

Krivulje konstantnog nagiba

Marković, Barbara

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:737934>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-25**



mathos

Repository / Repozitorij:

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Barbara Marković

Krivulje konstantnog nagiba

Završni rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni preddiplomski studij matematike

Barbara Marković

Krivulje konstantnog nagiba

Završni rad

Mentor: doc. dr. sc. Ljiljana Primorac Gajčić

Osijek, 2022.

Sažetak

U radu je razmatran pojam krivulje konstantnog nagiba, tj. krivulje čiji tangencijalni vektor zatvara konstantan kut s jediničnim fiksnim vektorom. Takve krivulje leže na cilindričnoj plohi i s izvodnicama plohe zatvaraju konstantan kut, te kažemo da su one izogonalne trajektorije izvodnica cilindrične plohe. Dana je karakterizacija takvih krivulja te su promatrana njihova geometrijska svojstva. Navedeni su i osnovni pojmovi iz lokalne teorije krivulja poput Frenetovog trobrida i zakrivljenosti, odnosno torzije krivulje, potrebni za razumijevanje ovog rada.

Ključne riječi:

krivulja, zakrivljenost, torzija, konstantan nagib, opća cilindrična spirala

Abstract

In this work, we consider curves of constant slope, i.e. curves whose tangent vector makes a constant angle with a fixed unit vector. Such curves lay on a cylindrical surface and make constant angle with rulings of the surface, so we called them the isogonal trajectories of a cylindrical surface. Their characterization and some geometric properties are introduced in the work. The basic concepts in local theory of curves, such as Frenet frame, curvature and torsion of a curve, needed for comprehension of this work are also presented.

Key words: curve, curvature, torsion, constant slope, generalized helix

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja	2
2.1	Pojam krivulje	2
2.2	Tangencijalni vektor i parametar duljine luka krivulje	3
3	Fundamentalni teorem za krivulje	6
4	Krivulje konstantnog nagiba	9
	Literatura	16

1 Uvod

Počeci diferencijalne geometrije potječu još iz 18. stoljeća. Diferencijalna geometrija se bavi proučavanjem geometrijskih svojstava elemenata prostora u kojemu se primjenjuju metode iz diferencijalnog računa. U uskoj je vezi s matematičkom analizom, koja se značajno razvila upravo iz problema u geometriji.

Članak *Une application d'analyse à la géométrie*, objavljen 1795. godine, čiji je autor francuski matematičar Gaspard Monge (1746.-1818.), smatra se prvim djelom objavljenim u ovoj grani matematike, te stoga Gasparda Mongea smatramo začetnikom diferencijalne geometrije. Osim njega razvoju diferencijalne geometrije u značajnoj mjeri su doprinijeli švicarski matematičar i fizičar Leonhard Euler (1707.-1783.) te njemački matematičar i astronom Carl Friedrich Gauss (1777.-1855.). U svom radu iz 1827. godine, *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curvas*, Gauss je koristio parametarsko zadavanje ploha, predstavio dvije osnovne kvadratne forme pomoću kojih vršimo mjerenja na plohi, sferno preslikavanje te definirao zakrivljenosti u točki plohe. Također, u istom tom djelu dokazao je da je zakrivljenost plohe invarijantna pri lokalnoj izometriji, a ta ga je tvrdnja toliko oduševila da ju je nazvao *Veličanstveni teorem*, lat. *Theorema Egregium*. Taj rad se smatra temeljem moderne teorije ploha. Danas diferencijalna geometrija ima vrlo široku primjenu, izrazito u fizici, s naglaskom na kinematiku, odnosno na teoriju relativnosti.

U ovom završnom radu поближе ćemo se upoznati sa samom teorijom krivulja i osnovnim pojmovima vezanim uz krivulje. U drugom poglavlju dan je pregled osnovnih definicija i teorema iz lokalne teorije krivulja. Fundamentalni teorem krivulja obrađen je u trećem poglavlju, dok je tema četvrtog poglavlja upravo tema završnog rada, tj. krivulje konstantnog nagiba.

2 Osnovni pojmovi lokalne teorije krivulja

U ovom poglavlju bavit ćemo se osnovnim definicijama i teoremima iz lokalne teorije krivulja. Najprije ćemo definirati krivulju na način kako se ona definira u diferencijalnoj geometriji, definirati parametar duljine luka i pokazati da se svaka krivulja može zadati takvim parametrom.

2.1 Pojam krivulje

Za početak, krenimo od samog pojma krivulje i nekih osnovnih primjera koje smo do sada puno puta susreli u dosadašnjem obrazovanju. Nastavno na pojam krivulje, definirat ćemo i pojam nivo-krivulje i navesti nekoliko primjera. Definicije i primjeri su preuzeti iz [3].

Definicija 2.1. *Neka je $I = \langle a, b \rangle$ interval realnih brojeva. Glatko preslikavanje $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazivamo parametriziranom krivuljom u \mathbb{R}^n . Ako za parametriziranu krivulju vrijedi da je $\dot{\alpha}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) \neq 0$, za sve $t \in I$, onda za nju kažemo da je regularna.*

Napomena 2.2. *Iako se većina definicija odnosi na prostor \mathbb{R}^n , mi ćemo se u radu baviti isključivo krivuljama u \mathbb{R}^3 i takve ćemo krivulje zapisati kao $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, a njihove derivacije $\frac{d\alpha}{dt}(t) = \dot{\alpha}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t))$, $\frac{d^2\alpha}{dt^2}(t) = \ddot{\alpha}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t))$, itd.*

Navest ćemo nekoliko primjera parametriziranih krivulja s kojima smo se do sada već susretali.

Primjer 2.1. *Primjeri krivulja:*

1. *pravac u \mathbb{R}^n : $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, možemo zadati standardnom parametrizacijom $\alpha(t) = a + tb$, $a, b \in \mathbb{R}^n$, gdje je a točka kojom pravac prolazi, a b vektor smjera, $I \subset \mathbb{R}$,*
2. *kružnica: $\alpha : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$ sa središtem u točki (p, q) i polumjerom r , $\alpha(t) = (p+r \cos t, q+r \sin t)$, (uočimo da kružnici nedostaje točka $(p+r, q)$, jer prema definiciji krivulje domena funkcije α mora biti otvoren skup),*
3. *elipsa: $\alpha : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a \cos t, b \sin t)$*
4. *hiperbola: $\alpha : \langle 0, 2\pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$*
5. *parabola: $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, t^2)$*

Vidimo da je u diferencijalnoj geometriji zastupljen malo drugačiji pristup definiranju krivulja od onog s kojim smo se do sad susretali, tj. definiranju krivulja kao skupa točaka koje zadovoljavaju određeni uvjet. Na takav način definirane krivulje nazivamo nivo-krivuljama.

Definicija 2.3. *Nivo-krivulja u \mathbb{R}^2 je skup točaka \mathcal{S} definiran kao $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = a, a \in \mathbb{R}\}$.*

Primjer 2.2. *Najpoznatiji primjeri nivo-krivulja u \mathbb{R}^2 su kvadrike:*

1. *jedinična kružnica: $x^2 + y^2 = 1$,*
2. *elipsa: $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$,*

3. hiperbola: $\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} = 1$,

4. parabola: $y^2 = 2px$.

Poznato je da se svaka nivo krivulja može (po dijelovima) parametrizirati što slijedi prema sljedećem teoremu,[3].

Teorem 2.4. *Neka je funkcija $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ glatka i $\mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) = a, a \in \mathbb{R}\} \neq \emptyset$. Neka $\frac{\partial h}{\partial x}$ i $\frac{\partial h}{\partial y}$ nisu istovremeno 0 u točkama skupa \mathcal{S} i neka je $P \in \mathcal{S}$. Tada postoji otvoreni interval $I \subset \mathbb{R}$ oko 0 i regularna krivulja α definirana na I takva da je $\alpha(0) = P$ i $\alpha(I) \subset \mathcal{S}$.*

Dokaz teorema se može pogledati u [3]. Nadalje, prikaz skupa točaka preko parametrizacije, odnosno kao parametrizirane krivulje nije jedinstven, odnosno isti skup točaka možemo prikazati različitim parametrizacijama.

Definicija 2.5. *Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ parametrizirana krivulja, te neka je $J \subset \mathbb{R}, J \neq I$ i $\varphi : J \rightarrow I$ glatki difeomorfizam. Parametriziranu krivulju $\tilde{\alpha} := \alpha \circ \varphi : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ nazivamo reparametrizacijom od α .*

2.2 Tangencijalni vektor i parametar duljine luka krivulje

U nastavku ćemo dati definiciju tangencijalnog vektora krivulje, te definiciju specijalnog parametra, tzv. parametra duljine luka krivulje. Pokazat ćemo da se svaka regularna krivulja može zadati s takvim parametrom. Definicije i teoremi su preuzeti iz [3].

Definicija 2.6. *Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ regularna krivulja. Vektor $\dot{\alpha}(t)$ se naziva tangencijalnim vektorom krivulje α u točki $\alpha(t)$. Pravac kojemu je $\dot{\alpha}(t)$ vektor smjera i koji prolazi točkom $\alpha(t)$ nazivamo tangentom krivulje α u točki $\alpha(t)$.*

Za krivulju α kažemo da je parametrizirana duljinom luka ako je $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1, t \in I$.

Definicija 2.7. *Funkcija duljine luka krivulje $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ od točke $\alpha(t_0)$ definirana je kao*

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\alpha}(u)\| du, t_0 \in I.$$

Specijalno, duljina luka (cijele) krivulje $\alpha : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ je realan broj

$$s = \int_a^b \|\dot{\alpha}(u)\| du.$$

Ako je $\alpha : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ krivulja parametrizirana parametrom duljine luka, tj. $\|\dot{\alpha}(t)\| = 1$, tada je očito duljina luka krivulje α jednaka duljini intervala I .

Kako smo ranije naveli, parametrizacija krivulje nije jedinstvena. Specijalno vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.8. *Svaka regularna krivulja dozvoljava reparametrizaciju parametrom duljine luka.*

Dokaz. Neka je dana krivulja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, i s funkcija duljine luka od α . Kako je $\frac{ds(t)}{dt} = \|\dot{\alpha}(t)\| > 0$, slijedi da je s strogo rastuća funkcija. Može se pokazati da je funkcija s glatka. Njezina druga derivacija jednaka je $\frac{d^2s(t)}{dt^2} = \frac{\dot{\alpha} \cdot \ddot{\alpha}(t)}{\|\dot{\alpha}\|}$. Kako je funkcija s glatka i strogo rastuća, ona je bijekcija. Neka je $t = t(s)$ njezina inverzna funkcija. Definiramo li $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(t(s))$ vrijedi

$$\|\tilde{\alpha}'(s)\| = \|\dot{\alpha}(t(s)) \cdot t'(s)\| = \|\dot{\alpha}(t)\| \cdot \frac{1}{\|\dot{\alpha}(t)\|} = 1.$$

□

Kako bismo razlikovali je li krivulja zadana parametrom duljine luka ili općim parametrom, za derivaciju krivulje po općem parametru koristit ćemo oznaku \dot{c} , a po parametru duljine luka oznaku c' .

U nastavku ćemo navesti primjere reparametrizacije krivulja duljinom luka.

Primjer 2.3. *Odredite reparametrizaciju duljinom luka krivulje $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadane s $\alpha(t) = (cht, sh t, t)$.*

Rješenje: Najprije je potrebno odrediti funkciju duljine luka krivulje α , te nakon što ju odredimo, odredit ćemo njezin inverz.

$$\dot{\alpha}(t) = (sh t, ch t, 1)$$

$$\|\dot{\alpha}\| = \sqrt{sh^2 t + ch^2 t + 1} = \sqrt{sh^2 t + ch^2 t + ch^2 t - sh^2 t} = \sqrt{2} ch t$$

$$s(t) = \int \sqrt{2} ch t dt = \sqrt{2} sh t \implies t(s) = \operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{2} s}{2}$$

$$\tilde{\alpha}(s) = \left(ch \left(\operatorname{arch} \frac{\sqrt{2} s}{2} \right), \frac{\sqrt{2} s}{2}, \operatorname{arcsch} \frac{\sqrt{2} s}{2} \right)$$

Primjer 2.4. *Odredite reparametrizaciju duljinom luka krivulje $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, zadane s $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$.*

Rješenje: Ponavljamo postupak kao u prethodnom primjeru.

$$\dot{\alpha}(t) = (e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t, e^t)$$

$$\|\dot{\alpha}\| = \sqrt{(e^t \cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + e^{2t}}$$

$$= \sqrt{e^{2t} \cos^2 t - 2e^{2t} \cos t \sin t + e^{2t} \sin^2 t + e^{2t} \sin^2 t + 2e^{2t} \sin t \cos t + e^{2t} \cos^2 t + e^{4t}}$$

$$= \sqrt{2e^{2t} + e^{4t}} = e^t \sqrt{2 + e^{2t}} = \sqrt{2} e^t + e^{2t}$$

$$s(t) = \int (\sqrt{2} e^t + e^{2t}) dt = \sqrt{2} e^t + \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$e^t = x \implies s = \sqrt{2} x + \frac{1}{2} x^2$$

$$x_{1,2} = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \frac{1}{2} s}}{1} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 2s}$$

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\sqrt{2} + \sqrt{2-2s} \\
x_2 &= -\sqrt{2} - \sqrt{2-2s} \rightarrow x_2 \text{ nije rješenje} \\
e^t &= -\sqrt{2} + \sqrt{2-2s} \implies t(s) = \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}) \\
\tilde{\alpha}(s) &= e^{\ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s})} \left(\cos \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}), \sin \ln(-\sqrt{2} + \sqrt{2-2s}), 1 \right).
\end{aligned}$$

Uočimo da reparametrizaciju krivulje parametrom duljine luka nije lako odrediti. Ovisno o parametrizaciju polazne krivulje, može se dogoditi da nije moguće riješiti integral i eksplicitno odrediti funkciju duljine luka, a može se dogoditi da ne možemo eksplicitno odrediti inverznu funkciju dobivene funkcije duljine luka.

3 Fundamentalni teorem za krivulje

U ovom poglavlju definirat ćemo trobrid vektorskih polja pridružen krivulji te osnovne veličine kojima zadajemo krivulje. Definicije i teoremi su preuzeti iz [3].

Definicija 3.1. Regularna krivulja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ je dopustiva krivulja ako su vektorska polja $\dot{\alpha}(t)$ i $\ddot{\alpha}(t)$ duž krivulje α linearno nezavisna.

Kod krivulja parametriziranih duljinom luka, uvjet linearne nezavisnosti vektorskih polja α' i α'' ekvivalentan je uvjetu $\|\alpha''(s)\| \neq 0$.

Definicija 3.2. Za dopustivu krivulju $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametriziranu parametrom duljine luka, definiramo sljedeća vektorska polja:

- jedinično tangencijalno polje

$$T(s) = \alpha'(s),$$

- polje vektora glavnih normala

$$N(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|},$$

- polje binormala

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

Vektorska polja $(T(s), N(s), B(s))$ čine desnu ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}_{\alpha(s)}^3$ i nazivamo ju Frenetovim (Frenet-Serretovim) trobridom (reperom, okvirom) krivulje α .

Definicija 3.3. Neka je krivulja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom duljine luka s . Funkcija $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

se naziva zakrivljenošću (fleksijom) krivulje α u točki $\alpha(s)$.

Za krivulje zadane općim parametrom zakrivljenost računamo po sljedećoj formuli

Propozicija 3.4. Neka je α regularna krivulja u \mathbb{R}^3 parametrizirana općim parametrom t . Tada je njezina zakrivljenost u točki $\alpha(t)$ dana s

$$\kappa(t) = \frac{\|(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t))\|}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3}.$$

Definicija 3.5. Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ dopustiva krivulja parametrizirana parametrom duljine luka s . Funkcija $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$, definirana s

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

naziva se torzijom (sukanjem) krivulje α u točki $\alpha(s)$.

Za krivulje zadane općim parametrom torziju računamo po sljedećoj formuli

Propozicija 3.6. *Neka je α dopustiva krivulja parametrizirana općim parametrom t . Tada je*

$$\tau(t) = \frac{(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^2} = \frac{\det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha})}{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^2}.$$

Osim ovih definicija navest ćemo i pokazati prikaz vektorskih polja $\{T', N', B'\}$ pomoću vektorskih polja Frenetovog trobrida.

Teorem 3.7. (Frenetove formule). *Neka je α dopustiva krivulja parametrizirana duljinom luka s . Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N, \\ N' &= -\kappa T + \tau B, \\ B' &= \tau N. \end{aligned}$$

Sljedeći primjer riješit ćemo primjenom prethodnih definicija i propozicija.

Primjer 3.1. *Izračunajte zakrivljenost i torziju krivulje zadane s*

$$\alpha(t) = \left(\frac{4}{5} \cos t, 1 - \sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right)$$

Rješenje:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \left(-\frac{4}{5} \sin t, -\cos t, \frac{3}{5} \sin t \right) \\ \|\dot{\alpha}(t)\| &= \sqrt{\frac{16}{25} \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{9}{25} \sin^2 t} = 1 \\ \ddot{\alpha}(t) &= \left(-\frac{4}{5} \cos t, \sin t, \frac{3}{5} \cos t \right) \\ \dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{4}{5} \sin t & -\cos t & \frac{3}{5} \sin t \\ -\frac{4}{5} \cos t & \sin t & \frac{3}{5} \cos t \end{vmatrix} \\ &= \left(-\frac{3}{5} \cos^2 t - \frac{3}{5} \sin^2 t \right) \vec{i} - \left(-\frac{12}{25} \sin t \cos t + \frac{12}{25} \sin t \cos t \right) \vec{j} + \left(-\frac{4}{5} \sin^2 t - \frac{4}{5} \cos^2 t \right) \vec{k} \\ &= -\frac{3}{5} \vec{i} - \frac{4}{5} \vec{k} = \left(-\frac{3}{5}, 0, -\frac{4}{5} \right) \\ \|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\| &= \sqrt{\frac{9}{5} + \frac{16}{5}} = 1 \\ \kappa(t) &= \frac{\det(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t))}{\|\dot{\alpha}(t)\|^3} = 1 \\ \ddot{\alpha}(t) &= \left(\frac{4}{5} \sin t, \cos t, -\frac{3}{5} \sin t \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)) \cdot \ddot{\alpha}(t) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} \sin t & \cos t & -\frac{3}{5} \sin t \end{vmatrix} \\
&= \frac{4}{5} \cos t \vec{i} - \left(\frac{9}{25} \sin t + \frac{16}{25} \sin t \right) \vec{j} - \frac{3}{5} \cos t \vec{k} = \left(\frac{4}{5} \cos t, -\sin t, -\frac{3}{5} \cos t \right) \\
\tau(t) &= \frac{(\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}) \cdot \ddot{\alpha}}{\|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}\|^2} = \left(\frac{4}{5} \cos t - \sin t - \frac{3}{5} \cos t \right) = \frac{1}{5} \cos t - \sin t
\end{aligned}$$

U nastavku slijedi iskaz fundamentalnog teorema za krivulje kojim izričemo kojim veličinama možemo zadati plohu do na položaj u prostoru..

Teorem 3.8. *Neka su $\kappa, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatke funkcije, i neka vrijedi $\kappa(s) > 0, s \in I$. Tada postoji krivulja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ s parametrom duljine luka s , kojoj su funkcije $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ zakrivljenost i torzija.*

Ako je $\bar{\alpha} : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ neka druga krivulja s istim svojstvima, tada postoji pozitivna izometrija prostora $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tako da je $\bar{\alpha} = f(\alpha)$.

Napomena 3.9. *Dakle postoji jedinstvena, do na položaj u prostoru, krivulja kojoj su funkcije $\kappa(s)$ i $\tau(s)$ zakrivljenost, odnosno torzija a s parametar duljine luka. Za krivulje α i $\bar{\alpha}$ kažemo da su kongruentne.*

Dokaz teorema se može pogledati u [3].

4 Krivulje konstantnog nagiba

U ovom poglavlju bavit ćemo se običnom cilindričnom spiralom i dati njezinu karakterizaciju, te ćemo definirati njezino poopćenje, tj. krivulje konstantnog nagiba i navesti njihovu karakterizaciju i geometrijska svojstva. Definicije, leme i teoremi su preuzeti iz [3], odnosno [4].

Definicija 4.1. *Krivulja $\alpha : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^3$ naziva se krivuljom konstantnog nagiba (ili općom cilindričnom spiralom) ako duž krivulje α postoji jedinično konstantno vektorsko polje V koje s krivuljom α zatvara konstantan kut, tj. ako vrijedi*

$$T(s) \cdot V = \cos \varphi = \text{konst.}$$

gdje je $T(s)$ jedinično tangencijalno polje krivulje α .

Takve krivulje skupa s pravcima koje u svakoj točki krivulje određuje vektorsko polje V čine jednu cilindričnu plohu i kako s izvodnicama plohe po definiciji zatvaraju konstantan kut, kažemo da su one izogonalne trajektorije izvodnica cilindrične plohe.

U narednim definicijama i lemmama uočiti ćemo primjenu fleksije, torzije i Frenetovog trobrida.

Lema 4.2. *Krivulja $\alpha : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ s zakrivljenošću $\kappa \neq 0$ je krivulja konstantnog nagiba ako i samo ako je omjer $\frac{\tau}{\kappa}$ konstantan.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavit ćemo da je krivulja α parametrizirana parametrom duljine luka. Istaknimo da za kut φ koji tangencijalno polje krivulje α zatvara se poljem E vrijedi $\varphi \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (stoga je i $\sin \varphi \neq 0$). U suprotnom bi vrijedilo

$$T(s) = \pm V(s) = \text{konst.},$$

te bi bilo

$$T'(s) = 0, \text{ tj. } \kappa(s) = 0,$$

što je kontradikcija s dopustivošću krivulje α . Pretpostavimo sada da je α krivulja konstantnog nagiba, tj. neka duž krivulje α postoji jedinično konstantno vektorsko polje V za koje vrijedi

$$T(s) \cdot V = \cos \varphi.$$

Deriviranjem prethodnog izraza dobivamo

$$T'(s) \cdot V = 0,$$

odakle zbog $\kappa(s) \neq 0$ slijedi

$$N(s) \cdot V = 0.$$

Slijedi da u svakoj točki krivulje α vektorsko polje V možemo prikazati kao $V = a(s)T(s) + b(s)B(s)$, gdje su $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatke funkcije za koje vrijedi

$$a(s) = V \cdot T(s) = \cos \varphi, \quad b(s) = V \cdot B(s).$$

Kako je V jedinično vektorsko polje slijedi $a^2(s) + b^2(s) = 1$, što povlači $b^2(s) = \sin^2 \varphi$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $b(s) = \sin \varphi$. Slijedi

$$V = \cos \varphi T(s) + \sin \varphi B(s).$$

Sada je

$$0 = V' = (\cos \varphi \kappa(s) - \sin \varphi \tau(s))N(s).$$

Vektor $N(s)$ je jedinični vektor, stoga nužno vrijedi $\cos \varphi \kappa(s) - \sin \varphi \tau(s) = 0$ tj.

$$\frac{\tau}{\kappa} = \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} = \textit{konst.}$$

što je trebalo pokazati. Obratno, neka je $\frac{\tau}{\kappa} = \textit{konst.}$ Definirajmo φ kao

$$\frac{\tau}{\kappa} = \textit{ctg} \varphi.$$

Neka je $V(s) = \cos \varphi T(s) + \sin \varphi B(s)$. Pokazat ćemo da je V jedinično i konstantno polje, koje s krivuljom α zatvara konstantni kut. V je očito jedinično polje. Pokažimo da je konstanto,

$$V'(s) = \cos \varphi \kappa N + \sin \varphi (-\tau)N = 0.$$

Pokažimo da α s njim zatvara konstantan kut,

$$c'(s) \cdot V = T(s) \cdot V = \cos \varphi = \textit{konst.}$$

Time smo dokazali Lemu 4.2. □

Dokaz je preuzet iz [3].

Primjer 4.1. Pokažimo da je krivulja $\alpha(t) = (2t, \ln t, t^2)$ konstantnog nagiba.

Rješenje: Pokazat ćemo da je omjer zakrivljenosti κ i torzije τ konstantan u svakoj točki krivulje α .

$$\alpha(t) = (2t, \ln t, t^2),$$

$$\dot{\alpha}(t) = \left(2, \frac{1}{t}, 2t\right),$$

Kako krivulja α nije parametrizirana parametrom duljine luka, koristit ćemo formule za zakrivljenost i torziju krivulje parametrizirane općim parametrom.

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(0, -\frac{1}{t^2}, 2\right),$$

$$\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & \frac{1}{t} & 2t \\ 0 & -\frac{1}{t^2} & 2 \end{vmatrix} = \left(\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2}\right),$$

$$\|\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)\| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + 16 + \frac{4}{t^4}} = \sqrt{\frac{16t^2 + 16t^4 + 4}{t^4}} = \sqrt{\left(\frac{4t^2 + 2}{t^2}\right)^2} = \frac{4t^2 + 2}{t^2} = 4 + \frac{2}{t^2},$$

$$\|\dot{\alpha}(t)\| = \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2} = \sqrt{\frac{4t^2 + 1 + 4t^4}{t^2}} = \sqrt{\left(\frac{2t^2 + 1}{t}\right)^2} = \frac{2t^2 + 1}{t} = 2t + \frac{1}{t},$$

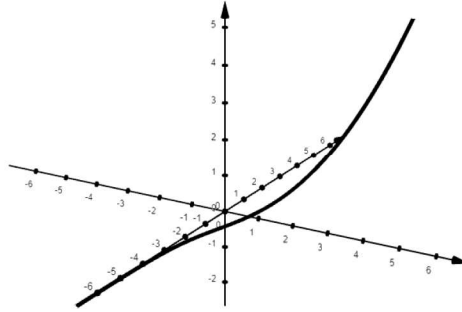
$$\kappa(t) = \frac{4 + \frac{2}{t^2}}{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^3},$$

$$\ddot{\alpha}(t) = \left(0, \frac{2}{t^3}, 0\right),$$

$$(\dot{\alpha}(t) \times \ddot{\alpha}(t)) \cdot \ddot{\alpha}(t) = \left(\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2}\right) \cdot \left(0, \frac{2}{t^3}, 0\right) = -\frac{8}{t^3},$$

$$\tau(t) = \frac{-\frac{8}{t^3}}{\left(4 + \frac{2}{t^2}\right)^2},$$

$$\frac{\tau(t)}{\kappa(t)} = \frac{\frac{-\frac{8}{t^3}}{\left(4 + \frac{2}{t^2}\right)^2}}{\frac{4 + \frac{2}{t^2}}{\left(2t + \frac{1}{t}\right)^3}} = -\frac{\frac{8}{t^3} \left(2t + \frac{1}{t}\right)^3}{\left(4 + \frac{2}{t^2}\right)^2} = -\frac{\frac{8}{t^3} \left(8t^3 + 12t + \frac{6}{t} + \frac{1}{t^3}\right)}{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}} = -\frac{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}}{64 + \frac{96}{t^2} + \frac{48}{t^4} + \frac{8}{t^6}} = -1.$$



Slika 2. Krivulja konstantnog nagiba iz Primjera 4.1.

U sljedećoj lemi koristit ćemo pojam obična cilindrična spirala, koja je također krivulja konstantnog nagiba. Da bismo mogli iskazati i dokazati lemu, naprije definirajmo takvu krivulju.

Definicija 4.3. *Krivulja koja nastaje istovremenom rotacijom i translacijom točke konstantnom brzinom duž z -osi naziva se obična cilindrična spirala. Parametrizacija takve krivulje je oblika $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt)$, gdje je $a > 0$ i $b \neq 0$.*

Lema 4.4. *Neka je krivulja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizirana duljinom luka. Krivulja α je obična cilindrična spirala ako i samo ako vrijedi $\kappa = \text{konst.} > 0$ i $\tau = \text{konst.}$*

Dokaz. Za svaki $a > 0$ i $b \neq 0$ jednadžba

$$\alpha(s) = \left(a \cos\left(\frac{s}{p}\right), a \sin\left(\frac{s}{p}\right), \frac{bs}{p}\right)$$

je parametrizacija duljinom luka, obične cilindrične spirale. Pri tome je $p = \sqrt{a^2 + b^2}$. Jedinično tangencijalo polje T , za krivulju parametriziranu duljinom luka, dano je kao

$$T(s) = \alpha'(s) = \left(-\frac{a}{p} \sin\left(\frac{s}{p}\right), \frac{a}{p} \cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{b}{p} \right).$$

Deriviramo li gornji izraz dobivamo

$$T'(s) = \alpha''(s) = \left(-\frac{a}{p^2} \cos\left(\frac{s}{p}\right), -\frac{a}{p^2} \sin\left(\frac{s}{p}\right), 0 \right),$$

a kako je zakrivljenost krivulje parametrizirane duljinom luka dana s $\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$, slijedi

$$\kappa(s) = \|T'(s)\| = \frac{a}{p^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} > 0.$$

Nadalje vrijedi, $T' = \kappa N$ iz čega slijedi

$$N(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{p}\right), -\sin\left(\frac{s}{p}\right), 0 \right).$$

Vektor B je definiran kao vektorski produkt $T \times N$,

$$B(s) = \left(\frac{b}{p} \sin\left(\frac{s}{p}\right), -\frac{b}{p} \cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{a}{p} \right).$$

Derivacijom dobivamo:

$$B'(s) = \left(\frac{b}{p^2} \cos\left(\frac{s}{p}\right), \frac{b}{p^2} \sin\left(\frac{s}{p}\right), 0 \right).$$

Kako vrijedi $B' = -\tau N$, očito je

$$\tau(s) = \frac{b}{p^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Kako su κ i τ obične cilindrične spirale konstante, očito je i $\frac{\tau}{\kappa}$ konstanta. □

Pomoću proizvoljne ravninske krivulje možemo generirati krivulju konstantnog nagiba na način koji je opisan sljedećom lemom.

Lema 4.5. *Neka je $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ zadana kao $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ parametrizirana parametrom duljine luka. Definiramo li prostornu krivulju γ kao $\gamma(s) = (x(s), y(s), s \cdot \cos \psi)$ pri čemu je ψ konstantan, tada krivulja γ zatvara konstantan kut ψ s vektorom $(0, 0, 1)$.*

Dokaz. Krivulju γ smo definirali $\gamma(s) = (x(s), y(s), s \cdot \cos \psi)$, pa je njezina prva derivacija $\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \cos \psi)$. Kako je ϕ kut između $\dot{\gamma}(t)$ i vektora $(0, 0, 1)$ te vrijedi $T \cdot u = \cos \phi$ dobivamo:

$$\cos \phi = \frac{\dot{\gamma}(t) \cdot (0, 0, 1)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} = \frac{(\dot{x}(s), \dot{y}(s), \cos \psi) \cdot (0, 0, 1)}{\sqrt{(1 + \cos^2 \psi)}} = \frac{\cos \psi}{\sqrt{(1 + \cos^2 \psi)}}$$

Iz dobivenog izraza, kvadriranjem i sređivanjem jednakosti dobijemo sljedeće:

$$\cos^2 \phi = \frac{\cos^2 \psi}{1 + \cos^2 \psi} \implies \frac{1}{\cos^2 \phi} = \frac{1 + \cos^2 \psi}{\cos^2 \psi} \implies \frac{1}{\cos^2 \phi} = 1 + \frac{1}{\cos^2 \psi}$$

Analogno se pokaže da vrijedi $\cos^2 \psi = \operatorname{ctg} \phi$. □

U nastavku ćemo naučiti više o projekciji krivulja i svojstva koja vrijede za krivulje konstantnog nagiba koje leže na sferi.

Lema 4.6. Neka je krivulja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom duljine luka koja s jediničnim vektorom $u \in \mathbb{R}^3$ zatvara kut ϕ , pri čemu je $0 < \phi < \pi$. Tada je projekcija β krivulje γ na ravninu okomitu na vektor u , krivulja dana s:

$$\beta(s) = \gamma(s) - (\gamma(s) \cdot u)u, \text{ za } a < s < b.$$

Za zakrivljenosti krivulja β i γ vrijedi:

$$\kappa_\beta = \pm \kappa_\gamma \frac{1}{\sin^2 \phi}.$$

Lema 4.7. Neka je krivulja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom duljine luka koja s jediničnim vektorom $u \in \mathbb{R}^3$ zatvara kut ϕ , pri čemu je $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$. Ako krivulja γ leži na sferi radijusa $r > 0$ tada vrijedi:

1. Zakrivljenost i torzija krivulje γ dani su kao:

$$\kappa_\gamma(s)^2 = \frac{1}{r^2 - s^2 \operatorname{ctg}^2 \phi}$$

$$\tau_\gamma(s)^2 = \frac{1}{r^2 \operatorname{tg}^2 \phi - s^2}$$

2. Zakrivljenost projekcije β krivulje γ na ravninu okomitu na vektor u , je dana kao:

$$\kappa_\beta(s_1)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^4 \phi - s_1^2 \cos^2 \phi}$$

pri čemu je $s_1 = s \sin \phi$ duljina luka krivulje β .

3. Neka je $r = a + 2b$ i $\cos \phi = \frac{a}{a + 2b}$. Tada je jednadžba krivulje β upravo jednadžba epicikloide.

Za dokaz Leme 4.7. koristit ćemo sljedeći teorem

Teorem 4.8. Neka je krivulja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizirana parametrom duljine luka sa zakrivljenošću κ i torzijom τ . Ako krivulja α leži na sferi radijusa $r > 0$ sa središtem u $q \in \mathbb{R}^3$. Tada vrijedi:

$$1. \kappa \geq \frac{1}{r},$$

$$2. \tau^2 \left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2} \right) = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2} \right)^2,$$

$$3. \frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\tau \kappa^2} \right)'$$

Dokažimo sada Lemu 4.7.

Dokaz. 1. Budući da krivulja γ zatvara kut ψ s jediničnim konstantnim vektorom, tada znamo da vrijedi $\frac{\tau}{\kappa} = \pm ctg\psi$. Iz Teorema 4.8. iskoristit ćemo relaciju 2)., uz činjenicu da je $\tau = \pm\kappa ctg\phi$ i dobivamo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2}\right)^2 &= \tau^2 \left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = \kappa^2 ctg^2\phi \left(r^2 - \frac{1}{\kappa^2}\right) = ctg^2\phi(\kappa^2 r^2 - 1). \\ \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4} &= ctg^2\phi(\kappa^2 r^2 - 1) \quad / : (\kappa^2 r^2 - 1) \\ \frac{(\kappa')^2}{\kappa^4(\kappa^2 r^2 - 1)} &= ctg^2\phi \quad / \sqrt{\quad} \\ \frac{\kappa'}{\kappa^2 \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1}} &= \pm ctg\phi \end{aligned} \quad (1)$$

Integriramo li jednadžbu (3) i dobijemo:

$$\frac{1}{\kappa} \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1} = \pm s ctg\phi \quad (2)$$

Izrazimo li iz jednadžbe (4) κ dobijemo:

$$\begin{aligned} \sqrt{\kappa^2 r^2 - 1} &= \pm s \kappa ctg\phi \quad / ^2 \\ \kappa^2 r^2 - 1 &= s^2 r^2 ctg^2\phi \\ \kappa^2 r^2 - s^2 \kappa^2 ctg^2\phi &= 1 \\ \kappa^2 &= \frac{1}{r^2 - s^2 ctg^2\phi}. \end{aligned} \quad (3)$$

Ovim izrazom je dana zakrivljenost $\kappa_\gamma(s)$ krivulje γ . Trebamo još dobiti izraz za torziju τ . Iskoristit ćemo činjenicu da je $\kappa = \pm \frac{\tau}{ctg\phi}$ i uvrstimo to u jednadžbu (5), iz čega slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{ctg^2\phi} &= \frac{1}{r^2 - s^2 ctg^2\phi} \quad / \cdot ctg^2\phi \\ \tau^2 &= \frac{ctg^2\phi}{r^2 - s^2 ctg^2\phi} \\ \tau^2 &= \frac{\frac{1}{tg^2\phi}}{r^2 - s^2 ctg^2\phi} \\ \tau^2 &= \frac{1}{r^2 tg^2\phi - s^2} \end{aligned}$$

Izraz iz Leme 4.6. uvrstimo u (5) i sređivanjem dobijemo $\kappa_\beta(s_1)^2 = \frac{1}{r^2 \sin^4\phi - s_1^2 \cos^2\phi}$, pri čemu je $s_1 = s \sin\phi$ duljina luka krivulje β .

Kako je $\cos \phi = \frac{a}{a+2b}$ tada slijedi da je

$$\sin^4 \phi = (\sin^2 \phi)^2 = (1 - \cos^2 \phi)^2 = \left(1 - \frac{a^2}{(a+2b)^2}\right)^2 = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^4}. \quad (4)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza za $\sin^4 \phi$ u jednadžbu pod 2) i sređivanjem dobivamo

$$\frac{1}{\kappa_\beta(s_1)} = \frac{16b^2(a+b)^2}{(a+2b)^2} - \frac{a^2 s_1^2}{(a+2b)^2}.$$

Zamijenimo li s sa s_1 dobit ćemo prirodnu jednadžbu epicikloide. □

Literatura

- [1] E. Abbena, S. Salamon i A. Gray, Modern differential geometry of curves and surfaces with Mathematica, Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [2] W. Kühnel, Differential Geometry-Curves-Surfaces-Manifolds, AMS, 2002.
- [3] Ž. Milin Šipuš, S. Vidak, Uvod u diferencijalnu geometriju, PMF- Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, skripta.
- [4] V. Pekić, Cikloidne krivulje, PMF- Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, završni rad, 2019.