# Pravčaste plohe

**Subašić, Katarina**

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Katarina Subašić

# Pravčaste plohe

Završni rad

Osijek, 2021.

**SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU**
**ODJEL ZA MATEMATIKU**
**Sveučilišni preddiplomski studij matematike**

Katarina Subašić

# Pravčaste plohe

Završni rad

Mentor:
doc.dr.sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2021.

# Sažetak

U ovom radu bavimo se pravčastim plohama, tj. plohama koje opisuje pravac koji se giba duž krivulje. S obzirom na geometrijska svojstva, pravčaste plohe dijelimo na razvojne i vitopere plohe. U radu analiziramo geometrijska svojstva za svaku klasu ploha zasebno i navodimo njihove primjere, pri čemu ćemo se više posvetiti vitoperim pravčastim plohama. Za vitopere pravčaste plohe definiramo jednu specijalnu krivulju duž koje ploha nije regularna - strikcijsku krivulju. Također definiramo Sannijin trobrid, ortonormirani trobrid koji, do na položaj u prostoru, jednoznačno određuje vitoperu plohu. Na kraju ćemo pokazati kako se Gaussova zakrivljenost vitopere pravčaste plohe može izračunati pomoću jedne specifične veličine koju nazivamo parametar distribucije vitopere plohe. U radu su navedeni i primjeri s odgovarajućim slikama ploha izrađenim u programu Mathematica.

**Ključne riječi:** pravčasta ploha, razvojna ploha, vitopera ploha

# Abstract

In this work, we deal with ruled surfaces, i.e. surfaces that are created by the movement of a direction along a curve. Considering the geometric properties, ruled surfaces are divided into developable and noncylindrical surfaces. In this work, we analyze the geometric properties for each class of surfaces separately and give their examples, where we will pay more attention to the noncylindrical surfaces. For noncylindrical surfaces, we define one special curve along which the surface is not regular - the striction curve. We also define Sannia's frame, an orthonormal frame that, up to its position in space, uniquely defines a noncylindrical surface. Finally, we will show how the Gaussian curvature of a noncylindrical surface can be calculated using a specific parameter called the noncylindrical surface distribution parameter. The work also provides examples of surfaces with corresponding images created in Mathematica.

**Key words:** ruled surface, developable surface, noncylindrical surface

# Sadržaj

# Uvod

Svrha ovog rada je upoznati se s pravčastim plohama i njihovom karakterizacijom. Pravčaste plohe nastaju gibanjem pravca duž krivulje u prostoru. Takve plohe imaju veliku primjenu u graditeljstvu, najčešće prilikom izrade krovova ili prilikom izrade tornjeva, koji su često oblikovani kao jednoplošni hiperboloid.

U prvom poglavlju ovog rada navedeni su definicije i teoremi lokalne teorije ploha, a u drugom poglavlju je dan pregled klasa pravčastih ploha i njihova geometrijska svojstva. Najprije definiramo pravčaste plohe te ih potom okarakteriziramo pomoću uvjeta torzalnosti. Time pravčaste plohe dijelimo na dvije vrste; razvojne plohe i vitopere plohe. Zatim navodimo vrste razvojnih ploha, njihova svojstva i primjere. Nakon toga se bavimo vitoperim pravčastim plohama. Za vitopere pravčaste plohe definiramo strikcijsku krivulju i Sannijin trobrid te navodimo njegovu ulogu. Na kraju analiziramo Gaussovu zakrivljenost vitopere pravčaste plohe te ju računamo na konkretnom primjeru vitopere pravčaste plohe.

# 1 Osnovni pojmovi lokalne teorije ploha

Kako bismo se upoznali s pravčastim plohama, moramo najprije uvesti pojmove koji su nužni za njihovo definiranje i karakterizaciju. Definicije i propozicije navedene u ovom poglavlju su preuzete iz [3].

**Definicija 1.** *Podskup $S \subset \mathbf{R}^3$ nazivamo* ***plohom*** *ako za svaku točku $p \in S$ postoji otvorena okolina $V \subseteq \mathbf{R}^3$ i preslikavanje s otvorenog skupa $U \subset \mathbf{R}^2$ u skup $V \cap S$ koje je glatki homeomorfizam otvorenih skupova.*

**Napomena 1.** *Tako zadano preslikavanje nazivamo parametrizacijom ili* ***kartom*** *(lokalnim koordinatama) okoline točke $p$ plohe $S$. Ako dano preslikavanje označimo s $X$, onda možemo pisati:*

$$X(u,v) = (x(u;v); y(u;v); z(u;v)).$$

U narednom poglavlju, nakon što definiramo pravčaste plohe, vidjet ćemo da je parametrizaciju najlakše napraviti kod pravčastih ploha. Odabirom krivulje u prostoru i vektorskog polja duž te krivulje, rezultirajuća parametrizacija je linearna u jednoj koordinati. Također ćemo u narednom poglavlju pogledati diferencijal preslikavanja iz prethodne definicije te prikazati vezu s regularnošću plohe, a sada ćemo samo za potrebe narednih definicija navesti iduću napomenu.

**Napomena 2.** *Ploha je regularna ako vrijedi $X_u \times X_v \neq 0$, odnosno onda i samo onda kad su vektori*

$$X_u := \frac{\partial X}{\partial u},\ X_v := \frac{\partial X}{\partial v}$$

*linearno nezavisni.*

**Definicija 2.** ***Jednostavnom plohom*** *nazivamo svaku plohu koja se može pokriti samo jednom kartom.*

**Definicija 3.** ***Krivulja*** *na plohi $S$ je svako glatko preslikavanje $c : I \to S$, $I \subset \mathbf{R}$.*

**Definicija 4.** *Neka je $p$ proizvoljna točka na regularnoj plohi $S$. Vektor $v_p \in T_p\mathbf{R}^3$ u točki $p$ nazivamo* ***tangencijalni vektor*** *ukoliko postoji krivulja $c : I \to S$ na plohi $S$ za koju vrijedi $c(0) = p, c'(0) = v_p$. S $T_pS$ označavamo skup svih tangencijalnih vektora u točki $p$.*

Ako za zadanu točku $p$ iz prethodne definicije (pod pretpostavkom da su tangencijalni vektori u toj točki linearno nezavisni) povučemo sve krivulje koje prolaze točkom $p$ i leže na plohi $S$, tada tangente povučene na te krivulje pripadaju istoj ravnini koju zovemo **tangencijalna ravnina** plohe $S$ u točki $p$. Štoviše, ako je tangencijalna ravnina jedinstvena u danoj točki onda se ta točka naziva **regularnom točkom** plohe $S$. Za tangencijalnu ravninu možemo definirati jedan specifičan vektor;

$$n = \frac{X_u \times X_v}{||X_u \times X_v||}$$

koji se naziva **jedinični vektor normale tangencijalne ravnine**.

**Definicija 5.** *Preslikavanje $S_p : T_pS \to T_p\mathbf{R}^3$ definirano s*

$$S_p(v_p) = -D_{v_p}n(p),$$

*gdje je $D_{v_p}$ usmjerena derivacija jediničnog normalnog polja $n$ u smjeru tangencijalnog vektora $v_p$, nazivamo* ***operatorom oblika*** *plohe $S$ u točki $p$.*

**Definicija 6.** *Neka je $X$ karta dane plohe $S$ te $S_p$ operator oblika plohe $S$ u točki $p$. Definiramo funkcije $E, F, G, L, M, N : U \to \mathbf{R}$*

$$E(u_0, v_0) = X_u^2(u_0, v_0), \quad F(u_0, v_0) = X_u(u_0, v_0) \cdot X_v(u_0, v_0), \quad G(u_0, v_0) = X_v^2(u_0, v_0),$$

$$L(u_0, v_0) = S_p(X_u(u_0, v_0)) \cdot X_u(u_0, v_0),$$

$$M(u_0, v_0) = S_p(X_u(u_0, v_0)) \cdot X_v(u_0, v_0) = X_u(u_0, v_0) \cdot S_p(X_v(u_0, v_0)),$$

$$N(u_0, v_0) = S_p(X_v(u_0, v_0)) \cdot X_v(u_0, v_0).$$

Funkcije $E, F, G$ nazivaju se **fundamentalne veličine prvog reda** (koeficijenti prve fundamentalne forme), a funkcije $L, M, N$ **fundamentalne veličine drugog reda** (koeficijenti druge fundamentalne forme) plohe $S$ u karti $X$. Pomoću fundamentalnih veličina prvog i drugog reda možemo izračunati Gaussovu zakrivljenost krivulje.

**Propozicija 1.** *Neka je dana regularna ploha $S$ te neka su $E, F, G, L, M, N$ koeficijenti prve, odnosno druge fundamentalne forme obzirom na kartu $X$ dane plohe. Gaussovu zakrivljenost plohe $S$ računamo formulom*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

*Dokaz.* Vidi [3] str. 68. □

**Propozicija 2.** *Neka je $X : U \to S$ karta regularne plohe $S$. Tada za koeficijente druge fundamentalne forme plohe $S$ vrijedi:*

$$L = n \cdot X_{uu} = \frac{1}{W} det(X_{uu}, X_u, X_v)$$

$$M = n \cdot X_{uv} = \frac{1}{W} det(X_{uv}, X_u, X_v)$$

$$N = n \cdot X_{vv} = \frac{1}{W} det(X_{vv}, X_u, X_v)$$

*gdje je* $W^2$ *Weingartenova funkcija*

$$W^2 = EG - F^2.$$

*Dokaz.* Vidi [3] str. 70. □

# 2 Pravčaste plohe

Sve definicije i teoremi, odnosno korolar, navedeni u ovom poglavlju preuzeti su iz [1].

**Definicija 7.** *Jednostavna ploha pokrivena kartom*

$$X(u,v) = c(u) + vr(u), u \in I, v \in \mathbf{R},$$

*gdje je $c : I \to \mathbf{R}$ regularna krivulja, a $r(u)$ neiščezavajuće (jedinično) vektorsko polje duž krivulje $c$, naziva se* ***pravčasta ploha****. Krivulja $c(u)$ naziva se* ***direktrisa*** *(ravnalica, vodilica, bazna krivulja), a pravci čiji je vektor smjera $r(u)$* ***izvodnice*** *(generatrise) plohe.*

Pravčastu plohu možemo opisati kao plohu dobivenu gibanjem nekog pravca u prostoru, odnosno kao plohu čija svaka točka leži na pravcu koji pripada toj plohi.
Promotrimo diferencijal preslikavanja $X$ bilo koje, ne nužno pravčaste, plohe $S \subset \mathbf{R}^3$. Ploha je regularna ako joj je diferencijal injektivan, a diferencijal kao linearni operator možemo prikazati Jacobijevom matricom

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix}.$$

Iz dane matrice možemo zaključiti kako u slučaju regularnosti mora vrijediti $X_u \times X_v \neq 0$, gdje su

$$X_u := \frac{\partial X}{\partial u}, \quad X_v := \frac{\partial X}{\partial v}$$

jer je u tom slučaju jezgra diferencijala trivijalna.
Pogledajmo sada vektore $X_u$ i $X_v$ u slučaju pravčaste plohe iz prethodne definicije:

$$X_u(u,v) = c'(u) + vr'(u),$$

$$X_v(u,v) = r(u).$$

Linearna zavisnost vektora $X_u$ i $X_v$ ekvivalentna je uvjetu

$$(c'(u) \times r(u)) \times (r'(u) \times r(u)) = 0,$$

odnosno, ako to zapišemo preko mješovitog produkta vektora, imamo

$$\boxed{(c'(u), r(u), r'(u)) = 0.}$$

Taj se uvjet naziva **uvjetom torzalnosti**.

## 2.1 Podjela pravčastih ploha prema uvjetu torzalnosti

Kako bismo pravčaste plohe podijelili prema uvjetu torzalnosti, moramo uzeti u obzir ovisnost jediničnog normalnog polja plohe o parametru $v$. Kako je tangencijalna ravnina u točki $X(u_0, v_0)$ pravčaste plohe razapeta vektorima

$$X_u(u_0, v_0) = c'(u_0) + vr'(u_0), \quad X_v(u_0, v_0) = r(u_0),$$

normala tangencijalne ravnine dana je s

$$n(u_0, v_0) = X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) = c'(u_0) \times r(u_0) + v_0 r'(u_0) \times r(u_0).$$

Sada možemo razmotriti dva slučaja:
1. Plošne normale duž jedne izvodnice su paralelne, odnosno jedinično normalno polje plohe ne ovisi o $v$. Tu dolazimo do dvije mogućnosti koje zadovoljavaju uvjet torzalnosti. Može vrijediti da su vektori $r'(u)$ i $r(u)$ linearno zavisni ili da su linearno nezavisni.
2. Jedinično normalno polje plohe ovisi o $v$.
U ovisnosti o tome pravčaste plohe dijelimo na **razvojne plohe** i **vitopere**.

**Definicija 8.** *Svaku plohu kojoj se duž jedne izvodnice tangencijalne ravnine podudaraju nazivamo* ***razvojnom plohom****.*

Kao što i sama riječ kaže, razvojne plohe su plohe koje se mogu razviti u ravninu. Budući da lokalno izometrične plohe imaju jednaku Gaussovu zakrivljenost, razvojnu plohu možemo definirati kao plohu kojoj je Gaussova zakrivljenost $K$ jednaka nuli u svim točkama.

Razvojne plohe dijelimo na tri vrste:
Ako vrijedi da su vektori $r'(u)$ i $r(u)$ linearno zavisni, odnosno ako vrijedi $r'(u) \times r(u) = 0$ na cijelom području definicije tada govorimo o **cilindričnim plohama**. Kako su ta dva vektora kolinearna, postoji realna funkcija $g(u)$ takva da vrijedi

$$r'(u) = g(u)r(u).$$

Integracijom prethodnog izraza dobivamo

$$r(u) = f(u)r_0,$$

gdje je $r_0$ fiksni nenul vektor, a $f(u)$ realna funkcija. Iz toga možemo zaključiti da su izvodnice plohe međusobno paralelne te vrijedi

$$X(u, v) = c(u) + vr. \tag{1}$$

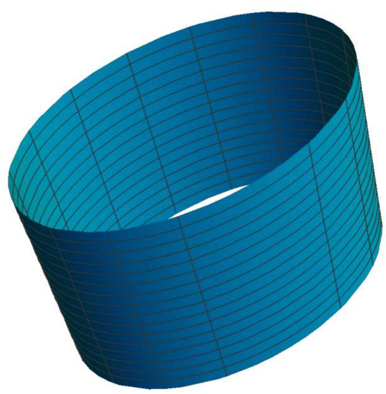
**Primjer 1.** ***Eliptički valjak***
*Parametrizacija eliptičkog valjka prikazanog na Slika 1 je*

$$X(u,v) = \left(\cos u,\ \frac{3}{2}\sin u,\ 2v\right),$$

*odnosno*

$$X(u,v) = \left(\cos u,\ \frac{3}{2}\sin u,\ 0\right) + \left(0,\ 0,\ 2v\right).$$

*Usporedimo li prethodni red s (1), možemo zaključiti da eliptički valjak pripada cilindričnim razvojnim plohama. Kod cilindrične plohe vektorsko polje $r(u)$ je konstantno, što se može vidjeti i u danom primjeru gdje je vektorsko polje $r = (0,\ 0,\ 2)$.*



Slika 1: Eliptički valjak

U slučaju kada su vektori $r'(u)$ i $r(u)$ linearno nezavisni, a jedinični vektor plošne normale ne ovisi o $v$ dobivamo plohe koje se nazivaju **konusnim (stožastim) plohama** ukoliko sve izvodnice prolaze istom točkom,

$$X(u,v) = p + vr(u),$$

odnosno **tangentnim plohama** ako su izvodnice tangente neke prostorne krivulje $c$,

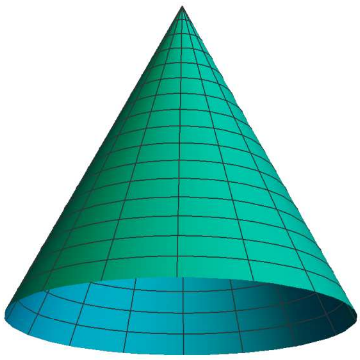
$$X(u,v) = c(u) + vc'(u).$$

Tangentna ploha je zapravo ploha koja sadrži sve tangente krivulje $c$, a da pri tome nije regularna duž krivulje $c$ koja se zbog toga naziva **grebenom** tangentne plohe.

Kod konusne razvojne plohe krivulja vodilica generira u točku te zbog toga ploha nije regularna u toj točki.

**Primjer 2.** ***Stožac***
*Stožac je primjer konusne razvojne plohe. Parametrizacija stošca prikazanog na Slika 2 je*

$$X(u,v) = (0,\ 0,\ 2) + v(\cos u,\ \sin u,\ 1).$$



Slika 2: Stožac

Ako imamo slučaj da jedinično normalno polje duž plohe ovisi o $v$ tada je $r'(u) \times r(u) \neq 0$ na cijelom području definicije te ne vrijedi uvjet torzalnosti. Takve ćemo plohe nazivati **vitopere** te ćemo se njima posvetiti u narednom poglavlju.

## 2.2 Vitopere plohe

**Definicija 9.** *Pravčaste plohe za koje vrijedi*

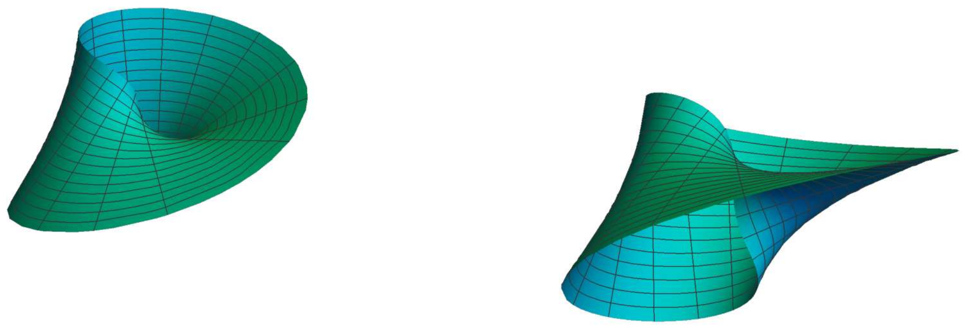
$$(c'(u), r(u), r'(u)) \neq 0$$

*nazivaju se* ***vitopere pravčaste plohe****.*

Ako imamo vitoperu plohu parametriziranu s $X(u,v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ tada je $\beta \times \beta'$ uvijek različito od nul vektora.

Vitopera ploha se ne da razviti u ravninu pa vitoperom plohom možemo nazivati sve pravčaste plohe čija je Gaussova zakrivljenost različita od nule ($K \neq 0$) u svakoj točki plohe.

**Primjer 3.** ***Möbiusova traka***
*Jedan od vrlo zanimljivih primjera vitoperih pravčastih ploha je Möbiusova traka. Ima vrlo specifičan oblik. Možemo zamisliti da imamo pravokutnu vrpcu čiji jedan kraj zarotiramo za 180 stupnjeva te ga spojimo s drugim krajem. Tako nastaje Möbiusova traka.*



Slika 3: Möbiusova traka, različiti položaji

*Slika 3 prikazuje Möbiusovu traku parametriziranu s*

$$X(u,v) = \left(2 + u\cos\frac{v}{2}\cos v,\ 2 + u\cos\frac{v}{2}\sin v,\ u\sin\frac{v}{2}\right).$$

Kao što je kod tangentnih ploha postojala istaknuta krivulja duž koje ploha nije regularna - greben, tako kod vitoperih pravčastih ploha imamo istaknutu krivulju koja se naziva strikcijska krivulja.

### 2.2.1 Strikcijska krivulja

Spustimo li sa dviju susjednih izvodnica pravčaste plohe zajedničku okomicu onda se nožište te okomice naziva strikcijskom točkom plohe. Strikcijska krivulja je zapravo lokus (mjesto ravnine) svih strikcijskih točkaka vitopere plohe, a ploha neće biti regularna duž nje.

**Teorem 1.** *Neka je s $X(u,v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ dana parametrizacija vitopere plohe. Tada je s*

$$\tilde{X} = \gamma(u) + v\delta(u) \tag{$\star$}$$

*dana reparametrizacija gdje je $||\delta|| = 1$ i $\gamma' \cdot \delta' = 0$. Krivulja $\gamma$ se naziva* ***strikcijska krivulja*** *vitopere pravčaste plohe dane parametrizacijom $\tilde{X}$.*

*Dokaz.* S obzirom da je $\beta \times \beta'$ uvijek različito od nul vektora, $\beta$ nikad neće biti nul vektor. Definiramo reparamterizaciju od $X$;

$$Y(u,v) = X\left(u, \frac{v}{||\beta(u)||}\right) = \alpha(u) + \frac{v\beta(u)}{||\beta(u)||}.$$

Ako sada označimo $\beta(u)/||\beta(u)||$ s $\delta(u)$ onda dobivamo

$$Y(u,v) = \alpha(u) + v\delta(u)$$

gdje je $||\delta(u)|| = 1$ i $\delta(u) \cdot \delta'(u) = 0$. Preostaje nam odrediti krivulju $\gamma$ takvu da je $\gamma'(u) \cdot \delta'(u) = 0$. Neka je

$$\gamma(u) = \alpha(u) + t(u)\delta(u)$$

gdje je $t(u)$ funkcija koju trebamo odrediti. Ako deriviramo prethodni izraz dobivamo:

$$\gamma'(u) = \alpha'(u) + t'(u)\delta(u) + t(u)\delta'(u).$$

Kako je $\delta(u) \cdot \delta'(u) = 0$ slijedi

$$\gamma'(u) \cdot \delta'(u) = \alpha'(u) \cdot \delta'(u) + t(u)\delta'(u) \cdot \delta'(u).$$

S obzirom da $\beta \times \beta'$ nikad nije nul vektor, $\beta$ i $\beta'$ su uvijek linearno nezavisni te zbog toga i $\delta'$ nikad nije nul vektor. Prema tome, ako bi funkciju $t$ definirali kao

$$t(u) = -\frac{\alpha'(u) \cdot \delta'(u)}{||\delta'(u)||^2}, \tag{$\star\star$}$$

iz prethodnog izraza dobivamo $\gamma'(u) \cdot \delta'(u) = 0$. Sada definiramo

$$\tilde{X}(u,v) = Y(u, t(u) + v).$$

Onda je $\tilde{X}(u,v) = \alpha(u) + (t(u) + v)\delta(u)$ i karte $\tilde{X}$, $X$ i $Y$ određuju istu plohu pri čemu parametrizacija $\tilde{X}$ zadovoljava $(\star)$. $\square$

Strikcijska krivulja ima jako zanimljivu geometrijsku interperetaciju; moglo bi se reći da okružuje plohu duž njenog najužeg dijela.

Još ćemo spomeniti kako se svaka vitopera ploha može jednoznačno odrediti ako poznajemo tri veličine, odnosno tri invarijante plohe koje određuje **Sannijin trobrid**. Sannijin trobrid je ortonormirani trobrid vektora u točki strikcijske krivulje plohe, a čine ga vektor smjera izvodnica $r$, te vektori $\frac{r'}{\|r'\|}$ i $r \times \frac{r'}{\|r'\|}$. Označimo li s $\{r, n, z\}$ vektore Sannijinog trobrida, pri čemu je $n = \frac{r'}{\|r'\|}$ i $z = r \times n$, tada vrijedi

$$r' = \kappa n, \ \ n' = \kappa r + \tau z, \ \ z' = \tau n,$$

gdje je

$$\kappa = \|r'\|, \ \ \tau = \frac{\det(r, r', r'')}{\|r'\|^2}$$

zakrivljenost, odnosno torzija izvodnice $r$. Kut koji zatvaraju vektori $r$ i tangencijalni vektor strikcijske krivulje naziva se strikcijom plohe. Svaka vitopera pravčasta ploha je, do na položaj u prostoru, jednoznačno određena sa zakrivljenošću, torzijom i strikcijom.

### 2.2.2 Gaussova zakrivljenost vitoperih ploha

**Definicija 10.** *Parametar distribucije vitopere pravčaste plohe parametrizirane s* $X = \alpha(u) + v\beta(u)$ *je funkcija* $p = p(u)$ *definirana s*

$$p = \frac{det(\alpha', \beta, \beta')}{\beta' \cdot \beta'}.$$

Pomoću parametra distribucije možemo izračunati Gaussovu zakrivljenost vitopere plohe.

**Teorem 2.** *Neka je s* $X(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ *dana parametrizacija vitopere pravčaste plohe. Tada je* $X$ *regularna kada je* $v \neq 0$ *ili kada je* $v = 0$ *i parametar distribucije različit od nula. Nadalje, Gaussova zakrivljenost vitopere pravčaste plohe može se izračunati pomoću njenog parametra distribucije kao*

$$K = \frac{-p(u)^2}{(p(u)^2 + v^2)^2}. \tag{2}$$

*Dokaz.* Najprije uočimo da su i $\alpha' \times \beta$ i $\beta'$ okomiti na $\beta$ i $\alpha'$ pa je zbog toga $\alpha' \times \beta$ kolinearan s $\beta'$ te vrijedi

$$\alpha' \times \beta = p\beta',$$

gdje je p parametar distribucije. Kako je $X_u = \alpha' + v\beta'$ i $X_v = \beta$ slijedi

$$X_u \times X_v = p\beta' + v\beta' \times \beta,$$

pa je

$$||X_u \times X_v||^2 = ||p\beta'||^2 + ||v\beta' \times \beta||^2 = (p^2 + v^2)||\beta'||^2.$$

Time smo dokazali dio o regularnosti. Izračunajmo sada fundamentalne veličine prvog i drugog reda potrebne za izračunavanje Gaussove zakrivljenosti. Primjetimo da je

$$X_{uu} = \alpha'' + v\beta'', \quad X_{uv} = \beta' \quad \text{i} \quad X_{vv} = 0$$

pa je onda

$$E = X_u^2 = (\alpha' + v\beta')^2 = \alpha'^2 + 2v\alpha'\beta' + v^2\beta'^2 = 1 + v^2\beta'^2$$

$$F = X_u \cdot X_v = (\alpha' + v\beta') \cdot \beta = \alpha' \cdot \beta$$

$$G = X_v^2 = \beta^2$$

$$N = n \cdot X_{vv} = \frac{1}{W}\det(X_{vv}, X_u, X_v) = 0$$

$$\begin{aligned} M = n \cdot X_{uv} &= \frac{1}{W}\det(X_{uv}, X_u, X_v) \\ &= \frac{1}{W}\det(\beta', \alpha' + v\beta', \beta) \\ &= \frac{1}{W}[\det(\beta', \alpha', \beta) + \det(\beta', v\beta', \beta)] \\ &= \frac{1}{W}\det(\beta', \alpha', \beta) \end{aligned}$$

Kada uvrstimo dobivene fundamentalne veličine u formulu za Gaussovu zakrivljenost imamo

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{M^2}{W^2} = -\frac{\frac{(\det(\alpha',\beta,\beta'))^2}{W^2}}{W^2}.$$

Slijedi

$$K = -\frac{\det^2(\alpha', \beta, \beta')}{((1 + v^2\beta'^2) - \alpha'^2\beta^2)^2}. \tag{3}$$

Sada pogledajmo čemu je jednak kvadrat parametra distribucije

$$p = \frac{\det(\alpha', \beta, \beta')}{\beta' \cdot \beta'} = \frac{\det(\alpha', \beta, \beta')}{\beta'^2};$$

$$\begin{aligned} p^2 &= \frac{\det^2(\alpha', \beta, \beta')}{(\beta'^2)^2} = \qquad (4) \\ &= \frac{\begin{vmatrix} \alpha' \cdot \alpha' & \alpha' \cdot \beta & \alpha' \cdot \beta' \\ \beta \cdot \alpha' & \beta \cdot \beta & \beta \cdot \beta' \\ \beta' \cdot \alpha' & \beta' \cdot \beta & \beta' \cdot \beta' \end{vmatrix}}{(\beta'^2)^2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \alpha' \cdot \beta & 0 \\ \beta \cdot \alpha' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta'^2 \end{vmatrix}}{(\beta'^2)^2} = \\ &= \frac{\beta'^2(1 - (\alpha'\beta)^2)}{(\beta'^2)^2} = \frac{1 - (\alpha'\beta)^2}{\beta'^2}. \end{aligned}$$

Raspišimo sada nazivnik tražene formule (2):

$$p^2 + v^2 = \frac{1 - (\alpha'\beta)^2}{\beta'^2} + v^2 = \frac{1}{\beta'^2}[1 - (\alpha'\beta)^2 + \beta'^2 v^2]$$

iz čega slijedi

$$[1 - (\alpha'\beta)^2 + \beta'^2 v^2] = \beta'^2(p^2 + v^2).$$

Stoga vrijedi

$$\begin{aligned} K &= -\frac{\det^2(\alpha', \beta, \beta')}{[\beta'^2(p^2 + v^2)]^2} = \\ &= -\frac{\det^2(\alpha', \beta, \beta')}{(\beta'^2)^2} \cdot \frac{1}{(p^2 + v^2)^2}, \end{aligned} \tag{5}$$

što pomoću (4) možemo zapisati kao

$$K = -p^2 \cdot \frac{1}{(p^2 + v^2)^2}$$

čime smo dokazali (2). □

Iz prethodnog Teorema možemo zaključiti kako će Gaussova zakrivljenost vitoperih pravčastih ploha biti uglavnom negativnog predznaka. Neki specijalni slučajevi navedeni su u sljedećem korolaru.

**Korolar 1.** *Neka je s $X(u, v) = \alpha(u) + v\beta(u)$ dana parametrizacija vitopere pravčaste plohe kojoj je $p$ parametar distribucije. Tada za Gaussovu zakrivljenost $K(u, v)$ dane vitopere pravčaste plohe vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) *Za fiksan parametar $u_0$ $\quad K \to 0 \quad$ kada $\quad v \to \infty$.*

(ii) *$K(u, v) = 0$ ako i samo ako je parametar distribucije jednak 0.*

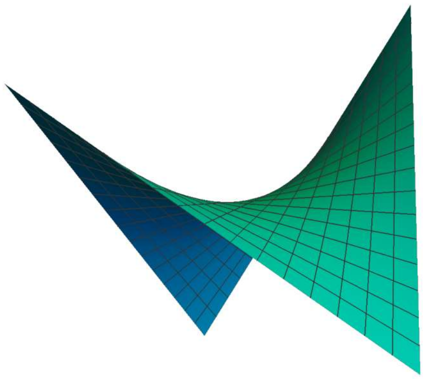
(iii) *Ako je parametar distribucije različit od nule, Gaussova zakrivljenost je neprekidna funkcija.*

*Dokaz.* Sve tvrdnje su direktne posljedice Teorema 2. □

U narednom primjeru izračunat ćemo Gaussovu zakrivljenost vitopere pravčaste plohe pomoću parametra distribucije.

**Primjer 4.** ***Gaussova zakrivljenost hiperboličkog paraboloida***
*Hiperbolički paraboloid je vitopera pravčasta ploha dana prametrizacijom*

$$X(u,v) = (u,\ v,\ uv).$$



Slika 4: Hiperbolički paraboloid

*Imamo*

$$X(u,v) = (u,\ v,\ uv) = (u,\ 0,\ 0) + v(0,\ 1,\ u),$$

*gdje je* $c = (u,\ 0,\ 0)$ *bazna krivulja,* $r = (0,\ 1,\ u)$ *vektor smjera izvodnice. Primjetimo da vektor* $r$ *nije jedinični vektor, stoga ga moramo normirati.*

$$r(u) = \frac{1}{||(0,\ 1,\ u)||}(0,\ 1,\ u) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}(0,\ 1,\ u)$$

*Za računanje prametra distribucije potrebne su nam derivacije vektora* $c$ *i vektora* $r$*,*

$$c'(u) = (1,\ 0,\ 0)$$

$$r'(u) = \left(0,\ -\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}},\ \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$$

$$r'^2(u) = \frac{u^2}{(1+u^2)^3} + \frac{1}{(1+u^2)^3} = \frac{1}{(1+u^2)^2}.$$

*Vrijedi:*

$$
\begin{aligned}
p(u) &= \frac{det\left(c'(u),\ r(u),\ r'(u)\right)}{r'(u)^2} = \\
&= \frac{1}{\frac{1}{(1+u^2)^2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} & \frac{u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}} \\ 0 & -\frac{u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{1}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} \end{vmatrix} = \frac{\frac{1}{(1+u^2)^2} + \frac{u^2}{(1+u^2)^2}}{\frac{1}{(1+u^2)^2}} = \\
&= 1 + u^2.
\end{aligned}
$$

*Slijedi:*

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{-p(u)^2}{(p(u)^2 + v^2)^2} = \\
&= \frac{-(1+u^2)^2}{((1+u^2)^2 + v^2)^2} = \\
&= \frac{-(1+u^2)^2}{(1+u^2)^2\ (1+u^2+v^2)^2} = \\
&= \frac{-1}{(1+u^2+v^2)^2}.
\end{aligned}
$$

# Literatura


[1] A. Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica*, CRC PRES, 2006.

[2] H. Pottmann, *Computational Line Geometry*, Springer Verlag, Berlin, 2001.

[3] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, *Uvod u diferencijalnu geometriju*, skripta, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.

[4] J. Kličinović, *Pravčaste plohe u prostoru Minkowskog*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2009.

[5] J. Perić, *Geometrija u graditeljstvu*, Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2015.

[6] Lj. Primorac Gajčić, *Preslikavanje pravčastih ploha u Minkowskijevom prostoru*, Doktorski rad, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb, 2016.