} \vec{F}(x, y) \cdot d\vec{s}. \end{aligned}$$

□

U Lemi 2.3 vidjeli smo kako Riemannov integral prenosi neka svoja svojstva i na krivuljni integral prve vrste. Kako je i krivuljni integral druge vrste definiran na sličan način, možemo iskazati identičan rezultat idućom lemom.

**Lema 3.3.** *Neka su  $\vec{F}$  i  $\vec{G}$  dva neprekidna vektorska polja čije domene uključuju orijentiranu krivulju  $\vec{\Gamma}$  koja je podijeljena na dvije krivulje  $\vec{\Gamma}_1$  i  $\vec{\Gamma}_2$  iste orijentacije, pri čemu je  $\vec{\Gamma} = \vec{\Gamma}_1 \cup \vec{\Gamma}_2$  i  $\vec{\Gamma}_1 \cap \vec{\Gamma}_2 = \emptyset$ , te neka je  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Tada vrijedi:*

$$\int_{\vec{\Gamma}} (\alpha \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \alpha \int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}, \quad (\text{homogenost})$$

$$\int_{\vec{\Gamma}} (\vec{F} + \vec{G}) \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{\Gamma}} \vec{G} \cdot d\vec{s}, \quad (\text{aditivnost})$$

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (\text{aditivnost po području integracije}).$$

*Dokaz.* Dokaz ove leme sličan je dokazu Leme 2.3 pa ga nećemo navoditi. □

Kao što smo mogli vidjeti, krivuljni integrali prve i druge vrste dijele mnoga zajednička svojstva poput neovisnosti o parametrizaciji i linearnosti, te ih čak možemo dovesti u međusobnu vezu. Označimo s  $\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$  jedinični tangencijalni vektor orijentirane krivulje  $\vec{\Gamma}$  za  $t \in [a, b]$ , gdje je  $\vec{r}$  njena parametrizacija. Slijedi

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{T}(t) |\vec{r}'(t)| dt.$$

Prema Definiciji 2.1, prethodni integral jednak je krivuljnom integralu prve vrste skalarnog polja  $\vec{F} \cdot \vec{T}$ , odnosno vrijedi

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\Gamma}} (\vec{F} \cdot \vec{T}) ds.$$

**Primjer 3.1.** *Izračunajte*

$$\int_{\vec{\Gamma}} y dx + x dy,$$

gdje je  $\vec{\Gamma}$  gornja polovina pozitivno orijentirane kružnice  $x^2 + y^2 = 4$ .

Za početak parametriziramo kružnicu s

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

iz čega slijedi da je

$$\vec{r}'(t) = -2 \sin t \vec{i} + 2 \cos t \vec{j}.$$



Također, uočimo da je s  $\vec{F}(x, y) = y\vec{i} + x\vec{j}$  dano vektorsko polje. Budući da se radi o gornjoj polovini pozitivno orijentirane kružnice imamo da je  $t \in [0, \pi]$  te slijedi

$$\begin{aligned} I &= \int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_0^\pi \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^\pi [2 \sin t (-2 \sin t) + 2 \cos t (2 \cos t)] dt \\ &= 4 \int_0^\pi (-\sin^2 t + \cos^2 t) dt. \end{aligned}$$

Koristeći identitet  $\cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t)$  i supstituciju  $u = 2t$  dobivamo

$$I = 4 \int_0^\pi \cos(2t) dt = 4 \int_0^{2\pi} \frac{\cos u}{2} du = 2 \sin u \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

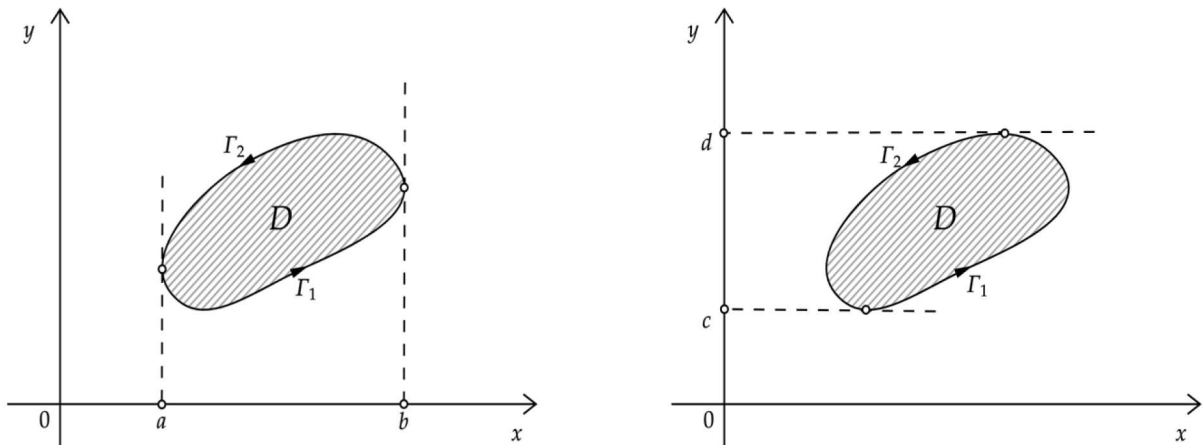
Ponekad se prilikom računanja krivuljnog integrala druge vrste po zatvorenom Jordanovom luku može pojaviti komplicirani izraz. Idući teorem daje vezu krivuljnog integrala druge vrste po konturi s dvostrukim integralom po području omeđenom tom konturom.

**Teorem 3.1 (Greenov teorem).** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren skup koji sadrži pozitivno orijentiranu konturu  $\vec{\Gamma}$  zajedno s njenim unutrašnjim područjem  $D$ , odnosno  $\vec{\Gamma} = \partial D$ . Tada za proizvoljne funkcije  $M, N \in C^1(\Omega)$  vrijedi

$$\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\partial D} M dx + N dy. \quad (3.9)$$

*Dokaz.* Teorem ćemo dokazati za poseban slučaj kada je  $D$  zatvoreno i ograničeno područje takvo da svaka paralela s  $y$ -osi, odnosno  $x$ -osi siječe rub  $\vec{\Gamma} = \partial D$  u najviše dvije točke kao što je prikazano na Slici 8. Označimo s  $a$  i  $b$  brojeve takve da je skup  $D$  sadržan u pruzi između paralela s  $y$ -osi koje prolaze točkama  $a$  i  $b$ , tj. vrijedi  $D \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}$  (Slika 8, lijevo). Neka su  $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije koje su po dijelovima klase  $C^1$  na  $[a, b]$  takve da je skup  $D$  zadan na sljedeći način:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$



Slika 8: Područje  $D$  - apscise  $a$  i  $b$  (lijevo), područje  $D$  - ordinate  $c$  i  $d$  (desno).

S  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  označimo grafove funkcija  $f_1$  i  $f_2$ , redom, takve da je  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Krivulju  $\Gamma_1$  orijentiramo od točke  $(a, f_1(a))$  do točke  $(b, f_1(b))$ , a krivulju  $\Gamma_2$  orijentiramo od točke  $(b, f_2(b))$  do točke  $(a, f_2(a))$ , te ih označimo s  $\overrightarrow{\Gamma_1}$  i  $\overleftarrow{\Gamma_2}$ , redom, kao što je prikazano na Slici 8 (lijevo).

Pretpostavka da je funkcija  $M$  klase  $C^1$  na otvorenom skupu  $\Omega$  koji sadrži skup  $D$  osigurava neprekidnost funkcije  $\frac{\partial M}{\partial y}$  na  $\Omega$ . Tada vrijedi da je

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy \right) dx. \quad (3.10)$$

Koristeći Newton-Leibnizovu formulu dobivamo

$$\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dy = M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x)),$$

te (3.10) postaje

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dx dy = \int_a^b [M(x, f_2(x)) - M(x, f_1(x))] dx = \int_a^b M(x, f_2(x)) dx + \int_b^a M(x, f_1(x)) dx.$$

Uočimo sličnost s izrazom (3.6) za integral vektorske funkcije  $\vec{F}(x, y) = M(x, y)\vec{i}$  duž krivulja  $\overrightarrow{\Gamma_1}$  i  $\overleftarrow{\Gamma_2}$  zadanih eksplicitno s  $y = f_1(x)$  i  $y = f_2(x)$ , redom, pomoću kojeg dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \int_a^b M(x, f_2(x)) dx &= \int_{\overleftarrow{\Gamma_2}} M(x, y) dx + 0 dy = - \int_{\overrightarrow{\Gamma_2}} M(x, y) dx, \\ \int_b^a M(x, f_1(x)) dx &= \int_{\overrightarrow{\Gamma_1}} M(x, y) dx + 0 dy = - \int_{\overleftarrow{\Gamma_1}} M(x, y) dx. \end{aligned}$$

Sada slijedi

$$\iint_D \frac{\partial M}{\partial y}(x, y) dx dy = - \int_{\overrightarrow{\Gamma_1}} M(x, y) dx - \int_{\overleftarrow{\Gamma_2}} M(x, y) dx = - \int_{\partial D} M(x, y) dx. \quad (3.11)$$

Neka su  $c$  i  $d$  brojevi takvi da je skup  $D$  sadržan u pruzi između paralela s  $x$ -osi koje prolaze točkama  $c$  i  $d$ , tj. vrijedi  $D \subseteq \mathbb{R} \times [c, d]$  (Slika 8, desno). Neka su  $g_1, g_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije koje su po dijelovima klase  $C^1$  na  $[c, d]$  takve da je skup  $D$  zadan na sljedeći način:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}.$$

Sada promatramo neprekidnu funkciju  $\frac{\partial N}{\partial x}$  na  $\Omega$  te umjesto (3.10) imamo formulu

$$\iint_D \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_c^d \left( \int_{g_1(y)}^{g_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx \right) dy, \quad (3.12)$$

iz koje analognim postupkom lako dobivamo

$$\iint_D \frac{\partial N}{\partial x}(x, y) dx dy = \int_{\partial D} N(x, y) dy. \quad (3.13)$$

Oduzmemo li (3.11) i (3.13) dobivamo

$$\iint_D \left( \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dx dy = \int_{\partial D} M dx + N dy, \quad (3.14)$$

što odgovara formuli (3.9). □

**Primjer 3.2.** *Primjenom Greenovog teorema izračunajte*

$$I = \oint_{\Gamma} -x^2 y dx + xy^2 dy,$$

pri čemu je  $\Gamma$  pozitivno orijentirana kružnica  $x^2 + y^2 = R^2$ .

Neka je  $M(x, y) = -x^2 y$  i  $N(x, y) = xy^2$ . Koristeći formulu (3.9) dobivamo

$$I = \iint_D (y^2 + x^2) dx dy,$$

pri čemu je  $D$  područje unutar kružnice  $x^2 + y^2 = R^2$ . Prelaskom na polarne koordinate

$$\begin{aligned} x &= R \cos \varphi, & \varphi &\in [0, 2\pi] \\ y &= R \sin \varphi, & dx dy &= r dr d\varphi, \end{aligned}$$

lako slijedi

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{R^4}{4} = \frac{R^4 \pi}{2}.$$

Jedno od najvažnijih svojstava krivuljnog integrala druge vrste je neovisnost o putu integracije, koje vrijedi za posebnu vrstu vektorskih polja čiju ćemo definiciju i karakterizacije ukratko navesti.

**Definicija 3.2.** Neka je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  otvoren skup i  $\vec{F} \in C(\Omega; \mathbb{R}^3)$ . Za vektorsko polje  $\vec{F}$  kažemo da je **potencijalno (konzervativno)** ukoliko postoji skalarno polje  $\Phi \in C^1(\Omega)$  takvo da je

$$(\forall P \in \Omega) \quad \vec{F}(P) = -\nabla \Phi(P). \quad (3.15)$$

Polje  $\Phi$  u tom slučaju nazivamo **potencijal** polja  $\vec{F}$ .

**Korolar 3.1.** *Vektorsko polje  $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  je potencijalno ako i samo ako je cirkulacija polja  $\vec{F}$  po svakoj konturi  $\Gamma \subseteq \Omega$  jednaka nula.*

*Dokaz.* Za dokaz vidjeti [14], Teorem 2., str. 1163. □

**Teorem 3.2.** *Neka je  $\vec{F} \in C(\Omega; \mathbb{R}^3)$ , gdje je  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  otvoren i povezan skup. Krivuljni integral druge vrste vektorskog polja  $\vec{F}$  ne ovisi o putu integracije ako i samo ako je polje  $\vec{F}$  potencijalno.*



*Dokaz.* Neka je polje  $\vec{F}$  potencijalno. Tada postoji skalarno polje  $\Phi$  takvo da na  $\Omega$  vrijedi (3.15). Pokažimo da krivuljni integral druge vrste polja  $\vec{F}$  ne ovisi o putu integracije po orijentiranoj krivulji  $\vec{\Gamma}$  zadanoj parametarski s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}, \quad t \in [a, b]$$

od točke  $\vec{r}(a) = A$  do točke  $\vec{r}(b) = B$ . Slijedi da je

$$\begin{aligned} \int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_a^b -\nabla\Phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= - \int_a^b \left[ \frac{\partial\Phi}{\partial x}(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \frac{\partial\Phi}{\partial z}(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \right] dt \\ &= - \int_a^b \frac{d}{dt} [\Phi(x(t), y(t), z(t))] dt = -(\Phi(\vec{r}(b)) - \Phi(\vec{r}(a))) = \Phi(A) - \Phi(B). \end{aligned}$$

Očito vrijednost zadanog integrala ovisi samo o početnoj i završnoj točki orijentirane krivulje  $\vec{\Gamma}$ , iz čega slijedi da krivuljni integral druge vrste potencijalnog polja ne ovisi o putu integracije.

Pokažimo sada da neovisnost krivuljnog integrala druge vrste o putu integracije povlači da je podintegralna funkcija potencijalno polje. Neka je dana vektorska funkcija  $\vec{F}$  izrazom

$$F(x, y, z) = f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k}.$$

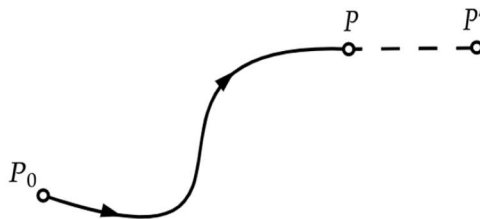
Potrebno je pokazati da postoji funkcija  $\Phi$  takva da je  $F(x, y, z) = -\nabla\Phi(x, y, z)$ . Neka su  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  i  $P(x, y, z)$  proizvoljne točke u skupu  $\Omega$ . Kako je  $\Omega$  povezan skup, postoje po dijelovima glatke krivulje  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  u  $\Omega$  koje povezuju točke  $P_0$  i  $P$  te ih orijentiramo od  $P_0$  do  $P$ . Budući da za dano polje  $\vec{F}$  pretpostavljamo neovisnost krivuljnog integrala druge vrste o putu integracije, vrijedi

$$\int_{\vec{\Gamma}_1} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\vec{\Gamma}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Definirajmo funkciju  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tako da je

$$\Phi(x, y, z) := - \int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s},$$

gdje je  $\vec{\Gamma}$  proizvoljna po dijelovima glatka krivulja orijentirana od  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  do  $P(x, y, z)$ . Drugim riječima, funkcija  $\Phi$  svakoj točki  $P \in \Omega$  pridružuje krivuljni integral druge vrste vektorskog polja  $\vec{F}$  od točke  $P_0$  do točke  $P$ . Kako vrijednost tog integrala ne ovisi o putu po kojem integriramo, funkcija  $\Phi$  je dobro definirana na skupu  $\Omega$ .



Slika 9: Orijetirana po dijelovima glatka krivulja  $\vec{\Gamma}$ .



Neka je za proizvoljno mali  $\Delta x$  dana točka  $P'(x + \Delta x, y, z)$ . Budući da je skup  $\Omega$  otvoren, orijentirana krivulja  $\overrightarrow{PP'}$  se nalazi u skupu  $\Omega$ , pa je orijentirana po dijelovima glatka krivulja  $\overrightarrow{\Gamma'} = \overrightarrow{\Gamma} \cup \overrightarrow{PP'}$  također sadržana u  $\Omega$  (Slika 9). Tada vrijedi

$$\Phi(x + \Delta x, y, z) = - \int_{\overrightarrow{\Gamma'}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_{\overrightarrow{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s} - \int_{\overrightarrow{PP'}} \vec{F} \cdot d\vec{s}.$$

Budući da je vrijednost  $\Delta x$  proizvoljno mala, orijentiranu krivulju  $\overrightarrow{PP'}$  možemo linearno aproksimirati vektorom  $\overrightarrow{PP'}$  čija je parametrizacija dana s  $\vec{r}(t) = t\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ,  $t \in [x, x + \Delta x]$ , s derivacijom  $\vec{r}'(t) = \vec{i}$ ,  $t \in [x, x + \Delta x]$ . Sada slijedi

$$\begin{aligned} \frac{\Phi(x + \Delta x, y, z) - \Phi(x, y, z)}{\Delta x} &= - \frac{1}{\Delta x} \int_{\overrightarrow{PP'}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= - \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} \left[ f_1(t, y, z)\vec{i} + f_2(t, y, z)\vec{j} + f_3(t, y, z)\vec{k} \right] \cdot \vec{i} dt \\ &= - \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f_1(t, y, z) dt. \end{aligned}$$

Kako je polje  $\vec{F}$  neprekidno, funkcija  $t \mapsto f_1(t, y, z)$ ,  $t \in [x, x + \Delta x]$  je također neprekidna pa je

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} f_1(t, y, z) dt = f_1(x, y, z).$$

Tada je

$$f_1(x, y, z) = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x, y, z) - \Phi(x, y, z)}{\Delta x} = - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, z).$$

Na sličan način dobivamo

$$f_2(x, y, z) = - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, z), \quad f_3(x, y, z) = - \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z).$$

Tada je

$$\begin{aligned} \vec{F}(x, y, z) &= f_1(x, y, z)\vec{i} + f_2(x, y, z)\vec{j} + f_3(x, y, z)\vec{k} \\ &= - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x, y, z)\vec{i} - \frac{\partial \Phi}{\partial y}(x, y, z)\vec{j} - \frac{\partial \Phi}{\partial z}(x, y, z)\vec{k}, \end{aligned}$$

odnosno  $\vec{F}(x, y, z) = -\nabla\Phi(x, y, z)$  što je trebalo pokazati. □

### 3.2 Primjene krivuljnog integrala druge vrste

Slično kao i kod krivuljnog integrala prve vrste, uvodna motivacija za krivuljni integral druge vrste također dolazi iz fizike kod računanja rada duž nekog proizvoljnog puta. Osim računanja rada postoje još mnoge primjene krivuljnog integrala druge vrste, a u ovom radu detaljnije ćemo proučiti površinu omeđenog područja, elektromotornu silu i Amperov zakon.

### 3.2.1 Rad sile

Neka je  $\vec{F}$  sila koja djeluje u svakoj točki orijentirane krivulje  $\vec{\Gamma}$  parametrizirane s

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \quad t \in [a, b],$$

pri čemu su  $\vec{r}(a) = A$  i  $\vec{r}(b) = B$  rubne točke te krivulje. Zamislimo da promatramo česticu koja se giba duž krivulje  $\vec{\Gamma}$  dok na nju djeluje sila  $\vec{F}$ . U uvodnoj motivaciji pokazali smo kako podjelom krivulje  $\vec{\Gamma}$  po točkama

$$A = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = B,$$

pri čemu je  $P_i = \vec{r}(t_i)$ , rad sile  $\vec{F}$  duž cijele krivulje  $\vec{\Gamma}$  možemo aproksimirati s

$$W \approx \sum_{i=1}^n \vec{F}(Q_i) \cdot \overrightarrow{P_{i-1}P_i},$$

gdje je  $Q_i$  proizvoljna točka luka  $\overrightarrow{P_{i-1}P_i}$ . Daljnjim razmatranjima u konačnici smo pokazali da je rad sile  $\vec{F}$  duž krivulje  $\vec{\Gamma}$  jednak

$$W = \int_{\vec{\Gamma}} \vec{F} \cdot d\vec{s}. \quad (3.16)$$

**Primjer 3.3.** Motivirana nedavno održanim Olimpijskim igrama Marta je odlučila sudjelovati na maratonu. Kako bi se što bolje pripremila nekoliko puta tjedno trči stazom koja se može opisati krivuljom  $\vec{\Gamma}$  parametriziranom s  $\vec{r}(t) = \cos t \vec{i} + \sin t \vec{j}$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Jednom prilikom na dijelu staze od 0 do  $\pi$  puhao je vjetar čija je sila dana s  $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y) \vec{i} + (x - y^2) \vec{j}$ . Koliki rad je Marta obavila na tom dijelu staze?

Za početak odredimo derivaciju parametrizacije zadane krivulje  $\vec{\Gamma}$ . Imamo

$$\vec{r}'(t) = -\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Koristeći formulu (3.16) izračunajmo rad koji je Marta obavila kao

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\pi \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^\pi [(\cos^2 t - \sin t) \vec{i} + (\cos t - \sin^2 t) \vec{j}] \cdot (-\sin t \vec{i} + \cos t \vec{j}) dt \\ &= \int_0^\pi [(\cos^2 t - \sin t)(-\sin t) + (\cos t - \sin^2 t)(\cos t)] dt = \int_0^\pi (-\sin t \cos^2 t + 1 - \cos t \sin^2 t) dt \\ &= \int_0^\pi dt - \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt - \int_0^\pi \cos t \sin^2 t dt = \pi - \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt - \int_0^\pi \cos t \sin^2 t dt. \end{aligned}$$

Neka je  $I_1 = \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt$ , te neka je  $I_2 = \int_0^\pi \cos t \sin^2 t dt$ . Integral  $I_1$  izračunat ćemo koristeći supstituciju  $\cos t = u$ :

$$I_1 = \int_0^\pi \sin t \cos^2 t dt = \int_1^{-1} -u^2 du = \int_{-1}^1 u^2 du = \frac{u^3}{3} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ako stavimo  $\sin t = u$  integral  $I_2$  računamo kao

$$I_2 = \int_0^{\pi} \cos t \sin^2 t \, dt = \int_0^0 u^2 \, du = 0.$$

Konačno za ukupan rad koji je Marta obavila dobivamo

$$W = \pi - \frac{2}{3} = \frac{3\pi - 2}{3} J.$$

### 3.2.2 Površina omeđenog područja

Kao motivaciju za uvođenje Greenovog teorema spomenuli smo mogućnost pojavljivanja kompliciranih izraza prilikom izračunavanja krivuljnog integrala druge vrste. U samom dokazu pokazali smo kako vrijedi jednakost (3.9), odnosno da je krivuljni integral druge vrste duž pozitivno orijentirane konture  $\vec{\Gamma}$  jednak dvostrukom integralu po unutrašnjem području  $D$  konture  $\vec{\Gamma}$ .

Ipak, nekada može vrijediti i obratna situacija, tj. da se komplicirani izraz pojavi prilikom računanja dvostrukog integrala. Jedna od takvih situacija je upravo računanje površine područja  $D$  omeđenog konturom  $\vec{\Gamma}$ . Kako bismo izveli formulu za računanje površine područja  $D$ , iskoristit ćemo Teorem 3.1. Neka je  $\vec{\Gamma}$  pozitivno orijentirana kontura koja zatvara područje  $D$ . Prema [1], str. 383., površinu područja  $D$  možemo računati po formuli

$$A(D) = \iint_D dx dy. \quad (3.17)$$

Uočimo da je formula (3.17) jednaka lijevoj strani jednakosti (3.9) za slučaj kada je

$$\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 1. \quad (3.18)$$

Želimo odabrati funkcije  $M$  i  $N$  tako da vrijedi (3.18). Prema [13], str. 1111., postoji nekoliko mogućnosti, no odaberimo da je

$$N(x, y) = \frac{1}{2}x, \quad M(x, y) = -\frac{1}{2}y.$$

Uvrstimo li funkcije  $M$  i  $N$  u (3.17) te iskoristimo Greenov teorem, površinu područja  $D$  možemo zapisati u obliku

$$A(D) = \iint_D dx dy = \iint_D \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) dx dy = \oint_{\vec{\Gamma}} -\frac{1}{2}y \, dx + \frac{1}{2}x \, dy = \frac{1}{2} \oint_{\vec{\Gamma}} x \, dy - y \, dx.$$

Dakle, površinu područja  $D$  možemo računati pomoću krivuljnog integrala druge vrste po formuli

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\vec{\Gamma}} x \, dy - y \, dx. \quad (3.19)$$

Formula (3.19) vrijedi i u slučaju ako je kontura  $\vec{\Gamma}$  zadana parametarski s

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b],$$



pri čemu je

$$\vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j}, \quad t \in [a, b]$$

derivacija funkcije  $\vec{r}(t)$ . Tada je

$$A(D) = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} [-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)] dt. \quad (3.20)$$

**Primjer 3.4.** *Odredite površinu područja  $D$  omeđenog pozitivno orijentiranom elipsom  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ .*

*Najprije zapišimo parametrizaciju dane elipse i njezinu derivaciju kao*

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= 2 \cos t \vec{i} + 4 \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi], \\ \vec{r}'(t) &= -2 \sin t \vec{i} + 4 \cos t \vec{j}. \end{aligned}$$

*Koristeći formulu (3.20) računamo površinu područja  $D$ :*

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} [-y(t)x'(t) + x(t)y'(t)] dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(-4 \sin t)(-2 \sin t) + (2 \cos t)(4 \cos t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [8 \sin^2 t + 8 \cos^2 t] dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 8 dt = 8\pi. \end{aligned}$$

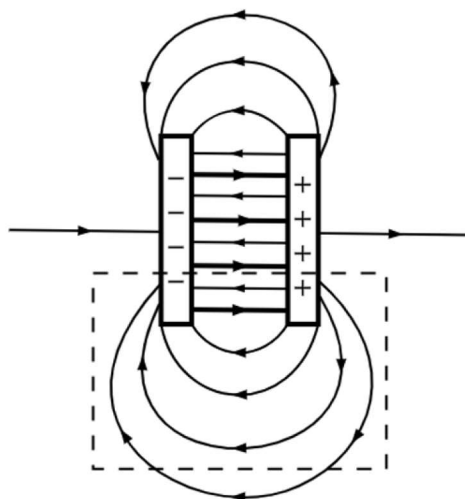
### 3.2.3 Elektromotorna sila

Zamislimo da imamo jednostavan električni strujni krug u kojem je baterija električnim vodičima povezana sa žaruljom. Kada se električni vodiči priključe na polove baterije njima protječe struja i žarulja svijetli. Kako bi žarulja mogla neprestano svijetliti, električnim vodičem mora teći stalna električna struja. Prema [5], ako želimo održati struju u električnom vodiču u njemu mora postojati električno polje, odnosno na njegovim krajevima mora postojati razlika napona. Također, za pokretanje struje u električnom vodiču važno je neprestano dovoditi energiju. Ta energija se crpi iz nekog uređaja u kojem se neki oblik energije pretvara u električnu energiju. U našem primjeru taj uređaj je baterija koja pohranjenu energiju pretvara u električnu energiju.

Opisani proces je *ireverzibilan* jer se nastala električna energija neće vratiti natrag u energiju koja je pohranjena u bateriji. Nas će zanimati uređaji u kojima se odvija tzv. *reverzibilna* pretvorba između električne energije i nekog drugog oblika energije, odnosno pretvorba u kojoj se novonastala električna energija može vratiti u onaj oblik energije iz koje je nastala. Uređaji koji omogućuju takvu pretvorbu se nazivaju **izvori elektromotorne sile**. Rad potreban da izvor elektromotorne sile premjesti naboj od jednog do drugog pola nazivamo **elektromotorna sila**.

Kako bismo izveli formulu pomoću koje možemo izračunati elektromotornu silu pogledajmo shematski prikaz izvora elektromotorne sile na Slici 10. Tankim crtama označeno je *elektrostatičko polje*  $\vec{E}_0$ , tj. električno polje koje stvaraju naboji na krajevima izvora i ono se ne mijenja s vremenom. Debljim crtama označeno je *ekvivalentno polje*  $\vec{E}'$ , odnosno polje koje tjera naboje kroz izvor elektromotorne sile. Smjer tog polja jednak je smjeru elektromotorne sile od negativnog prema pozitivnom polu, što je suprotno od teorijskog smjera električnog polja od pozitivnog prema negativnom polu. Neka je iscrtanom linijom na Slici 10 označena proizvoljna zatvorena orijentirana krivulja  $\vec{\Gamma}$ . Tada ukupno nastalo električno polje  $\vec{E}$  možemo zapisati kao

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'.$$



Slika 10: Shematski prikaz elektromotorne sile.

Krivuljni integral polja  $\vec{E}$  duž krivulje  $\vec{\Gamma}$  jednak je

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} (\vec{E}_0 + \vec{E}') \cdot d\vec{s} = \oint_{\Gamma} \vec{E}_0 \cdot d\vec{s} + \oint_{\Gamma} \vec{E}' \cdot d\vec{s}.$$

Prema [15], str. 973. elektrostatičko polje je uvijek potencijalno. Koristeći tu činjenicu i Korolar 3.1 slijedi da je član sume koji sadrži krivuljni integral elektrostatičkog polja  $\vec{E}_0$  duž proizvoljne orijentirane krivulje  $\vec{\Gamma}$  jednak nula. Ekvivalentno polje  $\vec{E}'$  postoji samo unutar izvora te je na vanjskom dijelu puta ono također jednako nula. Prema tome drugi član se svodi na krivuljni integral polja  $\vec{E}'$  po dijelu puta od jednog pola izvora do drugog. Dakle, možemo reći da je elektromotorna sila  $\varepsilon$  jednaka krivuljnom integralu električnog polja  $\vec{E}$  uzetom po zatvorenom strujnom krugu, tj.

$$\varepsilon = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s}. \quad (3.21)$$

### 3.2.4 Amperov zakon

Pretpostavimo da imamo dva paralelna vodiča, kojima teče električna struja istog smjera. Eksperimentalno je pokazano da se u tom slučaju oni međusobno privlače. Promijenimo li smjer struje u jednom od vodiča oni će se međusobno odbijati. Uočavamo da postoji "djelovanje na daljinu" među vodičima. Također, stavimo li list izrađen od neke kovine između vodiča, međudjelovanje se ne mijenja što ukazuje na činjenicu da je ono povezano samo s gibanjem naboja.

Naboji u gibanju djeluju jedni na druge *magnetskim silama*, no ispravnije je govoriti da naboj u gibanju oko sebe stvara *magnetsko polje*<sup>1</sup>. Magnetsko polje  $\vec{B}$  prikazujemo pomoću silnica, odnosno pomoću zatvorenih krivulja čije tangente u proizvoljnoj točki pokazuju smjer djelovanja magnetskog polja.

Pretpostavimo sada da imamo beskonačno dug ravni vodič kojim teče stalna struja jakosti  $I$ . Oko tog vodiča nastaje konstantno magnetsko polje čije su silnice koncentrične kružnice oko vodiča kao osi. Prikažemo li presjek vodiča i njegovo magnetsko polje u ravnini, primjerice na papiru, tada postoje dva moguća smjera struje. Prva mogućnost je da struja ide prema ravnini,

<sup>1</sup>često se koristi i naziv magnetska indukcija



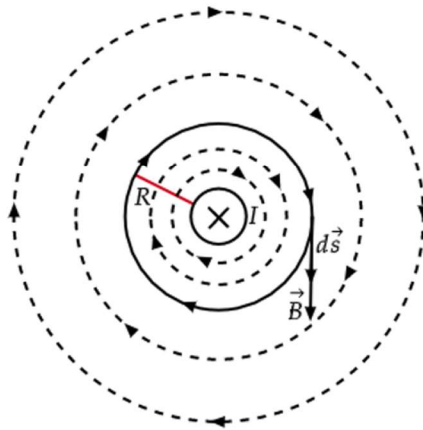
tj. "u papir" što se u literaturi često označava s  $\otimes$ . Tada se prema *pravilu desne ruke* (vidi [5], str. 202.) smjer magnetskog polja podudara sa smjerom kazaljke na satu kao što je prikazano na Slici 11. Druga mogućnost je da struja ide iz ravnine, odnosno "iz papira" što se označava s  $\odot$ . U tom slučaju je, prema pravilu desne ruke, smjer magnetskog polja suprotan smjeru kazaljke na satu. Za orijentiranu krivulju  $\vec{\Gamma}$  kojom ćemo obilaziti magnetsko polje odaberimo proizvoljnu kružnicu radijusa  $R$  koja se podudara s nekom od silnica. Njena parametrizacija dana je s

$$\vec{r}(t) = R \cos t \vec{i} + R \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Prema *Biot-Savartovom zakonu* (vidi [5], str. 205.) iznos magnetskog polja u proizvoljnoj točki na udaljenosti  $R$  od vodiča jednak je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R},$$

pri čemu je  $\mu_0$  fizikalna konstanta koja se naziva permeabilnost vakuuma. Općenito, permeabilnost se definira kao magnetska vodljivost materijala kojim je ispunjen prostor u kojem nastaje magnetsko polje. Prema tome permeabilnost vakuuma je magnetska vodljivost vakuuma te iznosi  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ N/A}^2$ .



Slika 11: Magnetsko polje oko beskonačnog ravnog vodiča.

Budući da je magnetsko polje  $\vec{B}$  tangenta na svaku silnicu koja leži u ravnini okomitoj na vodič, njegov smjer je određen jediničnim tangencijalnim vektorom  $\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ . Kako je nastalo magnetsko polje konstantno ono neće ovisiti o parametru  $t$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_0^{2\pi} \vec{B}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} B \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \cdot \vec{r}'(t) dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{|\vec{r}'(t)|^2}{|\vec{r}'(t)|} dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \int_0^{2\pi} R dt = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I. \end{aligned}$$

Do istog zaključka bismo došli i da smo promatrali neku drugu orijentiranu krivulju (vidi [5], str. 215.). Dakle, cirkulacija magnetskog polja  $\vec{B}$  po proizvoljnoj zatvorenoj krivulji, jednaka je produktu permeabilnosti vakuuma  $\mu_0$  i jakosti struje  $I$ , tj.

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I. \quad (3.22)$$



Formulu (3.22) nazivamo **Amperov zakon**.

**Primjer 3.5.** Neka beskonačnim ravnim vodičem teče stalna struja jakosti  $I = 5$  A. Magnetsko polje koje nastaje oko vodiča možemo opisati pozitivno orijentiranim kružnicama čije se središte nalazi u središtu vodiča. Koristeći Amperov zakon odredimo iznos  $B$  magnetskog polja vodiča ako je polumjer kružnice jednak 2 .

Neka je  $\vec{\Gamma}$  kružnica polumjera 2 te ju parametriziramo s

$$\vec{r}(t) = 2 \cos t \vec{i} + 2 \sin t \vec{j}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Sada Amperov zakon (3.22) možemo zapisati kao

$$\int_0^{2\pi} \vec{B}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = 5\mu_0.$$

Koristeći iste zaključke kao u izvodu Amperovog zakona slijedi

$$\int_0^{2\pi} \vec{B}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} B \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} B \frac{|\vec{r}'(t)|^2}{|\vec{r}'(t)|} dt = B \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt = 2B \int_0^{2\pi} dt = 4\pi B.$$

Slijedi  $4\pi B = 5\mu_0$  te je iznos magnetskog polja  $B$  jednak

$$B = \frac{5\mu_0}{4\pi} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ T (tesla)}.$$

## Literatura

- [1] T. M. Apostol, *Calculus, Volume II: Multi-Variable Calculus and Linear Algebra, with Applications to Differential Equations and Probability*, John Wiley & Sons, 1969.
- [2] B. Apsen, *Riješeni zadaci više matematike uz treći dio repetitorija*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1970.
- [3] K. Burazin, J. Jankov, I. Kuzmanović, I. Soldo, *Primjene diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne varijable*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku, Osijek, 2017.
- [4] T. Burić, L. Korkut, J. P. Milišić, M. Krnić, M. Pašić, I. Velčić, *Matematika 3, Vektorska analiza*, Element, Zagreb, 2015.
- [5] N. Cindro, *Fizika 2: elektricitet i magnetizam*, Školska knjiga, Zagreb, 1988.
- [6] S. J. Colley, *Vector Calculus*, Addison Wesley, 2012.
- [7] M. Corral, *Vector Calculus*, Schoolcraft College, 2008.
- [8] P. Javor, *Matematička analiza 2*, Element, Zagreb, 2002.
- [9] V. J. Katz, “The history of differential forms from Clairaut to Poincaré”, *Historia Mathematica* 8 (1981.), str. 161–188.
- [10] S. Kurepa, *Matematička analiza 3, Funkcije više varijabli*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1984.
- [11] J. E. Marsden, A. J. Tromba, A. Weinstein, *Basic multivariable calculus*, Springer, W. H. Freeman, 2000.
- [12] V. Pinter, *Osnove elektrotehnike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1994.
- [13] J. Stewart, *Calculus, 7th Edition*, Brooks/Cole, 2011.
- [14] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass, F. R. Giordano, *Thomas's calculus*, Addison-Wesley, 2004.
- [15] H. D. Young, R. A. Freedman, A. L. Ford, *Sears and Zemansky's university physics : with modern physics*, Addison-Wesley, 2011.