Mjere rizika na financijskom tržištu

Pravdić, Tea

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:126:742033

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-23**

Repository / Repozitorij:

Repository of School of Applied Mathematics and Informatics

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Tea Pravdić

Mjere rizika na financijskom tržištu

Diplomski rad

Osijek, 2021.

SVEUČILIŠTE JOSIPA JURJA STROSSMAYERA U OSIJEKU
ODJEL ZA MATEMATIKU

Tea Pravdić

Mjere rizika na financijskom tržištu

Diplomski rad

Mentor:
doc. dr. sc. Danijel Grahovac

Osijek, 2021.

Sadržaj

Uvod

Pitanje koje svaki investitor sebi postavlja glasi: „Koliki je rizik gubitka ove investicije?”. Mnogi ljudi žele ulagati u financijske instrumente kako bi ostvarili što veće prinose. Kako bi nešto zaradili moraju se izložiti određenom riziku jer tko ne riskira ne profitira. Stoga, poželjno bi bilo odabrati najbolji omjer između prinosa i rizika. Rizik je bitan faktor u donošenju odluka. Zbog toga je važno prije ulaganja procijeniti rizik kako bi se njime moglo upravljati, a za to nam služe mjere rizika. Mjerenje rizika, osim što može spriječiti ulaganje u imovinu koja vodi u propast, neophodan je uvjet za upravljanje rizikom. Institucije moraju biti sposobne kvantificirati iznos rizika s kojim se suočavaju kako bi učinkovito razradile strategiju za ublažavanje posljedica ekstremnih negativnih događaja. U ovom radu predstavit ćemo neke mjere za kvantificiranje financijskog rizika, raspravljat ćemo o statističkim metodama za izračun financijskog rizika i teoriju koja stoji iza njih te pokazati procjenu rizika kroz primjere.

1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju ćemo uvesti pojmove iz [20] koji su bitni kako bismo lakše razumjeli nastavak priče.

Financijsko tržište je mjesto koje omogućuje razmjenu novca, deviza i kapitala. Postoje mnoge vrste financijskog tržišta kao što su tržište novca, tržište obveznica, dionica i slično. Na financijskom tržištu se trguje financijskim instrumentima koji se dijele u dvije kategorije. Prvu kategoriju čine nerizični financijski instrumenti, npr. novac u domaćoj valuti, i rizični financijski instrumenti poput dionica, obveznica, zlata i dr. Kako sam naziv kaže, ovi instrumenti nose određeni rizik, te je njihovu buduću vrijednost nemoguće točno odrediti. Stoga, nenegativnom slučajnom varijablom opisujemo njihove vrijednosti u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Drugu kategoriju čine izvedeni financijski instrumenti kojima se vrijednost izvodi iz vrijednosti osnovnih financijskih instrumenata. Skup financijskih instrumenata koje posjeduje neka osoba ili poduzeće naziva se portfelj.

Definicija 1. *Portfelj je vektor $\varphi_t = (\varphi_t^0, \varphi_t^1, \dots, \varphi_t^d) \in \mathbb{R}^{d+1}$, gdje φ_t^i predstavlja broj jedinica $i-$tog financijskog instrumenta koju investitor posjeduje u trenutku $t \geqslant 0$.*

Povrat je relativna promjena cijene financijskog instrumenta u određenom vremenskom intervalu, često izražena kao postotak.

Definicija 2. *Relativni povrat od $i-$tog financijskog instrumenta je postotna promjena njegove cijene S_t u trenutku t s obzirom na trenutak $t-1$:*

$$R_t^i = \frac{S_t^i - S_{t-1}^i}{S_{t-1}^i}, i \in \{0, 1, \dots, d\}, t \in \{1, \dots, T\}.$$

Izraz

$$1 + R_t^i = \frac{S_t^i}{S_{t-1}^i}$$

se naziva bruto povrat.

U financijama se često koriste log-povrati umjesto relativnih povrata jer je n-periodni log-povrat zapravo suma jednoperiodnih log-povrata pa su lakše primjenjivi u daljnim analizama.

Definicija 3. *Logaritam bruto povrata zove se log-povrat financijskog instrumenta i u trenutku t i definira se izrazom*

$$r_t = log(1 + R_t^i).$$

Sva ulaganja podrazumijevaju određeni stupanj rizika i stoga ga ne možemo u cijelosti izbjeći. No, dobra je vijest da nam diverzifikacija rizika može pomoći da izbjegnemo pretjerano izlaganje jednom određenom području. Diverzifikacija je strategija ulaganja kod koje se ulaže u različite kategorije imovine, poput obveznica, fondova, dionica, izvedenica, kao i u različite gospodarske grane, kako bi se smanjio ukupni rizik. Dakle, diverzifikacijom portfelja, manji je rizik da će jedan događaj ili loše ulaganje učiniti značajnu štetu.

Podaci koje promatramo na financijskom tržištu često imaju distribucije s teškim repovima.

Definicija 4. *Za slučajnu varijablu X s funkcijom distribucije F kažemo da ima distribuciju s teškim repom ako je*

$$F(x) = 1 - L(x)x^{-\alpha},$$

gdje $\alpha \geq 0$ nazivamo repni indeks, dok je L funkcija takva da za svaki $x \geq 0$ vrijedi

$$\lim_{t \to \infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1.$$

Parametar α određuje težinu repa distribucije. Što je on manji ekstremne vrijednosti su vjerojatnije.

Na financijskom tržištu ulagači mogu biti u short ili long poziciji. Short pozicija je strategija trgovanja dionicama koja se koristi u situaciji kada ulagač očekuje pad cijena dionice u budućnosti. Iz tog razloga on posuđuje dionicu od brokera i prodaje ju. U budućnosti će kupiti tu opciju po nižoj cijeni i vratiti dug brokeru. Long pozicija se koristi kada ulagač očekuje rast cijena dionice te stoga kupuje dionice u nadi da će ih u budućnosti prodati po većoj cijeni i zaraditi na njoj.

2 Mjere rizika

2.1 Rizik na financijskom tržištu

Rizik je vjerojatnost da će stvarni povrat od investicije biti niži od predviđenog povrata. On bi trebao biti sastavni dio svake financijske odluke. Naravno, bez izlaganja portfelja riziku nije moguće ostvariti adekvatne prinose. Potrebno je usporediti njihovu rizičnost kako bi investitor odabrao onaj s najvećim prinosima i najmanjim gubitcima. Osnovni problem pri mjerenju i previđanju rizika je činjenica da je rizik latentna mjera što znači da ga ne možemo opaziti ili direktno izmjeriti već ga samo možemo izvesti prateći ponašanje tržišne cijene. Na primjer, na kraju dana, dnevni povrati su poznati dok rizik nije. Štoviše, financijske institucije su uložile dosta truda pri modeliranju rizika koje se sastoji iz dva dijela. Prvi korak je prepoznati izvor rizika kako bi se njime moglo upravljati i kontrolirati. Ovisno o izvoru rizika, financijska institucija se može suočiti s tržišnim, kreditnim ili operativnim rizikom. Prema [17] tržišni rizik se odnosi na odstupanja budućih prinosa zbog promjene određenih tržišnih varijabli kao što su dionice, kamatna stopa, devizni tečajevi i slično. Kreditni rizik nastaje zbog dužnikovog neuspjeha da poštuje rok ugovora o zajmu. Operativni rizik se definira kao rizik gubitka nastao zbog neadekvatnih, neuspjelih unutarnjih procesa ljudi ili sustava. Drugi korak je kvantificiranje rizika.

Kako su povrati u stvarnosti različito distribuirani, teško ih je uspoređivati, te iz tog razloga, za kvantificiranje rizika koristimo mjeru rizika koja je definirana neovisno o distribuciji cijena i povrata financijskih instrumenata. Mjera rizika je broj kojim kvantificiramo rizik, a njezinu vrijednost određujemo nekom matematičkom metodom. Ona samo procjenjuje potencijalni rizik te je stoga cilj odabrati mjeru rizika koja je široko primjenjiva i koja će najbolje opisivati stvarne gubitke. One imaju velik značaj u financijskom svijetu jer predviđaju moguće gubitke i time omogućuju kontroliranje rizicima i povećanje profita njihovom regulacijom.

2.2 Svojstva mjera rizika na financijskom tržištu

Kao što je već spomenuto rizik procjenjujemo različitim mjerama rizika. Prve ideje za procjenu rizika potječu od Markovitz-a koji je rizik mjerio standardnom devijacijom. Kasnije su se pojavile i druge mjere, a najčešće korištene su Value at Risk i očekivani gubitak. Poželjna svojstva, o kojima će biti riječ u ovom dijelu, a koje bi mjera rizika trebala imati kako bi bila korisna, su: koherentnost, subaditivnost i konveksnost.

Mjera rizika predstavljena je funkcijom $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. S X i Y označit ćemo dvije realne slučajne varijable koje ćemo koristiti u sljedećim svojstvima mjera rizika [20]:

1) *Konveksnost:* $\eta((1-\lambda)X + \lambda Y) \leqslant (1-\lambda)\eta(X) + \lambda\eta(Y), \quad \lambda \in [0,1]$.

2) *Monotonost: Ako je* $X \leq Y$*, za sve moguće ishode, tada je* $\eta(X) \leq \eta(Y)$.

Monotonost navodi da ako su gubitci neke investicije veći od druge, u svim mogućim okolnostima, onda bi mjera rizika gubitaka te investicije trebala biti veća.

Kombinacijom 1) i 2) dobijamo jednu važnu osobinu, a to je subaditivnost.

3) *Subaditivnost:* $\eta(X+Y) \leq \eta(X) + \eta(Y)$.

   Subaditivnost kaže da rizičnost portfelja $X+Y$ ne može biti veća od zbroja rizičnosti portfelja X i rizičnosti portfelja Y. Dakle, subaditivnost podrazumijeva postojanje koristi od diverzifikacije kombiniranjem rizika. Mjere rizika koje ne zadovoljavaju ovo svojstvo mogu dovesti do pogrešnog zaključka da diversifikacija portfelja rezultira povećanju rizika. Na primjer, bez subaditivnosti firme bi smatrale povoljnijim podijeliti se na manje tvrtke. Ako pretpostavimo da mjera rizika ne zadovoljava svojstvo subaditivnosti tada bi pojedinac koji želi investirati u dvije različite pozicije otvarao dva brokerska računa kako bi smanjio izloženost riziku.

4) *Pozitivna homogenost: Za svaku pozitivnu konstantu c je $\eta(cX) = c\eta(X)$.*

   U upravljanju financijskim rizicima, pod pozitivnom homogenošću se smatra da je rizik nekog portfelja proporcionalan njegovoj vrijednosti što u praksi često ne vrijedi. Npr., pretpostavimo da portfelj vrijedan \$1000 ima rizik od \$10. Tada će udvostručenje veličine portfelja na \$2000 udvostručiti rizik na \$20. To će općenito vrijediti za male pozicije u likvidnim financijskim instrumentima. Na financijskom tržištu veliki utjecaj na cijenu dionica imaju prodaja i potražnja. Ako se poveća broj dionica koje se prodaju, njihova cijena će pasti i na kraju prodajna cijena može biti niža od početne, što rezultira gubitkom.

5) *Translacijska invarijantnost:* $\eta(X+c) = \eta(X) - c$.

   Translacijska invarijantnost znači da se dodavanje ili oduzimanje gotovine portfelju X smanjuje ili povećava rizičnost za taj iznos.

Definicija 5. *Kažemo da je η koherentna mjera rizika ako zadovoljava svojstva subaditivnost, monotonost, pozitivnu homogenost i translacijsku invarijantnost.*

3 Mjere disperzije

Središnja tendencija služi za predviđanje kretanja budućih vrijednosti na osnovu bliske prošlosti. Kako bismo mogli zaključiti koliko cijene financijskih instrumenata osciliraju oko očekivane vrijednosti u promatranom razdoblju, tj. koliko dobro središnja tendencija reprezentira ponašanje podataka, korisne su nam mjere disperzije koje mjere raspršenost vrijednosti numeričkih obilježja oko predikcije. Na taj način disperzija ponderirana vjerojatnostima čini jedan način mjerenja rizika. Što je veća disperzija, to je manje reprezentativna središnja tendencija što upućuje na veći rizik i lošiju predikciju za buduće kretanje cijena. Prema [10] mjere disperzije dijele se na tri klase. Prva klasa grupira zajedno mjere udaljenosti između nekih reprezentativnih vrijednosti. Drugu klasu čine mjere dobivene odstupanjem svakog podatka od referentne točke. One se nazivaju simetričnom mjerom rizika. Zadnju klasu čine sve mjere dobivene međusobnim odstupanjem svih podataka jednih od drugih.

U nastavku ćemo predstaviti neke korisne mjere disperzije.

3.1 Varijanca

Varijanca i standardna devijacija su najviše korištene mjere. Varijanca mjeri procjenu disperzije podataka oko očekivane vrijednosti.

Iz tog razloga, prije definiranja pojma varijance uvest ćemo definiciju matematičkog očekivanja (izvor: [5]).

Definicija 6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ diskretan vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na njemu. Ako red $\sum_{\omega \in \Omega} |X(\omega)| P\{\omega\}$ apsolutno konvergira, onda kažemo da slučajna varijaba X ima matematičko očekivanje i broj*

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P\{\omega\}$$

zovemo matematičko očekivanje slučajne varijable X.

Definicija 7. *Neka je X neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je konačan integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx,$$

onda kažemo da slučajna varijabla X ima očekivanje i broj

$$E[X] = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

zovemo matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable X.

Sada, prema [5], možemo definirati varijancu slučajne varijable X kao očekivano kvadratno odstupanje slučajne varijable od njezinog očekivanja.

Definicija 8. *Ako postoji $E(X - EX)^2$, onda taj broj zovemo varijanca slučajne varijable X i označavamo s $Var(X)$ ili σ^2.*

U većini slučajeva μ nije poznat te ga procjenjujemo uzoračkim očekivanjem

$$\widehat{\mu} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

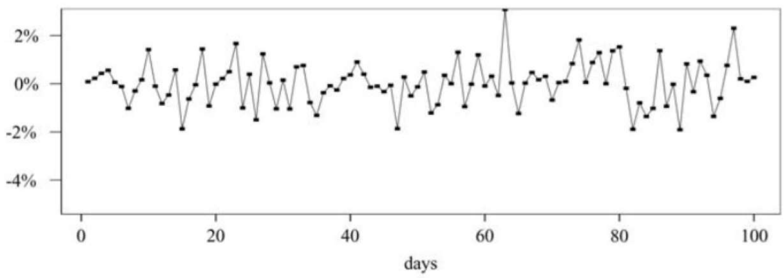
U tom slučaju nepristrani procjenitelj varijance računamo s

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \widehat{\mu})^2.$$

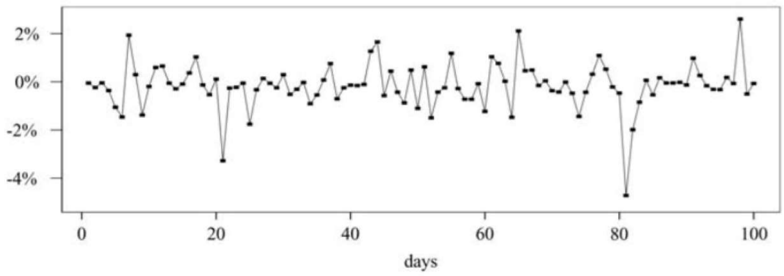
U financijama se više koristi kvadratni korijen varijance (volatilnost) i naziva se standardna devijacija. Standardna devijacija je uvijek nenegativan broj. Niska standardna devijacija ukazuje na manju varijabilnost. Zato se za vrijednosnicu čiji prinosi ne odstupaju puno od svog očekivanog prinosa kaže da nose mali rizik.

Volatilnost se pokazuje dobrom mjerom rizika samo u slučaju normalne distribucije povrata jer očekivanje i varijanca normalne distribucije u potpunosti određuju tu distribuciju [20]. Problem je što empirijske studije ne podržavaju pretpostavku o normalnoj distribuciji povrata. Zato nas volatilnost kao mjera rizika može navesti na krivi put i podcijeniti rizik. Na primjer, slika 1 prikazuje simulirane povrate za tri različite imovine koje imaju isto očekivanje i volatilnost, iako su povrati prve imovine normalno distribuirani, a povrati druge imovine dolaze iz studentove distribucije, dok su povrati treće imovine većinu vremena 0, uz povremene padove. U tom slučaju bi volatilnost kao mjera rizika jednako klasificirala sve imovine, iako su rizici različiti. Investitori će izabrati imovinu na osnovu subjektivne preferencije.

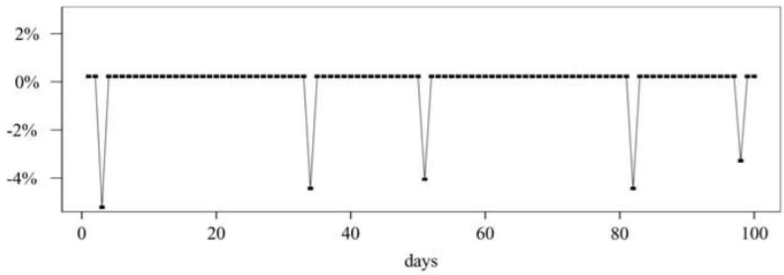
Markowitz koristi varijancu kao mjeru rizika u optimizaciji portfelja kako bi se pronašao kompromis između rizika i povrata. O tome će biti riječ u poglavlju 4.1. No u slučaju kada je distribucija povrata previše asimetrična varijanca nije dobar odabir za mjeru rizika. Alternativne mjere koje se koriste u analizi rizika su očekivano apsolutno odstupanje [17] i negativne mjere rizika (npr. polu-varijanca[14]).



(a) Normal



(b) Student-$t(3)$



(c) Jumps

Slika 1: Simulirani povrati s istom volatilnošću i očekivanjem ([6]).

3.2 Očekivano apsolutno odstupanje

Očekivano apsolutno odstupanje (MAD) [17] od središnje tendencije je formalno definirano na sljedeći način:

$$MAD_X = E(|X - m(X)|),$$

gdje $m(X)$ predstavlja odabranu središnju tendenciju, obično očekivanje, medijan ili mod slučajne varijable X.

Kako postoji više izbora središnje tendencije očekivano apsolutno odstupanje jedinstveno je određeno tek kada je određena središnja tendencija. Treba imati na umu da izbor mjere središnje tendencije, $m(X)$, ima izražen utjecaj na vrijednost očekivanog odstupanja.

Očekivano apsolutno odstupanje je najmanje kada se za srednju tendenciju izabere medijan.

Očekivano apsolutno odstupanje od očekivanja (μ) je manje ili jednako standardnoj devijaciji. To možemo dokazati iz svojstva varijance: $Var(Y) \geq 0$, koje se nalazi na 41.

stranici u knjizi [10]. Slijedi da je

$$E(Y^2) - E(Y)^2 \geq 0,$$

odnosno

$$E(Y)^2 \leq E(Y^2).$$

Uvrstimo li $Y = |X - \mu|$ dobivamo

$$E(|X - \mu|)^2 \leq E\big(|X - \mu|^2\big),$$

odnosno

$$E(|X - \mu|)^2 \leq Var(X).$$

Budući da su obje strane pozitivne, a kvadratni korijen monotono rastuća funkcija imamo:

$$E(|X - \mu|) \leq \sqrt{Var(X)}.$$

Zbog toga se ova mjera koristi kao alternativna mjera standardne devijacije. Također, postoje i distribucije u kojima se MAD može izraziti preko standardne devijacije. Na primjer, ako slučajna varijabla X ima normalnu distribuciju, $N(\mu, \sigma^2)$, onda je prema [17]

$$MAD_X = \sigma^2 \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

3.3 Poluinterkvartilni raspon

Raspon predstavlja udaljenost između najveće i najmanje vrijednosti među svim podacima, što bi investitorima moglo koristiti da vide do koje vrijednosti cijena imovine pada i raste. Što je veći raspon, veći je rizik da će vrijednost investicije pasti, no isto tako vrijednost može dosta narasti što vodi većoj zaradi. Raspon mjeri povijesnu nestabilnost cijena vrijednosnica. Promjenom cijena vrijednosnica mijenja se i raspon. Tijekom recesije cijene padaju, a samim tim raspon raste. U dugim vremenskim razdobljima, na povećanje raspona utječe promjena kamatne stope kroz promjenu cijena vrijednosnica.

Nedostatak raspona je što se najveća i najmanja vrijednost može pojaviti samo jednom ili par puta, pa ne opisuje dobro kretanje podataka unutar tog raspona. Na primjer, raspon podataka $50, 56, 65, 73, 86, 90$ je 40. Ukoliko zamijenimo 90 s 200 raspon će biti 150. Ekstremna vrijednost je uputila na dosta veću varijabilnost podataka nego što ona jest. Kako bi izbacili ekstremne vrijednosti koristimo dotjerani procjenitelj kojim eliminiramo krajnje vrijednosti izbacivanjem podataka manjih od donjeg kvartila i većih od gornjeg kvartila[1] i računamo raspon bez njih. Raspon koji daje razliku između najvišeg i najnižeg kvartila (tj. između 75. i 25. postotne vrijednosti), i stoga sadrži polovicu ukupne populacije, se naziva interkvartilni raspon [10].

Poluinterkvartilni raspon odgovara polovici interkvartilnog raspona, odnosno polovici razlike između gornjeg (Q_3) i donjeg (Q_1) kvartila, a koeficijent varijacije kvartila je interkvartilni raspon podijeljen s drugim kvartilom. Formalno, polu-interkvartilni raspon, koji mjeri disperziju, izražava se na sljedeći način:

$$SI = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

dok je koeficijent varijacije kvartila izražen na sljedeći način:

$$SI = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_2}.$$

Ekstremne vrijednosti imaju beznačajan utjecaj na polu-interkvartilni raspon pa je to dobra mjera disperzije za distribucije koje nisu simetrične. No, u slučaju normalne distribucije se ne koristi jer je podložnija fluktuacijama od standardne devijacije. Također, ova mjera rizika ne uzima u obzir gubitke koji nastaju s malom vjerojatnošću.

4 Filozofija teorije portfelja

4.1 Suvremena teorija portfelja

Polazeći od pretpostavke da ulagači nisu skloni riziku, Markowitz [15] uvodi matematički okvir za optimizaciju portfelja imovine na način da očekivani prinos bude maksimiziran s obzirom na razinu rizika. Pritom, očekivani prinos modelira matematičkim očekivanjem, a rizik standardnom devijacijom prinosa. Osnovna ideja ove teorije potječe od stare poslovice: „Ne drži sva jaja u istoj košari". Diversifikacija portfelja omogućuje smanjenje rizika kombinacijom instrumenata koji nisu savršeno kolerirani, tj. kombinacija negativno koreliranih parova s obzirom na tržište. Tako će se gubitak u jednoj imovini pokriti dobitkom druge imovine. Prema pretpostavki o izbjegavanju rizika investitori će između dva portfelja za koja očekuju isti prinos preferirati manje rizičan. Isto tako, investitor će prihvatiti povećanu izloženost samo ako će to voditi većem očekivanom prinosu.

Očekivani povrat portfelja je proporcionalno ponderirana kombinacija prinosa sastavne imovine i dan je sljedećom jednadžbom:

$$E(R_p) = \sum_i \omega_i E(R_i),$$

gdje je R_p očekivani povrat portfelja, R_i povrat imovine i, a ω_i težinski faktor i-tog

[1]Kvartili su vrijednosti koje dijele uređeni niz podataka na 4 jednaka dijela.

instrumenta u portfeju. Iznos težinskih faktora se kreće u intervalu $[0, 1]$, a zbroj svih težinskih faktora je 1. Predstavlja relativni udio vrijednosti uložene u i-ti instrument u odnosu na preostalu vrijednost instrumenata u portfelju. On je pozitivan ako posjedujemo instrument, a negativan ako smo prodali instrument i za njega dobili novac.

Varijanca povrata portfelja se definira izrazom:

$$\sigma_p^2 = \sum_i \omega_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \omega_i \omega_j \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}, \tag{1}$$

gdje je σ_i standardna devijacija povrata imovine i, a ρ_{ij} je korelacijski koeficijent između povrata imovine i i j, a $\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij}$ kovarijanca povrata dviju imovina. Ako je ω $K \times 1$ matrica težinskih faktora portfelja i Σ $K \times K$ matrica kovarijanci, onda se varijanca portfelja može zapisati u matričnom obliku:

$$\sigma_P^2 = \omega^T \Sigma \omega.$$

Varijabilnost povrata portfelja tj. odstupanje od očekivanog povrata mjeri se standardnom devijacijom povrata i dana je s:

$$\sigma_p = \sqrt{\sigma_p^2}.$$

Volatilnost portfelja je funkcija korelacije ρ_{ij} komponenti imovine za sve parove imovine (i, j). Ako su svi parovi imovine nekorelirani, tj. koeficijent korelacije je jednak 0, varijanca portfelja bi bila ponderirani zbroj kvadrata varijance povrata imovine. Samim tim bi varijanca, a time i standardna devijacija bile minimizirane. Ako je sva imovina savršeno pozitivno korelirana, onda će gubitak na jednoj imovini voditi gubitku i u drugoj imovini i to daje najveću moguću volatilnost portfelja.

Može se pokazati da je volatilnost subaditivna mjera rizika. U sljedećem primjeru, uvedenom iz [6], je to pokazano za portfelj koji se sastoji od dvije imovine.

Primjer 1. *Pretpostavimo da promatramo portfelj koji se sastoji od dvije financijske imovine, X i Y, s volatilnošću σ_X i σ_Y.*

Tada je, prema (1), varijanca portfelja jednaka

$$\sigma_P^2 = \omega_X^2 \sigma_X^2 + \omega_Y^2 \sigma_Y^2 + 2\omega_X \omega_Y \rho \sigma_X \sigma_Y.$$

Sređivanjem izraza imamo:

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= (\omega_X^2 \sigma_X + \omega_Y \sigma_Y)^2 - 2\omega_X \omega_Y \sigma_X \sigma_Y + 2\omega_X \omega_Y \rho \sigma_X \sigma_Y \\ &= (\omega_X^2 \sigma_X + \omega_Y \sigma_Y)^2 - 2\omega_X \omega_Y (1 - \rho) \sigma_X \sigma_Y. \end{aligned}$$

Kako je $2\omega_X\omega_Y(1-\rho)\sigma_X\sigma_Y > 0$ slijedi da je

$$\sigma_P \leqslant \omega_X^2\sigma_X + \omega_Y\sigma_Y.$$

4.2 Učinkovita granica

Prostor smješten u koordinatnom sustavu, kojemu x-os predstavlja standardnu devijaciju, a y-os očekivane povrate, prikazan na slici 2 ponekad se naziva prostorom „očekivanog povrata nasuprot riziku". On se sastoji od svih mogućih kombinacija rizične imovine koje se uklapaju u ovaj prostor očekivanog povrata i sačinjavaju portfelje. Optimalni portfelj formira se na način da se postavi gornja granica prihvatljivog rizika te se tada izabere portfelj koji uz zadani rizik nosi najveći prinos ili se postavi donja granica prihvatljivog prinosa portfelja i tada se iz skupa mogućih portfelja izabere onaj koji ima minimalan rizik i ta se granica naziva učinkovita granica. Portfelj koji leži na učinkovitoj granici se naziva učinkoviti portfelj. Pretpostavka koju većina menadžera portfelja smatra realnijom je da nema nerizične imovine i tada učinkovitu granicu u prostoru čini gornji dio hiperbole. Donji dio hiperbole narušava sklonost prema riziku da veći rizik treba nositi veći prinos. Desno od učinkovite granice nalaze se rizičniji portfelji za određeni nivo povrata.

Formalno, za danu razinu rizika $q \in [0, \infty)$, učinkovita granica postiže se prema [18] minimiziranjem sljedećeg izraza:

$$\omega^T \sum \omega - qR^T\omega,$$

gdje je ω vektor portfeljskih težina i $\sum_i \omega_i = 1$, $\sum$ je matrica kovarijance za prinose na imovinu u portfelju, $q \geq 0$ je faktor razine rizika, R je vektor očekivanih prinosa, $\omega^T \sum \omega$ je varijanca povrata portfelja, a $R^T\omega$ je očekivani povrat portfelja.

4.3 Teorem o dva uzajamna fonda

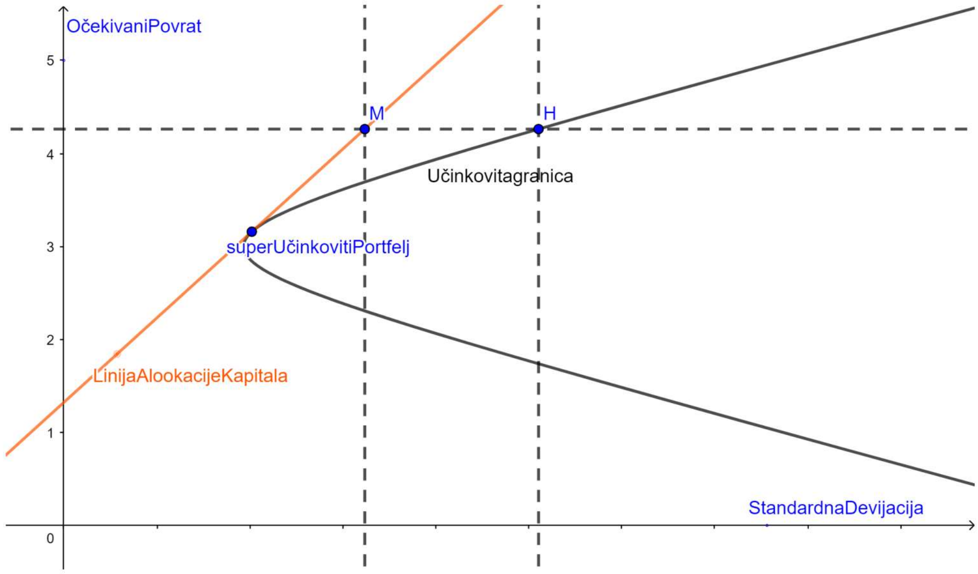
Ključan teorem ove analize je teorem o dva uzajamna fonda [18] koji kaže da se bilo koji portfelj na učinkovitoj granici može izvesti linearnom kombinacijom bilo koja dva druga portfelja koji se nalaze na granici. Dakle, u nedostatku nerizične imovine, investitor može postići bilo koji željeni učinkoviti portfelj, čak i ako je sve što je dostupno par učinkovitih portfelja. Ako je mjesto željeznog portfelja na granici između mjesta dva portfelja, oba portfelja držat će se u pozitivnim količinama. Ako je željeni portfelj izvan raspona koji pokrivaju dva portfelja, tada se jedan od portfelja mora prodati, a u drugi portfelj se mora uložiti iznos veći od dostupnog koji se financira posudbom iz drugog portfelja.

4.4 Nerizična imovina i optimalna linija alokacije kapitala

Nerizična imovina je imovina koja nosi izvjestan iznos prinosa. Primjer nerizične imovine su kratkoročni državni vrijednosni papiri jer imaju izuzetno nizak rizik neizvršenja obveza. Nerizična imovina je konstanta i nije u korelaciji niti s jednom drugom imovinom. Kao rezultat toga, kada se kombinira s drugom imovinom ili portfeljom imovine, promjena povrata linearno je povezana s promjenom rizika portfelja jer su udruženi u kombinaciji što nam govori svojstvo translacijske invarijantnosti mjera rizika. Kombinacijom nerizične imovine s portfeljom na učinkovitoj granici može se konstruirati portfelj s boljim profilom povrata u odnosu na rizik od profila koji ima sam portfelj na učinkovitoj granici.

Uvođenjem nerizične imovine učinkovita granica postaje tangenta na učinkovitu granicu koja prolazi očekivanim povratom nerizične imovine na y-osi i naziva se optimalna linija alokacije kapitala (CAL). Dodirna točka tangente s učinkovitom granicom rizične imovine odgovara portfelju na učinkovitoj granici koji se naziva super-učinkovit portfelj, a u točki tangente koja siječe y-os se nalazi portfelj od nerizične imovine. To je prikazano na slici 2. Na liniji između te točke i super-učinkovitog portfelja se nalaze učinkoviti portfelji koji su linearna kombinacija nerizičnog instrumenta i super-učinkovitog portfelja. Desno od tangencijalne točke se nalaze tzv. portfelji s polugom. To su portfelji koje je moguće generirati samo ako investitor posudi novac, tj. proda nerizičnu imovinu, npr. obveznice, i za njih dobije nerizičnu stopu koju onda uloži u rizične instrumente.

Prednost kombinacije nerizične imovine i portfelja na hiperboli je ta što rizik više nije onaj s rizične učinkovite granice (točka H na slici 2) nego onaj koji pripada liniji alokacije kapitala (točka M na slici 2), dok očekivani povrat ostaje nepromijenjen. Dakle, zaključujemo da su portfelji na učinkovitoj granici kombinirani s nerizičnom imovinom superiorniji od onih bez nerizične imovine u smislu smanjenja rizika. Investitori neskloni riziku ulagat će više u nerizičnu imovinu i biti više na lijevoj strani CAL linije, dok će oni spremniji više riskirati biti na desnoj strani i kao nagradu dobiti veći očekivani povrat. Detaljnije možete pronaći u [18].



Slika 2: Učinkovita granica.

4.5 Sharpe-ov omjer

Mjera koja se koristi za pronalaženje najboljeg portfelja na učinkovitoj granici, tzv super-učinkovitog portfelja, je Sharpe-ov omjer. On je jednak nagibu CAL linije [18]. Što je veći nagib, to je veća stopa povrata. Stoga, pri odabiru najboljeg portfelja na učinkovitoj granici biramo onaj s najvećim Sharpe-ovim omjerom.

Sharpe-ov omjer se izračunava na sljedeći način:

$$S(P) = \frac{E(R_P - R_F)}{\sigma_P},$$

gdje je R_P očekivana stopa povrata super-učinkovitog portfelja rizične imovine, R_F stopa bez rizika, a σ_P standardna devijacija portfelja. Linearna kombinacija tog portfelja s nerizičnom imovinom će nam dati najveći mogući očekivani povrat koji se računa kako slijedi:

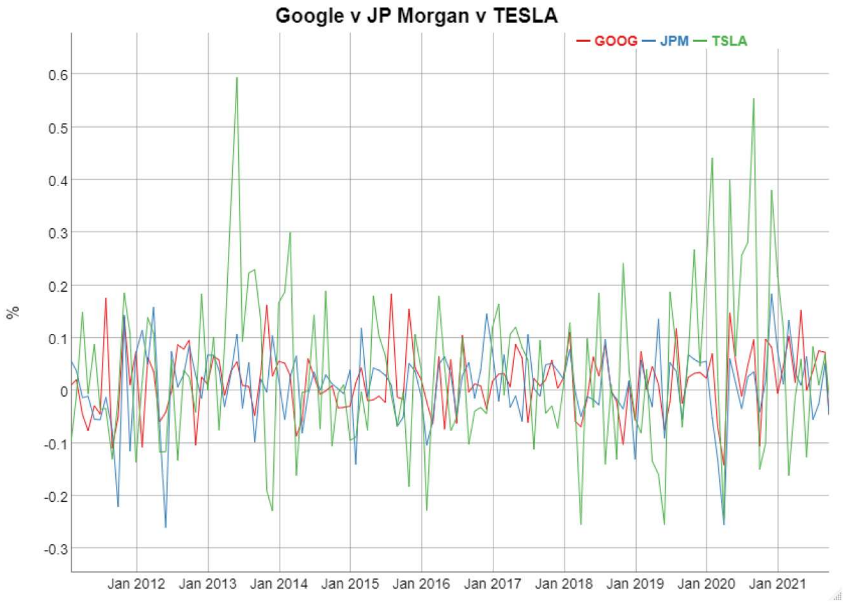
$$E(R_C) = R_F + \sigma_C \frac{E(R_p - R_F)}{\sigma_P}.$$

U ovoj je formuli C kombinacija portfelja P i F.

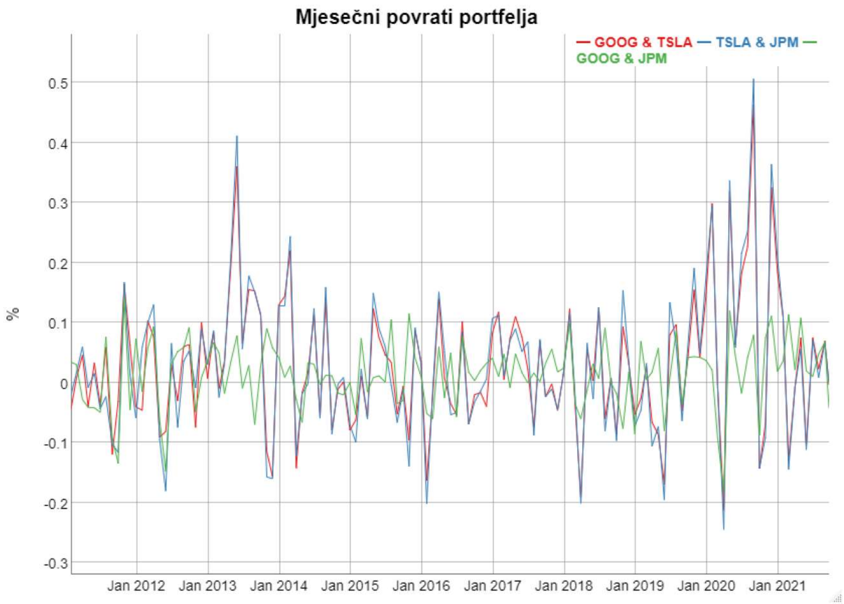
Sharpe-ov omjer implicitno smatra potencijal za veliki dobitak i veliki gubitak podjednako nepoželjnim jer minimizira potencijal za gubitak, ali također minimizira i potencijal za dobit [13].

Primjer 2. *Pretpostavimo da želimo formirati portfelj ulaganjem u dionice dviju tvrtki. Biramo između tvrtki Google, JP Morgan i Tesla. Kretanje mjesečnih log-povrata cijena dionica te tri tvrtke, u razdoblju od 2011. do 2021. godine, su vidljive na slici 3. Kako bismo izabrali optimalan portfelj promotrili smo tri portfelja. Prvi se sastoji od dionica Google-a i Tesle, drugi od dionica JP Morgan i Tesle, a treći čine dionice Google-a i*

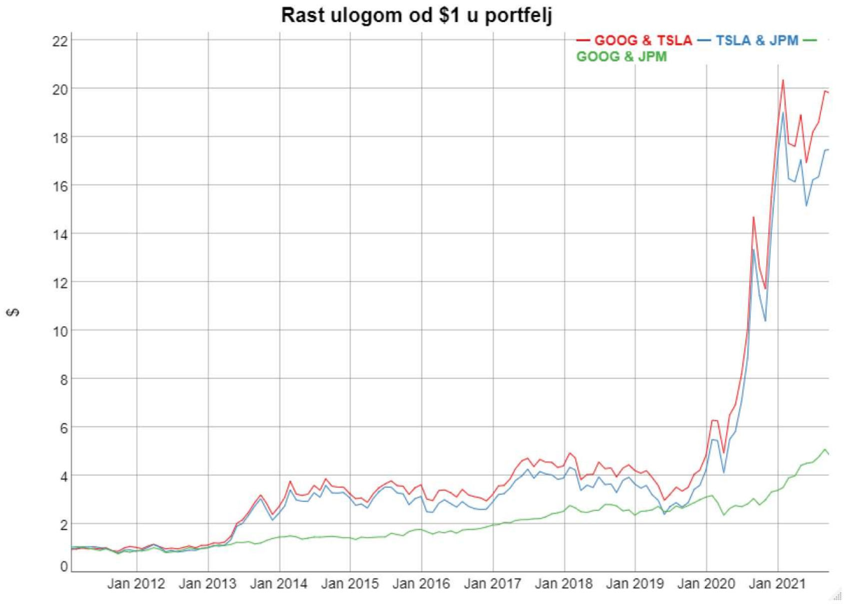
JP Morgana (slika 4). Udio dionica pojedinih tvrtki u portfeljima je jednak. Na slici 5 je prikazan rast \$1 uloženog u pojedine portfelje gdje uočavamo da se tijekom cijelog promatranog razdoblja najisplativiji pokazao portfelj koji je formiran od dionica Google-a i Tesle. Vrijednost Sharpe-ovog omjera za ta tri portfelja redom iznosi 0.2593, 0.2363, 0.2406. Pri tom izračunu, uzeli smo stopu bez rizika od $0,03\%$ kao približnu očekivanu vrijednost jednomjesečne stope trezorskog zapisa od 2010. godine. Sharpe-ov omjer nam potvrđuje da je najbolji portfelj sastavljen od dionica tvrtki Google-a i Tesle.



Slika 3: Kretanje mjesečnih log-povrata dionica Google-a, JP Morgana i Tesle.



Slika 4: Kretanje vrijednosti tri portfelja.



Slika 5: Rast \$1 uloženog u pojedine portfelje.

5 Mjere rizika negativnog odstupanja

U poglavlju 3, opisivane su mjere koje mjere odstupanja u oba smjera, i gubitke i dobitke. Međutim, investitore više zanimaju rizici gubitka, tj. negativna odstupanja od očekivanog prinosa. Za razliku od mjera disperzije, mjere rizika negativnog odstupnja dobro hvataju asimetrične podatke kod iskrivljenih distribucija. Stoga se koriste kao mjere rizika kako bi se poboljšao odabir optimalnog portfelja.

5.1 SFRatio

Kada investitori ulažu u neku imovinu mogu odrediti koliki najmanji prinos bi željeli ostavariti na tu imovinu te pomoću SFratia vidjeti koja imovina to zadovoljava. Mjera pod nazivom *Sigurnost na prvom mjestu* (eng. Safety-first) je mjera koja postavlja minimalni prihvatljivi povrat za danu razinu rizika. On određuje vjerojatnost da će prinosi portfelja pasti ispod njihovog minimalnog praga željene vrijednosti i tako omogućuje ulagačima da uspoređuju potencijalna portfeljska ulaganja. Ako se pretpostavi da razmatrani povrati imaju normalno distribuirane povrate kriterij Sigurnost na prvom mjestu se prema [10] može svesti na maksimiziranje sljedećeg izraza:

$$SFRatio_i = \frac{E(R_i - \underline{R})}{\sqrt{Var(R_i)}},$$

gdje je $E(R_i)$ očekivani povrat portfelja, $\underline{R}$ je minimalni prihvatljivi povrat, a $\sqrt{Var(R_i)}$ je standardna devijacija povrata.

Optimalni portfelj bit će onaj koji minimizira vjerojatnost da će gubitak pasti ispod granice, tj. onaj koji ima najveći SFRatio.

5.2 Polu-varijanca

Markowitz [14] uvodi novu metriku po imenu polu-varijanca koja odgovara očekivanom kvadratu odstupanja negativnih vrijednosti od očekivane. Polu-varijanca je formalno definirana na sljedeći način:

$$\textit{polu-varijanca} = \frac{1}{n}\sum_{r_t>\mu}^{n}(\mu - r_t)^2.$$

Ovdje n označava ukupun broj opažanja ispod očekivane vrijednosti μ, a r_t je opažena vrijednost. Ako je pretpostavka da su povrati normalno distribuirani onda je polu-varijanca višekratnik varijance i nema prednosti u njenom korištenju jer ne daje nove informacije. No, većina financijskih povrata nije normalno distribuirana, a naročito ne one s dugim periodom držanja pa upotreba polu-varijance može donijeti informacije koje varijanca ne može.

Dva koncepta slična ovoj definiciji su odrezana varijanca koja se definira kao standardna devijacija samo od negativnih vrijednosti i donja granica pouzdanosti [3] koja se još naziva standardna devijacija korigirane srednje vrijednosti [9]. Baumolov rad [3] smatra da je standardna devijacija trebala biti povezana s očekivanim prinosom, stoga je u radu predložio izmjenu Markowitzovog pristupa na temelju standardne devijacije. Ova mjera je dana očekivanim prinosom umanjenog za standardnu devijaciju k puta. Prednost ove mjere je što se može povezati s ulagačevom preferencijom rizika.

Stone [19] je 1973. godine razvio opću klasu troparametarskih mjera rizika:

$$R_S[Y_0, k, A](f) = \left(\int_{-\infty}^{A} |y - Y_0|^k f(y)dy\right),$$

gdje su Y_0, k i A realni brojevi i $k > 0$. Ona obuhvaća neke prethodno spomenute mjere rizika. Tako, mjeru varijance dobijemo za $k = 2, A = +\infty$, a za Y_0 uzmemo vrijednost očekivanog povrata μ, polu-varijance za iste vrijednosti od k i Y_0, a $A = \mu$. Ako stavimo $A = +\infty, k = 2$ dobivamo pogrešku praćenja. Prag od kojega se računaju odstupanja može biti očekivanje, mod, medijan ili bilo koji drugi prag koji je koristan za donošenje odluka u investiranju. Kako bi obuhvatio i mjeru rizika poput standardne devijacije Stone je predložio drugu klasu k-tog korijena ove mjere. Glavni nedostatak opće klase je da rizik nije uvijek „monotono rastuća funkcija" od k, te se stoga možemo suočiti sa situacijama u kojima je averzija prema riziku veća za niže vrijednosti k. Bawa [4] (1975.) i Fishburn [8] (1977.) su predložili adaptivnu mjeru, nižih parcijalnih momenata, smanjenjem broja parametara na dva tako što su postavili parametar raspona k jednak pragu Y_0 od kojeg se računaju odstupanja. U slučaju da su ulagači skloni riziku pridavat će veći značaj velikim odstupanjima i tada će odabrati koeficijent k veći od 1. Ukoliko su neutralni prema riziku k će biti jednak 1, a ako ne vole riskirati izabrat će k manji od 1. Upotreba varijance ima važnu ulogu u modeliranju rizika, no u praksi je teško upotrebljiva zbog nedostatka konačnog drugog momenta.

Primjer 3. *Za sve iste portfelje kao u primjeru 2 izračunat ćemo vrijednosti polu-varijance u programskom jeziku R. Za portfelj sastavljen od dionica Google-a i Tesle polu-varijanca iznosi 0.0974, za portfelj kojeg čine dionice JP Morgana i Tesle iznosi 0.1096, a za portfelj kojem pripadaju dionice Google-a i JP Morgana polu-varijanca je jednaka 0.0633. Polu-varijanca je najveća za portfelj sastavljen od dionica JP Morgana i Tesle, ali sve vrijednosti su približno jednake.*

5.3 Omjer Sortino

Negativno odstupanje [11] predstavlja drugi korijen vjerojatnošću ponderiranih kvadriranih povrata ispod ciljnog. Kvadriranje ispodciljnog povrata kvadratno kažnjava gubitke. Negativno odstupanje matematički zapisujemo pomoću sljedećeg izraza

$$d = \sqrt{\int_{-\infty}^{t} (t-r)^2 f(r) dr},$$

gdje je t ciljni povrat, r slučajna varijabla koja predstavlja povrate, a $f(r)$ je distribucija povrata.

To se koristi u izračunu Sortino omjera kako slijedi:

$$\frac{r-t}{d}.$$

U prethodnom izrazu r predstavlja stopu povrata, t ciljni povrat, a d negativno odstupanje. Sortino omjer mjeri prinos prilagođen riziku investicijskog sredstva, portfelja ili strategije i na taj način procjenjuje povrat na investiciju s obzirom na danu razinu lošeg rizika (negativnog odstupanja). Pri usporedbi dvije investicije investitor će preferirati onu s većim Sortino omjerom.

Primjer 4. *Za portfelje iz primjera 2 izračunat ćemo vrijednosti omjera Sortino za mjesečne povrate. Pri tom ćemo odabrati ciljni mjesečni povrat $t = 0.03\%$. Za portfelj sastavljen od dionica Google-a i Tesle omjer iznosi 0.5302, za portfelj kojeg čine dinice JP Morgana i Tesle iznosi 0.4647, a za portfelj kojem pripadaju dionice Google-a i JP Morgana omjer je jednak 0.3774. Rezultati nam sugeriraju jednaku odluku kao i Sharpe ratio.*

Primjer 5. *Pretpostavimo da dionica X ima godišnji povrat od 14%, a negativno odstupanje 12%, dok dionica Y ima godišnji povrat od 12%, a negativno odstupanje od 8%. Ciljni povrat iznosi 3%. Sortino omjer za obe dionice iznosi:*

$$Sortino_X = \frac{14-3}{12} = 0.92, \quad Sortino_Y = \frac{12-3}{8} = 1.13.$$

Iako dionica X daje 2% veći godišnji prinos, ona taj povrat ne zarađuje jednako učinkovito kao dionica Y zbog različitih negativnih rizika i zbog toga je bolje ulaganje u dionicu Y na temelju ove metrke.

5.4 Omega

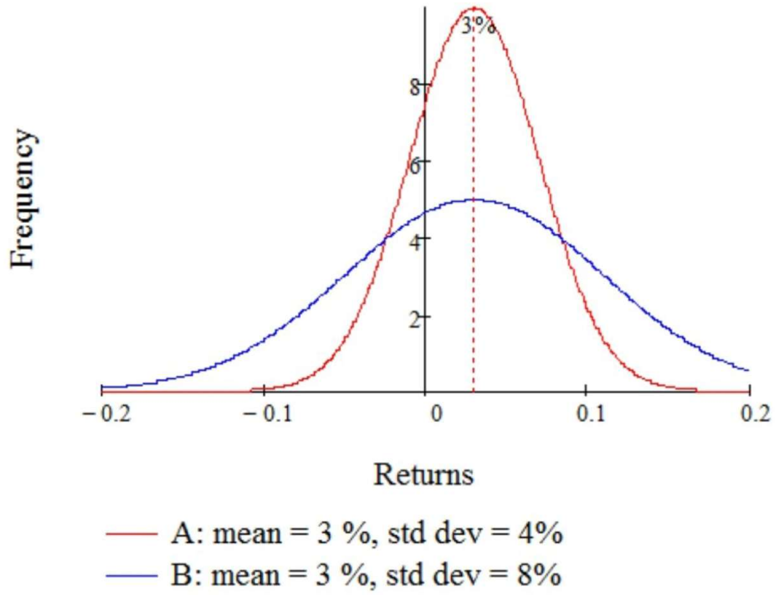
Nedostatci u mjerenju rizičnosti portfelja javljaju se zbog empirijske činjenice da povrati nisu normalno distribuirani te samim tim njihova distribucija nije u potpunosti određena očekivanjem i varijancom. Za potpuni opis povrata potrebno je u izračun uključiti više momente koji će pružiti potpunu karakterizaciju povrata i rizika, a to nam omogućuje mjera Omega koja se prema [13] računa kao

$$\Omega(\alpha) = \frac{\int_\alpha^b [1 - F_X(x)]dx}{\int_a^\alpha F_X(x)dx},$$

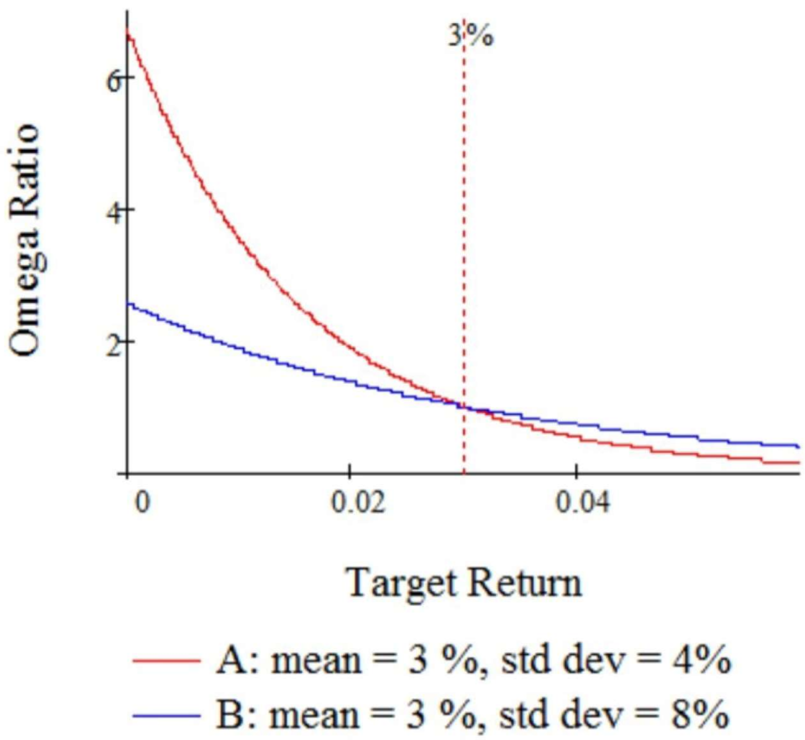
gdje je $-\infty < \alpha < \infty$ minimalni prihvatljivi prinos investitora, dok a i b označavaju donju i gornju krajnju granicu vrijednosti povrata X. Ω je glatka monotona funkcija koja interval (a, b) preslikava na interval $(0, \infty)$. Vrijednost Omega za $\alpha = E(X)$ je uvijek 1, neovisno o distribuciji. Prednost ove mjere je prema [11] da uzima u obzir cijelu distribuciju povrata i da klasificira ishod kao dobitak ili gubitak u odnosu na željenu razinu povrata α, a ne u odnosu na očekivanu vrijednost povrata. Omega se može procjeniti na bilo kojoj vrijednosti u rasponu mogućih povrata, te tako omogućuje usporedbu učinka s obzirom na bilo koji prag rizika u promatranom rasponu. Pri usporedbi dva portfelja na osnovu ove mjere, investitor će preferirati onaj koji ima veću vrijednost mjere [11] s obzirom na dani α.

Da bismo lakše uvidjeli da izbor investicija s obzirom na omjer Omega ovisi o izboru željenog povrata uvodimo idući primjer.

Primjer 6. *Razmotrimo dvije investicije A i B, koje imaju jednako očekivanje od 3 %, a standardne devijacije su 4 % i 8 %, redom. Njihove gustoće su prikazane na slici 6. Sharpe-ov omjer favorizira investiciju A jer ona ima nižu volatilnost. Međutim, promatrajući omjer Omega, prikazan na slici 7, preferencija investicije A u odnosu na B glatko opada kako se minimalni prihvatljivi povrat približava zajedničkom očekivanju od 3 %, a nakon toga prednost investicije B naspram A je u stalnom porastu jer ima veliku vjerojatnost da će ostvariti povrat od 3 % ili više.*



Slika 6: Funkcija gustoće za dvije investicije, A i B, s jednakim očekivanjem ([21]).



Slika 7: Omega za investicije A i B kao funkcija povrata r ([21]).

6 Kvantilne mjere rizika

6.1 Value at Risk

Value at risk (VaR) je jedna od najpoznatijih mjera rizika koja ne ovisi o distribuciji povrata. Ono što je bitno je da je definirana očekivana vrijednost povrata. Nastala je početkom 1990-ih godina kao rezultat velike financijske krize koju nije bilo moguće predvidjeti dotadašnjim statističkim metodama. Početna primjena VaR metodologije je bila kvantificiranje tržišnog rizika koja se vremenom proširila i na druge vrste rizika kao što su rizik likvidnosti i operativni rizik. Value at Risk se definira kao minimalni gubitak tijekom određenog razdoblja za danu vjerojatnost p. Financijske institucije ju koriste za procjenu rizika, a regulatorni odbori za postavljanje zahtjeva za maržu. U oba slučaja, VaR se koristi kako bi se osiguralo da financijske institucije mogu poslovati i nakon katastrofalnog događaja jer VaR zapravo daje „najbolje u najgorem slučaju".

U nastavku je dana vjerojatnosna definicija VaR-a preuzeta iz [20]. Pretpostavimo da nas u trenutku t zanima rizičnost financijskog portfelja φ u budućih l perioda. Neka je $\triangle V_\varphi(l)$ slučajna varijabla koja modelira promjenu vrijednosti pozicije čija nas rizičnost zanima u intervalu $\langle t, t+l]$. Ona se izražava u novčanim jedinicama. Označimo s $F_l(x)$ funkciju distribucije slučajne varijable $\triangle V_\varphi(l)$ te definiramo VaR u periodu l u slučaju long i short pozicije.

Definicija 9. *U slučaju posjedovanja imovine čija nas rizičnost zanima (long pozicija) VaR u intervalu $\langle t, t+l]$ s vjerojatnošću $p \in \langle 0, 1\rangle$ definiran je na sljedeći način:*

$$p = P(\triangle V_\varphi(l) \leq VaR(p)) = F_l(VaR(p)).$$

Dakle, vjerojatnost da investitor koji posjeduje financijski poziciju u intervalu $\langle t, t+l]$ pretrpi gubitak veći od $VaR(p)$ je najviše p. Definicija VaR-a u konceptu long pozicije pokazuje da je vrijednost VaR-a vezana uz lijevi rep funkcije distribucije F_l, a oznaka $Var(p)$ naglašava ovisnost VaR-a o vjerojatnosti p. Investitor u long poziciji trpi gubitak kada je $\triangle V_\varphi(l) < 0$ pa $VaR(p)$ obično poprima negativnu vrijednost za malu vjerojatnost p.

Definicija 10. *U slučaju short pozicije, tj. kada ne posjedujemo imovinu čija nas rizičnost zanima, VaR je vezan uz desni rep funkcije distribucije i definiran je na sljedeći način:*

$$p = P(\triangle V_\varphi(l) \geq VaR(p)) = 1 - P(\triangle V_\varphi(l) \leq VaR(p)) = 1 - F_l(VaR(p)).$$

U ovom slučaju investitor trpi gubitak kada je $\triangle V_\varphi(l) > 0$. $VaR(p)$ u konceptu short pozicije poprima pozitivnu vrijednost za malu vjerojatnost p.

Možemo primijetiti da se definicija 9 može koristiti za definiranje VaR-a u slučaju short pozicije promatranjem negativne promjene vrijednosti imovine, $\triangle V_{\varphi}(l)$.

Definicija 11. *Za funkciju distribucije $F_l(x)$ i danu vjerojatnost p, koja zadovoljava $0 < p < 1$, izraz*

$$x_p = inf\{x|F_l(x) \geq p\}$$

se naziva p-ti kvantil distribucije $F_l(x)$.

Ako je $F_l(x)$ funkcija distribucije neprekidne slučajne varijable tada je p-kvantil jednak realnom broju x_p za kojeg vrijedi $P(X \leqslant x_p) = p$.

Prema [2] ako znamo funkciju distribucije, $F(x)$, te ako postoji inverz slučajne varijable X onda se p-kvantil može računati kao

$$x_p = F^{-1}(p). \tag{2}$$

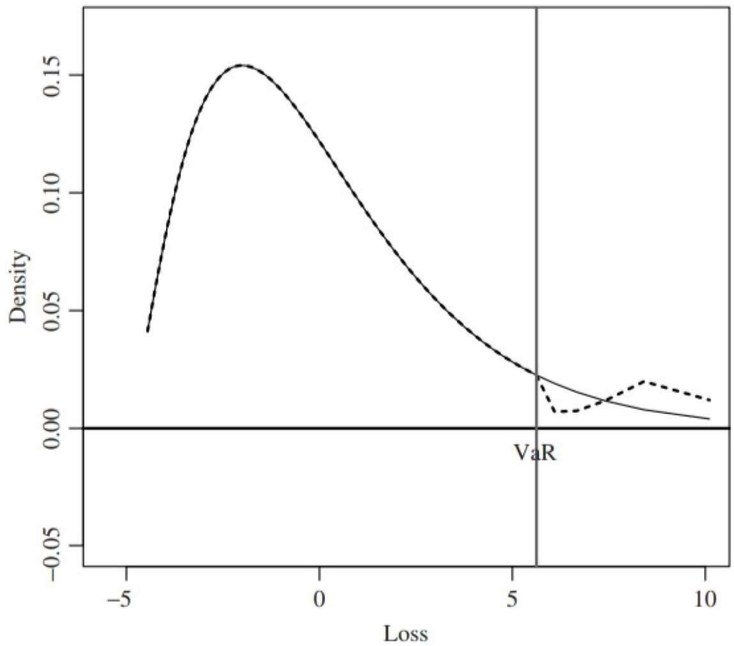
Ako je slučajna varijabla $\triangle V_{\varphi}(l)$ neprekidna, onda je $p = P[\triangle V_{\varphi}(l) \leqslant x_p]$. Prema tome, $VaR(p)$ je p-ti kvantil funkcije distribucije F_l. Matematički to možemo zapisati ovako:

$$\int_{-\infty}^{VaR(p)} f_l(x)dx = p.$$

Nedostatak Var-a je što ne opisuje stvarno repno ponašanje slučajne varijable, odnosno zanemaruje rizik velikih, iznenadnih gubitaka. To vidimo na slici 8 koja prikazuje funkcije gustoće dvije slučajne varijable gubitka koje imaju isti VaR za dani p. Funkcije gustoće su jednake za $x \leq VaR$, ali različite za $x > VaR$, tj. varijable imaju različito repno ponašanje, što znači da će stvarni rizici dviju varijabli gubitka biti različiti, iako imaju isti VaR. Također, VaR-om se može manipulirati. Njegova vrijednost se može smanjiti pomoću odgovarajućih strategija trgovanja opcijama ili smanjenjem držanja rizične imovine. Na primjer, ako želimo da VaR koji iznosi VaR_0 bude VaR_1 tako da je $0 \geq VaR_1 \geq VaR_0$, to se može postići prodajom put opcije s cijenom dospijeća nižom od $-VaR_0$ i kupnjom put opcije s cijenom dospijeća višom od $-VaR_1$, ali to smanjenje VaR-a je samo prividno smanjenje rizika koje će u konačnici rezultirati smanjenjem očekivanog profita i povećanjem rizika od gubitka.

Kako stvarna funkcija distribucije u praksi nije poznata, procjena VaR-a je usko povezana s procjenom funkcije distribucije i njezinih kvantila. Pri procjeni VaR-a usmjeravamo se na procjenu funkcije distribucije log-povrata varijable gubitka za određeno razdoblje držanja jer log-povrati približno odgovaraju postotnim promjenama vrijednosti financijske imovine. Ako tu promjenu želimo izraziti u novčanim jedinicama, onda tu postotnu procjenu VaR-a množimo s vrijednošću portfelja.

VaR se može koristiti za kvantificiranje različitih vrsta imovine te je stoga dobar za njihovu usporedbu. Ukoliko želimo usporediti rizičnost različitih portfelja koristeći VaR moramo uzeti jednake vjerojatnosti p i jednake duljine l vremenskih perioda da bi osigurali usporedivost VaR-ova.



Slika 8: Funkcija gustoće dvije slučajne varijable koje imaju isti VaR ([22]).

Prednost ove mjere je što se jednostavno i lako može izračunati za neke dobro poznate distribucije kao što su normalna distribucija, studentova i standardizirana studentova distribucija [22]. VaR ne poštuje uvijek svojstvo subaditivnosti te stoga nije koherentna mjera. No, to svojstvo nije zadovoljeno samo u slučaju prevelikog repnog odstupanja.

VaR za normalno distribuirane povrate

Najčešća pretpostavka je da su povrati normalno distribuirani. Stoga ćemo izvesti formulu za izračun VaR-a uz pretpostavku da su povrati dnevnih cijena X normalno distribuirani, tj.

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Tada se problem procjene VaR-a svodi na procjenu kvantila. Prema definiciji p-kvantila je $P(X \leqslant x_p) = p$. Koristeći standardizaciju imamo:

$$\begin{aligned} P(X \leqslant x_p) &= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leqslant \frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) \\ &= P\left(Z \leqslant \frac{x_p-\mu}{\sigma}\right), \end{aligned}$$

gdje je $Z \sim N(0,1)$.

Iz $P(X \leqslant x_p) = p$ slijedi da je

$$P\left(Z \leqslant \frac{x_p-\mu}{\sigma}\right) = p.$$

Ako s $\Phi(\cdot)$ označimo funkciju distribucije standardiziranih normalnih povrata Z, imamo prema (2):

$$P(Z \leqslant \Phi^{-1}(p)) = p,$$

pa je

$$\frac{x_p-\mu}{\sigma} = \Phi^{-1}(p) \Rightarrow x_p = \Phi^{-1}(p)\sigma + \mu.$$

Iz $-VaR(p) = x_p$ i $\Phi^{-1}(p) = -\Phi^{-1}(1-p)$ [2] slijedi da je

$$VaR(p) = \Phi^{-1}(1-p)\sigma - \mu. \tag{3}$$

Ovako dobivena procjena VaR-a je izražena u postotnoj vrijednosti, a ako ju želimo izraziti u novčanim jedinicama onda tu postotnu vrijednost pomnožimo s vrijednošću portfelja φ, koju ćemo označiti s ϑ.

Ako su povrati cijena imovine normalno distribuirani s očekivanjem 0 onda je $\Phi^{-1}(0.05) = 1.64$ i $\Phi^{-1}(0.01) = 2.326$, pa je

$$VaR(0.05) = 1.64\sigma\vartheta,$$

$$VaR(0.01) = 2.33\sigma\vartheta.$$

U slučaju kada je slučajna varijabla gubitka normalno distribuirana, monotonost, pozitivna homogenost i nepromjenjivost translacije vrijede iz svojstava, a subaditivnost ćemo provjeriti u nastavku koristeći dvije normalne slučajne varijable s očekivanjm 0, $X \sim N(0,\sigma_x^2), Y \sim N(0,\sigma_y^2)$, kojima je p-ti kvantil tj. VaR jednak $z_p\sigma_x, z_p\sigma_y$, redom.

$$
\begin{aligned}
Var(X+Y) &= Var(X)+Var(Y)+2Cov(X,Y) \\
&= \sigma_x^2+\sigma_y^2+2\rho\sigma_x\sigma_y \\
&\leq \sigma_x^2+\sigma_y^2+2\sigma_x\sigma_y \\
&= (\sigma_x+\sigma_y)^2,
\end{aligned}
$$

gdje je ρ korelacija između X i Y i vrijedi da je $\rho \leq 1$. Pomnožimo li gornju nejednakost sa z_p dobivamo

$$
z_p\sigma_{x+y} \leq zp\sigma_x + zp\sigma_y
$$

i time zaključujemo da je VaR normalno distribuirane slučajne varijable koherentna mjera rizika.

Neparametarska procjena VaR-a pretpostavlja da distribucija log-povrata nije unaprijed pretpostavljena. VaR se procjenjuje p-tim kvantilom empirijske funkcije distribucije povrata. Empirijska distribucija je bliska teorijskoj kada imamo velik uzorak log-povrata i tada je ovaj pristup pogodan za procjenu.

Primjer 7. *Pretpostavimo da posjedujemo dionice tvrtke Apple u vrijednosti od* \$20000. *Zanima nas jednodnevni* $VaR(p)$ *za* $p = 0.05$. *VaR(0.05) ćemo procijeniti 0.05-kvantilom empirijske distribucije 252 dnevna log-povrata u razdoblju od* 19.08.2020. *do* 19.08.2021. *godine. Dnevni povrat manji ili jednak od* -0.03300155 *pojavio se u samo* 5% *promatranih dana. Za vrijednost dionica od* \$20000 *procjenjujemo da vjerojatnost da se realizira dnevni gubitak veći ili jednak* \$660.03 *iznosi 0.05.*

Parametarska procjena VaR-a se najčešće temelji na pretpostavci da su log-povrati normalno distribuirani jer je ona potpuno određena očekivanjem i varijancom. Može se pretpostaviti i neka druga distribucija koja pripada nekoj parametarskoj familiji neprekidnih distribucija.

Primjer 8. *Pretpostavimo da posjedujemo dionice tvrtke Apple u vrijednosti od* \$20000 *u istom periodu kao i u prethodnom primjeru. Zanima nas jednodnevni* $VaR(p)$ *za* $p = 0.05$. $VaR(0.05)$ *procjenjujemo kao* 0.05*-kvantil normalne distribucije za čije parametre uzimamo uzoračko očekivanje i varijancu log-povrata. Dnevni povrat manji ili jednak od* -0.03227703 *pojavio se u samo* 5% *promatranih dana. Za vrijednost dionica od* \$20000 *procjenjujemo da u* 95% *slučajeva dnevni gubitak neće biti veći od* \$645.54.

6.2 Očekivani gubitak

Očekivani gubitak (ES) [6] je mjera rizika ekstremnih gubitaka. On predstavlja nadogradnju VaR metodologije jer daje odgovor na pitanje „Koliki je očekivani gubitak ako se realizirao gubitak veći od VaR-a?" [20]. To je prikazano na slici 9 gdje je razlika između VaR i ES prikazana kao funkcija $1 - \alpha$. Superiorniji je od VaR-a jer kvantificira rizik u repu distribucije.

Definicija 12. *Neka je Q varijabla kojom modeliramo gubitak. Očekivani gubitak je uvjetno očekivanje od Q uz uvjet da je taj gubitak manji od $VaR(p)$,*

$$ES = E(Q|Q \leq VaR(p)). \tag{4}$$

Kako bismo izveli matematički izraz za ES moramo prvo odrediti funkciju gustoće. Vrijedi:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_q(x)dx = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{VaR(p)} f_q(x)dx = p,$$

što znači da je područje ispod $f_q(\cdot)$ u intervalu $[-\infty, VaR]$ manje od 1 i to nije odgovarajuća funkcija gustoće.

Kako je

$$1 = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{VaR(p)} f_q(x)dx,$$

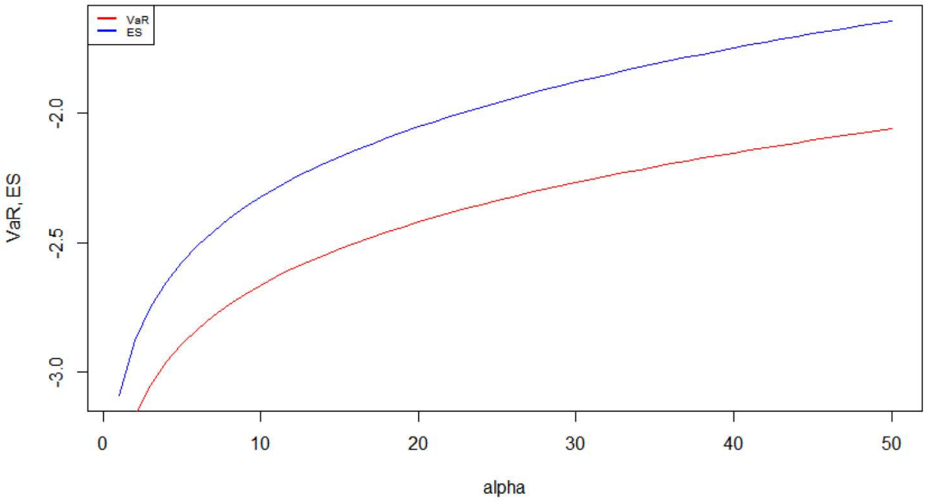
slijedi da je odgovarajuća repna gustoća jednaka $f_{VaR} = \frac{1}{p} f_q(x)$. Sada je

$$ES = \int_{-\infty}^{VaR(p)} x f_{VaR}(x)dx.$$

Očekivani gubitak je koherentna mjera rizika, zahtjeva velik broj opažanja kako bi dao pouzdan rezultat i osjetljiviji je na greške u opažanjima od VaR metodologije. Također, ovisi od modela korištenog za izračun podataka u repu distribucije.

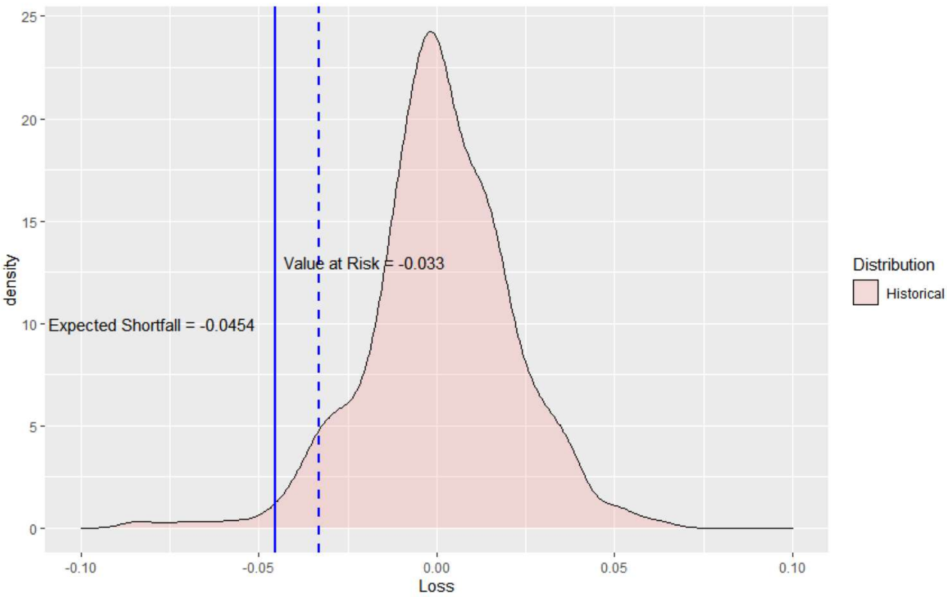
Uz pretpostavku o normalnosti povrata VaR nema problema u procjenjivanju repnog rizika. To odražava činjenica da se repovi normalne distribucije smanjuju velikom brzinom. Štoviše, omjer ES i VaR-a konvergira ka 1 kako se razina pouzdanosti povećava te VaR daje istu informaciju o gubitku repa kao i ES [6]. Također, vrijedi pretpostavka o subaditivnosti jer su VaR i ES višekratnici standardne devijacije, pa je VaR u tom slučaju koherentna mjera rizika i ES nema prednosti u odnosu na nju.

Primjer 9. *Za podatke iz primjera 7 u programskom jeziku R smo izračunali očekivani gubitak za $p = 0.05$ i dobili $ES = -0.04543872$. Očekivani gubitak za vrijednost dionica od \$20000 iznosi 908,7744.*



Slika 9: Usporedba mjera rizika ES i VaR pod pretpostavkom normalno raspoređene dobiti/gubitka pri različitim vrijednostima α.

Na slici 10 možemo vidjeti da je ES pokupio gubitke koje VaR nije.



Slika 10: Vrijednost VaR-a i ES za dionice tvrtke Apple u razdoblju od 19.08.2020. do 19.08.2021. godine.

6.3 ES za normalno distribuirane povrate

Neka su povrati cijena, npr., normalno distribuirani s očekivanjem 0 i varijancom σ^2 i neka je vrijednost portfelja čija nas rizičnost zanima jednaka jedan. Očekivani gubitak se računa prema [20] kako slijedi:

$$\begin{aligned}
ES &= \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{VaR(p)} x\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]dx \\
&= \frac{1}{p}\left[-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right]\right]_{-\infty}^{VaR(p)} \\
&= -\frac{\sigma^2}{p}\phi\left(\frac{VaR(p)}{\sigma}\right),
\end{aligned}$$

gdje je $\phi(\cdot)$ funkcija gustoće $N(0,1)$ distribucije.

6.4 Vremensko pravilo kvadratnog korijena

U praksi je najčešće razdoblje držanja dnevno, ali ono može biti i kraće ili dulje od jednog dana. Unutardnevno modeliranje VaR-a je značajno teže od dnevnog jer se moraju uzeti u obzir unutardnevne cijene koje zahtijevaju previše izvora podataka, što može biti skupo i može sadržavati dosta pogrešaka [6]. Modeliranje VaR-a s razdobljima držanja duljim od jednog dana je također zahtjevno jer procjenjujemo događaje koji se rijetko događaju. S 1% VaR-a imamo samo jedno zapažanje događaja od interesa od njih 100. Za točnu procjenu rizika potrebno je barem nekoliko stotina opažanja. Za razdoblje od 10 dana to znači najmanje 3000 trgovačkih dana, ili oko 12 godina. Unatoč tome, Baselski sporazumi zahtijevaju od financijskih institucija modeliranje rizika koristeći 10-dnevni period držanja. Kako bi se modelirali višednevni rizici koriste se zakoni skaliranja [6]. Jedan način skaliranja jednodnevnog VaR-a na višednevne je pomoću vremenskog pravila kvadratnog korijena. Prema njemu statističke mjere, poput volatilnosti ili VaR-a, dobiju se množenjem jednodnevne vrijednosti mjere s kvadratnim korijenom perioda držanja k.

Prema tome, da bismo u trenutku t izračunali rizik držanja portfelja u sljedećih k dana, tj. od trenutka $t+1$ zaključno s $t+k$, moramo dobiti distribuciju zbroja k dnevnih prinosa ili kumulativnog prinosa, označenih s

$$R_t[k] = R_{t+1} + \cdots + R_{t+k},$$

gdje je R_{t+k} povrat u danu $t+k$. Ako pretpostavimo da su dnevni povrati nezavisni i jednako distribuirani (IID) s očekivanjem μ i konstantnom varijancom σ^2, onda su očekivanje i varijanca kumulativnog prinosa za period držanja k jednaki:

$$E[R_{t+1} + \cdots + R_{t+k}] = E\left[\sum_{i=1}^{k} R_{t+i}\right] = \sum_{i=1}^{k} \mu = k\mu,$$

$$Var(R_t[k]) = k\sigma^2,$$

što implicira da se volatilnost za period držanja k dobije skaliranjem σ s $\sqrt{k}$. Pravilo kvadratnog korijena primjenjuje se na volatilnost bez obzira na distribuciju povrata. Ako pretpostavimo dodatno da su IID povrati normalno distribuirani VaR od $R_t[k]$ računamo s:

$$VaR(R_t[k]) = \Phi^{-1}(1-p)\sqrt{k}\sigma - k\mu.$$

Ako je $p = 0.05$, onda je $VaR(R_t[k]) = 1.65\sqrt{k}\sigma$, za sljedećih k dana držanja, što je 95-postotni kvantil od $N(0, k\sigma^2)$ distribucije. Uzmemo li $p = 0.01$ dobivamo $VaR(R_t[k]) = 2.326\sqrt{k}\sigma$, za sljedećih k dana držanja. Za p=0.01, VaR cijelog portfelja izražen u novčanim jedinicama, za period držanja duljine k, pomoću RiskMetrics metode računamo kako slijedi:

$$VaR(k) = \textit{vrijednost portfelja} \times 2.326\sqrt{k}\sigma.$$

Kako je $VaR = VaR(R_t[1]) = \textit{vrijednost portfelja} \times 2.326\sigma$ gornju jednakost možemo zapisati u obliku:

$$VaR(k) = \sqrt{k} \times VaR$$

i to nazivamo vremensko pravilo kvadratnog korijena.

Možemo primijetiti da je VaR jednak za long i short poziciju jer su log-povrati normalno distribuirani pa je i funkcija gubitka simetrična.

Dodatno, pomoću formule za izračunavanje očekivanog gubitka normalne distribucije dobivamo

$$ES_{0.95} = \frac{0.103}{0.05}\sigma_{t+1} = 2.063\sigma_{t+1} \quad i \quad ES_{0.99} = \frac{0.0267}{0.01}\sigma_{t+1} = 2.67\sigma_{t+1}.$$

Pomoću RiskMetric metode možemo izračunati očekivani gubitak za sljedećih k dana držanja koristeći vremensko pravilo korijena.

Ovaj se rezultat oslanja na pretpostavku da su prinosi serijski neovisni što nam omogućuje da sve kovarijance između prinosa u različitim danima postavimo na nulu u formuli za varijance [16]. Empirijski dokazi funkcije distribucije o dnevnim prinosima ukazuju na to da je ova pretpostavka vjerojatno točna većinu vremena, iako bi u vremenima tržišnog procvata ili padova prinosi mogli biti, privremeno, u pozitivnoj korelaciji. Kakav bi bio učinak pozitivne korelacije u prinosima na VaR? Kovarijanca prvog reda može se izraziti u terminima korelacije kao $\rho\sigma^2$, pri čemu ρ predstavlja serijsku korelaciju prvog reda. Da stvari budu jednostavnije, pretpostavimo da smo zainteresirani za izračun VaR-a za dvodnevni povrat, odnosno k=2. Varijanca kumulativnog povrata je jednaka

$$\begin{aligned} Var(R_{t+1}+R_{t+2}) &= Var(R_{t+1})+Var(R_{t+2})+2Cov(R_{t+1},R_{t+2}) \\ &= \sigma^2+\sigma^2+2\rho\sigma^2 \\ &= 2\sigma^2(1+\rho). \end{aligned}$$

Budući da je $2\sigma^2(1+\rho) > 2\sigma^2$, pokazuje se da kumulativni prinos postaje rizičniji u prisutnosti pozitivne korelacije ρ, u odnosu na neovisni slučaj.

VaR za dvodnevni prinos je tada jednaka $VaR(2) = \Phi^{-1}(1-p)\sqrt{2(1+\rho)}\sigma - 2\mu$, što je manje u odnosu na VaR pod pretpostavkom neovisnosti koja je dana s $VaR(2) = \Phi^{-1}(1-p)\sqrt{2}\sigma - 2\mu$. Dakle, zanemarivanje pozitivne korelacije u prinosima dovodi do podcjenjivanja rizika i potencijalnog gubitka portfelja koji proizlazi iz ekstremnog (negativnog) kretanja na tržištu.

6.5 Riskmetric

Izračun VaR-a portfelja koji se sastoji od različitih instrumenata je izazovniji, ali realniji zadatak. U nastavku ćemo opisati RiskMetrics metodu [22] koja daje odgovor na pitanje: „Kako izračunati zajednički rizik različitih pozicija koje investitor posjeduje?”. Za početak, razmotrimo slučaj dvaju instrumenata.

Neka su VaR_1 i VaR_2 vrijednosti pod rizikom ta dva instrumenta i neka je $\rho_{12} = Cov(r_{1t}, r_{2t})/[VaR(r_{1t})VaR(r_{2t})]^{0.5}$ koeficijent korelacije između dva povrata. Tada je ukupna vrijednost rizika investitora jednaka

$$VaR = \sqrt{VaR_1^2 + VaR_2^2 + 2\rho_{12}VaR_1VaR_2}. \tag{5}$$

Ona se izravno proširi za m instrumenata:

$$VaR = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} VaR_i^2 + 2\sum_{i<j}^{m} \rho_{ij}VaR_iVaR_j},$$

gdje je ρ_{ij} kros-korelacijski koeficijent između i-tog i j-tog povrata instrumenata, a VaR_i je rizična vrijednost i-tog instrumenta. Pri tome, mora vrijediti pretpostavka da log-povrati imovine imaju zajedničku normalnu funkciju distribucije s očekivanjem 0 i matricom kovarijanci Σ_{t+1}. To znači da su log-povrati portfelja normalni s očekivanjem 0 i konačnom varijancom.

Primjer 10. *Pretpostavimo da se naš portfelj sastoji od 40% dionica tvrtke Apple i 60%*

obveznica Vanguard Admiral. Tržišna vrijednost portfelja je \$1000000. *Podatke o kretanju cijena u periodu od* 19.8.2020. *do* 19.8.2021. *godine preuzeli smo sa stranice https://finance.yahoo.com i izračunali log-povrate cijena dionica diferenciranjem logaritma cijena. Primjenjujući RiskMetrics metodu u programskom jeziku R, dobili smo rizičnu vrijednost log-povrata cijena dionica za tvrtku Apple*

$$VaR_{0.95} = 0.02033, \quad VaR_{0.99} = 0.02876,$$

i rizičnu vrijednost log-povrata cijena obveznica za tvrtku Admiral

$$VaR_{0.95} = 0.00346, \quad VaR_{0.99} = 0.00489.$$

Za $p = 0.95$, *izračunat ćemo VaR portfelja. Koeficijent korelacije između log-povrata cijena dionica i obveznica ove dvije kompanije iznosi* 0.1735495.

$$VaR^k_{0.95} = 0.02033 \times 0.4 = 0.008132, \quad VaR^o_{0.95} = 0.00346 \times 0.6 = 0.002076,$$

gdje oznake k i o predstavljaju prinose na kapital i obveznice. Ukupni VaR portfelja je tada prema (5)

$$VaR_{0.95} = \sqrt{(0.008132)^2 + (0.002076)^2 + 2 \times 0.1735495 \times 0.008132 \times 0.002076} = 0.00873,$$

iz čega vidimo da je VaR ukupnog portfelja manji od zbroja VaR-ova pojedinačnih komponenti koje čine portfelj.

Konkretno s ulogom od \$1000000 *imamo*

1. *tržište kapitala:* $VaR_{0.95} = \$20330$,
2. *tržište obveznica:* $VaR_{0.95} = \$3460$,
3. *portfelj:* $VaR_{0.95} = \$8735$.

6.6 Marginalni VaR, Component VaR i Inkrementalni VaR

Kao što već znamo VaR se koristi za mjerenje i kontrolu razine izloženosti riziku. Može se primjenjivati na određene pozicije ili na cijeli portfelj. Budući da na VaR portfelja utječe korelacija ulagačkih pozicija, individialni VaR pozicija može biti visok, ali ako je negativno koreliran s cijelim porfeljom, njegov doprinos ukupnom riziku može biti znatno niži. Zato, pri dodatnom ulaganju u neku poziciju portfelja, računamo taj doprinos ukupnom riziku pomoću MVaR-a. Ako je vrijednost MVaR-a $i-$te pozicije negativna, povećanje pondera $i-$te pozicije u portfelju smanjuje ukupni rizik portfelja. Marginani VaR $i-$ te pozicije x_i je definiran kao osjetljivost VaR-a portfelja s obzirom na promjenu vrijednosti $i-$te pozicije. Pristup se temelji na pretpostavci normalne distribucije cijena povrata i matematički računa kao:

$$MVaR_i = \frac{\partial VaR}{\partial x_i}.$$

MVaR se može procijeniti tako što x_i povećamo za malu vrijednost $\triangle x_i$. Zatim izračunamo VaR portfelja uz novu vrijednost $i-$te pozicije, $x_i \approx x_i + \triangle x_i$. Ako je to utjecalo na promjenu VaR-a, procjena MVaR-a $i-$te pozicije se svodi na

$$MVaR_i = \frac{\triangle VaR}{\triangle x_i} = \beta_i VaR(\%), \qquad \beta_i = \frac{Cov(R_i, R_P)}{\sigma_P^2}.$$

Ukupni doprinos pojedine pozicije VaR-u portfelja mjeri se pomoću Component Value at risk. VaRC je aditivna dekompozicija ukupnog portfelja VaR, a njegova formula glasi:

$$VaRC_i = \frac{\partial VaR_P}{\partial x_i} x_i,$$

$$VaRC_P(\%) = \frac{VaRC_i}{VaR_P}.$$

Ako postotnu promjenu vrijednosti $i-$te pozicije označimo s $y_i = \triangle x_i / x_i$, $VaRC_i$ možemo procijeniti kao

$$VaRC_i = \frac{\triangle VaR_P}{y_i}.$$

Inkrementalni VaR (IVaR) $i-$te pozicije mjeri njezin učinak u povećanju VaR-a portfelja. Dobije se kao razlika VaR-a portfelja s $i-$tom pozicijom i VaR-a portfelja bez te pozicije. Koristan je pri dodavanju novih pozicija portfelju. Ukoliko se radi o velikom portfelju VaRC komponente i je približno jednak IVaR-u te komponente. Više o tome u [12].

Pomoću ovih mjera možemo odgovoriti na sljedeća pitanja koja su povezana s nekoliko poslovnih scenarija i koja se mogu pojaviti u praksi upravljanja rizicima:

- Koji su najznačajniji izvori rizika, odnosno koja su „vruća mjesta" portfelja?
- Što se može učiniti da se smanji VaR? Koje će nove trgovine poboljšati VaR, a koje će ga degradirati?
- Koliki je doprinos kategorije imovine ili upravitelja imovine riziku cijelog portfelja ili poduzeća? Kako se troškovi zaštite mogu rasporediti na izvore rizika?

Na idućem primjeru pokazat ćemo primjenu ovih mjera.

Primjer 11. *Neka se naš portfelj sastoji od dionica Google-a u vrijednosti od \$5000, i dionica Tesle u vrijednosti od \$10000. Pretpostavit ćemo da su povrati normalno distribuirani. Zanima nas koliki će biti VaR portfelja nakon kupnje dodatnih dionica kompanije Tesla u vrijednosti od \$1000 i prodaje dionica kompanije Google u istoj vrijednosti.*

VaR portfelja, kao i individualni VaR pozicija računamo po formuli:

$$VaR_P = z_{1-p}\sigma_P\vartheta,$$

$$VaR_P(\%) = \frac{VaR_P}{\vartheta}.$$

Udio pojedinih dionica u portfelju je jednak:

$$\omega_i = \frac{x_i}{\vartheta}.$$

$$MVaR_i = \frac{Cov(R_i, \omega_1 R_1 + \omega_2 R_2)}{\sigma_P^2} VaR_P(\%).$$

Uz pomoć programskog jezika R dobiveni su sljedeći rezultati:

Pozicija	x_i	σ_i	β_i	VaR_i	ω_i	$MVaR_i$
Google	*5000*	*0.0161*	*0.33*	*132.92*	*1/3*	*0.0137*
Tesla	*10000*	*0.03461*	*1.34*	*570.83*	*2/3*	*0.0559*
Portfelj	*15000*	*0.0254*	*1*	*628*	*1*	

Povećanje vrijednosti dionica kompanije Google za \$1 će povećati VaR portfelja za 0.0137. Povećanje vrijednosti dionica kompanije Tesla za \$1 će povećati VaR portfelja za 0.0559. Kako je MVaR ove kompanije veći znači da je ulaganje u te dionice rizičnije.

Kako bismo odgovorili na postavljeno pitanje moramo izračunati promjenu VaR-a portfelja koja je prouzročena promjenom udjela u pozicijama.

$$\triangle VaR_P \approx MVaR_1 \triangle x_1 + MVaR_2 \triangle x_2 = 0.0137 \times (-1000) + 0.0559 \times 1000 = 42.2.$$

Novi VaR portfelja iznosi:

$$VaR_p \approx 628 + 42.2 = 670.2.$$

Nadalje, izračunat ćemo doprinos pojedinih pozicija rizičnosti početnog portfelja.

Doprinos dionica kompanije Google VaR-u portfelja je $VaRC_1 = 68.3$, *a dionica kompanije Tesla je* $VaRC_2 = 559$.

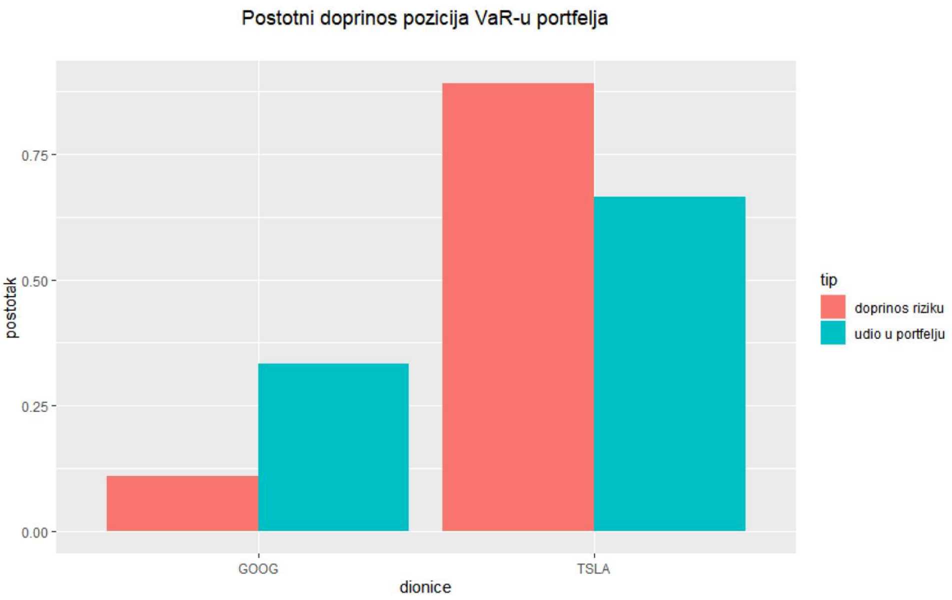
Postotni doprinosi su redom $VaRC_1(\%) = 11\%$, $VaRC_2(\%) = 89\%$.

Grafički prikaz udjela pojedinih pozicija portfelja i njihov doprinos riziku portfelja je prikazan na slici 11.

Dodatno, želimo povećati naš početni portfelj ulaganjem \$5000 *u dionice tvrtke JP Morgan. To će utjecati na promjenu VaR-a portfelja. Učinak te promjene računamo pomoću Inkrementalnog VaR-a. U programskom jeziku R smo izračunali VaR novog portfelja koji iznosi 691. Inkrementalni VaR iznosi:*

$$IVaR = 691 - 628 = 63.$$

Zaključujemo da će novo ulaganje povećati rizičnost portfelja za \$63.



Slika 11: Doprinos pojedinih pozicija ukupnoj rizičnosti portfelja.

6.7 CoVaR

Najčešća mjera rizika predložena u mikroprudencijalnoj regulaciji je vrijednost pod rizikom (VaR). Mikroprudencijalna politika usmjerena je na stanje, rizike i upravljanje u pojedinoj financijskoj instituciji i kao takva ne omogućava prepoznavanje rizika na razini sustava, kao ni prepoznavanje međusobnih veza financijskih institucija i utjecaj neke financijske institucije na ostale. Zbog toga je važna makroprudencijalna politika koja prikuplja međusobne veze između pojedinih financijskih institucija i cijelog sustava. Mjera sistemskog rizika bi trebala nadopuniti mikroprudencijalne pristupe identificirajući rizike pojedinih institucija koji imaju utjecaj na rizik na cijelom tržištu.

U vrijeme financijske krize, od 2007. do 2009. godine, gubici su se širili po financijskim institucijama, prijeteći financijskom sustavu u cjelini. Širenje nevolje dovodi do sustavnog rizika – rizik da je kapacitet cjelokupnog financijskog sustava narušen, s potencijalno štetnim posljedicama za realno gospodarstvo.

Sistemske mjere rizika mjere povećanje repnog kretanja koje može nastati zbog širenja financijske nevolje kroz institucije. Najčešća mjera rizika koju koriste financijske institucije je △CoVaR.

CoVaR financijske institucije i u odnosu na sustav definiran je kao VaR financijskog sustava pod uvjetom da je institucija i u nepovoljnom stanju. Naša glavna mjera rizika, △CoVaR, razlika je između CoVaR-a uvjetovanog na nevolju neke institucije i CoVaR-a uvjetovanog na stanje medijana te institucije. Dakle, △CoVaR bilježi promjenu u CoVaR-u kako se događaj uvjetovanja pomiče iz medijana povrata institucije i u nepovoljni VaR_q^i i tako određuje doprinos neke institucije na ukupni rizik.

U nastavku je prema [1] navedena definicija CoVaR-a i △CoVaR-a.

Definicija 13. *$CoVaR_q^{j|\mathbb{C}(X^i)}$ predstavlja VaR institucije j (ili financijskog sustava) uvjetovan nekim događajem $\mathbb{C}(X^i)$ institucije i. $CoVaR_q^{j|\mathbb{C}(X^i)}$ je defininiran s q-postotnim kvantilom uvjetne vjerojatnosti:*

$$P(X^i|\mathbb{C}(X^i) \leq CoVaR_q^{j|\mathbb{C}(X^i)}) = q\%.$$

Doprinos rizika i-te institucije j-otoj instituciji je definiran s:

$$\triangle CoVaR_q^{j|i} = CoVaR_q^{j|X^i=VaR_q^i} - CoVaR_q^{j|X^i=VaR_{50}^i}.$$

$\triangle CoVaR_q^{j|i}$ možemo izraziti u novčanim jedinicama tako što ga pomnožimo s veličinom institucije i.

CoVaR je uvjetovan događajem $\mathbb{C}$ koji je obično gubitak na višoj ili jednakoj razini od VaR_q^i. Važno je spomenuti da vjerojatnost tog uvjetovanog događaja ne ovisi o rizičnosti i-te institucije.

Slično se može definirati i $CoES_q^{j|i}$ kao očekivani gubitak institucije j uvjetno na gubitke veće od $CoVaR_q^{j|i}$ koji je izračunat uvjetno na i, te $\triangle CoES_q^{j|i}$ je analogno jednak $CoES_q^{j|i} - CoES_{50}^{j|i}$.

Literatura

[1] T. Adrian, M. K. Brunnermeier, *"CoVaR". American Economic Review*, 2016.

[2] C. Alexander, *Market Risk Analysis, Value at Risk Models*, 2008.

[3] W. J. Baumol, *An expected gain-confidence limit criterion for portfolio selection.* Management Science 10, 1963.

[4] V. S. Bawa, *Optimal rules for ordering uncertain prospects.* Journal of Financial Economics 2, 1975.

[5] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku, Osijek, 2013.

[6] J. Danielsson, *Financial Risk Forecasting*, United Kington, 2011.

[7] Ž. Deković, J. Žaja, I. Smiljčić, *Rizik i financijski menadžment*, 2017.

[8] P. C. Fishburn, *Mean-risk analysis with risk associated with below-target returns, The American Economic Review 67.*, 1977.

[9] A. Gaivoronski i G. Pflug, *Properties and computation of value at risk efficient portfolios based on historical data* WP, Norvegian University of Sciences and Technology, Trondheim, Norway, 2000.

[10] D. Guégan, B. K. Hassani, *Risk Measurement: From Quantitative Measures to Management Decisions*, Paris, 2019.

[11] W. V. "Bud" Haslett, Jr., *Risk Management: Foundations For a Changing Financial World*, 2010.

[12] J. C. Hull, *Risk management and financial institutions*, 2012.

[13] S. C. Keating, W. F. Shadwick, *A Universal Performance Measure*, 2002.

[14] H. M. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments.* New York, Wiley, 1959.

[15] H. M. Markowitz, *Portfolio Selection: The Journal of Finance* 7, 1952.

[16] *Measuring financial risk*
http://faculty.baruch.cuny.edu/smanzan/FINMETRICS/_book/measuring-financial-risk.html?fbclid=IwAR0qwWHi_8hgN7ugY4-5UgM0XtvaG7rpmzErn2ASoJYeE5bEcutlWgrzB6I.

[17] S. T. Rachev, S. V. Stoyanov, F. J. Fabozzi, *A Probability Metrics Approach to Financial Risk Measures*, 2011.

[18] D. Sabolić, *Rizik i nesigurnost II.: Suvremena teorija portfelja i CAMP model*, 2013.

[19] B. K. Stone, *A general class of three-parameter risk measures: The Journal of Finance 28*, 1973.

[20] N. Šuvak, *Matematičke financije (nastavni materijali)*, Odjel za matematiku, Osijek, 2021.

[21] *The Omega Risk Measure*
https://investexcel.net/omega-risk-measure/.

[22] R. S. Tsay, *An Introduction to Analysis of Financial Data with R*, USA, 2012.

Sažetak

Mjere rizika imaju iznimno važnu ulogu u financijskom svijetu jer omogućuju upravljanje i kontroliranje rizika njihovim kvantificiranjem. U ovom radu uveli smo neka poželjna svojstva mjera rizika i opisali što bi bila koherentna mjera rizika. Mjere disperzije koje smo predstavili su varijanca, očekivano apsolutno odstupanje kao i poluinterkvartilni raspon. Nadalje, opisali smo Suvremenu teoriju portfelja, predstavili optimalnu liniju kapitala zajedno sa učinkovitom granicom te opisali Sharpe-ov omjer koji služi za pronalaženje najboljeg portfelja na učinkovitoj granici. Negativne mjere rizika koje smo uveli su SFRatio, polu-varijanca te omjer Sortino. Prestavili smo mjeru Omega koja u izračun uključuje više momente te tako pruža potpunu karakterizaciju povrata i rizika. U drugom dijelu rada smo definirali Value at risk (VaR), jednu od najpoznatijih mjera rizika, te izveli formulu za izračun VaR-a kada su povrati normalno distribuirani. Kao nadogradnju VaR metodologije definirali smo očekivani gubitak. Opisali smo i vremensko pravilo korijena koje služi za modeliranje rizika s periodom držanja duljim od jednog dana. Marginalni VaR, Component VaR i Inkrementalni VaR služe za opisivanje doprinosa pojedinih pozicija ukupnom riziku portfelja. Napsoljetku, opisana je mjera CoVaR koja identificira rizike pojedinih institucija koji imaju utjecaj na rizik na cijelom tržištu.

Ključne riječi: mjera rizika, koherentnost, koherentna mjera rizika, mjere disperzije, varijanca, Sharpe-ov omjer, negativne mjere rizika, Omega, VaR, ES, MVaR, CVaR, IVaR, CoVaR.

Summary

Risk measures play an extremely important role in the financial world as they enable the management and control of risks by quantifying them. In this paper, we have introduced some desirable properties of risk measures and described what a coherent risk measure would be. Measures of dispersion that we presented are the variance, the mean abolute deviation as well as the semi-interquartile range. Furthermore, we explained the Modern Portfolio Theory, presented the capital allocation line along with an efficient frontier and supporting this, used a Sharpe ratio to find the best portfolio on efficient frontier. The downside risk measures that we have introduced are SFRatio, semi-variance and Sortino ratio. We have introduced the Omega measure, which includes higher moments in the calculation and thus provides a complete characterization of returns and risks. In the second part of this paper, we defined Value at risk (VaR), one of the most well-known risk measures, and derived a formula for calculating VaR when returns are normally distributed. As an upgrade of the VaR methodology, we defined the Expected Shortfall. Also, we described the square root of time rule used to model risk with a holding period longer than one day. Marginal VaR, Component VaR and Incremental VaR are used to describe the contribution of individual positions to the total risk of the portfolio. Finally, a CoVaR measure is described, which identifies the risk of individual institutions that have an impact on market-wide risk.

Keywords: risk measure, coherence, coherent risk measure, measures of dispersion, variance, Sharpe ratio, downside risk measure, Omega, VaR, ES, MVaR, CVaR, IVaR, CoVaR.

Životopis

Rođena sam 18.2.1998. godine u Žepču. Osnovnu školu sam pohađala u Žepču od 2004. do 2012. godine. U osmom razredu osvojila sam 2. mjesto na općinskom natjecanju iz matematike te sudjelovala na federalnom natjecanju iz matematike u Bosni i Hercegovini. Nakon toga upisujem Opću gimnaziju u Katoličkom školskom centru „Don Bosco" u Žepču. Također, 2016. godine sudjelujem na federalnom natjecanju iz matematike. Nakon završetka srednje škole, 2016. godine, upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku u Osijeku koji završavam 2019. godine uz završni rad „Krivulje drugog reda" pod mentorstvom doc.dr.sc. Suzane Miodragović. Iste godine upisujem diplomski studij, smjer Financijska matematika i statistika, na Odjelu za matematiku u Osijeku.