Geodetske krivulje

Pavlečić, Marina

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Završni rad

Geodetske krivulje

Marina Pavlečić

Osijek, 2021.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Završni rad

Geodetske krivulje

Marina Pavlečić

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2021.

Geodetske krivulje

Sažetak

U ovom radu upoznat ćemo se sa specijalnim krivuljama na plohi-geodetskim krivuljama. Takve krivulje promatramo pomoću specijalnog trobrida krivulja na plohi, a karakterizirane su s iščezavajućom geodetskom zakrivljenošću. Geodetske krivulje geometrijski predstavljaju najkraću spojnicu između dviju točaka na plohi i iz tog razloga se smatraju i poopćenjem pravca na plohi. U radu su analizirana njihova geometrijska svojstva i dane su diferencijalne jednadžbe koje ih određuju. Predstavljena je i specijalna parametrizacija plohe, parametrizacija geodetskim koordinatama. U radu su, primjenom navedene teorije, određene geodetske krivulje na sferi, odnosno cilindru.

Ključne riječi

ploha, krivulja na plohi, geodetske krivulja, geodetska zakrivljenost, Christoffelovi simboli

Geodesic curves

Abstract

In this final paper we analyze special curves on a surface-geodesic curves. Such curves are analyzed by usage of a special frame for a curve on a surface and they are characterized by a vanishing geodesic curvature. Geodesic curves geometrically represent the shortest path between two points on a surface and therefore, they are considered as generalization of a straight line on surface. In this work we analyze their geometric properties and give differential equations that determine geodesic curve. We also present a special parametrization of a surface, the parametrization with geodesic coordinates. Finally, by usage of presented theory, we determine geodesic curves on a sphere, respectively cylinder.

Keywords

surface, surface curve, geodesic curve, geodesic curvature, Christoffel symbols

Sadržaj

Uvod

Općenito, na plohi možemo naći razne krivulje, a svima njima je zajedničko da se mogu zadati pomoću parametrizacije plohe. Nadalje, neke od njih možemo karakterizirati specijalnim geometrijskim svojstvima. U takve krivulje ubrajamo krivulje zakrivljenosti, asimptotske krivulje i geodetske krivulje.

Geodetske krivulje su karakterizirane s iščezavajućom geodetskom zakrivljenošću, a geometrijski predstavljaju najkraću spojnicu između dviju točaka na plohi. Stoga se takve krivulje smatraju poopćenjem pravca na plohi. Geodetske krivulje imaju zanimljivu fizikalnu interpretaciju. Prema Einsteinovom načelu relativnosti, geodetska krivulja predstavlja putanju čestice pri slobodnom padu (padu uzrokovanom isključivo utjecajem gravitacije). Nadalje, geodetske krivulje imaju i svoju industrijsku primjenu, kao što su na primjer proizvodnja šatora, bojanje staza, namotaji traka od stakloplastike u proizvodnji cijevi, proizvodnja tekstila i slično.

Rad je organiziran u dva poglavlja. U prvom poglavlju navodimo definiciiju plohe, tangencijalne ravnine plohe, prvu i drugu fundamentalnu formu, krivulje na plohi te dajemo izraz za specijalne veličine koje se nazivaju Christoffelovi simboli. U drugom poglavlju definiramo geodetsku zakrivljenost, geodetske krivulje te navodimo diferencijalne jednadžbe kojima su zadane. Predstavljena je i specijalna paramterizacija plohe koja se naziva parametrizacija geodetskim koordinatama. Navodimo i primjere geodetskih krivulja na sferi, odnosno cilindru.

1 Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha

U ovom poglavlju dajemo pregled pojmova iz lokalne teorije ploha potrebnih za razumijevanje rada. Sve definicije, odnosno teoremi koje navodimo su preuzeti iz [2], odnosno [3].

1.1 Ploha

Definicija 1. *Podskup $\mathbf{P} \subset \mathbb{R}^3$ je **ploha** ako za svaku točku $T \in \mathbf{P}$ postoji otvorena okolina $V \subseteq \mathbb{R}^3$ i preslikavanje $\mathbf{m} : U \to V \cap \mathbf{P}$ s otvorenog skupa $U \subset \mathbb{R}^2$ koje je glatko homeomorfno preslikavanje otvorenih skupova.*

Preslikavanje $\mathbf{m}$ se naziva **parametrizacijom** ili **kartom plohe P** i pišemo

$$\mathbf{m} : U \to V \cap$$

P, $\mathbf{m}$(u, v) $= (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$Parcijalne derivacije prvog reda parametrizacije $\mathbf{m}$ pišemo kao

$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial u}(u,v) = \mathbf{m}_u(u,v) = (x_u(u,v), y_u(u,v), z_u(u,v)),$$
$$\frac{\partial \mathbf{m}}{\partial v}(u,v) = \mathbf{m}_v(u,v) = (x_v(u,v), y_v(u,v), z_v(u,v)),$$

odnosno drugog reda kao

$$\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{du^2}(u,v) = \mathbf{m}_{uu}(u,v) = (x_{uu}(u,v), y_{uu}(u,v), z_{uu}(u,v)),$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial u \partial v}(u,v) = \mathbf{m}_{uv}(u,v) = (x_{uv}(u,v), y_{uv}(u,v), z_{uv}(u,v)),$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{m}}{dv^2}(u,v) = \mathbf{m}_{vv}(u,v) = (x_{vv}(u,v), y_{vv}(u,v), z_{vv}(u,v)).$$

Definicija 2. *Neka je $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija plohe $\mathbf{P}$. Za konstante u_0 i v_0, krivulju:*

- $\mathbf{k}(u) = \mathbf{m}(u, v_0)$ *nazivamo u-krivulja plohe* $\mathbf{P}$,
- $\mathbf{k}(v) = \mathbf{m}(u_0, v)$ *nazivamo v-krivulja plohe* $\mathbf{P}$.

Krivulje iz prethodne definicije zovemo još i koordinatne (parametarske) krivulje. Tada je:

- $\mathbf{m}_u(u,v)$ tangencijalni vektor na u-krivulju u točki (u,v),
- $\mathbf{m}_v(u,v)$ tangencijalni vektor na v-krivulju u točki (u,v).

Tangencijalni vektori $\mathbf{m}_u(u,v)$ i $\mathbf{m}_v(u,v)$ nazivaju se *koordinatni vektori* parametrizirane plohe $\mathbf{P}$ u točki (u,v). Primjetimo, ako su koordinatni vektori $\mathbf{m}_u(u,v)$ i $\mathbf{m}_v(u,v)$ nekolinearni tj. $\mathbf{m}_u(u,v) \times \mathbf{m}_v(u,v) \neq 0$, tada se u točki (u,v) može postaviti ravnina (koju razapinju vektori $\mathbf{m}_u(u,v)$ i $\mathbf{m}_v(u,v)$).

Definicija 3. *Ploha* $\mathbf{P}$*, zadana parametrizacijom* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{m}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$*, je* ***regularna*** *u točki* $(u,v) \in U$ *ako vrijedi* $\mathbf{m}_u(u,v) \times \mathbf{m}_v(u,v) \neq 0$*. Ako ploha* $\mathbf{P}$ *nije regularna, kažemo da je singularna u točki* $(u,v) \in U$*. Za plohu* $\mathbf{P}$ *kažemo da je regularna ako je regularna u svakoj točki* $(u,v) \in U$*.*

Za svaku regularnu plohu možemo definirati vektor normale plohe, te ravninu u kojoj leže svi vektori okomiti na vektor normale plohe.

Definicija 4. *Neka je regularna ploha* $\mathbf{P}$ *zadana parametrizacijom* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{m}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$*. Tada vektor*

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{\mathbf{m}_u(u,v) \times \mathbf{m}_v(u,v)}{\|\mathbf{m}_u(u,v) \times \mathbf{m}_v(u,v)\|}$$

nazivamo ***vektor normale*** *plohe* $\mathbf{P}$ *u točki* $(u,v) \in U$*. Svaki vektor koji je okomit na vektor* $\boldsymbol{N}$ *zovemo* ***tangencijalnim vektorom*** *plohe* $\mathbf{P}$ *u točki* $(u,v) \in U$*.*

Definicija 5. *Neka je regularna ploha* $\mathbf{P}$ *zadana parametrizacijom* $\mathbf{m} : U \to V \cap \mathbf{P}$, $\mathbf{m}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$*. Tada ravninu koja prolazi točkom* $T = \mathbf{m}(u,v)$*, a vektor normale joj je vektor* $\boldsymbol{N}(u,v)$ *plohe, nazivamo* ***tangencijalnom ravninom*** *plohe* $\mathbf{P}$ *u točki* $T = \mathbf{m}(u,v)$*. Označavamo ju s* $T_T(\mathbf{P})$*.*

Kako je vektor $N(u,v)$, po svojoj definiciji, ortogonalan na vektore $\mathbf{m}_u(u,v)$ i $\mathbf{m}_v(u,v)$, koji su linearno nezavisni, možemo zaključiti da upravo oni razapinju tangencijalnu ravninu plohe $\mathbf{P}$ u točki $T = \mathbf{m}(u,v)$. Dakle, svaki vektor v_P koji leži u promatranoj tangencijalnoj ravnini se može prikazati kao linearna kombinacija vektora $\mathbf{m}_u(u,v)$ i $\mathbf{m}_v(u,v)$. Štoviše, tangencijalnu ravninu možemo promatrati i kao dvodimenzionalni potprostor prostora $\mathbb{R}^3$, a bazu tog potprostora čine vektori $\mathbf{m}_u(u,v)$ i $\mathbf{m}_v(u,v)$.

Definicija 6. *Krivulja* $\mathbf{k} : I \to \mathbb{R}^3$ *leži na plohi zadanom parametrizacijom* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$*, ako vrijedi da je* $\mathbf{k}(I) \subseteq \mathbf{m}(U)$*.*

Svaka krivulja na plohi $\mathbf{P}$ može se prikazati kao kompozicija parametrizacije $\mathbf{m}$ i koordinatnih funkcija u i v, tj. kao $\mathbf{k}(t) = \mathbf{m}(u(t), v(t))$. Istaknimo da su i ranije spomenute koordinatne (parametarske) krivulje primjeri krivulja na plohi.

1.2 Prva i druga fundamentalna forma

Za prvu fundamentalnu formu kažemo da služi za mjerenja na plohi, odnosno pomoću nje možemo odrediti duljinu luka krivulje na plohi, odrediti kut između krivulja na plohi, te izračunati površinu ograničenog dijela plohe.

Definicija 7. *Neka je regularna ploha* $\mathbf{P}$ *dana parametrizacijom* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$, $T = \mathbf{m}(u,v)$ *točka na plohi, te neka je* $T_T(\mathbf{P})$ *tangencijalna ravnina plohe* $\mathbf{P}$ *u točki* T*.* ***Prva fundamentalna forma*** I_T *plohe* $\mathbf{P}$ *je preslikavanje* $I_T : T_T(\mathbf{P}) \times T_T(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ *koje paru tangencijalnih vektora* $\mathbf{t}_1$ *i* $\mathbf{t}_2$ *na plohu* $\mathbf{P}$ *u točki* T *pridružuje njihov skalarni produkt, tj.*

$$I_T(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \mathbf{t}_1 \cdot \mathbf{t}_2.$$

Definicija 8. *Neka je* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ *parametrizacija regularne plohe* $\mathbf{P}$*. Tada funkcije* E*,* F*,* $G : U \to \mathbb{R}$ *definirane kao*

$$\begin{aligned} E(u,v) &= \mathbf{m}_u(u,v) \cdot \mathbf{m}_u(u,v) \\ F(u,v) &= \mathbf{m}_u(u,v) \cdot \mathbf{m}_v(u,v) \\ G(u,v) &= \mathbf{m}_v(u,v) \cdot \mathbf{m}_v(u,v) \end{aligned}$$

nazivamo ***fundamentalnim veličinama prvog reda.***

Zapišemo li tangencijalne vektore $\mathbf{t}_1$ i $\mathbf{t}_2$ u bazi $\{\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v\}$ prostora $T_T(\mathbf{P})$ kao

$$\mathbf{t}_1 = \lambda_1 \mathbf{m}_u + \mu_1 \mathbf{m}_v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{bmatrix} \quad i \quad \mathbf{t}_2 = \lambda_2 \mathbf{m}_u + \mu_2 \mathbf{m}_v = \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix},$$

izraz za prvu fundamentalnu formu matrično možemo zapisati kao

$$I_T(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = \lambda_1\lambda_2 E + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)F + \mu_1\mu_2 G = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{bmatrix}.$$

Prije nego što definiramo drugu fundamentalnu formu plohe, potrebno je definirati operator oblika plohe $\mathbf{P}$.

Definicija 9. *Preslikavanje $S_T : T_T(\mathbf{P}) \to T_T\mathbb{R}^3$ definirano s*

$$S_T(t) = -D_t\mathbf{N}$$

*nazivamo **operatorom oblika** plohe $\mathbf{P}$ u točki $(u, v) \in U$ (ili Weingartenovim preslikavanjem).*

Definicija 10. *Neka je $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija regularne plohe $\mathbf{P}$. Tada funkcije L, M, $N : U \to \mathbb{R}$ definirane kao*

$$\begin{aligned} L(u, v) &= \mathbf{m}_{uu} \cdot \mathbf{N}(u, v) \\ M(u, v) &= \mathbf{m}_{uv} \cdot \mathbf{N}(u, v) \\ N(u, v) &= \mathbf{m}_{vv} \cdot \mathbf{N}(u, v) \end{aligned}$$

*nazivamo **fundamentalnim veličinama drugog reda.***

Definicija 11. *Neka je $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija regularne plohe $\mathbf{P}$, neka je $T = \mathbf{m}(u, v)$ točka na plohi, te neka je $T_T(\mathbf{P})$ tangencijalna ravnina na plohu $\mathbf{P}$ u točki $(u, v) \in U$. Druga fundamentalna forma II_T plohe $\mathbf{P}$ je preslikavanje $II_T : T_T(\mathbf{P}) \times T_T(\mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ zadano s*

$$II_T(\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2) = -I_T(\mathbf{t}_1, S_T(\mathbf{t}_2)) = -\mathbf{t}_1 \cdot S_T(\mathbf{t}_2).$$

1.3 Christoffelovi simboli

Christoffelovi simboli su izrazi koji uključuju fundamentalne veličine prvog reda, te njihove derivacije. Njih ćemo primijeniti pri zadavanju sustava diferencijalnih jednadžbi kojim su određene geodetske krivulje na plohi. U nastavku navodimo njihov detaljan izvod.
Neka je $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ parametrizacija regularne plohe $\mathbf{P}$. Tada su, za svaki $(u, v) \in U$, vektori $\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v$ i N linearno nezavisni, pa tvore bazu prostora $\mathbb{R}^3$. Stoga se vektori $\mathbf{m}_{uu}, \mathbf{m}_{uv}, \mathbf{m}_{vv}$ mogu prikazati u toj bazi, te vrijedi:

$$\mathbf{m}_{uu} = \Gamma^u_{uu}\mathbf{m}_u + \Gamma^v_{uu}\mathbf{m}_v + L\mathbf{N}, \tag{1}$$
$$\mathbf{m}_{uu} = \Gamma^u_{uv}\mathbf{m}_u + \Gamma^v_{uv}\mathbf{m}_v + M\mathbf{N}, \tag{2}$$
$$\mathbf{m}_{uu} = \Gamma^u_{vv}\mathbf{m}_u + \Gamma^v_{vv}\mathbf{m}_v + N\mathbf{N}. \tag{3}$$

Prethodne tri formule nazivaju se Gaussove derivacijske formule, a simboli Γ^k_{ij} zovu se **Christoffelovi simboli** druge vrste. Primjetimo da su upravo ti simboli definirani kao koeficijenti prikaza vektora $\mathbf{m}_{uu}, \mathbf{m}_{uv}, \mathbf{m}_{vv}$ u bazi $\{\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v, \mathbf{N}\}$. Pokazat ćemo da se Christoffelovi simboli mogu izraziti pomoću fundamentalnih veličina prvog reda i njihovih derivacija. Najprije izrazimo skalarne produkte oblika $\mathbf{m}_{ij} \cdot \mathbf{m}_k$. Deriviramo izraz $(\mathbf{m}_u)^2 = E$, prvo po u, a zatim po v:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{m}_u)^2 = E \quad /\mathrm{d}u \quad &\Rightarrow 2\mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_{uu} = E_u \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{uu} \cdot \mathbf{m}_u = \frac{1}{2}E_u \\
/\mathrm{d}v \quad &\Rightarrow 2\mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_{uv} = E_v \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{uv} \cdot \mathbf{m}_u = \frac{1}{2}E_v.
\end{aligned}$$

Analogno deriviramo izraz $(\mathbf{m}_v)^2 = G$:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{m}_v)^2 = G \quad /\mathrm{d}u \quad &\Rightarrow 2\mathbf{m}_v \cdot \mathbf{m}_{uv} = G_u \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{uv} \cdot \mathbf{m}_v = \frac{1}{2}G_u \\
/\mathrm{d}v \quad &\Rightarrow 2\mathbf{m}_v \cdot \mathbf{m}_{vv} = G_v \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{vv} \cdot \mathbf{m}_v = \frac{1}{2}G_v.
\end{aligned}$$

Naposljetku deriviramo izraz $\mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_v = F$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_v = F \quad /\mathrm{d}u \quad &\Rightarrow \mathbf{m}_{uu} \cdot \mathbf{m}_v + \mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_{uv} = F_u \\
&\Rightarrow \quad \mathbf{m}_{uu} \cdot \mathbf{m}_v + \frac{1}{2}E_v = F_u \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{uu} \cdot \mathbf{m}_v = F_u - \frac{1}{2}E_v \\
/\mathrm{d}v \quad &\Rightarrow \mathbf{m}_{uv} \cdot \mathbf{m}_v + \mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_{vv} = F_v \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2}G_u + \mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_{vv} = F_v \Rightarrow \quad \mathbf{m}_{vv} \cdot \mathbf{m}_u = F_v - \frac{1}{2}G_u.
\end{aligned}$$

Sada izraz (1) skalarno pomnožimo s $\mathbf{m}_u$ i $\mathbf{m}_v$ i dobivamo sljedeći sustav

$$\mathbf{m}_{uu} \cdot \mathbf{m}_u = \Gamma^u_{uu}\mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_u + \Gamma^v_{uu}\mathbf{m}_v \cdot \mathbf{m}_u + L\mathbf{N} \cdot \mathbf{m}_u \Rightarrow \quad \frac{1}{2}E_u = E\Gamma^u_{uu} + F\Gamma^v_{uu} \tag{4}$$

$$\mathbf{m}_{uu} \cdot \mathbf{m}_v = \Gamma^u_{uu}\mathbf{m}_u \cdot \mathbf{m}_v + \Gamma^v_{uu}\mathbf{m}_v \cdot \mathbf{m}_v + L\mathbf{N} \cdot \mathbf{m}_v \Rightarrow \quad F_u - \frac{1}{2}E_v = F\Gamma^u_{uu} + G\Gamma^v_{uu} \tag{5}$$

Iz izraza (4) i (5) lako dobivamo izraz za Γ^u_{uu} i Γ^v_{uu}:

$$\begin{aligned}
\Gamma^u_{uu} &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma^v_{uu} &= \frac{-FE_u - 2EF_u + EE_v}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

Preostaje još da izraze (2) i (3) skalarno pomnožimo s $\mathbf{m}_u$ i $\mathbf{m}_v$, te analognim postupkom dobivamo preostale sustave iz kojih lako izračunamo ostale Christoffelove simbole, a oni su sljedećeg oblika:

$$\begin{aligned}
\Gamma^u_{uv} &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma^v_{uv} &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma^u_{vv} &= \frac{-FG_v + 2GF_v - GG_u}{2(EG - F^2)}, \\
\Gamma^v_{vv} &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}.
\end{aligned}$$

2 Geodetske krivulje

U ovom poglavlju ćemo definirati geodetsku zakrivljenost krivulje na plohi, te ćemo pomoću nje definirati geodetske krivulje na plohi. Definicije i teoremi navedeni u ovom poglavlju preuzeti su iz [2], odnosno [3].

2.1 Geodetska zakrivljenost

U diferencijalnoj geometriji, krivulje najčešće proučavamo pomoću njihovog Frenetovog trobrida, tj. trojke linearno nezavisnih vektora u točki krivulje. Takav trobrid možemo definirati za svaku dopustivu krivulju u prostoru.

Definicija 12. *Krivulju* $\mathbf{k} : I \to \mathbb{R}^3$ *parametriziranu općim parametrom nazivamo dopustivom ako su polja duž krivulje* $\{\dot{\mathbf{k}}, \ddot{\mathbf{k}}\}$ *linearno nezavisna.*

Definicija 13. *Neka je* $\mathbf{k} : I \to \mathbb{R}^3$ *dopustiva krivulja. Tada su vektorska polja zadana kao*

$$\begin{aligned} t(t) &= \frac{\dot{\mathbf{k}}(t)}{\|\dot{\mathbf{k}}(t)\|}, \\ n(t) &= b(t) \times t(t), \\ b(t) &= \frac{\dot{\mathbf{k}}(t) \times \ddot{\mathbf{k}}(t)}{\|\dot{\mathbf{k}}(t) \times \ddot{\mathbf{k}}(t)\|} \end{aligned}$$

vektorska polja Frenetovog trobrida krivulje zadane općim parametrom.

Vektorsko polje t se naziva tangencijalno polje krivulje $\mathbf{k}$, vektorsko polje n je polje glavnih normala, a vektorsko polje b polje binormala krivulje $\mathbf{k}$. Za fiksnu vrijednost parametra t krivulje $\mathbf{k}$, ova vektorska polja određuju tangencijalni vektor, vektor glavne normale i vektor binormale, redom, u točki $\mathbf{k}(t)$. Nadalje, za svaku regularnu krivulju, tj. krivulju čiji je tangencijalni vektor u svakoj točki različit od nul vektora, odnosno za svaku dopustivu krivulju možemo definirati zakrivljenost i torziju.

Definicija 14. *Neka je* $\mathbf{k}$ *regularna krivulja u* $\mathbb{R}^3$ *parametrizirana općim parametrom* t*. Funkciju* $\kappa : I \to \mathbb{R}$ *zadanu s*

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{k}}(t) \times \ddot{\mathbf{k}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{k}}(t)\|^3}$$

nazivamo ***zakrivljenošću*** *krivulje* $\mathbf{k}$ *u točki* $\mathbf{k}(t)$*.*

Definicija 15. *Neka je* $\mathbf{k}$ *dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom* t*. Funkcija* $\tau : I \to \mathbb{R}$ *zadana s*

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\mathbf{k}} \times \ddot{\mathbf{k}}) \cdot \dddot{\mathbf{k}}}{\|\dot{\mathbf{k}} \times \ddot{\mathbf{k}}\|^2} = \frac{det(\dot{\mathbf{k}}, \ddot{\mathbf{k}}, \dddot{\mathbf{k}})}{\|\dot{\mathbf{k}} \times \ddot{\mathbf{k}}\|^2}$$

se naziva ***torzijom*** *krivulje* $\mathbf{k}$ *u točki* $\mathbf{k}(t)$*.*

Prikaz derivacija vektorskih polja Frenetovog trobrida pomoću Frenetovog trobrida dan sa sljedećim formulama.

Propozicija 1 (Frenetove formule za krivulje parametrizirane općim parametrom)**.** *Neka je* $\mathbf{k} : I \to \mathbb{R}^3$ *dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} \dot{t}(t) &= \|\dot{\mathbf{k}}\|\kappa(t)n(t), \\ \dot{n}(t) &= \|\dot{\mathbf{k}}\|(-\kappa(t)t(t) + \tau(t)b(t)), \\ \dot{b}(t) &= -\|\dot{\mathbf{k}}\|\tau(t)n(t). \end{aligned}$$

U ovom radu analiziramo specijalne krivulje koje leže na plohi, te nam Freneteov trobrid (koji ne ovisi o plohi) nije najprikladnije rješenje, nego definiramo trobrid krivulje koji će biti povezan i s plohom kojoj krivulja pripada.

Definicija 16. *Neka je* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ *parametrizacija regularne plohe* $\mathbf{P}$ *i neka je* $\mathbf{k} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{k}(t) = \mathbf{m}(u(t), v(t))$ *regularna krivulja na plohi* $\mathbf{P}$. *Uređena trojka* $(\mathbf{t}(t), \mathbf{N}(t) \times \mathbf{t}(t), \mathbf{N}(t))$ *se naziva* ***Darbouxov trobrid*** *krivulje* $\mathbf{k}$ *na plohi* $\mathbf{P}$ *u točki* $t \in I$.

Kako Darbouxov trobrid čine tri linearno nezavisna vektora, to je Darbouxov trobrid ujedno i baza prostora $\mathbb{R}^3$. Prikažimo pomoću Darbouxovog trobrida vektor $\kappa\mathbf{n}$ krivulje $\mathbf{k}$, odnosno odredimo koeficijente α, β i γ u prikazu

$$\kappa\mathbf{n} = \alpha\mathbf{t} + \beta(\mathbf{N} \times \mathbf{t}) + \gamma\mathbf{N}. \tag{6}$$

Ako jednakost (6) redom pomnožimo s $\mathbf{t}, \mathbf{N} \times \mathbf{t}$ i $\mathbf{N}$ dobit ćemo sljedeće:

$$\begin{aligned} \alpha &= \mathbf{0}, \\ \beta &= \kappa\mathbf{n} \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{t}), \\ \gamma &= \kappa\mathbf{n} \cdot \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Vektor $\mathbf{n}$ je okomit na vektor $\mathbf{t}$ te je komponenta α stoga nula. Komponenta γ definira veličinu koja se naziva normalna zakrivljenost K_n krivulje $\mathbf{k}$ na plohi $\mathbf{P}$ u smjeru vektora t. Možemo primjetiti da obje komponente β i γ mogu biti i pozitivne i negativne, što ovisi o kutu između vektora $\mathbf{n}$ i vektora $\mathbf{N}$. Komponenta β također predstavlja određenu zakrivljenost krivulje na plohi, što ćemo preciznije zapisati sljedećom definicijom.

Definicija 17. *Neka je* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ *parametrizacija regularne plohe* $\mathbf{P}$ *i neka je* $\mathbf{k} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{k}(t) = \mathbf{m}(u(t), v(t))$ *regularna krivulja na plohi* $\mathbf{P}$. ***Geodetska zakrivljenost*** *krivulje* $\mathbf{k}$ *na plohi* $\mathbf{P}$ *je funkcija* $K_g : U \to \mathbb{R}$ *definirana kao* $K_g = \kappa\mathbf{n} \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{t})$. *U slučaju kada je krivulja pravac, tj.* $\kappa = 0$, *očito je* $K_g = 0$.

Uvrstimo li izraze za koeficijente β i γ dobivamo izraz:

$$\kappa\mathbf{n} = K_g(\mathbf{N} \times \mathbf{t}) + K_n\mathbf{N}$$

iz koje možemo zaključiti da je geometrijska zakrivljenost $K_g = 0$ ako i samo ako su vektori $\mathbf{n}$ i $\mathbf{N}$ kolinearni. Nadalje,možemo povezati zakrivljenost krivulje κ s normalnom i geodetskom zakrivljenošću. Izračunamo li skalarni kvadrat vektora κn prikazanog u ortonormiranoj bazi $\{N \times t, N\}$ dobivamo $\kappa^2 = K_n^2 + K_g^2$. U sljedećoj propoziciji navest ćemo formulu za geodetsku zakrivljenost krivulje koja leži na plohi $\mathbf{P}$.

Propozicija 2. *Neka je* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ *parametrizacija regularne plohe* $\mathbf{P}$ *i neka je* $\mathbf{k} : I \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{k}(t) = \mathbf{m}(u(t), v(t))$ *regularna krivulja na plohi* $\mathbf{P}$. *Tada vrijedi*

$$K_g = \frac{det(\dot{\mathbf{k}}, \ddot{\mathbf{k}}, \mathbf{N})}{||\dot{\mathbf{k}}||^3}.$$

Dokaz. Raspišimo K_g na sljedeći način:

$$K_g = \kappa\mathbf{n} \cdot (\mathbf{N} \times \mathbf{t}) = \kappa(\mathbf{N} \times \mathbf{t}) \cdot \mathbf{n} = \kappa(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{N} = \kappa\mathbf{b} \cdot \mathbf{N}.$$

Uočimo, vektor $\dfrac{\dot{\mathbf{k}} \times \ddot{\mathbf{k}}}{||\dot{\mathbf{k}}||^3}$ ima isti smjer kao i vektor $\mathbf{b}$, a duljina mu je, prema Definiciji 11, upravo κ, te ako ga pomnožimo sa skalarom $\dfrac{1}{\kappa}$, dobijemo jedinični vektor u smjeru vektora $\mathbf{b}$, $\mathbf{b} = \dfrac{\dot{\mathbf{k}} \times \ddot{\mathbf{k}}}{\kappa||\dot{\mathbf{k}}||^3}$. Tada je

$$K_g = \kappa \mathbf{b} \cdot \mathbf{N} = \kappa \frac{\dot{\mathbf{k}} \times \ddot{\mathbf{k}}}{\kappa|\dot{\mathbf{k}}||^3} \cdot \mathbf{N} = \frac{det(\dot{\mathbf{k}}, \ddot{\mathbf{k}}, \mathbf{N})}{||\dot{\mathbf{k}}||^3}.$$

□

2.2 Geodetske krivulje

Pomoću geodetske zakrivljenosti možemo definirati i specijalne krivulje na plohi koje nazivamo geodetske krivulje. Kako ploha ne mora nužno sadržavati pravac, geodetske krivulje na plohi zapravo predstavljaju poopćenje pravca na plohi. Naime, geodetske krivulje geometrijski predstavljaju najkraće spojnice između dviju točaka na plohi.

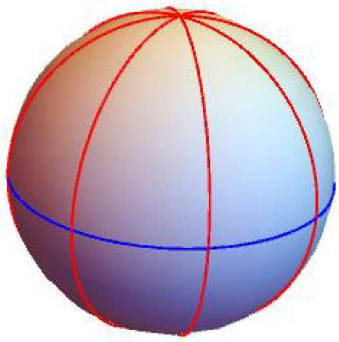
Definicija 18. *Neka je* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ *parametrizacija regularne plohe* $\mathbf{P}$ *i neka je* $\mathbf{k} : I \to \mathbb{R}^3$ *,* $\mathbf{k}(t) = \mathbf{m}(u(t), v(t))$ *regularna krivulja na plohi* $\mathbf{P}$*. Kažemo da je* $\mathbf{k}$ ***geodetska krivulja*** *ako je* $K_g = \mathbf{0}$ *za svaki* $t \in I$*.*

Prethodna definicija nam kaže da je geodetskom krivuljom plohe $\mathbf{P}$ zovemo onu krivulju plohe $\mathbf{P}$ koja u svakoj točki ima geodetsku zakrivljenost jednaku nuli. Kada smo definirali geodetsku zakrivljenost K_g u nekoj točki krivulje na plohi rekli smo da će ona biti jednaka nuli ako i samo ako su vektor glavne normale $\mathbf{n}$ krivulje i vektor normale $\mathbf{N}$ plohe međusobno kolinearni. Stoga slijedi da geodetske krivulje možemo definirati i kao krivulje čiji je vektor glavne normale kolinearan s vektorom normale plohe kojoj pripadaju.

Primjer 1. *Neka je sfera zadana standardnom parametrizacijom* $\mathbf{m} : \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{m}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u).$$

Ispitat ćemo jesu li u-krivulje i v-krivulje geodetske krivulje na sferi.
Svaka u-krivulja sfere zadana je s $\mathbf{k}(u) = (\sin u \cos v_0, \sin u \sin v_0, \cos u)$ *te možemo primjetiti da je i geodetska krivulja zato što je u svakoj točki u-krivulje glavna normala krivulje* $\mathbf{n}(u) = (-\sin u \cos v_0, -\sin u \sin v_0, -\cos u)$ *u-krivulje kolinearna s normalom plohe* $\mathbf{N}(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u)$ *sfere.*
Promotrimo sada v-krivulje. Samo ekvator, tj. krivulja $\mathbf{k}(v) = \mathbf{m}(\frac{\pi}{2}, v) = (\cos v, \sin v, 0)$ *je geodetska krivulja, zato što za sve ostale v-krivulje vrijedi da glavna normala* $\mathbf{n}(v) = (\cos v, \sin v, 0)$ *v-krivulje nije kolinearna s normalom* $\mathbf{N}$ *sfere.*
Stoga možemo zaključiti da su geodetske krivulje na sferi sve u-krivulje i ekvator.



Slika 1: Sfera s istaknutim geodetskim krivuljama:u-krivulje (crveno) i ekvator (plavo)

U sljedećem primjeru odredit ćemo geodetske krivulje kružnog cilindra.

Primjer 2. *Neka je kružni cilindar zadan svojom parametrizacijom* $\mathbf{m} : \langle 0, 2\pi\rangle \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{m}(u, v) = (r\cos u, r\sin u, v), r > 0$. *Pokazat ćemo da su geodetske krivulje oblika*

$$\mathbf{k}(t) = (r\cos(at + b), r\sin(at + b), ct + d), a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Koristeći se parametrizacijom cilindra, svaku krivulju na cilindru možemo zadati parametrizacijom

$$\mathbf{k}(t) = (r\cos u(t), r\sin u(t), v(t)).$$

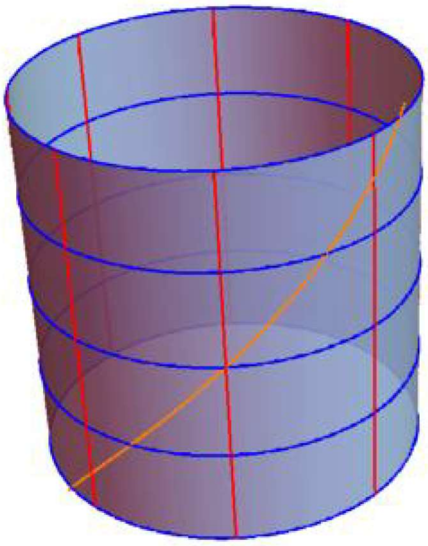
Normalno polje N *cilindra je okomito na* z*-os i zadano je s* $N(u, v) = (r\cos u, r\sin u, 0)$. *Tada za geodetsku krivulju* $\mathbf{k}$ *vrijedi da su vektori*

$$\mathbf{k}''(t) = (-r\cos u(t)(u'(t))^2 - r\sin u(t)u''(t), -r\sin u(t)(u'(t))^2 + r\cos u(t)u''(t), v''(t)$$

i N *kolinearni, što povlači* $v''(t) = 0$. *Stoga imamo* $v(t) = ct + d, c, d \in \mathbb{R}$. *Nadalje, kako je geodetska krivulja konstantne brzine, mora vrijediti*

$$\|\mathbf{k}'(t)\|^2 = r^2(u'(t))^2 + (v'(t))^2 = r^2(u'(t))^2 + c^2 = konst.$$

Stoga je i $u'(t) = konst := a$, *iz čega slijedi* $u(t) = at + b, a, b \in \mathbb{R}$. *Dakle, geodetske krivulje kružnog cilindra su izvodnice cilindra* $(a = 0)$, *što je očito jer su izvodnice pravci, poprečne kružnice* $(c = 0)$ *i obične cilindrične spirale* $(a \neq 0, c \neq 0)$.



Slika 2: Kružni cilindar s istaknutim geodetskim krivuljama:izvodnice (crveno), poprečne kružnice (plavo) i obične cilindrične spirale (narančasto)

Poznato je da se pravci mogu parametrizirati tako da su konstantne brzine, tj. da za njihovu parametrizaciju $\mathbf{k}$ vrijedi $\|\dot{\mathbf{k}}(t)\| = konst$. To svojstvo imaju i geodetske krivulje.

Teorem 1. *Geodetske krivulje su krivulje konstantne brzine.*

Geodetske krivulje na plohi možemo karakterizirati i sljedećim diferencijalnim jednadžbama.

Teorem 2. *Neka je* $\mathbf{k} : I \to \mathbf{P}$ *krivulja na plohi* $\mathbf{P}$, $\mathbf{m} : U \to \mathbf{P}$ *parametrizacija plohe* $\mathbf{P}$, $\mathbf{k}(I) \subset \mathbf{m}(U)$, $\mathbf{k}(t) = \mathbf{m}(u(t), v(t))$. *Krivulja* $\mathbf{k}$ *je geodetska onda i samo onda kada za funkcije* $u(t)$ *i* $v(t)$ *vrijedi*

$$u'' + \Gamma^1_{11}u'^2 + 2\Gamma^1_{12}u'v' + \Gamma^1_{22}v'^2 = 0$$
$$v'' + \Gamma^2_{11}u'^2 + 2\Gamma^2_{12}u'v' + \Gamma^2_{22}v'^2 = 0,$$

gdje su Γ^k_{ij} *Christoffelovi simboli 2. vrste.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{k}$ krivulja na plohi, $\mathbf{k}(t) = \mathbf{m}(u(t), v(t))$. Tada je $\mathbf{k}' = \mathbf{m}_u u' + \mathbf{m}_v v'$ i $\mathbf{k}'' = \mathbf{m}_{uu}(u')^2 + 2\mathbf{m}_{uv}u'v' + \mathbf{m}_{vv}(v')^2 + \mathbf{m}_u u'' + \mathbf{m}_v v''$. Ako izraze (1),(2) i (3) uvrstimo u $\mathbf{k}''$ i izjednačimo s 0 komponente uz $\mathbf{m}_u, \mathbf{m}_v$ pokazali smo traženo. $\square$

Nadalje, svakom točkom plohe prolazi jedna geodetska krivulja.

Teorem 3. *Za svaku točku* $T = \mathbf{m}(u_0, v_0)$ *plohe* $\mathbf{P}$ *i tangencijalni vektor* $v_p \in T_T(\mathbf{P})$ *postoji jedinstvena geodetska krivulja* $\mathbf{k}$ *takva da vrijedi* $\mathbf{k}(0) = p, \mathbf{k}'(0) = v_p$.

Pomoću geodetskih krivulja možemo definirati specijalnu parametrizaciju plohe r, tzv. parametrizaciju geodetskim koordinatama.

Definicija 19. *Neka je* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ *parametrizacija regularne plohe* $\mathbf{P}$. *Ako za parametrizaciju* $\mathbf{m}$ *vrijedi da su u-krivulje (v-krivulje) geodetske krivulje plohe parametrizirane duljinom luka, tj. vrijedi* $\|\mathbf{m}_u(u, v_0)\| = 1$, $(\|\mathbf{m}_v(u_0, v)\| = 1,)$*pri čemu su v-krivulje (u-krivulje) ortogonalne na u-krivulje (v-krivulje), tada kažemo da je ploha* $\mathbf{P}$ *parametrizirana geodetskim koordinatama* u *i* v.

Sljedeći teorem nam daje kriterij za utvrđivanje je li neka ploha $\mathbf{P}$ parametrizirana geodetskim koordinatama.

Teorem 4. *Neka je* $\mathbf{m} : U \to \mathbb{R}^3$ *parametrizacija regularne plohe* $\mathbf{P}$. *Ploha* $\mathbf{P}$ *je parametrizirana geodetskim koordinatama onda i samo onda kada vrijedi* $E = 1, F = 0$ *ili* $G = 1, F = 0$.

Literatura

[1] P. A. Blaga, Lectures on the Diferential Geometry of Curves and Surfaces, Napoca Press, Cluj, 2005.

[2] Ž. Milin Šipuš, S.Vidak, Uvod u diferencijalnu geometriju, skripta, Matematički odsjek Prirodoslovno matematičkog fakulteta u Zagrebu, 2016.

[3] J. Sedlar, Diferencijalna geometrija, skripta, Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije u Splitu, 2016.

[4] B. Žarinac-Frančula, Diferencijalna geometrija: zbirka zadataka i repetitorij, školska knjiga, Zagreb, 1980.