# Funkcije izvodnice u teoriji vjerojatnosti

**Penava, Petra**

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

Petra Penava

# Funkcije izvodnice u teoriji vjerojatnosti

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij Financijska matematika i statistika

Petra Penava

# Funkcije izvodnice u teoriji vjerojatnosti

Diplomski rad

Mentor: doc. dr. sc. Ivan Papić

Osijek, 2022.

# Sadržaj

# Uvod

Općenito nam je poznato kako su, u teoriji vjerojatnosti, vjerojatnosna svojstva slučajnih varijabli opisana funkcijom distribucije, odnosno nizom vjerojatnosti za diskretne i funkcijom gustoće za neprekidne slučajne varijable. No, to nam je ponekad puno lakše odrediti pomoću funkcija izvodnica i njihovih svojstava. U ovome radu spomenut ćemo četiri vrste, a to su: funkcije izvodnice vjerojatnosti, momenata, kumulanata i karakteristične funkcije. Svaku od njih ćemo definirati i navesti njezina svojstva kroz razne iskaze i dokaze tvrdnji. Kroz poglavlja rada, moći ćemo uočiti i njihovu međusobnu povezanost te kako se one međusobno nadopunjuju. Tako primjerice funkcije izvodnice vjerojatnosti primarno koristimo za diskretne slučajne varijable, a funkcije izvodnice momenata za neprekidne. Funkcije izvodnice kumulanata prirodni su logaritam funkcija izvodnica momenata, ali kako one ne moraju uvijek postojati, imamo karakteristične funkcije koje uvijek postoje. Također, navest ćemo i razne primjere u kojima ćemo vidjeti korisnost svake od funkcija izvodnica.

U prvom poglavlju, *Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti*, prisjetit ćemo se osnovnih pojmova koje ćemo često koristiti u radu te pri dokazivanju nekih iskazanih tvrdnji.

Iduće poglavlje, *Funkcije izvodnice vjerojatnosti*, donosi njihovu definiciju i bitna svojstva te iskaze i dokaze važnih nam teorema. Sadrži dva potpoglavlja u kojima ćemo reći nešto o vezi funkcija izvodnica vjerojatnosti s momentima i sa sumama nezavisnih slučajnih varijabli. Sve tvrdnje potkrijepit ćemo odgovarajućim primjerima.

Poglavlje *Funkcije izvodnice momenata* sadrži definiciju funkcija izvodnica momenata koje koristimo kada funkcije izvodnice vjerojatnosti nije moguće koristiti. Vidjet ćemo kako pomoću njih doći do očekivanja i varijance nekih poznatih distribucija te koja je njihova svrha.

Zatim slijedi poglavlje *Funkcije izvodnice kumulanata* u kojemu ćemo prvo reći nešto o samim kumulantima, a potom i o funkcijama izvodnicama kumulanata i nekim njihovim svojstvima.

U pretposljednjem poglavlju nazvanom *Karakteristične funkcije*, definirat ćemo ih za slučajne varijable i slučajne vektore te navesti neka njihova svojstva i nužne uvjete njihova postojanja. Nakon toga, iskazat ćemo dva bitna teorema: Teorem jedinstvenosti i Teorem inverzije i naposlijetku povezati karakteristične funkcije s momentima.

Posljednje poglavlje pod nazivom *Veze među funkcijama izvodnicama* sadrži međusobne odnose svih spomenutih funkcija izvodnica. Također, navedena je i tablica u kojoj su izračunate funkcije izvodnice poznatih nam distribucija radi lakšeg snalaženja i prepoznavanja njihovih sličnosti i razlika.

# 1 Osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti

Kako i sam naslov ovoga rada kaže, funkcije izvodnice dio su teorije vjerojatnosti pa prije nego kažemo nešto više o njima, prisjetimo se nekih osnovnih pojmova teorije vjerojatnosti koje možemo pronaći u [1]. Kako bismo uopće krenuli s definicijom samog pojma vjerojatnosti, prvo moramo definirati slučajni pokus i njegov ishod, slučajne događaje te familiju događaja koju nazivamo $\sigma$-algebra. Kada smo definirali vjerojatnost i njezina svojstva, možemo prijeći na definiciju vjerojatnosnog prostora na kojem proučavamo spomenute pokuse. Osim toga, definirat ćemo slučajne varijable koje mogu biti diskretne i neprekidne te neke pojmove vezane uz njih, a to su funkcija distribucije, funkcija gustoće, matematičko očekivanje, varijanca i ostalo. Budući da ćemo spomenuti slučajne vektore, definirat ćemo i njih. Umjesto svih potrebnih dokaza ostavit ćemo referencu na mjesto u literaturi gdje se oni mogu pronaći.

Počnimo s objašnjenjem pokusa i njegova iskoda. Svi smo nekada igrali društvene igre u kojima se koristimo simetričnom igraćom kockicom koja sadrži brojeve od 1 do 6. Bacimo li kockicu, izveli smo pokus, a broj koji se okrenuo na njoj jest ishod tog pokusa. Taj ishod se u teoriji vjerojatnosti naziva elementarni događaj i označava s $\omega$, a skup svih naših ishoda, odnosno elementarnih događaja označit ćemo s $\Omega$ i nazivati skup ili prostor elementarnih događaja. Recimo da nas zanima mogućnost da pri bacanju kockice dobijemo broj 6, tada će navedeni skup biti $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a područje našeg interesa, tzv. događaj označit ćemo kao podskup od $\Omega$, odnosno $\{6\}$. Pri izvođenju nekog pokusa uglavnom će nas zanimati i vjerojatnost realizacije određenih događaja.

**Definicija 1.1.** *Neka je dan neprazan skup $\Omega$. Familija $\mathcal{F}$ podskupova od $\Omega$ je $\sigma$-algebra skupova na $\Omega$ ako vrijedi:*

*(1)* $\emptyset \in \mathcal{F}$,

*(2) ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$, (zatvorenost na komplementiranje)*

*(3) ako je dana prebrojiva familija skupova $(A_n, n \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$, onda $\mathcal{F}$ sadrži i njihovu uniju, tj. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$. (zatvorenost na prebrojive unije)*

**Definicija 1.2.** *Neka je $\Omega$ neprazan prostor elementarnih događaja i $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebra skupova na njemu. Funkciju $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ zovemo vjerojatnost na $\Omega$ ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

*(1)* $P(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$, *(nenegativnost vjerojatnosti)*

*(2)* $P(\Omega) = 1$, *(normiranost vjerojatnosti)*

*(3) ako je dana prebrojiva familija međusobno disjunktnih skupova* $(A_i, i \in \mathbb{N}) \subseteq \mathcal{F}$, $I \subseteq \mathbb{N}$, *tj.* $A_i \cap A_j = \emptyset$ *čim je* $i \neq j$, *tada vrijedi*

$$P\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \sum_{i\in I} P(A_i). \quad (\sigma\text{-aditivnost vjerojatnosti})$$

**Definicija 1.3.** *Uređenu trojku* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *gdje je* $\mathcal{F}$ $\sigma$*-algebra na* $\Omega$ *i* $P$ *vjerojatnost na* $\Omega$ *zovemo vjerojatnosni prostor.*

Prije nego krenemo na definiciju diskretnog vjerojatnosnog prostora, definirajmo uvjetnu vjerojatnost, potpun sustav događaja i formulu potpune vjerojatnosti koju ćemo koristiti u jednom od dokaza.

**Definicija 1.4.** *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i događaj* $A \in \mathcal{F}$ *koji ima pozitivnu vjerojatnost, tj.* $P(A) > 0$. *Funkcija* $P(\,\cdot \mid A)$ *definirana na* $\mathcal{F}$ *izrazom*

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad B \in \mathcal{F}$$

*je uvjetna vjerojatnost uz uvjet da se dogodio događaj* $A$.

**Definicija 1.5.** *Konačna ili prebrojiva familija događaja* $\{H_i : i \in I\}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ *u vjerojatnosnom prostoru* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *je potpun sustav događaja ako vrijedi*

*(1)* $P(H_i) > 0, \forall i \in I$,

*(2)* $H_i \cap H_j \neq \emptyset, \forall i \neq j,\ i, j \in I$,

*(3)* $\bigcup_{i\in I} H_i = \Omega$.

**Teorem 1.1** (formula potpune vjerojatnosti)**.** *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *i* $\{H_i : i \in I\}$, $I \in \mathbb{N}$, *potpun sustav događaja na njemu. Tada za proizvoljan događaj* $A \in \mathcal{F}$ *vrijedi*

$$P(A) = \sum_{i\in I} P(A|H_i)P(H_i).$$

*Dokaz.* Vidi [9, str. 36] □

Nastavimo sada s diskretnim vjerojatnosnim prostorom.

**Definicija 1.6.** *Vjerojatnosni prostor kod kojega je* $\Omega$ *konačan ili prebrojiv skup, a pridružena* $\sigma$*-algebra je partitivan skup* $\mathcal{P}(\Omega)$, *zvat ćemo diskretan vjerojatnosni prostor.*

Na takvom vjerojatnosnom prostoru vjerojatnost određujemo zadavanjem vjerojatnosti na jednočlanim podskupovima od $\Omega$. Kada $\Omega$ nije diskretan, to neće biti moguće pa ćemo iz tog razloga definirati slučajne varijable koje se mogu razdvojiti na diskretne i apsolutno neprekidne.

**Definicija 1.7.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna varijabla na $\Omega$ ako je $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ za proizvoljan $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, odnosno $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subset \mathcal{F}$, gdje je $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ $\sigma$-algebra generirana familijom svih otvorenih skupova na $\mathbb{R}$ koju zovemo Borelova $\sigma$-algebra na $\mathbb{R}$.*

**Definicija 1.8.** *Neka je dan diskretan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Svaka funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je slučajna varijabla i zovemo je diskretna slučajna varijabla.*

Slučajnu varijablu $X$ možemo prikazati u obliku tablice

$$X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n & \dots \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n & \dots \end{pmatrix}$$

i taj prikaz zovemo zakon razdiobe, tablica distribucije ili distribucija slučajne varijable $X$. Za svaku diskretnu slučajnu varijablu možemo istaknuti dva bitna skupa brojeva. Jedan čine sve vrijednosti koje slučajna varijabla $X$ može primiti, a to je $\mathcal{R}(X) = \{x_i : i \in \mathbb{N}\}$ koji se naziva slika slučajne varijable i niz pripadnih vjerojatnosti $(p_i, i \in \mathbb{N})$ takav da vrijedi $p_i = P(X = x_i)$, $i \in \mathbb{N}$.
Definirajmo zatim i neprekidne slučajne varijable.

**Definicija 1.9.** *Neka je dan vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ i funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

- $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = \{X \leq x\} \in \mathcal{F}$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
- *postoji nenegativna realna funkcija realne varijable, $f$, takva da vrijedi*

$$P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\} = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Funkciju $X$ zovemo neprekidna slučajna varijabla. Funkciju $f$ tada zovemo funkcija gustoće slučajne varijable $X$.*

U obliku teorema navedimo svojstva funkcije gustoće čiji dokaz možemo pronaći u [1, str. 61-62]

**Teorem 1.2.**

*(1) Nenegativnost:* $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

*(2) Normiranost:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

*(3) Vjerojatnost da slučajna varijabla $X$ primi vrijednost iz intervala $\langle a, b]$ može se izračunati pomoću njezine funkcije gustoće $f$ na sljedeći način*

$$P\{a < X \leq b\} = P\{X \in \langle a, b]\} = \int_a^b f(x)dx.$$

Vjerojatnosna svojstva svih slučajnih varijabli opisana su tzv. funkcijom distribucije.

**Definicija 1.10.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor i neka je $X$ slučajna varijabla. Funkciju $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ koja realnom broju $x$ pridružuje vjerojatnost da dana slučajna varijabla bude manja ili ili jednaka tom broju, odnosno*

$$F(x) = P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} = P\{X \leq x\}$$

*zovemo funkcija distribucije slučajne varijable $X$.*

Kao i za funkciju gustoće, navedimo njezina svojstva u obliku sljedećeg teorema čiji dokaz možemo pronaći u [1, str. 63-64].

**Teorem 1.3.** *Neka je $X$ slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ te neka je $F_X$ njezina funkcija distribucije. Za funkciju distribucije vrijedi:*

*(1) Monotono je rastuća funkcija:*

$$x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2), \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

*(2)* $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0.$

*(3)* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = F(\infty) = 1.$

*(4) Neprekidna je zdesna:*

$$\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0)$$

Pogledajmo još kada su slučajne varijable nezavisne.

**Definicija 1.11.** *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. One su nazavisne ako za proizvoljne Borelove skupove $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ vrijedi da je $P(X_1 \in B_1, \ldots, X_n \in B_n) = P\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{n} X_i \in B_i\Big) = \prod\limits_{i=1}^{n} P(X_i \in B_i)$.*

Definirajmo još nekoliko spomenutih karakteristika diskretnih i neprekidnih slučajnih varijabli: matematičko očekivanje, varijancu i momente višeg reda.

**Definicija 1.12.** *Neka je $X$ slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Ako red $\sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ apsolutno konvergira (tj. ako red $\sum\limits_{\omega \in \Omega} |X(\omega)|P\{\omega\}$ konvergira), onda kažemo da slučajna varijabla $X$ ima matematičko očekivanje i broj $EX = \sum\limits_{\omega \in \Omega} X(\omega)P\{\omega\}$ zovemo matematičko očekivanje slučajne varijable $X$.*

**Definicija 1.13.** *Neka je $X$ slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ i $r > 0$.*

- *Ako postoji $E[X^r]$, onda broj $\mu_r = E[X^r]$ zovemo moment r-tog reda ili r-ti moment od $X$ (također vrijedi i za neprekidne slučajne varijable).*
- *Ako postoji $E[|X^r|]$, onda broj $E[|X^r|]$ zovemo apsolutni moment r-tog reda ili r-ti apsolutni moment od $X$.*
- *Ako postoji $E[X]$ i $E[|X - E[X]|^r]$, onda broj $E[|X - E[X]|^r]$ zovemo r-ti centralni moment od $X$.*
- *Ako postoji $E[(X - E[X])^2]$, onda taj nenegativan broj zovemo varijanca slučajne varijable $X$ i označavamo $Var(X)$, $\sigma_X^2$ ili $\sigma^2$.*

**Definicija 1.14.** *Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f$. Ako je*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty,$$

*onda kažemo da slučajna varijabla $X$ ima očekivanje i broj*

$$\mu = E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

*zovemo matematičko očekivanje neprekidne slučajne varijable $X$.*

**Definicija 1.15.** *Neka je $X$ neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće $f$. Tada je drugi centralni moment, odnosno varijanca neprekidne slučajne varijable $X$:*

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx.$$

Za kraj ovoga poglavlja, definirajmo još i slučajne vektore.

**Definicija 1.16.** *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vjerojatnosni prostor pridružen slučajnom pokusu. Funkciju $(X_1, \ldots, X_n)$ koja svakom ishodu pokusa pridružuje uređenu n-torku realnih brojeva $(x_1, \ldots, x_n)$ zovemo n-dimenzionalan slučajni vektor ako vrijedi*

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap \cdots \cap \{X_n \leq x_n\} \in \mathcal{F}$$

*za sve $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.*

# 2 Funkcije izvodnice vjerojatnosti

U ovom poglavlju definirat ćemo funkcije izvodnice vjerojatnosti i uočiti kada su one dobro definirane, navesti neka njihova svojstva te primjere nekoliko takvih. Osim toga, povezat ćemo ih s momentima cjelobrojnih slučajnih varijabli i distribucijom sume nezavisnih slučajnih varijabli, a svu teoriju potkrijepit ćemo odgovarajućim primjerima.

Možemo reći kako su funkcije izvodnice vjerojatnosti analitički aparat za "rekonstrukciju" distribucije i izračunavanje momenata (ukoliko postoje) diskretnih slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{N}_0$ koje ćemo zvati cjelobrojne slučajne varijable. No, točno ih definirajmo:

**Definicija 2.1.** *Neka je $X$ slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ čija je slika $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$ i neka je $P(X = k) = p_k$ za $k \in \mathbb{N}_0$. Funkcija $g$ definirana s*

$$g(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad z \in \mathbb{R}, \ \ |z| \leq 1,$$

*zove se **funkcija izvodnica vjerojatnosti (FIV)** slučajne varijable $X$ i označava se s $\boldsymbol{g_X(z)}$.*

U sljedećoj napomeni pogledajmo je li takva FIV dobro definirana:

**Napomena 2.1.** Znamo da vrijedi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |p_k z^k| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k |z^k|$.
Također, $p_k = P(X = k) \in [0, 1]$ i $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ zbog normiranosti vjerojatnosti.
Uočimo da je $|p_k z^k| \leq p_k$ za $|z| \leq 1$ pa slijedi da je $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k$ jedna majoranta reda $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k |z^k|$ za $|z| \leq 1$ pa je i $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k |z^k|$ konvergentan.
Slijedi: $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ za $|z| \leq 1$ je apsolutno konvergentan red pa možemo zaključiti kako je $g_X(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ dobro definirana FIV za $z \in \mathbb{R}$, $|z| \leq 1$. [2]

Također uočimo kako je

$$g_X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot P(X = k) = E[z^X]$$

te spomenimo da općenito $g_X(z)$, za $X$ takav da je $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$, ima radijus konvergencije $r \geq 1$.

Prikažimo rekonstrukciju distribucije slučajne varijable $X$, odnosno način na koji možemo dobiti iznos vjerojatnosti $p_k$ pomoću FIV tako što ćemo u izraz $g_X^{(k)}(z)$ uvrstiti $z = 0$: [2]

(1) $g_X(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + ... + p_n z^n + ..., \quad |z| \leq 1$
$g_X(0) = p_0, \quad \text{tj. } p_0 = P(X = 0) = g_X(0)$

(2) Kako je gore navedeno, $g_X(z)$ je za $|z| \leq 1$ definiran apsolutno konvergentnim redom potencija pa ga možemo derivirati član po član proizvoljno mnogo puta.
$g'_X(z) = p_1 + 2p_2 z + 3p_3 z^2 + ... = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k \cdot k \cdot z^k, \quad |z| \leq 1$
$g'_X(0) = p_1, \quad \text{tj. } p_1 = P(X = 1) = g'_X(0)$

(3) $g''_X(z) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} p_k \cdot k(k-1)z^{k-2}, \quad |z| \leq 1$
$g''_X(0) = 2p_2, \quad \text{tj. } p_2 = P(X = 2) = \frac{1}{2} g''_X(0)$

(4) $g'''_X(z) = \sum\limits_{k=3}^{\infty} p_k \cdot k(k-1)(k-2)z^{k-3}, \quad |z| \leq 1$
$g'''_X(0) = 3!p_3, \quad \text{tj. } p_3 = P(X = 3) = \frac{1}{3!} g'''_X(0)$

⋮

Zaključimo općenito:

$$p_k = P(X = k) = \frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Navedeno svojstvo funkcija izvodnica vjerojatnosti vrlo nam je važno jer upravo zbog njega iste i nazivamo njihovim imenom.
U sljedećem primjeru pokažimo kako na jednostavan način na temelju zadane FIV rekonstruiramo distribuciju slučajne varijable.

**Primjer** 2.1. *Neka je $X$ diskretna slučajna varijabla s funkcijom izvodnicom vjerojatnosti $g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$, $\lambda > 0$. Odredimo distribuciju slučajne varijable $X$ na temelju njezine FIV.*
Pogledajmo prvo $k$-tu derivaciju zadane FIV:

$$\begin{aligned} g'_X(z) &= \lambda e^{\lambda(z-1)} \\ g''_X(z) &= \lambda^2 e^{\lambda(z-1)} \\ g'''_X(z) &= \lambda^3 e^{\lambda(z-1)} \\ &\vdots \\ g_X^{(k)}(z) &= \lambda^k e^{\lambda(z-1)}. \end{aligned}$$

Zatim nas zanima koliko ona iznosi za $z = 0$.

$$\begin{aligned} g_X^{(k)}(0) &= \lambda^k e^{\lambda(-1)} \\ \frac{g_X^{(k)}(0)}{k!} &= \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}. \end{aligned}$$

Prema općenitom zapisu vjerojatnosti pomoću FIV, možemo zaključiti

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},$$

a prisjetimo li se nekih poznatih distribucija, vidimo da ova vjerojatnost upravo odgovara Poissonovoj slučajnoj varijabli s parametrom $\lambda > 0$. Dakle, $X$ je Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$.

Iskažimo sada i dokažimo bitan teorem koji govori o jedinstvenosti FIV, odnosno kada su funkcije izvodnice dviju slučajnih varijabli jednake, tada su i one same jednako distribuirane, a vrijedi i obrat.

**Teorem 2.1.** *([3, str. 32.]) Neka su $X$ i $Y$ slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, čije su slike $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$ i $\mathcal{R}(Y) \subseteq \mathbb{N}_0$, s FIV $g_X$ i $g_Y$ redom. Tada je $g_X(z) = g_Y(z)$ za svaki $z \in \mathbb{R}$ takav da je $|z| \leq 1$ ako i samo ako su $X$ i $Y$ po distribuciji jednake .*

*Dokaz.*

$\Leftarrow$ Pretpostavimo da je $X \stackrel{d}{=} Y$, tj. za svaki $k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$P(X = k) = P(Y = k)$$

pa po definiciji FIV slijedi

$$g_X(z) = g_Y(z), \quad \forall z \in \mathbb{R}, \ |z| \leq 1.$$

$\Rightarrow$ Pretpostavimo da je $g_X(z) = g_Y(z)$, $\forall z \in \mathbb{R}$, $|z| \leq 1$. Sada slijedi

$$P(X = k) = \frac{1}{k!} g_X^{(k)}(0) = \frac{1}{k!} g_Y^{(k)}(0) = P(Y = k), \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Iz toga zaključujemo da su $X$ i $Y$ po distribuciji jednake.

□

Navedimo nekoliko primjera funkcija izvodnica nekih poznatih parametarski zadanih distribucija koje će nam kasnije poslužiti u računanju očekivanja i varijance za određenu distribuciju. Prisjetimo se prvo sljedeće tri koje ćemo koristiti u primjeru [1]:

1. Slučajna varijabla $X$ koja opisuje pokus sa samo dva moguća ishoda: uspjeh, koji se realizira s vjerojatnošću $p$ i neuspjeh, koji se realizira s vjerojatnošću $1 - p$, ima Bernoullijevu distribuciju s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$ i tablicom distribucije

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

Očekivanje i varijanca takve distribucije jednaki su

$$E[X] = p$$
$$Var(X) = p(1-p).$$

2. Slučajna varijabla $X$ koja broji uspjehe u $n$ nezavisnih izvođenja istog pokusa sa samo dva moguća ishoda (uspjeh i neuspjeh), pri čemu se u svakom izvođenju uspjeh realizira s vjerojatnošću $p$ ima binomnu distribuciju s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0, 1 \rangle$ te

koristimo oznaku $X \sim \mathcal{B}(n,p)$. Slika navedene distribucije jest $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, \dots, n\}$, a vjerojatnosti realizacije elemenata slike su

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k \in \mathcal{R}(X).$$

Očekivanje i varijanca takve distribucije su

$$E[X] = np$$
$$Var(X) = np(1-p).$$

3. Slučajna varijabla $X$ ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako prima vrijednosti iz skupa $\mathcal{R}(X) = \{0, 1, 2, \dots\}$ s vjerojatnostima

$$P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k \in \mathcal{R}(X)$$

te pišemo $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$. Očekivanje i varijanca takve distribucije jednaki su

$$E[X] = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda.$$

**Primjer** 2.2.

(1) *Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom* $p \in \langle 0, 1 \rangle$
Izračunajmo FIV takve slučajne varijable $X$:

$$\begin{aligned} g_X(z) &= \sum_{k \in \mathcal{R}(X)} z^k p_k \\ &= 1 \cdot (1-p) + zp \\ &= 1 - p + zp \\ &= 1 - p(1-z), \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(2) *Binomna slučajna varijabla s parametrima* $n \in \mathbb{N}$ *i* $p \in \langle 0, 1 \rangle$
Izračunajmo FIV takve slučajne varijable $X$:

$$\begin{aligned} g_X(z) &= \sum_{k \in \mathcal{R}(X)} z^k p_k \\ &= \sum_{k=0}^{n} z^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (zp)^k (1-p)^{n-k} \\ &= (pz + 1 - p)^{(k+n-k)} \quad \text{(prema binomnom teoremu)} \\ &= (1 - p(1-z))^n, \quad z \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Možemo uočiti kako je FIV binomne slučajne varijable $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ $n$-ta potencija FIV Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$.

(3) *Poissonova slučajna varijabla s parametrom* $\lambda > 0$

Izračunajmo FIV takve slučajne varijable $X$:

$$\begin{aligned}
g_X(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z)^k}{k!} \\
&= e^{-\lambda} e^{\lambda z} \\
&= e^{\lambda z - \lambda} \\
&= e^{\lambda(z-1)}, \quad z \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

## 2.1 FIV i momenti cjelobrojnih slučajnih varijabli

Kako i sam naslov kaže, funkcije izvodnice vjerojatnosti možemo povezati i s momentima cjelobrojnih slučajnih varijabli te na nešto kraći način doći do očekivanja i varijance pojedinih distribucija. Pomoću sljedeće propozicije iskažimo i dokažimo računanje momenata cjelobrojne slučajne varijable $X$ koristeći FIV.

**Propozicija 2.1.** *(vidjeti [2, Propozicija V.1.1]) Ako cjelobrojna varijabla X ima drugi moment, odnosno* $E[X^2] < \infty$*, tada je njezina FIV dva puta derivabilna u* $z = 1$ *i vrijedi:*

$$\begin{aligned}
&E[X] = g'_X(1) \\
&Var(X) = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2.
\end{aligned}$$

*Dokaz.* FIV od $X$, odnosno $g_X(z)$, derivabilna je član po član proizvoljno mnogo puta na $\langle -r, r \rangle$, gdje je $r$ radijus konvergencije reda potencija kojim je $g_X(z)$ definirana. Kako smo prethodno spomenuli, $g_X(z)$ za $X$ takav da je $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$, ima radijus konvergencije $r \geq 1$, a "problem" nastaje kada je $r = 1$. Takav slučaj opravdavamo korištenjem Abelovog teorema kojega ćemo prvo iskazati.

**Teorem 2.2** (Abelov teorem)**.** *Neka je* $g(z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ *za sve* $p_i \in \mathbb{R}$ *i s radijusom konvergencije 1 te pretpostavimo da red* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i$ *konvergira. Tada je* $g(z)$ *neprekidna slijeva za* $z = 1$*, odnosno*

$$\lim_{z \uparrow 1} g(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i = g(1).$$

To znači da će čak i u "najgorem slučaju", kada je $r = 1$, FIV biti neprekidna u $z = 1$. Općenito vrijedi

$$\begin{aligned}
g'_X(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} p_k \\
g''_X(z) &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) z^{k-2} p_k.
\end{aligned}$$

Primijenimo li Abelov teorem na to, možemo zaključiti da su $g'_X(z)$ i $g''_X(z)$ neprekidne slijeva u $z = 1$. Sada možemo biti sigurni da su $g'_X(z)$ i $g''_X(z)$ dobro definirane u $z = 1$.

$$\lim_{z \uparrow 1} g'(z) = g'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k \in \mathcal{R}(X)} kp_k = E[X],$$
$$\lim_{z \uparrow 1} g''(z) = g''_X(1) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = E[X(X-1)] = E[X^2] - E[X].$$

Dakle, vrijedi

$$E[X^2] = g''_X(1) + g'_X(1)$$

te je prema formuli za varijancu

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = g''_X(1) + g'_X(1) - (g'_X(1))^2.$$

□

Napomenimo kako analogno vrijedi:

$$\begin{aligned} g'''_X(1) &= E[X(X-1)(X-2)] \\ g^{(4)}_X(1) &= E[X(X-1)(X-2)(X-3)] \\ &\vdots \\ g^{(k)}_X(1) &= E\left[\prod_{n=0}^{k-1}(X-n)\right] \end{aligned}$$

Sada kad smo naveli kako izračunati svaki od momenata diskretne distribucije, pogledajmo na sljedećem primjeru računanje momenata neke cjelobrojne slučajne varijable pomoću FIV.

**Primjer** 2.3. *Uzmimo slučajnu varijablu koja ima Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$, tj. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ te izračunajmo neke njezine momente $E[X]$, $E[X^2]$ i $E[X^3]$.*
Već smo izračunali FIV Poissonove slučajne varijable, odnosno $g_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$, $z \in \mathbb{R}$ i pogledajmo njezine derivacije koje će nam trebati u računanju momenata:

$$\begin{aligned} g'_X(z) &= \lambda e^{\lambda(z-1)} \\ g''_X(z) &= \lambda^2 e^{\lambda(z-1)} \\ g'''_X(z) &= \lambda^3 e^{\lambda(z-1)} \\ &\vdots \\ g^{(k)}_X(z) &= \lambda^k e^{\lambda(z-1)} \end{aligned}$$

Sada izračunajmo momente pomoću FIV prema Propoziciji 1.1.:

$$\begin{aligned} E[X] &= g'_X(1) = \lambda e^{\lambda(1-1)} = \lambda \\ E[X^2] &= g''_X(1) + g'_X(1) = \lambda^2 e^{\lambda(1-1)} + \lambda e^{\lambda(1-1)} \\ &= \lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) \end{aligned}$$

Za računanje trećeg momenta iskoristimo

$$E[X(X-1)(X-2)] = g_X'''(1) = \lambda^3$$

iz čega slijedi

$$E[X^3] - 3E[X^2] + 2E[X] = \lambda^3.$$

Uvrstimo li ono što već znamo, odnosno $E[X] = \lambda$ i $E[X^2] = \lambda(\lambda+1)$ te prebacimo sve osim $E[X^3]$ na desnu stranu, dobit ćemo

$$E[X^3] = \lambda^3 + 3\lambda(\lambda+1) - 2\lambda = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda.$$

Ostali momenti računaju se na analogan način.

## 2.2 FIV i distribucija sume nezavisnih slučajnih varijabli

Kod proučavanja funkcija izvodnica sume nezavisnih slučajnih varijabli vrlo nam je važan sljedeći teorem koji će pokazati kako je FIV navedene sume zapravo produkt pripadnih FIV.

**Teorem 2.3.** *(vidjeti [8, Proposition 3.38.]) Neka su $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne cjelobrojne slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s FIV $g_{X_i}(z)$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Tada je FIV slučajne varijable $S_n = X_1 + \dots + X_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ dana izrazom*

$$g_{S_n}(z) = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(z).$$

*Ukoliko su dodatno $X_1, \dots, X_n$ jednako distribuirane, tada vrijedi*

$$g_{S_n}(z) = (g_{X_1}(z))^n$$

*Dokaz.* Kako su $X_1, X_2, \dots, X_n$ nezavisne pa su i slučajne varijable $z^{X_1}, z^{X_2}, \dots, z^{X_n}$ međusobno nezavisne, $|z| \leq 1$, kao Borelove transformacije nezavisnih slučajnih varijabli $X_1, X_2, \dots, X_n$. Izračunajmo sada FIV slučajne varijable $S_n$.

$$\begin{aligned} g_{S_n}(z) &= E[z^{S_n}] \\ &= E[z^{X_1 + \dots + X_n}] \\ &= E[z^{X_1} \cdot \dots \cdot z^{X_n}] \\ &= E[z^{X_1}] \cdot \dots \cdot E[z^{X_n}] \quad \text{(zbog nezavisnosti)} \\ &= \prod_{k=1}^{n} E[z^{X_k}] = \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(z) \end{aligned}$$

Primijetimo, ukoliko je $X_1 \overset{d}{=} X_2 \overset{d}{=} \dots \overset{d}{=} X_n$, tada vrijedi:

$$\begin{aligned} g_{S_n}(z) &= E[z^{S_n}] = E[z^{X_1} \cdot \dots \cdot z^{X_1}] = E[z^{X_1}] \cdot \dots \cdot E[z^{X_1}] \\ &= g_{X_1}(z) \cdot \dots \cdot g_{X_1}(z) = (g_{X_1}(z))^n. \end{aligned}$$

□

Kao motivaciju za sljedeći teorem, uzmimo jedan slikoviti primjer. Pretpostavimo npr. da ljudi dolaze u kino i kupuju karte za neki film. Svaki čovjek kupit će određeni broj karata (sam za sebe ili za sebe i svoje prijatelje). Pitamo se koliko je ukupno karata prodano taj dan? Da bismo odgovorili na pitanje, neka slučajna varijabla $Z$ modelira broj ljudi, a $X_k$ broj karata koje je kupio $k$-ti čovjek. Pretpostavljamo da su slučajne varijable $X_1, X_2, \dots$ nenegativne, međusobno nezavisne i jednako distribuirane te također nezavisne i od $Z$. Dakle, ukupan broj karata je $S_Z = \sum_{k=1}^{Z} X_k$ što je suma slučajnog broja slučajnih varijabli. Ukoliko znamo distribucije od $Z$ i $X_k$, onda pomoću funkcija izvodnica vjerojatnosti možemo pronaći i distribuciju od $S_Z$.

Sada formalno iskažimo i dokažimo kako izgleda funkcija izvodnica slučajnog broja slučajnih sumanada.

**Teorem 2.4.** *(vidjeti [8, Proposition 3.39.]) Neka su cjelobrojne slučajne varijable $X_1$, $X_2$, $\dots$, $X_n$, $Z$ nezavisne $\forall n \in \mathbb{N}$ te neka su $X_1$, $X_2$, $\dots$, $X_n$ jednako distribuirane. Tada je FIV slučajne varijable $S_Z = \sum_{k=1}^{Z} X_k$ dana izrazom $g_{S_Z}(z) = g_Z(g_{X_1}(z))$.*

*Dokaz.* Zapišimo prvo FIV slučajne varijable $S_Z$ kao

$$g_{S_Z}(z) = E[z^{S_Z}] = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P(S_Z = m).$$

Izračunajmo zatim nepoznatu nam vjerojatnost $P(S_Z = m)$:

$$\begin{aligned}
P(S_Z = m) &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_k = m | Z = k) P(Z = k) \\
&\quad \text{(po formuli potpune vjerojatnosti)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = m) P(Z = k) \qquad \text{(zbog nezavisnosti)}
\end{aligned}$$

Uvrstimo dobivenu vjerojatnost u početnu formulu i dobijemo

$$\begin{aligned}
g_{S_Z}(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} P(S_k = m) P(Z = k) z^m \\
&\quad \text{(koristeći Fubinijev teorem, sume reda smijemo zamijeniti)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left( \sum_{m=0}^{\infty} z^m P(S_k = m) \right) P(Z = k) \\
&\quad \text{(sumacija u zagradi jednaka je FIV od } S_k\text{)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} g_{S_k}(z) P(Z = k) \\
&\quad \text{(}S_k \text{ je suma nezavisnih jednako distribuiranih} \\
&\quad \text{slučajnih varijabli pa po Teoremu 1.2. slijedi:)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (g_{X_1}(z))^k P(Z = k) \\
&= E[(g_{X_1}(z))^Z] \\
&= g_Z(g_{X_1}(z)).
\end{aligned}$$

$\square$

Navedimo primjere u kojima ćemo pokazati korištenje ovih dvaju teorema. U primjeru 2.4. vidjet ćemo kakva će biti distribucija sume nezavisnih slučajnih varijabli $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$, $k \in \{1, \dots, n\}$ korištenjem Teorema 2.3.

**Primjer** 2.4. Neka su $X_1$, $X_2$, $\dots$, $X_n$ nezavisne slučajne varijable koje imaju Poissonovu distribuciju s parametrom $\lambda_k > 0$, $\forall k \in \{1, \dots, n\}$, tj. $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$. Prema Teoremu 2.2. je

$$\begin{aligned} g_{S_n}(z) &= \prod_{k=1}^{n} g_{X_k}(z) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k (z-1)} \\ &= e^{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)(z-1)}, \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

iz čega vidimo kako je $S_n \sim \mathcal{P}\left(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k\right)$, odnosno suma nezavisnih Poissonovih slučajnih varijabli ponovo je Possonova slučajna varijabla s parametrom $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k$.

Zatim pogledajmo korištenje Teorema 2.4. u određivanju distribucije sume nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli.

**Primjer** 2.5. Neka su $X_1$, $X_2$, $\dots$nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$ te neka je $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$ nezavisna od $X_1$,$\dots$,$X_n$. Sa $S_Z$ označimo sumu $\sum\limits_{k=1}^{Z} X_k$ i izračunajmo njezinu FIV korištenjem Teorema 2.3.

$$\begin{aligned} g_{S_Z}(z) &= g_Z(g_{X_1}(z)) \\ &= g_Z(1 - p(1-z)) \quad (\text{zbog } X_1 \sim Bern(p)) \\ &= e^{\lambda(1-p(1-z)-1)} \quad (\text{zbog } Z \sim \mathcal{P}(\lambda)) \\ &= e^{\lambda p (z-1)}, \quad z \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

pa možemo zaključiti da je $S_Z \sim \mathcal{P}(\lambda p)$, odnosno da je suma slučajno mnogo nezavisnih jednako distribuiranih Bernoullijevih slučajnih varijabli, gdje je $Z$ Poissonova slučajna varijabla, sada Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda p$.

# 3 Funkcije izvodnice momenata

Kao što je navedeno u prethodnom poglavlju, funkcije izvodnice vjerojatnosti izvrstan su analitički alat kod nenegativnih i cjelobronih slučajnih varijabli. Stoga za ostale slučajne varijable možemo koristiti nešto općenitije funkcije izvodnice, a to su funkcije izvodnice momenata. Prvo ih definirajmo, a zatim pogledajmo koja su njihova svojstva te kako ih možemo koristiti.

**Definicija 3.1.** *Neka je $X$ diskretna ili neprekidna slučajna varijabla.* ***Funkcija izvodnica momenata (FIM)*** *slučajne varijable $X$ je funkcija $M$ definirana s*

$$M(t) = M_X(t) = E[e^{tX}],$$

*za sve $t \in \mathbb{R}$ za koje to očekivanje postoji, tj. za koje je $E[e^{tX}] < \infty$.*

Odmah je vidljivo da je $M_X(0) = 1$, a za ostale $t \in \mathbb{R}$ FIM može, ali i ne mora biti dobro definirana.
Iz definicije možemo zaključiti:

$$M_X(t) = \begin{cases} \sum\limits_x e^{tx} P(X = x), & X \text{ diskretna} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx, & X \text{ neprekidna} \end{cases},$$

gdje je $f_X$ funkcija gustoće slučajne varijable $X$.
Sada pogledajmo kako $M_X(t)$ zaista generira momente.
Neka je $X$ navedena slučajna varijabla te neka je funkcija $M_X(t)$ definirana na okolini nule. Razvijmo sada funkciju $t \mapsto e^{tX}$ u Taylorov red oko nule:

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} X^k \frac{t^k}{k!}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} E[X^k] \frac{t^k}{k!}.$$

Uočimo još da je vrijednost $k$-te derivacije funkcije $M_X(t)$ u nuli jednaka $k$-tom momentu slučajne varijable $X$, odnosno

$$M_X^{(k)}(0) = E[X^k]$$

te upravo iz tog razloga funkciju $M_X(t)$ i nazivamo funkcijom izvodnicom momenata. Budući da je $E[X] = M_X(0)$, možemo zaključiti da vrijedi:

$$Var(X) = M_X''(0) - (M_X'(0))^2$$

po formuli za varijancu. Nešto detaljniji prikaz navedenog možemo pronaći u [5, str. 219].

Pogledajmo sada i nekoliko primjera na konkretnim distribucijama kako bismo lakše shvatili navedenu teoriju. No, prvo se prisjetimo distribucija (pomoću [1]) koje ćemo koristiti u primjeru:

1. Za neprekidnu slučajnu varijablu $X$ kažemo da ima uniformnu distribuciju na intervalu $\langle a, b\rangle$, $a < b$ ako joj je funkcija gustoće vjerojatnosti dana izrazom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in \langle a, b\rangle \\ 0, & x \notin \langle a, b\rangle \end{cases}.$$

   Funkcija distribucije takve slučajne varijable na $\langle a, b\rangle$ definirana je s

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle -\infty, a\rangle \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b\rangle \\ 1, & x \in [b, \infty\rangle \end{cases}.$$

   Njezino očekivanje i varijanca jednaki su

$$E[X] = \frac{a+b}{2},$$
$$Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

2. Neprekidna slučajna varijabla $X$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda > 0$ ako je funkcija gustoće dana izrazom

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Funkcija distribucije te slučajne varijable dana je izrazom

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Njezino očekivanje i varijanca iznose

$$E[X] = \frac{1}{\lambda},$$
$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

**Primjer** 3.1. (pogledati [5, Example 4.8.1 i 4.8.2])

(1) *Neka slučajna varijabla $X$ ima neprekidnu uniformnu distribuciju s parametrima 0 i 1, odnosno $X \sim \mathcal{U}(0,1)$. Izračunajmo njezinu FIM te uočimo njezinu korisnost.*
Dakle, prvo izračunajmo $M_X(t)$:

$$M_X(t) = \int_0^1 e^{tx} f_X(x) dx = \int_0^1 1 \cdot e^{tx} dx = \frac{e^t - 1}{t}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zatim prikažimo $M_X(t)$ kao niz potencija od $e^t$, tj. $e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \ \ldots$:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1 + t + \frac{t^2}{2!} + \ \ldots \ - 1}{t} \\ &= 1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \ \ldots \end{aligned}$$

iz čega zaključujemo $E[X^k] = \frac{1}{k+1}$.
Pokušajmo $k$-ti moment pronaći direktno iz definicije, odnosno

$$E[X^k] = \int_0^1 x^k dx = \frac{1^{k+1}}{k+1} - 0 = \frac{1}{k+1}$$

Vidimo kako pomoću FIM nešto teže dolazimo do spomenutog momenta nego preko definicije što se zapravo događa u većini slučajeva.
Sada derivirajmo gore dobiveni $M_X(t)$.

$$M'_X(t) = \frac{te^t - e^t + 1}{t^2}$$

Kada $t \to 0$, korištenjem L'Hospitalovog pravila dobivamo $M'_X(t) \to \frac{1}{2}$. Obzirom da je očekivanje uniformne distribucije jednako $E[X] = \frac{a+b}{2}$, odnosno $\frac{1}{2}$ u ovom slučaju, dobili smo točan rezultat.

(2) *Neka slučajna varijabla $X$ ima eksponencijalnu distribuciju s parametrom $\lambda$, odnosno $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Odredimo njezinu FIM te očekivanje i varijancu pomoću nje.*

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} f_X(x)dx = \int_0^\infty e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda \int_0^\infty e^{x(t-\lambda)}dx = \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda-t)}dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda - t}, \quad t < \lambda.
\end{aligned}
$$

Izračunajmo sada prve dvije derivacije od $M_X(t)$ kako bismo mogli izračunati očekivanje i varijancu.

$$
\begin{aligned}
M_X'(t) &= \frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} \quad \Rightarrow \quad M_X'(0) = \frac{\lambda}{(\lambda - 0)^2} = \frac{1}{\lambda} \\
M_X''(t) &= \frac{2\lambda}{(\lambda - t)^3} \quad \Rightarrow \quad M_X''(0) = \frac{2\lambda}{(\lambda - 0)^3} = \frac{2}{\lambda^2}.
\end{aligned}
$$

Dakle, vrijedi

$$
E[X] = \frac{1}{\lambda} \quad i \quad E[X^2] = \frac{2}{\lambda^2}
$$

te je po formuli za varijancu

$$
Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.
$$

Budući da smo u prethodnom primjeru spomenuli kako je u većini slučajeva lakše doći do momenata direktno preko definicije nego pomoću funkcija izvodnica momenata, postavljamo si pitanje "koja je onda uopće njihova svrha?". Odgovor jest da ih gotovo isključivo koristimo kako bismo odredili distribucije slučajnih varijabli te distribucije suma slučajnih varijabli jer FIM (ukoliko postoje) jedinstveno određuju distribuciju slučajne varijable. Dakle, ako za slučajnu varijablu $X$ postoji FIM na nekoj okolini nule, onda je distribucija od $X$ jedinstveno određena svojim momentima. Općenito, distribucija ne mora biti jedinstveno određena svojim momentima što je poznato pod nazivom *problem momenata.*

**Primjer** 3.2. *Neka je dana slučajna varijabla $X$ i njezina FIM $M_X(t) = 1 - p + pe^t$. Koja je distribucija od $X$?*
Odredimo k-tu derivaciju od $M_X(t)$:

$$
\begin{aligned}
M_X'(t) &= pe^t \\
M_X''(t) &= pe^t \\
&\vdots \\
M_X^{(k)}(t) &= pe^t.
\end{aligned}
$$

Zadana FIM dobro je definirana na okolini $t = 0$, odnosno pripadna distribucija jednoznačno je određena momentima. Izračunajmo sada $M_X^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots$ za $t = 0$:

$$M_X^{(k)}(0) = p, \quad \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Dakle, $E[X^k] = p$ te je po formuli za varijancu $Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = p - p^2 = p(1-p)$. Obzirom da Bernoullijeva distribucija ima $k$-ti moment jednak $p$, za svaki $k$, zaključujemo da se radi o Bernoullijevoj distribuciji. Također, primijetimo da izračunato očekivanje i varijanca pripadaju upravo Bernoullijevoj distribuciji te zaključimo da je $X$ Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$.

Sljedećim korolarom prikažimo još jedno korisno svojstvo funkcija izvodnica momenata u kojemu ćemo vidjeti što se događa s njima ukoliko slučajnu varijablu množimo ili zbrajamo konstantom. Zatim pogledajmo i korištenje navedenog korolara jednim primjerom.

**Korolar 3.1.** *(vidjeti [8, Corolary 3.14.]) Neka je $X$ slučajna varijabla s FIM $M_X$ te neka je $Y$ slučajna varijabla takva da je $Y = aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Tada je $M_Y(t) = e^{bt} M_X(at)$.*

*Dokaz.* Raspišemo $M_Y(t)$ po definiciji i dobijemo

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= E[e^{Yt}] = E[e^{(aX+b)t}] \\ &= E[e^{aXt} e^{bt}] = E[e^{Xat}] E[e^{bt}] \\ &= e^{bt} M_X(at). \end{aligned}$$

□

Prije sljedećeg primjera, prisjetimo se normalne distribucije slučajne varijable: [1]

- Slučajna varijabla $X$ čija je funkcija gustoće

  $$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

  ima normalnu distribuciju s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ te pišemo $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Očekivanje i varijanca takve slučajne varijable jednaki su

  $$\begin{aligned} E[X] &= \mu, \\ Var(X) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

  Ukoliko je $\mu = 0$ i $\sigma = 1$, takva distribucija naziva se standardna normalna distribucija.

**Primjer** 3.3. (pogledati [3, Primjer 3.7.]) *Neka je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Pronađimo $M_X(t)$ te odredimo neke momente slučajne varijable $X$.*
Započet ćemo standardiziranom normalnom slučajnom varijablom $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ te pronađimo

njezinu FIM, odnosno $M_Z(t)$.

$$\begin{aligned}
M_Z(t) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_Z(x) dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{t^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}} dx \\
&= e^{\frac{t^2}{2}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-t)^2}{2}} dx \\
&= e^{\frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakost slijedi zbog normiranosti funkcije gustoće normalne distribucije s očekivanjem $t$ i varijancom 1.

Uzmimo sada da je slučajna varijabla $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, odnosno da je $X = \mu + \sigma Z$ te primijenimo Korolar 3.1. Zaključujemo:

$$M_X(t) = e^{\mu t} M_Z(\sigma t) = e^{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Uočimo još da razvojem te funkcije u Taylorov red oko $t = 0$ dobivamo

$$M_Z(t) = 1 + \tfrac{t^2}{2} + \tfrac{t^4}{8} + \dots$$

te da je zbog toga

$$\begin{aligned}
E[Z^{2k+1}] &= 0 \\
E[Z^{2k}] &= \frac{(2k)!}{2^k k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots
\end{aligned}$$

Izračunajmo još prva tri momenta slučajne varijable $X$:

$$\begin{aligned}
E[X] &= E[\mu + \sigma Z] = \mu, \\
E[X^2] &= E[(\mu + \sigma Z)^2] = \mu^2 + \sigma^2, \\
E[X^3] &= E[(\mu + \sigma Z)^2] = \mu^3 + 3\sigma^2 \mu.
\end{aligned}$$

Za razliku od prethodnog, u ovome primjeru FIM znatno olakšavaju izračun momenata koje nam ne bi bilo lako izračunati izravno.

Osim primjera FIM poznatih neprekidnih distribucija, izračunajmo ih i za ranije spomenute diskretne distribucije kako bismo kasnije mogli napraviti usporedbu svih funkcija izvodnica.

**Primjer** 3.4.

(1) *Neka je $X$ Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $p \in \langle 0, 1 \rangle$. Izračunajmo njezinu FIM.*

$$\begin{aligned}
M_X(t) = E[e^{tX}] &= \sum_{n=0}^{1} e^{tn} P(X = n) \\
&= P(X = 0) \cdot e^0 + P(X = 1) \cdot e^t \\
&= 1 - p + pe^t, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

(2) *Neka je $X$ binomna slučajna varijabla, odnosno $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 0,1 \rangle$. Izračunajmo njezinu FIM.*

$$\begin{aligned} M_X(t) = E[e^{tX}] &= \sum_{k=0}^{n} e^{tk} P(X=k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} e^{tk} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (pe^t)^k (1-p^{n-k}) \\ &= (1-p+pe^t)^n, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(3) *Neka je $X$ Poissonova slučajna varijabla, odnosno $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Izračunajmo njezinu FIM.*

$$\begin{aligned} M_X(t) = E[e^{tX}] &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} P(X=n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} e^{tn} = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^t)^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} e^{-\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Funkcije izvodnice momenata imaju neka svojstva analogna onima funkcija izvodnica vjerojatnosti pa tako prema sljedećoj propoziciji, funkcije izvodnice momenata također pretvaraju FIM sume u produkte FIM.

**Propozicija 3.1.** *(vidjeti [5, str.224.]) Neka su $X$ i $Y$ nezavisne slučajne varijable s FIM $M_X(t)$ te $M_Y(t)$ redom. Tada je FIM njihova zbroja dana izrazom $M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$, $t \in \mathbb{R}$.*

*Dokaz.* Znamo da po definiciji vrijedi $M_X(t) = E[e^{tX}]$ i $M_Y(t) = E[e^{tY}]$. Sada na isti način rapišimo i $M_{X+Y}(t)$:

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= E[e^{(X+Y)t}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}] \\ &= E[e^{tX}] \cdot E[e^{tY}] \quad \text{(po Teoremu 11.5. [9, str. 357])} \\ &= M_X(t) \cdot M_Y(t). \end{aligned}$$

□

U sljedećoj napomeni spomenimo vezu između funkcija izvodnica momenata i Laplaceove transformacije koju ćemo prvo definirati.

**Definicija 3.2.** *Neka je dana funkcija $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. Ako je za funkciju $f$ integral*

$$\mathcal{L}(f)(s) = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{R},$$

*konačan, onda se funkcija $\mathcal{L}(f) = F$ zove Laplaceova transformacija funkcije $f$, a preslikavanje $\mathcal{L}$ Laplaceova transformacija.*

Također postoji i dvostrana Laplaceova transformacija za koju vrijedi

$$\mathcal{L}^*(f)(s) = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

**Napomena 3.1.** Znamo kako općenito izgleda FIM, odnosno

$$M_X(s) = E[e^{sX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} f(x) dx, \quad s \in \mathbb{R}$$

te uočimo da se ona razlikuje od dvostrane Laplaceove transformacije samo po predznaku od $s$. Dakle, funkcija izvodnica momenata slučajne varijable $X$ u $s$ zapravo je dvostrana Laplaceova transformacija funkcije gustoće slučajne varijable $X$ u $-s$.

Za kraj ovog poglavlja spomenimo kako je najveći problem funkcija izvodnica momenata taj što ne moraju uvijek postojati pa ih ne možemo uvijek primijeniti. Stoga se vrlo često koriste karakteristične funkcije s jednako dobrim svojstvima koje uvijek postoje, no o njima ćemo nešto kasnije. Primjer distribucije za koju je FIM konačna samo u $t = 0$ jest Cauchyjeva distribucija.

**Primjer** 3.5. *Neka je $X$ Cauchyjeva slučajna varijabla čija je funkcija gustoće dana s*

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

*Pokušajmo izračunati njezinu FIM.*

$$M_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2} dx > \int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2} = (*).$$

Možemo primijetiti kako je prethodni integral (u granicama $-\infty$ i $\infty$) pozitivan za $x, t \in \mathbb{R}$ pa stoga vrijedi navedena nejednakost. Zatim očito vrijedi $e^{tx} > tx$ i slijedi:

$$(*) > \int_{0}^{\infty} tx \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + x^2} = \frac{t}{2\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{1 + x^2} dx = (**).$$

Sada supstitucijom $u = x^2 + 1$, $du = 2x\ dx$ dobijemo:

$$(**) = \frac{t}{2\pi} \int_{1}^{\infty} \frac{1}{u} du = \frac{t}{2\pi} (\log(\infty) - \log(1)) = \infty.$$

Dakle, $M_X(t)$ nije definirano, odnosno beskonačno je za sve $t$ osim 0 kada je $M_X(t) = 1$ te zaključujemo kako Cauchyjeva distribucija nema FIM. Ukoliko bismo $t$ zamijenili s $it$, $t \in \mathbb{R}$, tada bismo mogli izbjeći problem postojanja i konačnosti, no takav primjer ćemo pokazati u poglavlju "Karakteristične funkcije".

# 4 Funkcije izvodnice kumulanata

Nakon što smo razradili funkcije izvodnice momenata, recimo nešto i o funkcijama izvodnicama kumulanata budući da su međusobno povezane i definiraju se jedna preko druge. No, pogledajmo prvo što znamo općenito o kumulantima.
Kumulanti distribucije, u teoriji vjerojatnosti i statistici, skup su veličina koje su alternativa momentima distribucije i označavaju se s $\kappa_n$. Točnije, to je niz brojeva koji opisuje distribuciju na način da je prvi kumulant srednja vrijednost, drugi varijanca, a treći je treći središnji moment. Nastavimo li dalje, četvrti te momenti višeg reda više neće biti jednaki središnjim momentima. Dakle, bilo koje dvije distribucije čiji su momenti identični, imat će identične kumulante i obrnuto.
Funkcije izvodnice kumulanata prirodnije su za računanje matematičkog očekivanja i varijance slučajne varijable od funkcija izvodnica momenata pa ih za početak definirajmo:

**Definicija 4.1.** ***Funkcija izvodnica kumulanata (FIK)*** *slučajne varijable $X$ je funkcija $C_X$ definirana s*

$$C_X(t) = \log M_X(t) = \log E[e^{tX}], \quad t \in \mathbb{R},$$

*gdje je $M_X$ funkcija izvodnica momenata, ako ona postoji te je* log *oznaka za prirodni logaritam .*

Budući da je funkcija izvodnica kumulanata jednaka prirodnom logaritmu funkcije izvodnice momenata, možemo zaključiti da za funkciju izvodnicu momenata onda vrijedi

$$M_X(t) = e^{C_X(t)}.$$

Sada iz definicije FIK možemo dobiti kumulante $\kappa_n$, odnosno iz njezinog niza potencija:

$$C_X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{t^n}{n!} = \kappa_1 + \kappa_2 \frac{t^2}{2!} + \dots$$

Uočimo da se ovdje radi o razvoju u Maclaurinov red (Taylorov red u okolini $t = 0$) pa $n$-ti kumulant možemo dobiti deriviranjem $n$ puta kada je $t = 0$:

$$\kappa_n = C_X^{(n)}(0)$$

odakle i dolazi njihov naziv. [10]

Nadalje, derivirajmo FIK kako bismo pokušali doći do načina na koji ćemo moći računati očekivanje, varijancu i momente višeg reda.

$$
\begin{aligned}
C'_X(t) &= \frac{M'_X(t)}{M_X(t)} \\
C''_X(t) &= \frac{M''_X(t)M_X(t) - M'_X(t)^2}{M_X(t)^2} \\
C'''_X(t) &= \frac{M_X(t)^2 M'''_X(t) + 2M'_X(t)^3 - 3M_X(t)M'_X(t)M''_X(t)}{M_X(t)^3} \\
C^{(4)}_X(t) &= \frac{1}{M_X(t)^4}\Big( - 6M_X(t)^4 + M_X(t)^2(M_X(t)M^{(4)}_X(t) - 3M''_X(t)^2) \\
&\qquad - 4M_X(t)^2 M'''_X(t)M'_X(t) + 12M_X(t)M'_X(t)^2 M''_X(t)\Big).
\end{aligned}
$$

Sada, koristeći što nam je poznato iz prethodnog poglavlja, odnosno $M_X(0) = 1$ i $M^{(k)}_X(0) = E[X^k]$, dobijemo:

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= C'_X(0) = \frac{M'_X(0)}{M_X(0)} = \frac{E[X]}{1} = E[X] \\
\kappa_2 &= C''_X(0) = \frac{M''_X(0)M_X(0) - M'_X(0)^2}{M^2_X(0)} = \frac{E[X^2] \cdot 1 - (E[X])^2}{1} \\
&= E[X^2] - (E[X])^2 = Var(X) \\
\kappa_3 &= C'''_X(0) = \frac{M_X(0)^2 M'''_X(0) + 2M'_X(0)^3 - 3M_X(0)M'_X(0)M''_X(0)}{M_X(0)^3} \\
&= E[X^3] + 2(E[X])^3 - 3E[X]E[X^2] = E[(X - E[X])^3] \\
\kappa_4 &= C^{(4)}_X(0) \\
&= \frac{1}{M_X(0)^4}\Big( - 6M_X(0)^4 + M_X(0)^2(M_X(0)M^{(4)}_X(0) - 3M''_X(0)^2) \\
&\qquad - 4M_X(0)^2 M'''_X(0)M'_X(0) + 12M_X(0)M'_X(0)^2 M''_X(0)\Big) \\
&= -6(E[X])^4 + E[X^4] - 3(E[X^2])^2 - 4E[X^3]E[X] + 12(E[X])^2 E[X^2] \\
&= E[(X - E[X])^4] - 3\sigma^4.
\end{aligned}
$$

Primijetimo kako je $\kappa_4$ četvrti centralni moment umanjen za $3\sigma^2$. Ovo je prvi slučaj gdje kumulanti nisu momenti ili centralni momenti pa možemo zaključiti kako centralni momenti stupnja $> 3$ nemaju svojstvo kumulativnosti.
Pogledajmo na sljedećem primjeru određivanje očekivanja i varijance pomoću FIK.

**Primjer** 4.1. (pogledati [7, Zadatak 3.1]) *Pretpostavimo da je funkcija izvodnica kumulanata slučajne varijable $X$ dana s*

$$
C_X(t) = 2\left(\frac{1}{(1-t)^{10}} - 1\right).
$$

*Izračunajmo matematičko očekivanje, drugi moment i varijancu slučajne varijable $X$.*
Prethodno smo dobili da je očekivanje $E[X] = C'_X(0)$, a varijanca $Var(X) = C''_X(0)$. Stoga,

derivirajmo zadanu FIK dva puta:

$$C'_X(t) = \frac{20}{(1-t)^{11}},$$
$$C''_X(t) = \frac{220}{(1-t)^{12}}.$$

Zatim pogledajmo što dobijemo kada je $t = 0$:

$$C'_X(0) = \frac{20}{(1-0)^{11}} = 20,$$
$$C''_X(0) = \frac{220}{(1-0)^{12}} = 220.$$

Sada iz formule za varijancu izračunajmo drugi moment:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ E[X^2] &= Var(X) + (E[X])^2 = 220 + 20^2 = 620. \end{aligned}$$

Dakle, očekivanje slučajne varijable $X$ je $E[X] = 20$, varijanca $Var(X) = 220$, a drugi moment $E[X^2] = 620$.

U sljedećem teoremu navedimo neka bitna svojstva kumulanata.

**Teorem 4.1.** *(vidjeti [10, Theorem 1, Theorem 2]) Neka je $X$ slučajna varijabla koja ima $n$-ti kumulant $\kappa_n$. Tada vrijedi:*

*(a) $cX$ ima $n$-ti kumulant za svaki $c \in \mathbb{R}$, odnosno $\kappa_n(cX) = c^n \kappa_n(X)$.*

*(b) $X + c$ ima $n$-ti kumulant za svaki $c \in \mathbb{R}$, odnosno*

$$\kappa_n(X+c) = \begin{cases} \kappa_n(X) + c, & n = 1 \\ \kappa_n(X), & n > 1 \end{cases}.$$

*Dokaz.*

(a) Zapišimo prvo $C_{cX}(t)$ po definiciji, odnosno

$$C_{cX}(t) = \log M_{cX}(t) = \log E[e^{tcX}] = \log E[e^{ctX}] = C_X(ct).$$

Zatim pogledajmo njezinu $n$-tu derivaciju koja je jednaka:

$$C^{(n)}_{cX}(t) = c^n C^{(n)}_X(ct).$$

Sada $\kappa_n(cX)$ možemo raspisati prema $\kappa_n = C^{(n)}_X(0)$:

$$\kappa_n(cX) = C^{(n)}_{cX}(0) = c^n C^{(n)}_X(0) = c^n \kappa_n(X).$$

(b) Prvo dokažimo tvrdnju za $n = 1$ koja jednostavno slijedi iz $\kappa_1 = E[X]$:

$$\kappa_1(X + c) = E[X + c] = E[X] + c = \kappa_1(X) + c.$$

Zatim prijeđimo na dokaz tvrdnje za $n > 1$, odnosno $\kappa_n(X + c) = \kappa_n(X)$. Kao u (a) dijelu, znamo

$$C_{X+c}(t) = \log E[e^{t(X+c)}] = \log E[e^{ct+tX}] = ct + C_X(t),$$

a $n$-ta derivacija jednaka je

$$C_{X+c}^{(n)}(t) = \frac{d}{dt^n}ct + C_X^{(n)}(t).$$

Sada prema $\kappa_n = C_X^{(n)}(0)$ dobivamo:

$$\kappa_n(X + c) = C_{X+c}^{(n)}(0) = \frac{d}{dt^n}ct + C_X^{(n)}(0) = C_X^{(n)}(0) = \kappa_n(X).$$

□

**Napomena 4.1.** [10] Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable i $Y$ slučajna varijabla takva da je $Y = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Prirodni logaritam funkcije izvodnice momenata slučajne varijable $Y$ je suma prirodnih logaritama funkcije izvodnice momenata slučajnih varijabli $X_k$, $k = 1, \ldots, n$. Stoga, za funkciju izvodnicu kumulanata slučajne varijable $Y$ vrijedi:

$$C_Y(t) = \sum_{k=1}^{n} C_{X_k}(t).$$

Što se može lako dokazati:

$$\begin{aligned} C_Y(t) &= C_{X_1 + \ \ldots \ + X_n}(t) \\ &= \log E[e^{t(X_1 + \ \ldots \ + X_n)}] \\ &= \log \left( E[e^{tX_1}] \cdot \ \ldots \ \cdot E[e^{tX_n}] \right) \\ &= \log E[e^{tX_1}] + \ \ldots \ + \log E[e^{tX_n}] \\ &= C_{X_1}(t) + \ \ldots \ + C_{X_n}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_{X_k}(t) \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je $n$-ti kumulant zbroja nezavisnih slučajnih varijabli jednak zbroju $n$-tih kumulanata tih slučajnih varijabli, odnosno

$$\kappa_n(Y) = \sum_{k=1}^{n} \kappa_n(X_k)$$

što objašnjava naziv FIK.

Pogledajmo u sljedećem primjeru kako izgledaju FIK i kumulanti nekih nama poznatih distribucija.

**Primjer** 4.2.

(a) *Neka je $X$ Bernoullijeva slučajna varijabla s parametrom $p$, $p \in \langle 0, 1\rangle$.*
Prema definiciji FIK vrijedi $C_X(t) = \log M_X(t)$, gdje je $M_X$ FIM. Budući da smo već izračunali FIM Bernoullijeve distribucije, vrijedi:

$$C_X(t) = \log(1 - p + pe^t).$$

Zatim izračunajmo prva dva kumulanta:

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= C'_X(0) = p \\ \kappa_2 &= C''_X(0) = p(1-p),\end{aligned}$$

što odgovara očekivanju i varijanci Bernoullijeve slučajne varijable.

(b) *Neka je $X$ binomna slučajna varijabla s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0, 1\rangle$.*
Pomoću prethodno izračunate FIM binomne slučajne varijable, vrijedi:

$$C_X(t) = n\log(1 - p + pe^t),$$

a prva dva kumulanta jednaka su

$$\begin{aligned}\kappa_1 &= C'_X(0) = np \\ \kappa_2 &= C''_X(0) = \kappa_1(1-p) = np(1-p),\end{aligned}$$

što odgovara očekivanju i varijanci binomne slučajne varijable.

(c) *Neka je $X$ Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$.*
FIM Poissonove slučajne varijable jednaka je $M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$ pa je stoga njezina FIK jednaka

$$C_X(t) = \log(e^{\lambda(e^t-1)}) = \lambda(e^t - 1).$$

Pokušamo li izračunati kumulante, uočit ćemo da su svi jednaki parametru $\lambda$, odnosno

$$\kappa_n = \lambda, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(d) *Neka je $X$ eksponencijalna slučajna varijabla s parametrom $\lambda$. Izračunajmo njezinu FIK i kumulante.*

$$\begin{aligned}C_X(t) &= \log\left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right) \\ C'_X(t) &= \frac{1}{\lambda - t} \\ C''_X(t) &= \frac{1}{(\lambda - t)^2} \\ C'''_X(t) &= \frac{2}{(\lambda - t)^3} \\ &\vdots\end{aligned}$$

Računanjem kumulanata dobivamo

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= C'_X(0) = \frac{1}{\lambda} \\
\kappa_2 &= C''_X(0) = \frac{1}{\lambda^2} \\
\kappa_3 &= C'''_X(0) = \frac{2}{\lambda^3} \\
&\vdots \\
\kappa_n &= C^{(n)}_X(0) = \lambda^{-n}(n-1)!
\end{aligned}
$$

(e) *Neka je $X$ normalna slučajna varijabla s očekivanjem $\mu$ i varijancom $\sigma^2$.* Pomoću ranije izračunate FIM, odredimo njezinu FIK.

$$C_X(t) = \log(e^{\mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}}) = \mu t + \sigma^2 \frac{t^2}{2}.$$

Izračunajmo i njezine kumulante:

$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= C'_X(0) = \mu \\
\kappa_2 &= C''_X(0) = \sigma^2 \\
\kappa_n &= 0, \quad \forall n \geq 3.
\end{aligned}
$$

# 5 Karakteristične funkcije

U ovom poglavlju bavit ćemo se već spomenutim karakterističnim funkcijama. One su nam vrlo korisne jer postoji 1-1 korespondencija između skupa karakterističnih funkcija i skupa funkcija distribucije. Izravan rad s funkcijama distribucije, koje su bitan dio teorije vjerojatnosti, često nije nimalo lak, no koristeći se karakterističnim funkcijama i njihovim svojstvima, možemo ga znatno olakšati. Prvo ćemo ih definirati za slučajne varijable i navesti neka njihova bitna svojstva, a zatim ćemo isto učiniti i za slučajne vektore. Kao i kod funkcija izvodnica vjerojatnosti, vidjet ćemo poveznicu karakterističnih funkcija sa sumom nezavisnih slučajnih varijabli te s momentima, ali i njihovu vezu s FIV. Osim toga, navest ćemo i dva bitna teorema: Teorem jedinstvenosti i teorem inverzije.

**Definicija 5.1.** ***Karakteristična funkcija (KF)*** *slučajne varijable $X$ na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, odnosno njezine funkcije distribucije $F_X$, je funkcija $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definirana izrazom:*

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx) dF_X(x) \\
&= E[e^{itX}]
\end{aligned}
$$

Kada je $X$ diskretna slučajna varijabla, vrijedi:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \sum_{x\in\mathcal{R}(X)} e^{itx}P(X=x)\\ &= \sum_{x\in\mathcal{R}(X)} \cos(tx)P(X=x) + i\sum_{x\in\mathcal{R}(X)} \sin(tx)P(X=x),\end{aligned}$$

a kada je neprekidna:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}f_X(x)dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx)f_X(x)dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \sin(tx)f_X(x)dx,\end{aligned}$$

gdje je $f_X$ funkcija gustoće neprekidne slučajne varijable $X$.

**Napomena 5.1.** [2] Pokažimo da je funkcija $\varphi_X$ dobro definirana na cijelom $\mathbb{R}$. Pogledamo li izraz $|e^{itx}|$, vidimo da je on jednak 1, odnosno

$$|e^{itx}| = |\cos(tx) + i\sin(tx)| = \sqrt{\cos^2(tx)+\sin^2(tx)} = 1$$

iz čega slijedi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}|dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1$$

pa možemo zaključiti da je $\varphi_X(t) = E[e^{itx}]$ dobro definirana karakteristična funkcija za svaku slučajnu varijablu $X$.

Sljedećom propozicijom navedimo neka bitna svojstva karakterističnih funkcija te ih dokažimo.

**Propozicija 5.1.** *(vidjeti [2, Teorem V.2.1]) Za karakterističnu funkciju $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ slučajne varijable $X$ vrijede sljedeća svojstva:*

*(1)* $|\varphi_X(t)| \leq 1$

*(2)* $\varphi_X(0) = 1$

*(3)* $\varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)}$

*(4)* $\varphi_X$ *je uniformno neprekidna na cijelom* $\mathbb{R}$

*(5)* $\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt}\varphi_X(at)$, *za* $a, b \in \mathbb{R}$,

*Dokaz.*

(1) $|\varphi_X(t)| = \left|\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF_X(x)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx}|dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dF_X(x) = 1$

(2) $\varphi_X(0) = E[e^{itX}] = E[e^0] = 1$

(3) Raspišemo $\varphi_X$ po definiciji te koristimo svojstvo kompleksnog konjugiranja:

$$\begin{aligned}\varphi_X(-t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(-tx) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(-tx) dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF_X(x) - i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(-tx) dF_X(x) \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} \cos(tx) dF_X(x) + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(-tx) dF_X(x)} = \overline{\varphi_X(t)}\end{aligned}$$

(4) Za proizvoljne $t, h \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}|\varphi(t+h) - \varphi(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t+h)x} dF_X(x) - \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i(t+h)x} - e^{itx}) dF_X(x) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} \cdot e^{ihx} - e^{itx}) dF_X(x) \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} (e^{ihx} - 1) dF_X(x) \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |e^{itx} (e^{ihx} - 1)| dF_X(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1| dF_X(x),\end{aligned}$$

gdje smo primijenili nejednakost trokuta te svojstvo iz Napomene 5.1. u zadnjoj jednakosti.
Onda kada $h \to 0$, slijedi da $|e^{ihx} - 1| \to 0$. Tada vrijedi $|e^{ihx} - 1| \leq |e^{ihx}| + 1 \leq 2$ te prema Lebesgueovom teoremu o dominiranoj konvergenciji (vidi [4, str. 138]), čiji su uvjeti sada ispunjeni, zaključujemo

$$\lim_{h \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{ihx} - 1| dF_X(x) = 0$$

i $\varphi_X$ je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$.

(5) Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a \neq 0$. Tada je

$$\begin{aligned}\varphi_{aX+b}(t) &= E[e^{it(aX+b)}] = E[e^{i(at)X} e^{itb}] \\ &= e^{itb} E[e^{i(at)X}] = e^{itb} \varphi_X(at).\end{aligned}$$

$\square$

Pogledajmo zatim primjere karakterističnih funkcija nekoliko cjelobrojnih slučajnih varijabli poznatih distribucija.

**Primjer** 5.1.

(1) *Bernoulijeva distribucija*
Neka je $X$ slučajna varijabla takva da je $P(X = 0) = 1 - p$ i $P(X = 1) = p$, $p \in \langle 0, 1\rangle$. Izračunajmo njezinu KF za $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E[e^{itX}] = e^{it\cdot 1}p + e^{it\cdot 0}(1 - p)\\ &= pe^{it} + 1 - p = 1 - p(1 - e^{it})\end{aligned}$$

(2) *Binomna distribucija*
Neka je $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 0, 1\rangle$. Njezina KF, za $t \in \mathbb{R}$ i koristeći činjenicu da je binomna slučajna varijabla s parametrom $n$ zapravo suma $n$ nezavisnih Bernoulijevih slučajnih varijabli, izgleda ovako:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E[e^{itX}] = E[e^{it(X_1+\ \dots\ +X_n)}]\\ &= E[e^{itX_1} \cdot\ \dots\ \cdot e^{itX_n}]\\ &= E[e^{itX_1}] \cdot\ \dots\ \cdot E[e^{itX_n}]\\ &= \varphi_{X_1}(t) \cdot\ \dots\ \cdot \varphi_{X_n}(t)\\ &= (1 - p + pe^{it}) \cdot\ \dots\ \cdot (1 - p + pe^{it})\\ &= (1 - p + pe^{it})^n\end{aligned}$$

(3) *Poissonova distribucija*
Neka je $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Pogledajmo kako će izgledati njezina KF za $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= E[e^{itX}]\\ &= \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} P(X = x)\\ &= \sum_{x=0}^{\infty} (e^{it})^x e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}\\ &= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^x}{x!}\\ &= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}}\\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)}\end{aligned}$$

gdje predzadnja jednakost slijedi iz toga što je $\sum\limits_{x=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^x}{x!}$ razvoj u Taylorov red eksponencijalne funkcije.

(4) *Neprekidna uniformna*

Neka je $X \sim \mathcal{U}(a,b)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Izračunajmo njezinu KF.

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) = E[e^{itX}] &= \int\limits_a^b e^{itx}\frac{1}{b-a}dx \\
&= \frac{1}{b-a}\Bigg(\int\limits_a^b \cos(tx)dx + i\int\limits_a^b \sin(tx)dx\Bigg) = (*)
\end{aligned}$$

Dalje, supstitucijom $tx = y$ dobivamo:

$$\begin{aligned}
(*) &= \frac{1}{b-a}\Bigg(\int\limits_{at}^{bt} \cos(y)\frac{dy}{t} + i\int\limits_{at}^{bt} \sin(y)\frac{dy}{t}\Bigg) \\
&= \frac{1}{t(b-a)}\Bigg(\sin(y)\Big|_{at}^{bt} - i\cos(y)\Big|_{at}^{bt}\Bigg) \\
&= \frac{1}{t(b-a)}\Big(\sin(bt) - \sin(at) - i\cos(bt) + i\cos(at)\Big) \\
&= \frac{1}{t(b-a)}\Bigg[\Big(\sin(bt) - i\cos(bt)\Big) - \Big(\sin(at) - i\cos(at)\Big)\Bigg]\cdot\frac{i}{i} \\
&= \frac{1}{it(b-a)}\Bigg[\Big(\cos(bt) + i\sin(bt)\Big) - \Big(\cos(at) + i\sin(at)\Big)\Bigg] \\
&= \frac{e^{ibt} - e^{iat}}{it(b-a)}.
\end{aligned}$$

(5) *Eksponencijalna distribucija*

Neka je $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Izračunajmo njezinu KF.

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) = E[e^{itX}] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x)dx \\
&= \int\limits_0^{\infty} e^{itx}\lambda e^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda\int\limits_0^{\infty} \cos(tx)e^{-\lambda x}dx + \lambda i\int\limits_0^{\infty} \sin(tx)e^{-\lambda x}dx.
\end{aligned}$$

Posebno ćemo izračunati prvi, a zatim i drugi integral te ih kasnije spojiti kako bismo dobili rješenje. Započnimo računanje prvog integrala parcijalnom integracijom:

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx &= \left(\frac{1}{t}\sin(tx)e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{t}\sin(tx)(-\lambda e^{-\lambda x})dx \\
&= \frac{\lambda}{t}\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx \\
&= \frac{\lambda}{t}\left[\left(-\frac{1}{t}\cos(tx)e^{-\lambda x}\right)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t}\cos(tx)\right)\left(-\lambda e^{-\lambda x}\right)dx\right] \\
&= \frac{\lambda}{t}\left(\frac{1}{t} - \frac{\lambda}{t}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx\right) \\
&= \frac{\lambda}{t^2} - \frac{\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx.
\end{aligned}
$$

To možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\frac{\lambda}{t^2} = \left(1 + \frac{\lambda^2}{t^2}\right)\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx,$$

odnosno

$$\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx = \frac{\lambda}{t^2}\cdot\frac{t^2}{t^2+\lambda^2} = \frac{\lambda}{t^2+\lambda^2}.$$

Analogno, računanjem drugog integrala dobivamo:

$$\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{t} - \frac{\lambda^2}{t^2}\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx.$$

Zapišimo to u obliku

$$\frac{1}{t} = \left(1 + \frac{\lambda^2}{t^2}\right)\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx,$$

odnosno

$$\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx = \frac{t}{t^2+\lambda^2}.$$

Uvrstimo dobivene integrale u početni izračun:

$$
\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \lambda\int_0^\infty \cos(tx)e^{-\lambda x}dx + \lambda i\int_0^\infty \sin(tx)e^{-\lambda x}dx \\
&= \lambda\cdot\frac{\lambda}{t^2+\lambda^2} + i\lambda\cdot\frac{t}{t^2+\lambda^2} \\
&= \lambda\cdot\frac{\lambda+it}{t^2+\lambda^2} \\
&= \lambda\cdot\frac{\lambda+it}{t^2+\lambda^2}\cdot\frac{\lambda-it}{\lambda-it} \\
&= \frac{\lambda}{\lambda-it}.
\end{aligned}
$$

(6) *Normalna distribucija*

Prvo pretpostavimo da je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i izračunajmo njezinu KF.

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) = E[e^{itX}] &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(itx)^k}{k!}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}x^k e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^k e^{-\frac{x^2}{2}}dx.
\end{aligned}$$

Podintegralnu funkciju označit ćemo s $g(x) = x^k e^{-\frac{x^2}{2}}$ koja će biti parna za parne $k$ i neparna za neparne $k$ i vrijedi:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \Big((-1)^k) + 1\Big)\int\limits_{0}^{\infty} y^k e^{-\frac{x^2}{2}}dy.$$

Sada vrijedi

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big((-1)^k) + 1\Big)\int\limits_{0}^{\infty} y^k e^{-\frac{x^2}{2}}dy \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big((-1)^k) + 1\Big)\int\limits_{0}^{\infty}(2u)^{\frac{k}{2}}e^{-u}(2u)^{-\frac{1}{2}}du \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Big((-1)^k) + 1\Big)\cdot 2^{\frac{k-1}{2}}\int\limits_{0}^{\infty}u^{\frac{k-1}{2}}e^{-u}du \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\Big((-1)^k) + 1\Big)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{\frac{k}{2}-1}\int\limits_{0}^{\infty}u^{\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)-1}e^{-u}du
\end{aligned}$$

gdje druga jednakost slijedi zbog supstitucije $u = \frac{y^2}{2}$, a posljednji integral računa se preko Gamma funkcije $\Gamma(x) = \int\limits_0^{\infty} t^{x-1}e^t dt$, $x > 0$ i iznosi $\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)$. Stoga je

$$\varphi_X(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(it)^k}{k!}\Big((-1)^k) + 1\Big)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) = (*).$$

U nastavku ćemo sumirati samo po parnim $k$ jer će za neparne $k$ sumandi biti jednaki 0.

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^{2n}}{(2n)!}\Big((-1)^{2n}) + 1\Big)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot 2^{\frac{2n}{2}-1}\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Za Gamma funkciju vrijedi

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}}\Gamma(2z)$$

te to uvrstimo u gornji izraz uz korištenje $\Gamma(2n) = (2n-1)!$ za $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2n-1}} \cdot \frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-n)} \cdot \frac{(it)^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-n)} \cdot \frac{(i^2t^2)^n}{2n(2n-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{(n-1)!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-n-1)} \cdot \frac{(-t^2)^n}{n(n-1)!} \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\frac{t^2}{2})^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\frac{t^2}{2})^n}{n!} = e^{-\frac{t^2}{2}}.
\end{aligned}$$

Kada smo dobili karakterističnu funkciju standardizirane normalne slučajne varijable, pomoću toga izračunat ćemo i karakterističnu funkciju normalne slučajne varijable. Pretpostavimo da je slučajna varijabla $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ te slučajna varijabla $X = \frac{Z-\mu}{\sigma}$ iz čega slijedi $Z = \sigma X + \mu$. Prisjetimo se svojstva (5) iz Propozicije 5.1. te pomoću njega izračunajmo KF slučajne varijable $Z$.

$$\begin{aligned}
\varphi_Z(t) &= \varphi_{\sigma X + \mu}(t) = e^{it\mu}\varphi_X(\sigma t) \\
&= e^{it\mu} \cdot e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2} - it\mu}, \quad t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

U sljedećem primjeru pokažimo da zadane funkcije nisu KF tako što ćemo provjeriti zadovoljavaju li one nužne uvjete za karakteristične funkcije iz Propozicije 5.1.

**Primjer** 5.2. (vidjeti [2, Zadatak V.2.3])

(1) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = e^{-i|t|}$
Zahtjev (2) nije zadovoljen jer je:

$$\varphi(-t) = e^{-i|-t|} = e^{-i|t|} = \varphi(t).$$

Budući da zahtjev nije zadovoljen, $\varphi$ nije KF niti jedne slučajne varijable.

(2) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{1-i|t|}$
Sredimo prvo $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) = \frac{1}{1-i|t|} \cdot \frac{1+i|t|}{1+i|t|} = \frac{1+i|t|}{1+t^2}.$$

Zatim pogledajmo prvo je li zadovoljen zahtjev (2) iz Propozicije 5.1.

$$\varphi(-t) = \frac{1+i|-t|}{1+(-t^2)} = \frac{1+i|t|}{1+t^2} = \varphi(t).$$

Vidimo da zahtjev nije zadovoljen, stoga $\varphi$ nije KF.

Osim slučajnih varijabli, postoje i karakteristične funkcije slučajnih vektora koje ćemo prije svega definirati te navesti neka bitna svojstva.

**Definicija 5.2.** *Neka je $\boldsymbol{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ n-dimenzionalan slučajni vektor.* ***Karakteristična funkcija slučajnog vektora $\boldsymbol{X}$*** *je funkcija $\varphi_{\boldsymbol{X}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ definirana s*

$$\varphi_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{t}) = \varphi_{X_1,\ldots,X_n}(t_1, \ldots, t_n) = E[e^{i\boldsymbol{t}^T\boldsymbol{X}}] = E[e^{i(t_1X_1+\ \ldots\ +t_nX_n)}],$$

*gdje je $\boldsymbol{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$.*

Kao i u jednodimenzionalnom slučaju, za karakteristične funkcije slučajnog vektora također vrijedi:

(1) $|\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n)| \leq \varphi_{\mathbf{X}}(0, \ldots, 0)$

(2) $\varphi_{\mathbf{X}}(-t_1, \ldots, -t_n) = \overline{\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_n)}$

(3) $\varphi_{\mathbf{X}}$ je uniformno neprekidna na cijelom $\mathbb{R}^n$

(4) Neka su $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ i $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_n)$ $n$-dimenzionalni slučajni vektori takvi da je

$$Y_k = a_kX_k + b_k, \quad k = 1, \ldots, n,$$

gdje su $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ za sve $k$. Tada vrijedi

$$\varphi_{\mathbf{Y}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{bt}}\varphi_{\mathbf{X}}(a_1t_1, \ldots, a_nt_n),$$

gdje je $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$ i $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$.

Sve navedeno može se lako dokazati kao i u slučaju slučajnih varijabli, a dokaz se može pogledati u [9, str. 445].

Zanima nas još što je s karakterističnom funkcijom zbroja nezavisnih slučajnih varijabli pa iskažimo i dokažimo sljedeća dva teorema. Primijetimo da su iskazi teorema gotovo isti kao i kod funkcija izvodnica vjerojatnosti.

**Teorem 5.1.** *(vidjeti [2, Teorem V.2.2]) Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s karakterističnim funkcijama $\varphi_{X_1}, \ldots, \varphi_{X_n}$ redom. Tada slučajna varijabla $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$ ima karakterističnu funkciju $\varphi_{S_n}(t) = \prod\limits_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)$. Specijalno, ukoliko su $X_1, \ldots X_n$ i jednako distribuirane, tada vrijedi $\varphi_{S_n}(t) = (\varphi_{X_1}(t))^n$.*

*Dokaz.* Raspišemo KF po definiciji te koristimo svojstvo nezavisnosti:

$$\begin{aligned}
\varphi_{S_n}(t) = E[e^{itS_n}] = E\left[e^{it\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}\right] &= E\left[\prod_{k=1}^{n} e^{itX_k}\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} E[e^{itX_k}] \quad \text{(zbog nezavisnosti)} \\
&= \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t)
\end{aligned}$$

□

**Teorem 5.2.** *Neka su $Z, X_1, X_2, \ldots$ nezavisne slučajne varijable na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ pri čemu je $Z$ cjelobrojna slučajna varijabla s FIV $g_Z(t)$, a $X_1, X_2, \ldots$ su i jednako distribuirane s KF $\varphi(t)$. Tada slučajna varijabla $Y = \sum\limits_{k=1}^{Z} X_k$ ima KF oblika $\varphi_Y(t) = g_Z(\varphi(t))$. [9]*

*Dokaz.* Prije nego krenemo s dokazom, prisjetimo se dva svojstva uvjetnog očekivanja koja ćemo koristiti:

- Teorem o dvostrukom očekivanju: $E[E[g(X)|Y]] = E[g(X)]$.
- Teorem o supstituciji: $E[v(X,Y)|Y = y] = E[v(X,y)|Y = y]$.

Raspišimo KF po definiciji, uvrstimo zadano i zatim primijenimo teorem o dvostrukom očekivanju:

$$\varphi_Y(t) = E[e^{itY}] = E\left[e^{it\sum\limits_{k=1}^{Z} X_k}\right] = E\left[E\left[e^{it\sum\limits_{k=1}^{Z} X_k}\middle|Z\right]\right] = (*)$$

Slučajna varijabla $Z$ je cjelobrojna i tada je unutarnje uvjetno očekivanje diskretna slučajna varijabla. Stoga, dalje raspisujemo po definiciji očekivanja za diskretnu slučajnu varijablu i koristimo teorem o supstituciji:

$$\begin{aligned}
(*) &= \sum_{z \in \mathcal{R}(Z)} E\left[e^{it\sum\limits_{k=1}^{Z} X_k}\middle|Z = z\right] \cdot P(Z = z) \\
&= \sum_{z \in \mathcal{R}(Z)} E\left[e^{it\sum\limits_{k=1}^{z} X_k}\middle|Z = z\right] \cdot P(Z = z) \\
&= \sum_{z \in \mathcal{R}(Z)} E\left[e^{it\sum\limits_{k=1}^{z} X_k}\right] \cdot P(Z = z) \quad \text{(nezavisnost)} \\
&= (**)
\end{aligned}$$

Primijetimo da sada možemo iskoristiti tvrdnju Teorema 5.2. za nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable:

$$\begin{aligned}
(**) &= \sum_{z \in \mathcal{R}(Z)} (\varphi(t))^z \cdot P(Z = z) \\
&= E[(\varphi(t))^Z] = g_Z(\varphi(t)),
\end{aligned}$$

gdje zadnje dvije jednakosti vrijede zbog definicije matematičkog očekivanja i definicije FIV, redom. $\square$

Na jednom kratkom primjeru pokažimo korištenje Teorema 5.1. za sumu slučajnih varijable neke poznate distribucije.

**Primjer** 5.3. *Neka su $X_1, \ldots, X_n$ nezavisne Poissonove slučajne varijable s parametrima $\lambda_k$, tj. $X_k \sim \mathcal{P}(\lambda_k)$, za $k = 1, \ldots, n$. Odredimo karakterističnu funkciju sume $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.*

Prethodno smo već odredili KF Poissonove slučajne varijable koju ćemo ovdje koristiti, odnosno

$$\varphi_{X_k}(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

Sada primjenom Teorema 5.1. dobivamo:

$$\varphi_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} e^{\lambda_k(e^{it}-1)} = e^{(e^{it}-1)\sum\limits_{k=1}^{n}\lambda_k}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, $S_n \sim \mathcal{P}(\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k)$.

Kako smo u Napomeni 3.1. pokazali vezu između FIM i Laplaceove transformacije, tako postoji i veza između KF i Fourierove transformacije. Pokažimo je u sljedećoj napomeni.

**Napomena 5.2.** Analogno kao u Napomeni 3.1. dobiva se Fourierova transformacija

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} f(t)dt, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Budući da Fourierova transformacija može biti definirana i kao

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} f(t)dt, \quad s \in \mathbb{R},$$

možemo primijetiti kako je KF slučajne varijable $X$ do na predznak nezavisne varijable jednaka Fourierovoj transformaciji funkcije gustoće slučajne varijable $X$.

## 5.1 Jedinstvenost i teorem inverzije

Iskažimo prvo teorem inverzije koji nam daje način kako pomoću karakteristične funkcije doći do funkcije distribucije, odnosno gustoće u specijalnom slučaju.

**Teorem 5.3 (Teorem inverzije).** *[9]*

*(a) Neka je $X$ slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom $\varphi_X$ i funkcijom distribucije $F_X$. Za $a < b$ vrijedi*

$$F_X(b) - F_X(a) + \frac{1}{2}(P(X = a) - P(X = b)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \varphi(t)dt$$

*(b) Ako je $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\varphi_X(t)|dt < \infty$, tada funkcija distribucije $F_X$ ima gustoću $f_X$ i vrijedi*

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

*Također, $f_X$ je neprekidna i ograničena funkcija.*

*Dokaz.* (a) Označimo s

$$\begin{aligned} I(T) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx}dF(x)\right]dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\int\limits_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}e^{itx}dt\right]dF(x). \end{aligned}$$

Primijetimo da smo u prethodnom raspisu upotrijebili Fubinijev teorem (vidi [4, str. 176]) kako bismo zamijenili integrale, a da bismo ga uopće mogli primijeniti, moramo provjeriti je li podintegralna funkcija po apsolutnoj vrijednosti ograničena.

$$\begin{aligned} \left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\cdot\varphi_X(t)\right| &= \left|\frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\right|\cdot|\varphi_X(t)| \\ &\leq \left|\int\limits_a^b e^{-itx}dx\right| \\ &\leq \int\limits_a^b |e^{-itx}|dx \\ &= b-a, \end{aligned}$$

gdje druga jednakost vrijedi zbog svojstva (1) iz Propozicije 5.1.

Zatim lako možemo dobiti

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-T}^{T}\frac{e^{i(x-a)t}-e^{i(x-b)t}}{it}dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin t(x-a)}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin t(x-b)}{t}dt$$

primjenom parnosti kosinusa, neparnosti sinusa i trigonometrijskog zapisa $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$. Znamo da vrijedi $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$, odnosno

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin(ht)}{t}dt = \frac{\pi}{2},$$

gdje je $h = x-a$ ili $h = x-b$. Zapišimo navedeno nešto preglednije:

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\sin(ht)}{t}dt = \begin{cases} \frac{1}{2}, & h>0 \\ 0, & h=0 \\ -\frac{1}{2}, & h<0 \end{cases}$$

Nadalje, vidimo kako je $\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\sin(ht)}{t}dt$ neprekidna funkcija po $T$ te da limes $\lim\limits_{T\to\infty}\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T\frac{\sin(ht)}{t}dt$ postoji i konačan je pa možemo zaključiti da je navedena funkcija uniformno ograničena. Odnosno, postoji $M$ takav da je $0 < M < \infty$ za koji vrijedi $\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\sin(ht)}{t}dt\right| \leq M$ za sve $T$ i $h$. Sada slijedi:

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} I(T) &= \lim_{T\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\sin(t(x-a))}{t}dt - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^T \frac{\sin(t(x-b))}{t}dt\right]dF_X(x)\\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} L(x,a,b)dF_X(x) = E[L(X,a,b)],\end{aligned}$$

gdje je

$$L(x,a,b) = \begin{cases} 1, & a < x < b\\ \frac{1}{2}, & x = a \ \text{ ili } \ x = b\\ 0, & x < a \ \text{ ili } \ x > b\end{cases}$$

U navedenom raspisu primijenili smo Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji čije su pretpostavke prethodno zadovoljene (vidi [4, str. 138]).

Računajući očekivanje po dijelovima, dobivamo

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty} I(T) &= \frac{1}{2}P(X=a) + P(a < X < b) + \frac{1}{2}P(X=b)\\ &= F_X(b) - F_X(a) + \frac{1}{2}(P(X=a) - P(X=b)).\end{aligned}$$

(b) Treba dokazati da funkcija distribucije $F_X$ ima gustoću $f_X$ takvu da je

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\varphi_X(t)dt$$

ukoliko je $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi_X(t)| < \infty$. Budući da smo u iskazu naveli kako je $f_X$ neprekidna i ograničena, prvo to pokažimo. Znamo da je funkcija $\varphi_X$ integrabilna pa iz toga slijedi da je $f_X$ dobro definirana i ograničena. Zatim, koristeći

$$\left|\frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it}e^{itx}\right| = b - a,$$

imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}P(X=a) + P(a < X < b) + \frac{1}{2}P(X=b) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-ita} - e^{itb}}{it}\varphi_X(t)dt\\ &\leq \frac{b-a}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|\varphi_X(t)|dt.\end{aligned}$$

Uočimo da ukoliko $b \to a$, tada je $P(X=a) = 0$, za svaki $a \in \mathbb{R}$. Kako bismo dokazali neprekidnost funkcije $f_X$ na $\mathbb{R}$, provest ćemo sličan postupak kao u dokazu Propozicije

5.1.(4). Funkcija $f_X$ integrabilna je na segmentu $[a, b]$ te smo ranije naveli kako ona zadovoljava uvjete Fubinijeva teorema, stoga iskoristimo to u sljedećem raspisu:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f_X(x)dx &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_X(t)\left[\int_a^b e^{-itx}dx\right]dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \varphi_X(t)\left[\int_a^b e^{-itx}dx\right]dt \\
&= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-iat}-e^{-ibt}}{it}\varphi_X(t)dt \\
&= F_X(b) - F_X(a) \quad \text{(kao u a) dijelu)}
\end{aligned}$$

za $a < b$. Integral je neprekidna funkcija svojih granica pa možemo zaključiti

$$F_X(b) - F_X(a) = \int_a^b f_X(x)dx, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \ a < b$$

Zatim pustimo $a \to -\infty$ i dobijemo $F_X(b) = \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx$, $b \in \mathbb{R}$. Sada po definiciji neprekidne slučajne varijable zaključujemo kako je $f_X$ doista funkcija gustoće slučajne varijable $X$. S druge strane, kako je definirana funkcija $f_X$ u iskazu teorema, jasno je da se radi o neprekidnoj funkciji.

□

Jedan od značajnijih rezultata za karakteristične funkcije je teorem jedinstvenosti koji daje 1-1 korespondenciju između karakteristične funkcije slučajne varijable i njezine funkcije distribucije. Ako dvije slučajne varijable $X$ i $Y$ imaju istu karakterističnu funkciju, onda one imaju istu funkciju distribucije.

**Teorem 5.4 (Teorem jedinstvenosti).** *[9] Neka su $X$ i $Y$ slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ s funkcijama distribucije $F_X$ i $F_Y$ te karakterističnim funkcijama $\varphi_X$ i $\varphi_Y$ redom. Ako je $\varphi_X(t) = \varphi_Y(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, tada su slučajne varijable $X$ i $Y$ jednake po distribuciji.*

*Dokaz.* Dokaz je trivijalan i slijedi iz prethodnog teorema. Pogledati u [9, str. 446.]

□

Teorem inverzije i teorem jedinstvenosti povezani su na način da iz formule inverzije (Teorem 5.4.(a)) zapravo slijedi tvrdnja Teorema 5.3. te se stoga uglavnom pozivamo na teorem inverzije kad nam treba tvrdnja teorema jedinstvenosti.

**Primjer** 5.4. *Neka je $X$ Cauchyjeva slučajna varijabla takva da je $X \sim \mathcal{C}(0, 1)$ te čija je funkcija gustoće*

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

*Pronađimo karakterističnu funkciju slučajne varijable $X$, a zatim pronađimo karakterističnu funkciju Cauchyjeve slučajne varijable $Z \sim \mathcal{C}(\mu, \lambda)$ s parametrima $\mu \in \mathbb{R}$ i $\lambda > 0$ čija je funkcija gustoće*

$$f_Z(z) = \frac{1}{\lambda\pi\Big(1 + \big(\frac{z-\mu}{\lambda}\big)^2\Big)}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Za početak, koristimo definiciju KF:

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) = E[e^{itX}] &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\pi(1+x^2)} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx}}{1+x^2} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ity}}{1+y^2} dy = (*).\end{aligned}$$

Ideja ovog primjera jest integral riješiti pomoću teorema inverzije primijenjenog na KF dvostrane eksponencijalne (Laplaceove) distribucije s parametrom $\lambda = 1$. Neka je $Y$ Laplaceova distribucija s parametrom $\lambda = 1$ i pripadnom karakterističnom funkcijom $\varphi_Y(t) = \frac{1}{1+t^2}$. Provjerimo prvo uvjet iz teorema inverzije, odnosno $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_Y(t)| dt < \infty$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_Y(t)| dt = 2\int_{0}^{\infty} \frac{dt}{1+t^2} &= 2 \lim_{a\to\infty} \left( arctg(t)\Big|_0^a \right) \\ &= 2\Big( \lim_{a\to\infty} arctg(a) - 0 \Big) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi < \infty.\end{aligned}$$

Dakle, možemo primijeniti teorem inverzije na $\varphi_Y(t)$.

$$\frac{1}{2}e^{-|y|} = f_Y(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ity} \varphi_Y(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ity}}{1+t^2} dt$$

iz čega slijedi

$$e^{-|y|} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-ity}}{1+t^2} dt.$$

Uvrstimo li to u početni raspis, dobivamo:

$$(*) = e^{-|t|}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Neka je sada $Z \sim \mathcal{C}(\mu, \lambda)$ i $X = \frac{Z-\mu}{\lambda} \sim \mathcal{C}(0, 1)$. Karakteristična funkcija od $Z = \mu + \lambda X$ jednaka je

$$\begin{aligned}\varphi_Z(t) = E[e^{itZ}] &= E[e^{it(\mu+\lambda X)}] \\ &= e^{i\mu t} E[e^{it\lambda X}] = e^{it\mu} \varphi_X(t\lambda) \\ &= e^{it\mu} e^{-\lambda|t|} = e^{it\mu - \lambda|t|}.\end{aligned}$$

**Napomena 5.3.** (vidi [9, Primjedba 13.2.]) Spomenimo još kako za simetričnu slučajnu varijablu $X$ vrijedi da je njezina karakteristična funkcija realna funkcija realne varijable, odnosno $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Generalno, ako je $\varphi_X$ KF slučajne varijable $X$ realna funkcija realne varijable, onda za KF njezine transformacije $Y = -X$ vrijedi:

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{-X}(t) = \varphi_X(-t) = \overline{\varphi_X(t)} = \varphi_X(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

te po teoremu inverzije slijedi da su $X$ i $Y$ jednako distribuirane slučajne varijable. Vrijedi i obrat, odnosno ako je $X$ jednako distribuirano kao i $-X$, onda su im karakteristične funkcije jednake te iz toga slijedi da je to realna funkcija realne varijable.

## 5.2 Karakteristične funkcije i momenti

Kao i funkcije izvodnice vjerojatnosti, karakteristične funkcije također su povezane s momentima. Točnije, iz karakterističnih funkcija možemo doći do momenata distribucije. Za kraj ovog poglavlja pogledajmo njihovu međusobnu povezanost u sljedećem teoremu.

**Teorem 5.5.** *(vidjeti [9, Teorem 13.7.]) Ako je za neki $n \in \mathbb{N}$ $E[|X|^n] < \infty$, odnosno $X$ ima $n$-ti moment, tada $\varphi_X(t)$ ima $k$-tu derivaciju za $k \leq n$ i vrijedi:*

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF_X(x) \tag{1}$$

$$E[X^k] = \frac{1}{i^k} \varphi_X^{(k)}(0). \tag{2}$$

*Dokaz.* (1) Po pretpostavci teorema znamo da slučajna varijabla $X$ ima $n$-ti moment, tj. $E[|X|^n] < \infty$ pa iz toga slijedi da $X$ ima i $k$-ti moment, tj $E[|X|^k] < \infty$, $\forall k \leq n$, odnosno $\int_{-\infty}^{\infty} |x|^k dF_X(x) < \infty$ (vidi Propozicija 10.7. [9, str. 310]). Pogledajmo što možemo zaključiti deriviranjem $\varphi_X(t)$ $k$ puta:

$$\varphi_X^{(k)}(t) = \frac{d^k}{dt^k}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_X(x)\right) = (*)$$

Sada po Korolaru 10.2. iz [9, str. 298] vrijedi:

$$(*) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itx}\right) dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (ix)^k e^{itx} dF_X(x)$$

jer je $\left|\frac{\partial^k}{\partial t^k} e^{itx}\right| = |x|^k$.

(2) Dokaz ove jednakosti slijedi iz (1) za $t = 0$:

$$\varphi_X^{(k)}(0) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot 1 \cdot dF_X(x) = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_X(x) = i^k E[X^k]$$

iz čega slijedi

$$E[X^k] = \frac{1}{i^k} \varphi_X^{(k)}(0).$$

□

U sljedećem primjeru pokažimo računanje momenata uz pomoć karakterističnih funkcija, odnosno korištenjem Teorema 5.5. Koristit ćemo prethodno izračunate KF za neke poznate distribucije.

**Primjer** 5.5. *Neka je* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$, $n \in \mathbb{N}$, $p \in \langle 0,1 \rangle$. *Izračunajmo njezine momente korištenjem Teorema 5.5.*
Ranije smo izračunali KF ove slučajne varijable, a sada izračunajmo njezinu derivaciju za $t = 0$.

$$\begin{aligned}
\varphi_X(t) &= (1 - p + pe^{it})^n \\
\varphi_X'(t) &= i \cdot n \cdot pe^{it}(1 + p(-1 + e^{it}))^{n-1} \\
\varphi_X'(0) &= i \cdot n \cdot p(1 + p(-1 + 1))^{n-1} = i \cdot n \cdot p.
\end{aligned}$$

Sada prema Teoremu 5.5. izračunajmo očekivanje:

$$E[X] = \frac{1}{i}\varphi_X'(0) = \frac{1}{i} i \cdot n \cdot p = n \cdot p.$$

Za računanje varijance potreban nam je drugi moment pa ga izračunajmo na isti način.

$$\begin{aligned}
\varphi_X'(t) &= i \cdot n \cdot p\Big((n-1)(pe^{it} + 1 - p)^{n-2} p \cdot i \cdot e^{it} + (pe^{it} + 1 - p)^{n-1} i \cdot e^{it}\Big) \\
\varphi_X'(0) &= i \cdot n \cdot p\Big((n-1)(p + 1 - p)^{n-2} p \cdot i + (p + 1 - p)^{n-1} i\Big) \\
&= i \cdot n \cdot p\Big((n-1)p \cdot i + i\Big) = i^2 n \cdot p(n\, p - p + 1) \\
E[X^2] &= \frac{1}{i^2} i^2 n \cdot p(n \cdot p - p + 1) = n \cdot p(n \cdot p - p + 1).
\end{aligned}$$

Prema definiciji varijance:

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = n \cdot p(n \cdot p - p + 1) - n \cdot p = n \cdot p(1 - p).$$

# 6 Veze među funkcijama izvodnicama

Nakon što smo svaku od funkcija izvodnica u teoriji vjerojatnosti definirali i naveli ono najvažnije o svakoj od njih, pogledajmo sada kakvi su njihovi međusobni odnosi.

- **Povezanost FIV i FIM**
  Kako smo ranije spomenuli, FIM uglavnom koristimo onda kada nije moguće koristiti FIV. Poveznicu između funkcija izvodnica vjerojatnosti i funkcija izvodnica momenata možemo prepoznati u tome da se FIM cjelobrojne slučajne varijable $X$ može i jednostavno odrediti pomoću njezine FIV te vrijedi (ukoliko navedena FIV postoji u $z = e^t$) [3]

  $$M_X(t) = g_X(e^t).$$

- **Povezanost FIV i KF**
  Već smo spomenuli kako su funkcije izvodnice vjerojatnosti povezane s karakterističnim

funkcijama pa pogledajmo njihovu neformalnu vezu.
Prisjetimo se što znamo za FIV $g_X(t) = t^0 + p_1 t + p_2 t^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} t^k p_k$ za slučajnu varijablu $X$ čija je slika $\mathcal{R}(X) \subseteq \mathbb{N}_0$.
Uzmimo primjerice slučajnu varijablu $X$ za koju vrijedi

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

i čije je očekivanje $E[X] = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3$. Zatim pogledamo li slučajnu varijablu

$$t^X \sim \begin{pmatrix} t^{x_1} & t^{x_2} & t^{x_3} \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{pmatrix}$$

čije očekivanje će tada biti $E[t^X] = t^{x_1} p_1 + t^{x_2} p_2 + t^{x_3} p_3$. Dakle, $g_X(t) = E[t^X]$.
Za KF znamo $\varphi_X(t) = E[e^{itX}]$ pa sada želimo $t^X$ preslikati u $e^{itX}$. To ćemo učiniti tako da prvo definiramo funkciju $h(t) = e^{it}$. Pogledamo li zatim kompoziciju funkcija $(g_X \circ h)$, uočit ćemo da na taj način dolazimo do KF, odnosno:

$$g_X(h(t)) = g_X(e^{it}) = E[(e^{it})^X] = E[e^{itX}] = \varphi_X(t).$$

Zaključimo: FIV definirana je na $g_X : \langle -r, r \rangle \to \mathbb{R}$, gdje je r radijus konvergencije reda potencija kojim je $g_X(t)$ definirana, a KF je definirana na $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ pa FIV trebamo proširiti na $\mathbb{C}$. Zato definiramo funkciju $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $h(t) = e^{it}$. Uzmemo kompoziciju FIV i funkcije $h$ koja je tada dobro definirana na $(g_X \circ h) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ i na taj način smo dobili neformalnu vezu između FIV i KF.

- **Povezanost FIM i FIK**
  Osim funkcija izvodnica vjerojatnosti, uz funkcije izvodnice momenata usko su vezane i funkcije izvodnice kumulanata. Štoviše, FIK se definiraju preko FIM o čemu smo već pisali u poglavlju "Funkcije izvodnice kumulanata".

- **Povezanost FIK i KF**
  Neki autori [6, str. 27] definiraju FIK kao prirodni logaritam karakteristične funkcije što nazivaju druga karakteristična funkcija koju ćemo označiti s $H_X(t)$:

$$H_X(t) = logE[e^{itX}] = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \frac{(it)^n}{n!}.$$

Nakon što smo rekli nešto o njihovoj međusobnoj povezanosti, prikažimo sljedećom tablicom funkcije izvodnice u teoriji vjerojatnosti svih poznatih distribucija koje smo kroz rad izračunali.

| | FIV | FIM | FIK | KF |
|---|---|---|---|---|
| **Beornoullijeva** | $1-p(1-z)$ | $1-p+pe^t$ | $log(1-p+pe^t)$ | $1-p(1-e^{it})$ |
| **Binomna** | $(1-p(1-z))^n$ | $(1-p+pe^t)^n$ | $nlog((1-p+pe^t)^n)$ | $(1-p(1-e^{it}))^n$ |
| **Poissonova** | $e^{\lambda(z-1)}$ | $e^{\lambda(e^t-1)}$ | $\lambda(e^t-1)$ | $e^{\lambda(e^{it}-1)}$ |
| **Neprekidna uniformna** | - | $\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)},\ t \neq 0$ | $log\left(\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}\right),\ t \neq 0$ | $\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$ |
| **Eksponencijalna** | - | $\frac{\lambda}{\lambda-t},$ $t < \lambda$ | $log\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)$ | $\frac{\lambda}{\lambda-it}$ |
| **Normalna** | - | $e^{\mu t+\sigma^2\frac{t^2}{2}}$ | $\mu t+\sigma^2\frac{t^2}{2}$ | $e^{it\mu-\sigma^2\frac{t^2}{2}}$ |
| **Cauchyjeva** | - | - | - | $e^{it\mu-\lambda\|t\|}$ |

Tablica 1: Funkcije izvodnice u teoriji vjerojatnosti izračunate za navedene poznate distribucije

Dakle, iz Tablice 1. možemo iščitati kako FIV ne postoje za navedene neprekidne distribucije, dok FIM postoje. Također, vidimo da FIM ne možemo izračunati za sve neprekidne distribucije (Cauchyjeva), a da KF uvijek postoje.

# Literatura


[1] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2014.

[2] D. Grahovac, *Vjerojatnost*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2021.
URL: https://www.mathos.unios.hr/images/homepages/dgrahova/Vjerojatnost/Vjerojatnost-handouts.pdf

[3] M. Huzak, *Vjerojatnost i matematička statistika*, Sveučilište u Zagrebu, PMF-Matematički odjel, Zagreb, 2006.
URL: http://aktuari.math.pmf.unizg.hr/docs/vms.pdf

[4] D. Jukić, *Mjera i integral*, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2012.

[5] J. J. Kinney, *Probability - an introduction with statistical applications*, Second edition, Wiley, New Jersey, 2015.

[6] E. Lukacs, *Characteristic functions*, Second edition, Griffin, London, 1970.

[7] A. Mimica, *Vjerojatnost i matematička statistika*, 2016.
URL: https://docplayer.gr/44004230-Vjerojatnost-i-matematicka-statistika.html

[8] P. Olafsson, M. Andersson, *Probability, Statistics and Stohastic processes*, Second edition, Wiley, New Jersey, 2012.

[9] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Treće, prerađeno izdanje, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[10] M. J. Wichura, *Nastavni materijali s kolegija Statistics*, University of Chicago, Department of Statistics
URL: https://galton.uchicago.edu/ wichura/Stat304/Handouts/L18.cumulants.pdf

## Sažetak

Ovaj rad nas upoznaje s funkcijama izvodnicama vjerojatnosti, momenata, kumulanata te karakterističnim funkcijama i njihovim značajnim svojstvima koje nam olakšavaju rad sa slučajnim varijablama. Sve su navedene funkcije definirane i analizirane kroz iskaze i dokaze važnih tvrdnji. U raznim primjerima prikazano je kako pomoću funkcija izvodnica dolazimo do momenata i distribucija sume nezavisnih slučajnih varijabli kao i međusobna povezanost sve četiri navedene funkcije izvodnice.

**Ključne riječi:** funkcije izvodnice vjerojatnosti, funkcije izvodnice momenata, funkcije izvodnice kumulanata, karakteristične funkcije, slučajna varijabla, očekivanje, varijanca, distribucija, suma nezavisnih slučajnih varijabli

# Generating functions in probability theory

## Abstract

This paper introduces probability generating functions, moment generating functions, cumulant generating functions and characteristic functions along with their significant properties that can facilitate the work with random variables. All these functions are defined and analysed through important statements and proofs. The way of calculating moments and sums of independent random variables, as well as the connection between all four stated generating functions are presented through various examples.

**Keywords:** probability generating function, moment generating function, cumulant generating function, characteristic function, random variable, mean, variance, sum of independent variables

# Životopis

Rođena sam 25. siječnja 1996. u Osijeku. Osnovnu školu Vladimir Nazor u Đakovu upisala sam 2002. godine. Nakon završene osnovne škole upisala sam opću gimnaziju Antuna Gustava Matoša također u Đakovu. Po završetku srednje škole, 2014. godine upisujem Sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Tijekom svog studiranja odlučujem promijeniti smjer u Preddiplomski studij Matematika te po završetku, 2019. godine upisujem i diplomski studij na istom odjelu, smjer Financijska matematika i statistika.