Matematika Ponzijeve sheme

Biuk, Vesna

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike; smjer: Financijska matematika i statistika

Vesna Biuk

Matematika Ponzijeve sheme

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike; smjer: Financijska matematika i statistika

Vesna Biuk

Matematika Ponzijeve sheme

Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Nenad Šuvak

Osijek, 2022.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom radu govorit ćemo o Ponzijevoj shemi i o matematici koja se iza nje krije. Ponzijeva shema je način investicijske prijevare koju je početkom 20. stoljeća uspješno provodio Charles Ponzi i naposljetku je shema po njemu dobila ime. U nastavku ćemo reći nešto više o Charlesu Ponziju, njegovoj shemi i načinu na koji ju je mjesecima uspješno provodio. Vidjet ćemo i kako je, iako mjesecima uspješna shema, ipak na kraju raskrinkana. Također, objasnit ćemo piramidalne sheme te navesti sličnosti i razlike s Ponzijevim shemama.

Općenito, Ponzijeve sheme funkcioniraju na način da upravitelj sheme obećava investitorima povrat uloženoga novca uz velike kamate u kratkom vremenskom roku. Upravitelj sheme je uvijek vješt govornik koji ima sposobnost uvjeravanja često lakovjernih i neupućenih ljudi koji su željni lake i brze zarade. Uvijek se govori kako se investirani novac koristi za određenu legalnu svrhu, no istina je da se novac koji ulože novi investitori koristi kako bi se ranijim investitorima isplatila obećana svota. Takve sheme uglavnom dobro posluju sve dok ima dovoljno novih investitora. S vremenom, potrebno je regrutirati sve više novih investitora i u jednom trenutku uvijek dođe do manjka investitora te tada shema propada, a većina investitora ostaje bez svog uloženog novca.

Osnovni cilj ovog rada bit će konstruiranje matematičkog modela Ponzijeve sheme. Pokušat ćemo napraviti model Ponzijeve sheme na temelju povijesnih podataka koje imamo o originalnoj Ponzijevoj shemi. Pomoću konstruiranog modela moći ćemo lakše proučiti održivost i dugovječnost Ponzijeve sheme. Shvatit ćemo koji parametri utječu na održivost sheme, također, raspravit ćemo i pod kojim je uvjetima Ponzijeva shema profitabilna, a isto tako i u kojim situacijama dolazi do naglog propadanja sheme. Naravno, za upravitelja sheme cilj je uvijek da shema bude održiva tijekom dugog vremenskog razdoblja kako bi upravitelju sheme donijela što veću zaradu i kako bi nakon određenog vremena mogao pobjeći sa investiranim novcem.

Zatim ćemo konstruirani model primijeniti i na originalnu i na filantropsku Ponzijevu shemu. Objasnit ćemo stvarni i obećani iznos u fondu i vezu između njih. Model će ovisiti o nekoliko parametara pa ćemo prodiskutirati što se dogodi sa shemom ako dođe do promjene vrijednosti jednog ili više parametara. Napravit ćemo nekoliko grafičkih simulacija različitih Ponzijevih shema te vidjeti kako pod određenim uvjetima Ponzijeva shema može biti održiva beskonačno dugo. Naravno, takva shema je neprofitabilna za upravitelja, ali ipak može postojati. U današnje vrijeme također postoji velika opasnost i treba biti na oprezu jer postoji jako puno Ponzijevih shema i sve ih je teže otkriti. U zadnjem poglavlju dotaknut ćemo se najpoznatijih ikada provedenih Ponzijevih shema. U svijetu su najpoznatije sheme provodili Bernie Madoff i Allen Stanford, a u Hrvatskoj je jedna od najpoznatijih takvih prijevara poznata pod nazivom Afera Forex.

2 Ponzijeva shema

U ovom poglavlju ukratko ćemo proučiti nastanak Ponzijeve sheme i život Charlesa Ponzija po kome je Ponzijeva shema dobila ime te ćemo objasniti općenito značenje Ponzijevih shema. Također, objasnit ćemo i pojam piramidalnih shema koje se često krivo poistovjećuju s Ponzijevim shemama i navest ćemo glavne razlike među njima.

2.1 Kratka biografija Charlesa Ponzija

Charles Ponzi rođen je 3. travnja 1882. godine u Lugu u Italiji. Nakon što je mladost proveo u Parmi, radio je u pošti i studirao na rimskom sveučilištu La Sapienza. Za razliku od danas, u to je vrijeme fakultetski obrazovano bilo samo 5% stanovništva. Tijekom studiranja, Ponzi je ušao u krug bogatih aristokratskih mladića s kojima je kockao, pio, te potrošio svu obiteljsku ušteđevinu. Zbog nedostatka novca koji je navikao nemilice trošiti, Ponzi odlučuje prekinuti studiranje te odlazi u Sjedinjene Američke Države. Na put odlazi sa 200 dolara koje je dobio od majke, a većinu tog novca potrošio je na putu do Bostona.

Nakon nekog vremena provedenog u Bostonu, Ponzi odlazi u Montreal u Kanadi gdje počinje raditi u banci čiji je vlasnik bio Talijan Luigi Zarosi. U to vrijeme Kanada je bila mjesto u koje su dolazili raditi siromašni talijanski imigranti koji su željeli slati zarađeni novac obiteljima u Italiju. Valike banke nisu bile zainteresirane za takve male transakcije pa je banka u kojoj je Ponzi radio počela nuditi mnogo veće kamate od ostalih banaka. Naime, ta banka je svoju zaradu počela isplaćivati štedišama, što je privuklo mnogo novih štediša, a samim time i više novca banci. Upravo je taj sistem Ponziju kasnije dao ideju za pokretanje njegove sheme. Ponzi je konstantno smišljao nove poslovne pothvate koji su uglavnom bili ilegalni. Jednom prilikom lažirao je ček te zbog toga dvije godine proveo u zatvoru. Nakon izlaska iz zatvora, pomagao je strancima da nelegalno uđu u SAD pa je opet bio uhićen.

Usprkos tome što nije imao dovoljno kapitala, a često niti dovoljno znanja o poslovima kojima se želio baviti, Charles Ponzi je zaista imao poduzetnički duh te je cijelo vrijeme u glavi vrtio ideje kojima bi se mogao obogatiti. Iako je uglavnom bio bez novca, Ponzijevi snovi o bogatstvu i raskošnom životu nisu prestajali. Bio je sanjar koji je svoje snove želio ostvariti pod svaku cijenu. Ponzi se 1917. godine vraća u Boston gdje se zaljubljuje u talijansko-američku kći, Rose Genico. Ljubav mu je dala dodatan motiv za ostvarivanjem bogatstva, želio je da Rose ima sve što poželi. Ponzi je odlučio pokrenuti vlastiti posao te je iskoristio svoju posljednju ušteđevinu na najam malog ureda u Bostonu u kojem je naposljetku isplanirao svoju shemu. U početku, Ponzi je planirao da vodi uvoz i izvoz te tako pomogne međunarodnim tvrtkama s prekograničnom trgovinom. Plan je bio dobar, no trebao mu je neki način oglašavanja kako bi ljudi saznali za njega i njegov posao. Kada je Charles vidio koliko je skupo oglašavanje u časopisima, sinula mu je ideja kako bi, ipak, mogao pokrenuti časopis za oglašavanje. Pokrenuo je časopis i jednom prilikom do njega je poštom stigao dopis iz Španjolske u kojem se traži jedan primjerak njegovog časopisa, a uz dopis je bio priložen jedan poštanski kupon za čije je postojanje Ponzi tada prvi put čuo. Shvatio je da taj kupon bio vjerojatno jedini oblik međunarodne valute u svijetu.

Naime, 1906. godine 63 zemlje su se okupile i osmislile poštanske kupone koji su olakšavali slanje pošte preko državnih granica. Kupon je omogućavao jednoj osobi u jednoj zemlji da pošalje zapečaćenu pošiljku drugoj osobi u drugoj zemlji. Prije postojanja kupona, bilo je gotovo nemoguće to učiniti po niskoj cijeni. Nakon 1. svjetskog rata bilo je moguće otići u Europu, kupiti međunarodne kupone u jednoj zemlji i teoretski ih preprodati u drugoj zemlji uz ostvarivanje profita. To su trgovci nazivali prigodom za ostvarivanje dobiti bez rizika. Ponzi je uvidio kako je potrebno prikupiti mnogo novca za putovanje u Europu, otputovati te kupiti međunarodne poštanske kupone, zatim se s kuponima vratiti u SAD i na neki način pretvoriti ih u gotovinu.

Charles je novac za realizaciju svoje ideje pokušao pribaviti u raznim bankama i kod poznanika, no nitko nije bio zainteresiran da mu posudi novac. Tada je odlučio svoju ideju pokazati javnosti i tako pronaći potencijalne ulagače. Shvatio je kako će novac lako prikupiti ako ljudima obeća visok povrat uloženoga. Obećao je investitorima da će za bilo koji iznos uloženog novca platiti 50% kamata u 90 dana, nakon čega je promijenio obećanje i rekao kako će 50% kamata platiti za samo 45 dana. Njegova ideja ubrzo se proširila SAD-om i privukla ogroman broj ulagača. Ponzi je znao kako bi u jednom trenu moglo doći do problema pa je tvrtku osnovao s 3 različita imena u registracijskim papirima, a za predsjednika tvrtke postavio je svoga strica koji o tome nije bio obaviješten. Nevjerojatno je koliko je shema brzo narasla te koliko je isto tako naglo uništena, naime, cijela je shema trajala oko 8 mjeseci.

U prvom mjesecu poslovanja sheme, Ponzi je ostvario dobit od 1.700 dolara. Nakon nekog vremena, ulaganja su porasla na čak 30.000 dolara tjedno. Nedugo zatim, u jednom mjesecu ukupno je uloženo čak 2.5 milijuna dolara. Valja naglasiti kako su 2.5 milijuna dolara tada ekvivalentna s današnjih 32 milijuna dolara. Ponzi je ubrzo otvorio urede diljem Engleske te zaposlio velik broj agenata koji su radili za njega. Kako su se njegovi bankovni računi punili, Ponzi je dio novca iskoristio za ulaganje u različite poslove, dio je dao prijateljima kao zajmove za nekretnine, čak je dio novca posuđivao prijateljima kako bi i oni mogli ulagati u njegov posao. No, najvažnije i najveće ulaganje bilo je u svrhu stjecanja kontrole nad bankama. Započeo je s manjim ulaganjima u nekoliko banaka u Bostonu. Smatrao je kako će, ako stekne kontrolu nad bankama, moći korištenjem njihovih rezervi spasiti posao u slučaju neželjenih događaja koji bi mogli poljuljati njegov, tada stabilan, posao. Zanimljiva je činjenica kako je Ponzi odlučio najviše uložiti u banku Hanover Trust koja ga je odbila kada je tražio kredit za pokretanje časopisa. Uložio je čak 2.7 milijuna dolara u dionice te banke. Kasnije se povezao s ostalim dioničarima banke te naposljetku postao i većinski vlasnik.

Kako je Ponzi održao svoje obećanje ranijim ulagačima te im na vrijeme vratio glavnicu uz obećane kamate, njegov ugled je znatno narastao. Pred Ponzijevim uredima bili su redovi u kojima je gomila ulagača čekala kako bi uložili svoj novac. Čak su i ulagači kojima je isplaćen novac, ponovno taj isti novac reinvestirali uz dodatni kapital, nadajući se dodatnoj zaradi. Naravno, tijekom cijelog tog vremena, Ponzi se nije bavio trgovinom s međunarodnim kuponima, već je novac pribavljen od novih ulagača koristio kako bi isplatio novac starijim ulagačima. U jednom trenutku posjedovao je toliko veliku količinu novca da je s lakoćom mogao uzeti novac i jednostavno pobjeći, no Ponzi to nije učinio. Toliko je jaka bila njegova vjera u samog sebe i svoj plan. U to je vrijeme ured državnog odvjetnika posumnjao u njegov posao te je počeo prisluškivati Ponzijeve pozive kako bi pronašli neke tragove ili priznanje o prevari. Također, o njegovim poslovima počeli su se raspitivati i novinari mnogih bostonskih novina, koje je Ponzi naposljetku tužio te je u sporovima dobio višemilijunske odštete. Iako je dobio sudske sporove, medijski članci koji su bili usmjereni protiv Ponzija zainteresirali su agencije za provođenje zakona, odvjetnike, tužitelje i bankovne povjerenike koji su počeli provjeravati Ponzijevu tvrtku. Sve je to došlo do ulagača koji su se pribojali za svoj novac te su se odlučili povući iz posla. Ponzi je tada smislio plan kojim bi mogao spasiti svoje poslovanje. Naime, zakazao je sastanak sa svim regulatorima i agencijama za provođenje zakona u pratnji svoga odvjetnika. Na sastanku je objašnjavao svoju 'legalnu' zaradu preko poštanskih kupona, a zatim je obećao kako će pokazati radne knjige svoje tvrtke financijskom inspektoru kojega oni odaberu. Ponzi je smatrao kako je to jedini način da ulagači opet steknu povjerenje u njega, a na taj način mogao je dobiti vrijeme koje mu je bilo potrebno da riješi dugove. Nadao se kako će uspjeti uzeti novac iz rezervi banke čiji je većinski vlasnik te kako će se tada napokon okončati sve istrage vođene protiv njega.

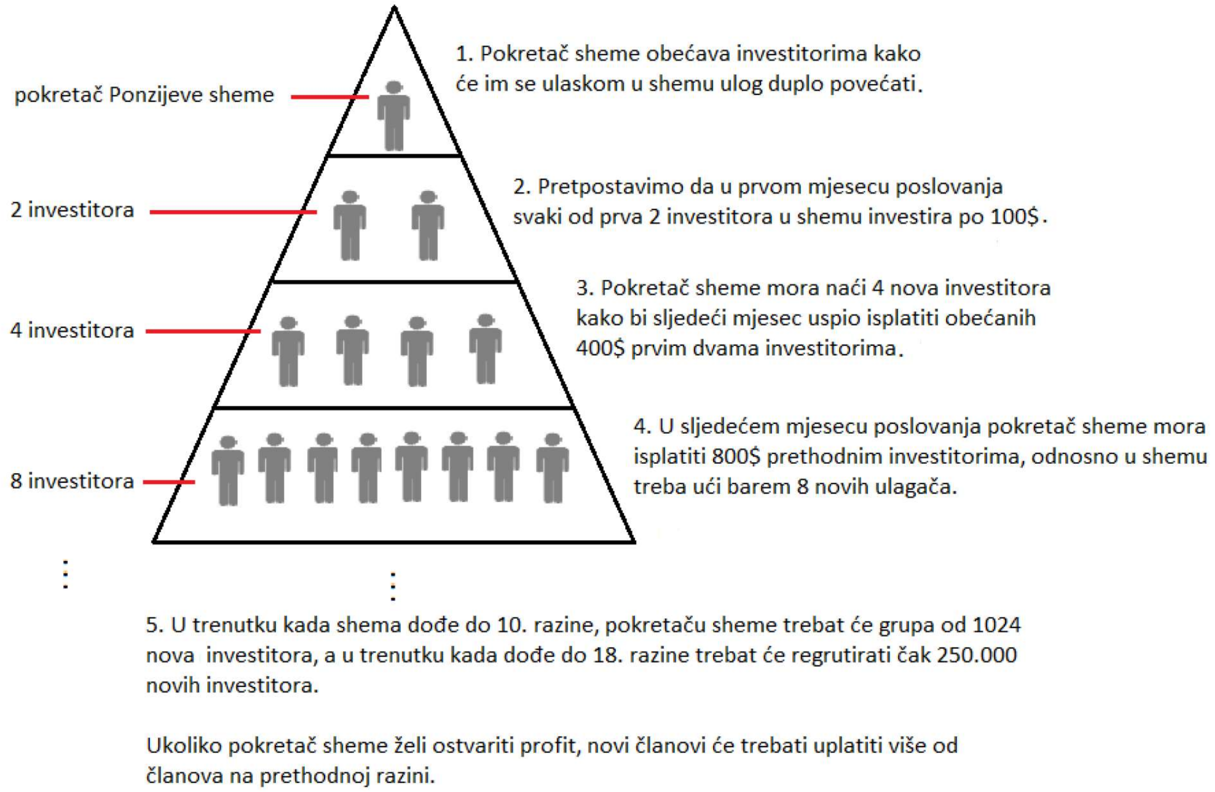
Financijski inspektor utvrdio je nejasnoće i velike razlike obveza i imovine koju je Ponzi posjedovao. Inspektor je preduhitrio Ponzija te je zaplijenio banku koja mu je bila jedini spas. Kako ne bi bio uhićen i ponižen pred suprugom i majkom, Ponzi se odlučuje predati te osporava dokaze financijskog inspektora. Ipak, zbog financijskih problema nije mogao platiti jamčevinu te je u petak 13. kolovoza 1920. godine Charles Ponzi završio u zatvoru. Ponzi je osuđen na 5 godina zatvora i izgubio je gotovo sav zarađen novac zbog loših ulaganja i plaćanja kamata starijim ulagačima. Nakon toga, 1922. godine, dok je još bio u zatvoru, protiv njega su podignute nove optužnice. Kako nije imao financijskih sredstava da plati odvjetnika, ovaj put branio se sam. Svojim govornim vještinama šokirao je tužitelje te je uspio uvjeriti porotu kako su on i njegovi suoptuženici nevini po svim točkama nove optužnice. Iako je zbog prve optužnice trebao ostati u zatvoru 5 godina, ipak je zbog dobrog vladanja pušten na slobodu nakon 4 godine. Nakon što je 3 mjeseca bio na slobodi, Ponzi se opet našao na sudu zbog novih optužbi. U konačnici, osuđen je na 7 do 9 godina kao ozloglašeni lopov, no sada je bio pušten na slobodu uz jamčevinu.

Nakon toga, 1925. godine, Charles Ponzi odlazi na Floridu te mijenja svoje ime u Charles Borrelli. Tamo otvara novu tvrtku pod nazivom CharPon i sada je investitorima obećavao čak 200% povrata u samo 60 dana. Od početnih ulaganja Ponzi kupuje 100 jutara zemlje koje je dobio za malo novaca. Svako jutro zemlje podijelio je na 23 parcele te je svaku parcelu prodavao za 10 dolara po parceli. Nadao se kako će mu svaki hektar donijeti dobit od 500%. No, zbog kršenja zakona o vrijednosnim papirima Floride, Ponzi opet biva osuđen, ovoga puta na godinu dana zatvora. Kako bi izbjegao ranije spomenutu kaznu od 7-9 godina zatvora, Ponzi ovoga puta odlučuje pobjeći. Lažirao je samoubojstvo te se pod lažnim imenom ukrcao na talijanski brod na kojemu je radio kao konobar. Otkrivši svoj pravi identitet kolegi s broda, biva uhapšen i zatvoren sve do 1934. godine. Charles Ponzi umro je u siječnju 1949. godine u 66. godini života. Pad Ponzijeve sheme uzrokovao je pad nekolicine bostonskih banaka, samo manji dio ulagača iz sheme je izašao s ogromnim dobitkom, dok je većina ulagača izgubila apsolutno sve.

2.2 Ponzijeve sheme

Ponzijeve sheme su lažna investicijska poduzeća u kojima se ulagačima često obećavaju veliki povrati uloženog novca u jako kratkom vremenu s malim ili čak nikakvim rizikom, a naziv su dobile po ranije spomenutom Charlesu Ponziju. Općenito, promotori Ponzijeve sheme obećavaju izvanredne povrate ulaganja, vješti su govornici i koriste napredni financijski žargon kako bi lakše stekli povjerenje ulagača. Ulagači ne znaju da prihodi ne dolaze od dobiti ostvarene obećanim ulaganjima, već se povrat starijim ulagačima isplaćuje od novca koji donose novi ulagači. Dakle, Ponzijeva shema funkcionira samo kada u shemu ulaze novi investitori. Kako bi shema konstantno funkcionirala, potreban je neograničen broj novih ulagača. Također, političke prilike, pad gospodarstva i slične pojave mogu dovesti do bankrota sheme jer u tim situacijama velik broj ulagača odlučuje odmah povući svoj investirani novac. Glavni razlog dugotrajne neodrživosti Ponzijevih shema je taj što se u shemi novac samo preraspodjeljuje bez stvaranja novog novca. Dakle, novac se samo uzima od jedne osobe i dodjeljuje drugoj osobi. Česta je situacija da promotor sheme kada skupi dovoljno novca, uzme sav uloženi novac i pobjegne. Tada svi ulagači ostanu prevareni i uglavnom bez svega što su uložili. Također, do raspada sheme dolazi i u situacijama u kojima nastane panika pa ulagači počnu naglo povlačiti svoj novac ili ako vlasti postanu sumnjičave te se pokrenu istrage koje na kraju utvrde kako se radi o prevari.

Na sljedećoj slici možemo vidjeti jedan primjer Ponzijeve sheme s obećanim visokim povratom ulaganja.

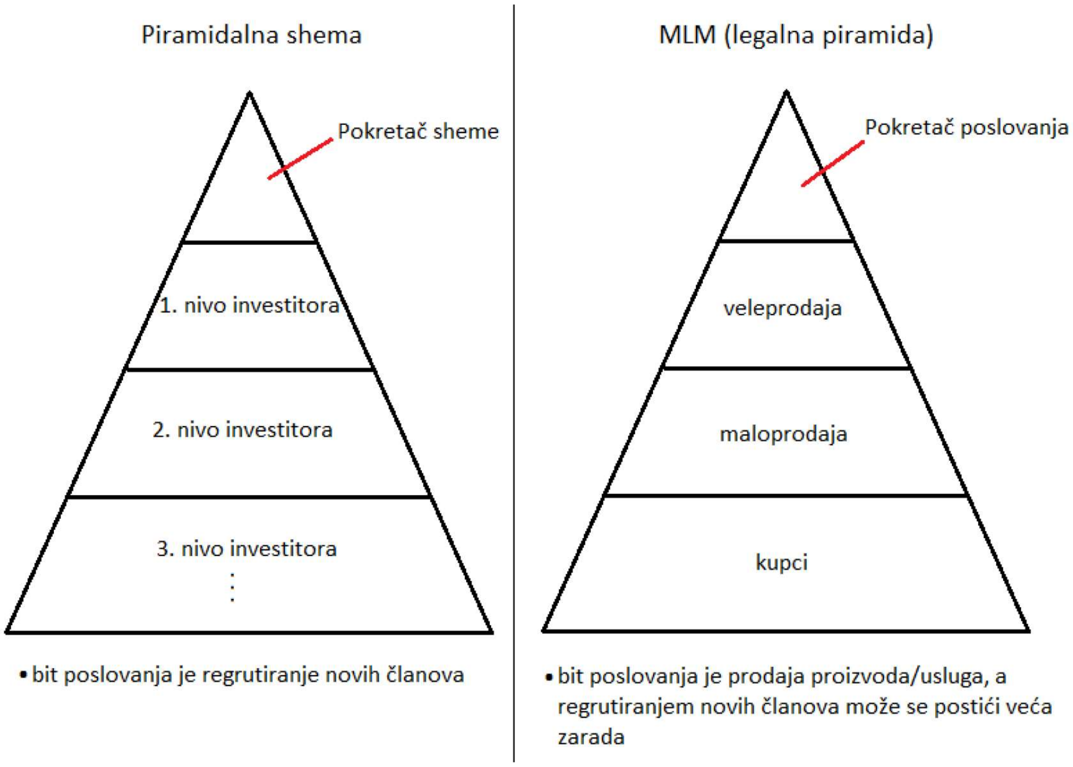


Slika 1: Primjer Ponzijeve sheme

2.3 Piramidalne sheme

Financijske piramidalne sheme su stara vrsta prijevara koje i u sadašnjosti rezultiraju velikim brojem žrtava. Osnovni tip jedne takve prijevare funkcionira na principu hijerarhije i regrutiranja, odnosno, svaka osoba u shemi mora angažirati dovoljan broj novih članova koji se trebaju uključiti u shemu, a svi novouključeni članovi (na najnižoj razini) uplaćuju novac na račun jedne osobe koja se trenutno nalazi na vrhu piramide. Kada osoba na vrhu piramide dobije novac, razina se spušta i tada one osobe koje su donedavno bile na drugoj razini postaju prvi te čekaju uplate na svoj račun. Piramide uvijek u početku dobro funkcioniraju, odnosno ulagači koji među prvima uđu u piramidalnu shemu uglavnom budu isplaćeni i na dobitku. No, sve piramidalne sheme su s vremenom osuđene na propast i u prosjeku skoro 90% ulagača izgubi sav uloženi novac.

U današnje vrijeme popularan je mrežni multi-level marketing (MLM) koji ima mnogo sličnosti s piramidalnim shemama pa dosta ljudi ta dva pojma poistovjećuju. Na sljedećoj slici možemo vidjeti usporedbu poslovanja piramidalne sheme i MLM-a.



Slika 2: Usporedba piramidalne sheme i MLM-a

Naime, glavna razlika između MLM i piramidalnih shema je ta što su piramidalne sheme ilegalne, dok je MLM tehnički legalan način distribucije proizvoda nekog poduzeća. Mrežni marketing je poslovni model u kojem nezavisni distributeri prodaju robu i usluge određene tvrtke prema krajnjem potrošaču. Samostalni distributeri koji su uključeni u MLM zarađuju vlastitom prodajom usluga i proizvoda, ali također određeni postotak prihoda generiraju i putem distributera koje su učlanili u cjelokupni program. Često postoje bonusi za prodaju određenih količina proizvoda ili za registraciju određenog broja novih članova. Mrežni marketing je postao vrlo privlačan način zarade te se sve više ljudi odlučuje na takav oblik zapošljavanja. Za razliku od nekog drugog fiksnog posla, u mrežnom marketingu radno vrijeme je fleksibilno, a prihodi su neograničeni, sve u ovisnosti o tome koliko je osoba sposobna i spremna posvetiti se ovom poslu.

Glavni razlog zašto se MLM često karakterizira kao i piramidalna shema je taj što se piramidalne sheme često predstavljaju kao poduzeća koja posluju po sustavu mrežnog marketinga. Naime, nije svaka MLM poslovna prilika legitimna i ponekad je vrlo teško razlikovati legitimnu MLM opciju od piramidalne sheme. Najveća razlika je u samom načinu na koji tvrtka posluje. Naime, u MLM poslovanju razmjenjuju se stvarni proizvodi ili usluge što je potpuno legalno, dok u piramidalnim shemama nema stvarnih proizvoda i usluga kojima se trguje pa se, sudeći samo po tome, radi o nelegalnom poslovanju. Također, MLM koristi objektivan pristup te pruža priliku da sudionici sami diktiraju svoj radni i kompenzacijski plan, dok kod piramidalnih shema uglavnom postoji agresivan pristup koji često zavodi ljude davanjem lažnih rokova i podataka kako bi morali donijeti odluke u što kraćem roku. U piramidalnoj shemi zaradu je moguće ostvariti samo uključivanjem novih ljudi u sustav, a u MLM poslovanju zaraditi se može još i samom prodajom proizvoda ili usluga. Najvažnija sličnost je ta da obje vrste poslovanja uključuju umrežavanje kako bi se izgradio lanac (piramida) te se tako sustav proširio na što veći broj ljudi.

2.4 Razlika Ponzijevih i piramidalnih shema

Česta je situacija u kojoj se ove dvije vrste shema poistovjećuju, no postoje bitne razlike koje razdvajaju piramidalne od Ponzijevih shema. Naime, obje vrste shema su nelegalne i dobit ne ostvaruju prodajom stvari ili usluga, već starije članove financiraju novcem koji donose novi članovi. Glavna razlika između piramidalnih i Ponzijevih shema je u tome što većina Ponzijevih shema obećava zaradu provođenjem raznih investicijskih projekata koji su često tajnoviti, teško shvatljivi i nerazumljivi širokoj populaciji. S druge strane, piramidalne sheme jasno objašnjavaju kako novac koji se isplaćuje dolazi od novih članova koji se po ulasku u shemu nalaze na samom dnu piramide. Također, u Ponzijevoj shemi uvijek postoji jedna osoba, upravitelj sheme, s kojim sve žrtve uključene u shemu komuniciraju, on prikuplja sav novac i on predstavlja centar same sheme. Kod piramidalnih shema ne postoji centralna osoba koja svime upravlja, već čim se novac isplati osobama na vrhu piramide, odmah osobe na razini ispod prelaze na vrh i sljedeće su na redu za isplatu.

Što se održivosti shema tiče, Ponzijeve sheme uglavnom mogu duže opstati jer se oslanjaju na to da ulagači ne povlače svoj novac iz fonda, dok piramidalne sheme zahtijevaju konstantno postojanje eksponencijalnog rasta sudionika sheme. Dakle, ako pretpostavimo da svaki novi član piramidalne sheme mora dovesti 6 novih ljudi, već na osmoj razini piramida bi trebala imati preko 1,6 milijuna članova. Piramidalna shema je održiva i prijevara dobro funkcionira sve dok se regrutiraju novi članovi, no, često je nemoguće regrutirati dovoljan broj novih članova i shema propadne nakon kratkog vremena. Tajna ovih shema je u tome što djeluju vrlo uvjerljivo, a sve zbog toga što osobe koje se među prvima uključe u sheme zaista ostvare profit, pa zatim i većina ljudi izvan sustava koji čuju za mogućnost lake zarade požele se također uključiti u sheme nadajući se ostvarivanju barem iste takve zarade.

3 Matematički model Ponzijeve sheme

Osnovni cilj ovog rada je konstruiranje matematičkog modela jednostavne Ponzijeve sheme. Model bi trebao pratiti tijek investicijskog kapitala, prinose na ulaganja i njihovu preraspodjelu. Osnovna svrha ovakvog modela je proučavanje stabilnosti i dugovječnosti Ponzijeve sheme, odnosno, zanima nas pod kojim uvjetima i strategijama Ponzijeva shema donosi zaradu, a također želimo znati i pod kojim će uvjetima Ponzijeva shema brzo propasti. Cilj svake Ponzijeve sheme je da bude održiva tijekom dužeg vremenskog razdoblja i da bude isplativa upravitelju sheme.

3.1 Pretpostavke modela

Pretpostavimo da fond započinje s radom u trenutku $t = 0$ i s početnim depozitom $K \geq 0$ koji u samom početku ulože investitori, nakon čega slijedi kontinuirani priljev novca $s(t)$ u fond. Nadalje, obećanu kamatnu stopu povrata označavat ćemo s r_p, a za nominalnu kamatnu stopu po kojoj je novac zaista uložen koristit ćemo oznaku r_n. Ako je $r_n \geq r_p$, onda je fond legalan i tada stopa dobiti iznosi $r_n - r_p$. U suprotnom, ako je $r_n < r_p$, tada možemo reći da je fond nelegalan, odnosno, da obećava više nego što zaista može ostvariti. U toj situaciji može se dogoditi da u početku fond vraća obećani iznos, ali u nekom trenutku u budućnosti ipak neće moći vratiti obećane iznose svim investitorima. U tom slučaju obećanu kamatnu stopu r_p nazivamo Ponzijeva stopa.

Prilikom izgradnje modela, u obzir moramo uzeti i činjenicu kako dio ulagača tijekom vremena iz fonda povlači sav uloženi novac ili samo dio uloženog novca, a ostatak nanovo reinvestira nadajući se dodatnoj zaradi. Najjednostavniji način za uključivanje te činjenice u model je da pretpostavimo da investitori povlače novac po konstantnoj kamatnoj stopi r_w koja se primjenjuje u svakom trenutku t na obećanom akumuliranom kapitalu. S obzirom na to, iznos koji ulagač koji je uložio kapital K povlači u trenutku t jednak je:

$$r_w K e^{t(r_p - r_w)}.$$

Uočimo, ako je kamatna stopa povlačenja uloženog novca r_w niža od obećane stope povrata r_p, onda iznos koji investitori povlače eksponencijalno raste. U suprotnom, ako je $r_w \geq r_p$, iznos koji investitori povlače eksponencijalno pada.

Nadalje, zanima nas način na koji bismo mogli izračunati iznos koji povlače ulagači u trenutku t za one ulagače koji su uložili svoj kapital između vremenskih trenutaka 0 i t. U skladu s prethodnim zaključcima, slijedi kako će oni ulagači koji su u fond uložili iznos $s(u)$ u vremenskom trenutku u htjeti povući u trenutku $t > u$ iznos novca koji je jednak

$$r_w s(u) e^{(r_p - r_w)(t-u)}.$$

Ukupna povlačenja u trenutku t sastojat će se od ukupnih povlačenja iz početnog depozita K i kontinuiranog povlačenja novčanog priljeva $s(u)$ kojeg dobivamo integracijom izraza

$$r_w s(u) e^{(r_p - r_w)(t-u)}.$$

Odnosno, integriramo li povlačenja između trenutaka 0 i t i pribrojimo li im ranije izračunato povlačenje iz početnog depozita K, dobit ćemo formulu za ukupna povlačenja u trenutku t (u oznaci W_t):

$$W_t := r_w K e^{t(r_p - r_w)} + r_w \int_0^t s(u) e^{(r_p - r_w)(t-u)} du. \tag{3.1}$$

Možemo uočiti kako se u formuli za $W(t)$ ne pojavljuje nominalna kamatna stopa jer se povlačenja temelje samo na obećanoj kamatnoj stopi r_p.

Razmotrimo sada slučaj u kojem svaki investitor privuče u fond određeni broj novih investitora govoreći im o visokim prinosima koje mogu ostvariti. Zbog jednostavnosti, pretpostavit ćemo da svaki ulagač jednako doprinosi fondu. U ovom slučaju, jednostavna pretpostavka kojom se može ostvariti kontinuirani priljev novca $s(t)$ je eksponencijalni rast, iz čega slijedi da $s(t)$ možemo modelirati na sljedeći način:

$$s(t) = s_0 e^{r_i t}, \tag{3.2}$$

pri čemu sa s_0 označavamo početnu visinu depozita, a s r_i stopu ulaganja. Jednadžba (3.2) predstavlja priljev novca u fondu u trenutku t. Uvrstimo li to u jednadžbu (3.1) za $W(t)$, onda imamo:

$$W(t) = r_w K e^{t(r_p - r_w)} + r_w \int_0^t s_0 e^{r_i u} e^{(r_p - r_w)(t-u)} du. \tag{3.3}$$

Izračunavanjem određenog integrala u jednadžbi (3.3), funkciju povlačenja $W(t)$ definiranu jednadžbom (3.1) možemo pisati kao:

$$W(t) = r_w e^{t(r_p - r_w)} \left(K + s_0 \frac{e^{t(r_w + r_i - r_p)} - 1}{r_w + r_i - r_p} \right), \tag{3.4}$$

gdje uzimamo da je razlomak jednak t kada je $r_w + r_i - r_p = 0$.

3.2 Primjena linearne diferencijalne jednadžbe u izgradnji modela

Za modeliranje Ponzijeve sheme, odnosno investicijskog fonda koji obećava više nego što može ostvariti, koristit ćemo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Diferencijabilnu funkciju $S(t)$ koristit ćemo za prikaz ukupnog iznosa novca koji se nalazi u fondu u trenutku t.

Pretpostavimo da je $C = S(0)$ početno stanje fonda koje može ili ne mora biti jednako početnom depozitu K kojega ulažu investitori. Naime, upravitelji fondova mogu uložiti "interni" depozit $K_0 \geq 0$, koji se također ulaže po nominalnoj kamatnoj stopi r_n. Ukoliko upravitelji fondova ulože interni depozit, onda je početno stanje fonda jednako zbroju početnog depozita koji ulože investitori i početnog depozita kojeg uloži sam upravitelj fonda, tj. $C = K_0 + K > K$. U situaciji u kojoj dio početnog depozita K nije dostupan (zbog krađe ili neke druge izvanredne situacije), za početno stanje vrijedit će $C < K$. Kasnije ćemo vidjeti da se rješenje diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetom $C = S(0) \neq K$ koristi ukoliko u neko kasnije vrijeme t^* dođe do neočekivane promjene vrijednosti parametara, npr. ako se u trenutku t^* dogodi novčani priljev ili dođe do promjene stope povlačenja uloženoga novca.

Zanima nas što će se dogoditi sa iznosom novca $S(t)$ nakon nekog vremena Δt.

Iznos $S(t+\Delta t)$ dobit ćemo kada iznosu $S(t)$ dodamo nominalnu kamatnu stopu u vremenskom razdoblju Δt, odnosno $r_n S(t)dt$; priljev novog novca u vremenskom razdoblju Δt, tj. $s(t)dt$; te naposljetku oduzmemo povlačenja novca iz fonda u vremenskom razdoblju Δt, u matematičkom zapisu $W(t)dt$. Dakle, vrijedi sljedeće:

$$S(t+\Delta t) = S(t) + S(t)r_n\Delta t + s(t)\Delta t - W(t)\Delta t. \tag{3.5}$$

Modificiranjem te jednadžbe dobivamo:

$$\frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S(t)r_n + s(t) - W(t). \tag{3.6}$$

Za jako kratko vremensko razdoblje Δt imamo:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t} = S'(t). \tag{3.7}$$

To nas dovodi do glavne diferencijalne jednadžbe čije će rješenje biti iznos novca u fondu u trenutku t, tj. do jednadžbe:

$$S'(t) = S(t)r_n + s(t) - W(t). \tag{3.8}$$

Zamijenimo li u prethodnoj jednadžbi (3.8) $s(t)$ izrazom (3.2), a $W(t)$ izrazom (3.4), dobit ćemo:

$$S'(t) = S(t)r_n + s_0 e^{r_i t} - r_w e^{t(r_p - r_w)}\left(K + s_0 \frac{e^{t(r_w + r_i - r_p)} - 1}{r_w + r_i - r_p}\right). \tag{3.9}$$

Pomnožimo li sada cijelu prethodnu jednadžbu izrazom $e^{-r_n t}$, dobit ćemo:

$$e^{-r_n t}S'(t) - e^{-r_n t}S(t)r_n = e^{-r_n t}\left[s_0 e^{r_i t} - r_w e^{t(r_p - r_w)}\left(K + s_0 \frac{e^{t(r_w + r_i - r_p)} - 1}{r_w + r_i - r_p}\right)\right]. \tag{3.10}$$

Daljnjim modificiranjem jednadžbe slijedi:

$$e^{-r_n t}S'(t) - e^{-r_n t}S(t)r_n = e^{(r_i - r_n)t}s_0 \frac{r_i - r_p}{r_w + r_i - r_p} + e^{(r_p - r_w - r_n)t}r_w \frac{s_0 - K(r_w + r_i - r_p)}{r_w + r_i - r_p}. \tag{3.11}$$

Možemo primijetiti da je lijevi dio prethodne jednadžbe derivacija izraza $e^{-r_n t}S(t)$. Integrirajući obje strane prethodne jednadžbe s obzirom na t, dobit ćemo sljedeću jednadžbu:

$$\begin{aligned} e^{-r_n t}S(t) &= e^{(r_i - r_n)t}s_0 \frac{r_i - r_p}{(r_w + r_i - r_p)(r_i - r_n)} \\ &+ e^{(r_p - r_w - r_n)t}r_w \frac{s_0 - K(r_w + r_i - r_p)}{(r_w + r_i - r_p)(r_p - r_w - r_n)} + \alpha, \end{aligned} \tag{3.12}$$

gdje je α konstanta.

Rješenje $S(t)$ diferencijalne jednadžbe (3.8) formirat će se korištenjem sljedeće funkcije:

$$g(t,a,b,c,d,\alpha) := ae^{bt} + ce^{dt} + \alpha. \tag{3.13}$$

Koristeći tu funkciju, $S(t)$ nadalje opisujemo formulom:

$$S(t) := g(t,a,b,c,d,\alpha)e^{r_n t} = ae^{(b+r_n)t} + ce^{(d+r_n)t} + \alpha e^{r_n t}, \tag{3.14}$$

pri čemu su koeficijenti a, b, c, d i α definirani na sljedeći način:

$$a := \frac{r_w[s_0 - (r_i - r_p + r_w)K]}{(r_p - r_n - r_w)(r_i - r_p + r_w)}, \tag{3.15}$$

$$b := r_p - r_n - r_w, \tag{3.16}$$

$$c := \frac{s_0(r_i - r_p)}{(r_i - r_n)(r_i - r_p + r_w)}, \tag{3.17}$$

$$d := r_i - r_n, \tag{3.18}$$

$$\alpha := C - \frac{s_0(r_n - r_p) + Kr_w(r_i - r_n)}{(r_i - r_n)(r_n - r_p + r_w)}. \tag{3.19}$$

Rješenje $S(t)$ jednadžbe (3.14) linearna je kombinacija triju eksponencijalnih funkcija. Nultočke funkcije $S(t)$ i njene derivacije mogu se izračunati numerički, ali u tom slučaju ne bismo dobili analitičke informacije o ponašanju funkcije.

Međutim, ako znamo broj pozitivnih nultočki funkcije $S(t)$, onda možemo saznati i pod kojim uvjetima je fond solventan, tj. pod kojim uvjetima je iznos $S(t)$ pozitivan. Vidjet ćemo da, ovisno o vrijednostima parametara jednadžbe (3.14), funkcija $S(t)$ ima jednu, dvije ili niti jednu pozitivnu nultočku.

- U slučaju kada funkcija $S(t)$ nema niti jednu pozitivnu nultočku, tada je iznos novca u fondu $S(t)$ pozitivan, odnosno, fond je solventan.

- U situaciji kada funkcija $S(t)$ ima jednu pozitivnu nultočku, tada iznos $S(t)$ postaje negativan pa fond nije solventan i propada.

- Postojanje dviju pozitivnih nultočki funkcije $S(t)$ ukazuje na to kako je iznos $S(t)$ prvo postao negativan, zatim dosegnuo svoj minimum, nakon čega je opet postao pozitivan. Ako se to dogodi, možemo reći kako je prvo došlo do propadanja fonda, a zatim se fond uspješno oporavio.

Kako bismo dobili analitičke rezultate o broju pozitivnih nultočki funkcije $S(t)$ bitno je napomenuti da su nultočke te funkcije također i nultočke funkcije $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ definirane jednadžbom (3.13) koja je linearna kombinacija dviju eksponencijalnih funkcija i jedne konstante.

Nultočke funkcije $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ pronaći ćemo njenim deriviranjem. Naime, derivacija funkcije $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ bit će linearna kombinacija dviju eksponencijalnih funkcija bez konstante pa ćemo derivaciju moći lakše analizirati. Sljedeća propozicija daje nam rezultate o broju pozitivnih nultočki funkcije $g(t,a,b,c,d,\alpha)$.

Propozicija 3.1. *Pretpostavimo da promatramo funkciju $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ definiranu jednadžbom (3.13) u netrivijalnom slučaju gdje su $a,b,c,d \neq 0$ i $b \neq d$. Također, pretpostavimo da je $g(0,a,b,c,d,\alpha) \geq 0$. Razmatramo dva uvjeta:*

$$U := \frac{cd}{ab} < 0, \qquad V := \frac{1 + cd/ab}{b-d} < 0. \tag{3.20}$$

Funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ ima ekstrem

$$m := a\left(\frac{-cd}{ab}\right)^{\frac{b}{b-d}} + c\left(\frac{-cd}{ab}\right)^{\frac{d}{b-d}} + \alpha \tag{3.21}$$

koji postiže za pozitivan $t = t_c$ gdje je:

$$t_c := \frac{\ln\left(\frac{-cd}{ab}\right)}{b-d} \tag{3.22}$$

ako i samo ako su zadovoljeni uvjeti (3.20).
S obzirom na broj pozitivnih nultočki funkcije $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ rezultati su podijeljeni u 4 slučaja:

A1: Uvjet (3.20) je zadovoljen i vrijedi $ab + cd < 0$.

- *Ako je $m > 0$ tada funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ nema pozitivnu nultočku.*
- *Ako je $m < 0$ i $b, d, \alpha < 0$, onda funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ ima točno jednu pozitivnu nultočku koju postiže u trenutku manjem od t_c.*
- *U svim ostalim slučajevima u kojima je $m < 0$ funkcija ima jednu pozitivnu nultočku sa svake strane od t_c.*

A2: Uvjet (3.20) je zadovoljen i vrijedi $ab + cd > 0$.

- *Ako su $b, d < 0$ i $\alpha > 0$, tada funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ nema pozitivnu nultočku.*
- *U svim ostalim slučajevima postoji jedna pozitivna nultočka.*

A3: Uvjet (3.20) nije zadovoljen i vrijedi $ab + cd < 0$.

- *Ako su $b, d < 0$ i $\alpha > 0$, funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ nema pozitivnih nultočki.*
- *U svim ostalim slučajevima postoji jedna pozitivna nultočka.*

A4: Uvjet (3.20) nije zadovoljen i vrijedi $ab + cd > 0$.

- *Tada funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ nema pozitivnih nultočki.*

Dokaz. Dokaz je elementaran i proizlazi iz sljedećih činjenica:

1) Funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ pri $t = t_c$ ima vrijednost m, a njena derivacija $g'(t,a,b,c,d,\alpha)$ pri $t = t_c$ ima vrijednost 0. Nadalje, t_c je pozitivan ako i samo ako je zadovoljen uvjet (3.20). Derivacija $g'(t,a,b,c,d,\alpha)$ pri $t = 0$ ima vrijednost a.

2) Ako su $b, d < 0$, funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha) \to \alpha$ kada $t \to \infty$. Ako je $b > 0$ ili $d > 0$, funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha) \to \pm\infty$ (ovisno o vrijednostima a i c) kada $t \to \infty$.

3) Ako uvjet (3.20) nije zadovoljen, tada funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ ima ekstrem za $t < 0$ ili uopće nema ekstrem. U omba slučaja, funkcija $g(t,a,b,c,d,\alpha)$ je za $t > 0$ monotono rastuća ako je $ab + cd > 0$, odnosno monotono padajuća u suprotnom.

□

3.2.1 Proširenje za funkcije s(u) i S(t)

Ranije smo pretpostavili postojanje kontinuirane stope rasta za nova ulaganja $s(u)$ u bilo kojem trenutku u. Međutim, stopa novih ulaganja ne može uvijek ostati pozitivna jer će se u nekom trenutku ulaganja smanjiti ili čak u potpunosti prestati zbog manjka novih investitora. Stoga, u ovisnosti o vremenu, stopa novih ulaganja na početku je pozitivna, a zatim uvijek postaje negativna i teži prema $-\infty$.

Zbog jednostavnosti, pretpostavimo da promatramo kompoziciju s $(4u - u^2)$, gdje je

$$s(u) = s_0 e^{r_i u}.$$

Funkcija $f(u) = 4u - u^2$ je pozitivna na $\langle 0, 4\rangle$, negativna na $\mathbb{R}\backslash\langle 0, 4\rangle$, a u točki $u = 2$ postiže svoj maksimum. Naime, promatrajući različite Ponzijevije sheme koje su se provodile kroz povijest, dolazi se do zaključka da je prosječan broj godina u kojima stope rasta ulaganja dostižu svoj maksimum jednak dvije godine, a odabrana funkcija $f(u) = 4u - u^2$ također maksimum postiže u točki $u = 2$. Sve to implicira da $s(u)$ možemo modelirati na sljedeći način:

$$s(u) = s_0 e^{r_i(4u-u^2)}. \tag{3.23}$$

Grafički prikaz funkcije kojom smo prethodno definirali $s(u)$ raste do točke $t = 2$, a zatim počinje opadati težeći u 0 kada $u \to \infty$.
Uvrstimo li izraz za $s(u)$ definiran jednadžbom (3.23) u jednadžbu za $W(t)$ definiranu izrazom (3.1) dobit ćemo:

$$W(t) = r_w K e^{t(r_p - r_w)} + r_w \int_0^t s_0 e^{r_i(4u-u^2)} e^{(t-u)(r_p-r_w)} du. \tag{3.24}$$

Integral u jednadžbi (3.24) ne možemo izračunati pomoću elementarnih funkcija zbog komponente e^{-u^2} koja se nalazi u podintegralnom dijelu. Međutim, integral $\int_0^t e^{-u^2} du$ može se lako izračunati pomoću Gaussove funkcije pogreške (error function) $erf(t)$ koja se uglavnom pojavljuje u vjerojatnosti, statistici i diferencijalnim jednadžbama. Naime, vrijedi sljedeće:

$$\int_0^t e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} erf(t). \tag{3.25}$$

Izračunavanjem određenog integrala u jednadžbi (3.24), dobit ćemo konačni izraz za funkciju povlačenja $W(t)$:

$$W(t) = r_w e^{t(r_p - r_w)} \left(K + s_0 \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{(r_i - r_p + r_w)^2}{2r_i}}}{2\sqrt{r_i}} \cdot erf\left(\frac{2r_i(t-2) + r_p - r_w}{2\sqrt{r_i}} \right) \right) \tag{3.26}$$

3.2.2 Modeliranje kapaciteta fonda S(t) pomoću nove funkcije s(u)

Iako se diferencijalna jednadžba (3.8) koja opisuje neto iznos novca u fondu ne mijenja promjenom $s(u)$, u ovom dijelu dobit ćemo drugačije rješenje za tu jednadžbu. Za početak, prisjetimo se na koji je način definirana jednadžba (3.8):

$$S'(t) = S(t)r_n + s(t) - W(t).$$

Primjenom istih postupaka kao u poglavlju (3.2) u kojem smo govorili o primjeni linearne diferencijalne jednadžbe u izgradnji modela, dolazimo do sljedeće jednadžbe:

$$e^{-r_n t} S(t) = \int e^{-r_n t} \Big(s(t) - W(t) \Big) dt + \delta, \tag{3.27}$$

pri čemu je δ oznaka za konstantu. Računanjem integrala na desnoj strani prethodne jednadžbe uvrštavanjem funkcijskih izraza (3.23) za $s(t)$ i (3.26) za $W(t)$ dobit ćemo:

$$\int e^{-r_n t} S(t) dt = \int s_0 e^{r_i(4t - t^2)} dt = \frac{\sqrt{\pi} s_0 e^{\frac{(r_n - 4r_i)^2}{4r_i}}}{2\sqrt{r_i}} \cdot erf\left(\frac{2r_i(t-2) + r_n}{2\sqrt{r_i}} \right) - \int e^{-r_n t} W(t) dt$$

$$= \int r_w e^{t(-r_n + r_p - r_w)} \left(K + s_0 \frac{\sqrt{\pi} e^{\frac{(r_i - r_p + r_w)^2}{2r_i}}}{2\sqrt{r_i}} \cdot erf\left(\frac{2r_i(t-2) + r_p - r_w}{2\sqrt{r_i}} \right) \right) dt$$

$$= \frac{-r_w}{2(r_n + r_w - r_p)\sqrt{r_i}} \left(\sqrt{\pi} \cdot s_0 \cdot erf\left(\frac{r_n + 2r_i(t-2)}{2\sqrt{r_i}} \right) \right) \cdot e^{\frac{r_n^2 - 8r_n r_i + r_p^2 - 2r_p r_w + 4r_p r_i + r_w^2 - 4r_w r_i + 2r_i^2}{4r_i}}$$

$$- e^{t(-r_n + r_p - r_w)} \cdot \left(s_0 \sqrt{\pi} e^{\frac{(r_i - r_p + r_w)^2}{2r_i}} \cdot erf\left(\frac{2r_i(t-2) + r_p - r_w}{2\sqrt{r_i}} \right) + 2K\sqrt{r_i} \right) + \delta.$$

Stoga, $S(t)$ možemo pisati kao:

$$S(t) = mA(t) + nB(t)e^{\lambda t} + \Theta, \tag{3.28}$$

pri čemu m, n i λ ovise o parametrima r_w, r_i, r_n, r_p i s_0, a $A(t)$ i $B(t)$ su modificirane Gaussove funkcije pogreške, tj. :

$$A(t) = erf\left(\frac{r_n + 2r_i(t-2)}{2\sqrt{r_i}} \right), \tag{3.29}$$

$$B(t) = erf\left(\frac{2r_i(t-2) + r_p - r_w}{2\sqrt{r_i}}\right), \tag{3.30}$$

$$m = \frac{\sqrt{\pi} s_0 e^{\frac{(r_n - 4r_i)^2}{4r_i}}}{2\sqrt{r_i}} - \frac{r_w}{2(r_n + r_w - r_p)\sqrt{r_i}}\left(\sqrt{\pi} \cdot s_0 \cdot e^{\frac{r_n^2 - 8r_n r_i + r_p^2 - 2r_p r_w + 4r_p r_i + r_w^2 - 4r_w r_i + 2r_i^2}{4r_i}}\right), \tag{3.31}$$

$$n = \frac{r_w}{2(r_n + r_w - r_p)\sqrt{r_i}} \cdot s_0 \sqrt{\pi} e^{\frac{(r_i - r_p + r_w)^2}{2r_i}}, \tag{3.32}$$

$$\lambda = -r_n + r_p - r_w. \tag{3.33}$$

Ranije smo već naveli da fond započinje u trenutku $t = 0$ s početnim ulaganjem K koje ulažu početni investitori i s ulogom K_0 koji uloži vlasnik fonda kao početni kapital. Dakle, iznos koji je dostupan u fondu u trenutku $t = 0$ jednak je $C = K + K_0$, odnosno, možemo reći da je $S(0) = C$. Dakle, promotrimo li jednadžbu (3.28) u trenutku $t = 0$, jednostavno ćemo moći odrediti nepoznanicu Θ. S obzirom na to, vrijedit će:

$$\Theta = C - A(0) - B(0), \tag{3.34}$$

pri čemu su $A(0)$ i $B(0)$ vrijednosti funkcija $A(t)$ i $B(t)$ u trenutku $t = 0$.

3.3 Teorem 1 - osnova izgradnje modela

Kako bismo Propoziciju 1. primijenili na parametre a, b, c, d i α potrebno je definirati sljedeće parametre:

$$\rho := r_i - r_p, \qquad \sigma_K := \frac{K r_w}{s_0} - 1. \tag{3.35}$$

Također, bit će nam potrebna i funkcija $C_1(K)$

$$C_1(K) := \frac{s_0(r_n - r_p) + K r_w (r_i - r_n)}{(r_i - r_n)(r_n - r_p + r_w)} \tag{3.36}$$

kojom izražavamo kritičnu vrijednost za C iznad koje α definiran jednadžbom (3.19) postaje pozitivan.
Zatim, definiramo i funkciju

$$Z(K) := \frac{\frac{K}{s_0}(r_w + r_i - r_p) - 1}{(r_i - r_p)/r_w}, \tag{3.37}$$

za koju vrijedi da je $Z(K) = 1$ ako i samo ako je $K = s_0/r_w$ (tj. $\sigma_K = 0$).

Ekstrem m jednadžbe (3.21) i odgovarajući t_c jednadžbe (3.22) dani su sljedećim izrazima:

$$m = s_0 \frac{(r_p - r_i) Z(K)^{\frac{r_n - r_i}{r_p - r_i - r_w}}}{(r_i - r_n)(r_n - r_p + r_w)} + C - C_1(K), \tag{3.38}$$

$$t_c = \frac{\ln(Z(K))}{r_w + r_i - r_p}. \tag{3.39}$$

Nadalje, definirat ćemo funkciju $C_2(K)$ kao

$$C_2(K) = \begin{cases} C_1(K) + s_0 \frac{(r_p - r_i) Z(K)^{\frac{r_n - r_i}{r_p - r_i - r_w}}}{(r_i - r_n)(r_n - r_p + r_w)} & , K \geq \frac{s_0}{r_w} \\ 0 & , K < \frac{s_0}{r_w}. \end{cases} \tag{3.40}$$

Nultočka funkcije $C_2(K)$ definirane izrazom (3.40) označava kritičnu vrijednost za C iznad koje ekstrem m definiran jednadžbom (3.38) postaje pozitivan.

Koristeći ranije navedenu notaciju, sljedeći teorem govori nam o broju pozitivnih nultočki jednadžbe (3.14) kojom je definiran $S(t)$.

Teorem 1. *Razmatramo rješenje $S(t)$ jednadžbe (3.14) definirano nenegativnim parametrima K, C, s_0, r_i, r_w, r_p i r_n. Broj pozitivnih nultočki od $S(t)$ definiran je kao funkcija predznaka parametra ρ (Vidi Sliku 3). U ovisnosti o predznaku parametra ρ, promotrit ćemo slučajeve B_1 i B_2:*

B_1 : $\rho > 0$ *(tj. $r_i > r_p$)*

- $B_{1,1}$: *Ako je $\sigma_K < 0$, (tj. $K < \frac{s_0}{r_w}$), onda $S(t)$ nema pozitivnih nultočki.*
- $B_{1,2}$: *Ako je $\sigma_K > 0$, (tj. $K > \frac{s_0}{r_w}$). S_t onda u ovisnosti o r_n, r_i i r_p razlikujemo sljedeće 3 moguće situacije:*

Prvo razmatramo slučaj u kojem je $r_n > r_i$:

- *Ako je $C > C_2(K)$ (što uključuje i slučaj kada je $C = K$), tada $S(t)$ nema pozitivnih nultočki za $t > 0$ pa funkcija $S(t)$ ostaje pozitivna za sve $t > 0$.*
- *Ako je $C_1(K) < C < C_2(K)$ onda funkcija $S(t)$ ima jednu pozitivnu nultočku sa svake strane od t_c.*
- *Ako je $C < C_1(K)$ onda funkcija $S(t)$ ima jednu pozitivnu nultočku.*

Kada je $r_p < r_n < r_i$ onda vrijedi:

- *Ako je $C < C_2(K)$ onda funkcija $S(t)$ ima jednu pozitivnu nultočku (što uključuje i slučaj kada je $C = K$).*
- *Ako je $C > C_2(K)$ onda funkcija $S(t)$ nema pozitivnih nultočki.*

Kada je $r_n < r_p$:

- *Ako je $C < C_2(K)$ onda funkcija $S(t)$ ima jednu pozitivnu nultočku (što uključuje i slučaj kada je $C = K$ ako je K veći od fiksne točke $K^\star = C_2(K^\star)$ funkcije $C_2(K)$).*
- *Ako je $C > C_2(K)$ onda funkcija $S(t)$ nema pozitivnih nultočki (što uključuje i slučaj kada je $C = K$ ako je K manji od fiksne točke $K^\star$).*

B_2 : $\rho < 0$ *(tj. $r_i < r_p$).*

$B_{2,1}$: *$r_w < r_p - r_n$ ili $r_n < r_i$. U ovom podslučaju funkcija $S(t)$ ima jednu pozitivnu nultočku.*

$B_{2,2}$: *$r_w > r_p - r_n$ i $r_n > r_i$.*

- *Ako je $C > C_1(K)$ (što uključuje i slučaj u kojem je $C = K$ ako je $r_n > r_p$), funkcija $S(t)$ nema pozitivnih nultočki.*
- *Ako je $C < C_1(K)$ (što uključuje i slučaj u kojem je $C = K$ ako je $r_n < r_p$) onda funkcija $S(t)$ ima jednu pozitivnu nultočku.*

Dokaz. Dokaz teorema temelji se na Propoziciji 1. čija je primjena povezana sa sljedećim opažanjima:

1. Parametar α jednadžbe (3.19) pozitivan je ako i samo ako vrijedi $C > C_1(K)$.
2. Ekstrem m jednadžbe (3.21) pozitivan je ako i samo ako vrijedi $C > C_2(K)$.
3. Razlika $C_2(K) - C_1(K)$ ima isti predznak kao $\frac{(r_p - r_i)}{(r_i - r_n)(r_n - r_p + r_w)}$.
4. Za $\rho > 0$ funkcija $C_2(K)$ je neopadajuća funkcija od $K > 0$ koja nema pozitivnu fiksnu točku ako je $r_n > r_p$ i ima jednu pozitivnu fiksnu točku $K^\star = C_2(K^\star)$ ako je $r_n < r_p$.
5. Parametar σ_K i derivacija

$$g'(0, a, b, c, d, \alpha) = ab + cd = s_0 - Kr_w = -s_0\sigma_K \tag{3.41}$$

jednadžbe $g(t, a, b, c, d, \alpha)$ za $t = 0$ imaju suprotne predznake.

Uzmemo li u obzir a, b, c, d, α definirane jednadžbama (3.15)-(3.19), izraze za U i V definirane jednadžbama (3.20) možemo prikazati kao:

$$U = \frac{\rho}{-r_w\sigma_K - (\sigma_K + 1)\rho}, \qquad V = \frac{\sigma_K}{-r_w\sigma_K - (\sigma_K + 1)\rho} \tag{3.42}$$

Također, U i V su oba negativni ako i samo ako ρ i σ_K imaju jednake predznake (zato što je $\sigma_K + 1 > 0$).
U slučaju B_1 ($\rho > 0$) razmatramo dva podslučaja:

$B_{1,1}$: Ako je $\sigma_K < 0$, onda uvjet (3.20) nije zadovoljen i derivacija funkcije $g(t, a, b, c, d, \alpha)$ u $t = 0$ je pozitivna. Rezultat slijedi iz dijela $A4$ Propozicije 1.

$B_{1,2}$: Ako je $\sigma_K > 0$, onda je uvjet (3.20) zadovoljen i derivacija funkcije $g(t, a, b, c, d, \alpha)$ u $t = 0$ je negativna. Rezultat slijedi iz dijela $A1$ Propozicije 1.

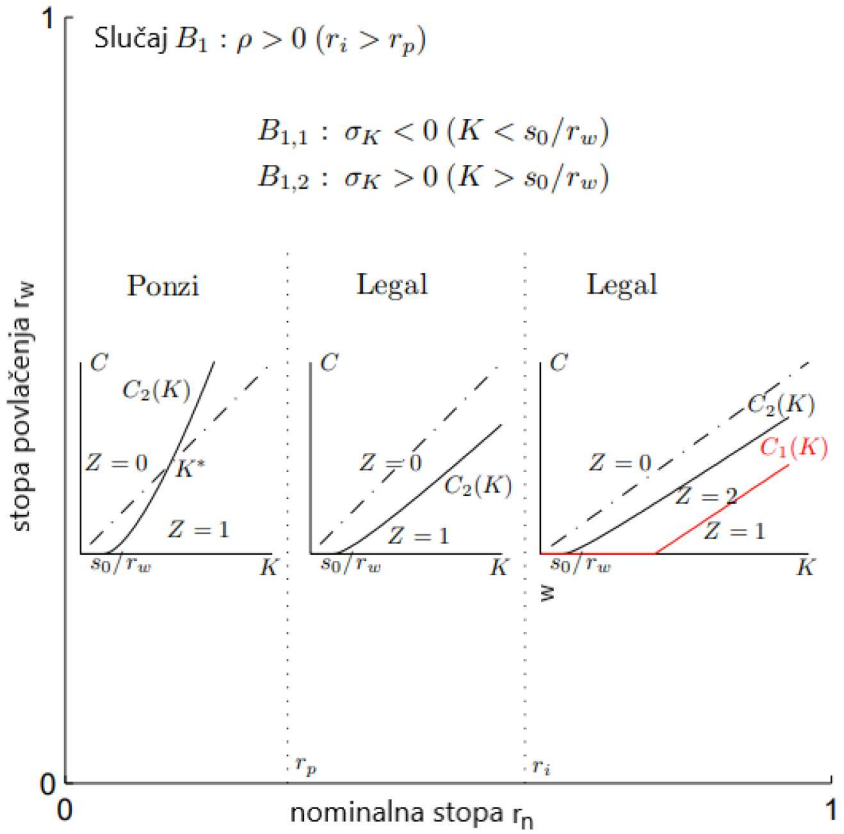
Za oba podslučaja $B_{2,1}$ i $B_{2,2}$ slučaja B_2 dokaz se oslanja na predznak od σ_K.

Naime, ako je $\sigma_K < 0$, onda je uvjet (3.20) zadovoljen i derivacija funkcije $g(t, a, b, c, d, \alpha)$ u t_0 je pozitivna. Podslučajevi $B_{2,1}$ i $B_{2,2}$ odgovaraju ako su $b = r_p - r_n - r_w$ ili $d = r_i - r_n$ pozitivni, odnosno, b i d negativni. Rezultati slijede iz dijela $A2$ Propozicije 1.

S druge strane, ako je $\sigma_K > 0$, onda uvjet (3.20) nije zadovoljen i derivacija funkcije $g(t, a, b, c, d, \alpha)$ u $t = 0$ je negativna. Rezultati slijede iz dijela $A3$ Propozicije 1. □

Teorem 1 raščlanjuje rezultate ovisno o tome je li stopa novih ulaganja r_i veća ili manja od obećane stope povrata r_p. Napomenimo da su Slika 3 i Slika 4 koje ćemo u nastavku koristiti za interpretaciju teorema preuzete iz [1].

Prvo ćemo razmotriti slučaj B_1 iz Teorema 1 u kojem je stopa ulaganja u fond r_i veća od obećane stope povrata r_p. Promotrimo sljedeću sliku na kojoj je prikazan slučaj B_1.



Slika 3: Skica slučaja B_1 iz Teorema 1

Napomena 1. *Vrijednost Z na Slici 3 označava broj nultočki funkcije $S(t)$ i za oba slučaja B_1 i B_2 iz Teorema 1 vrijednost Z zadana je u faznom prostoru (r_n, r_w).*

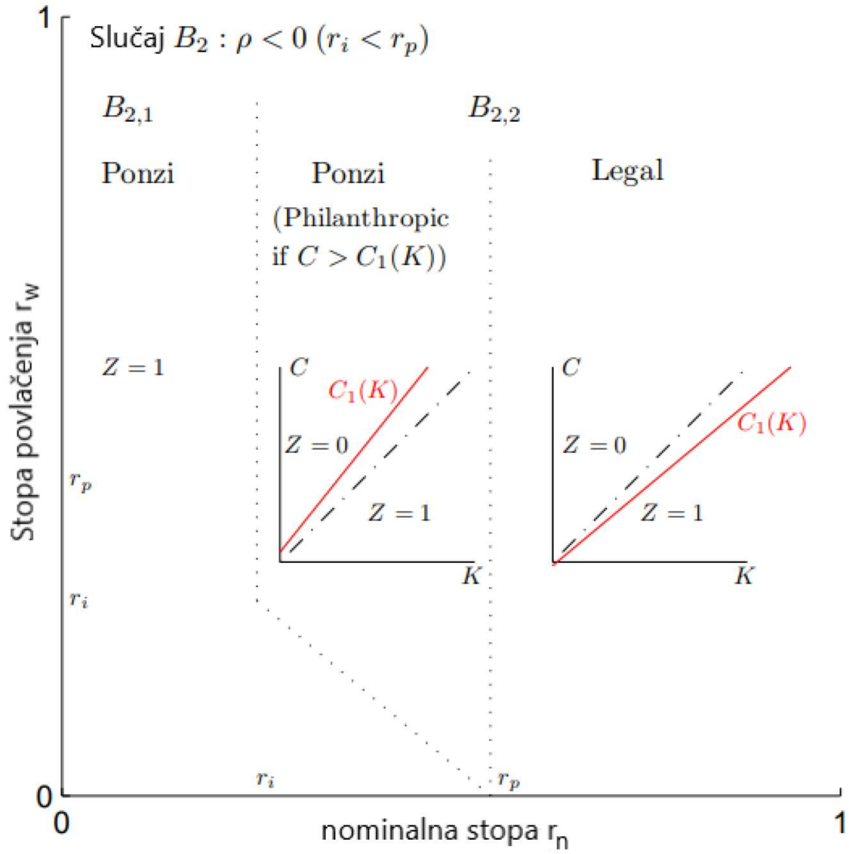
Možemo uočiti kako je na Slici 3 slučaj B_1 podijeljen u 3 dijela. U svakom od ta tri dijela slučaja B_1 broj Z zadan je u faznom prostoru (K,C).

Prvi grafikon na Slici 3 ekvivalentan je podslučaju $B_{1,1}$ u kojem je $K < s_0/r_w$ i pokazuje što se događa u Ponzijevoj shemi ($r_n < r_p$) kada je stopa novih ulaganja r_i veća od obećane stope povrata r_p. Grafikon koji promatramo možemo podijeliti na dio u kojemu funkcija $S(t)$ ima jednu pozitivnu nultočku i na dio u kojemu funkcija $S(t)$ nema pozitivnih nultočki. Za promatrani podslučaj fond je solventan ($Z = 0$) bez obzira na početno stanje C u fondu. Dakle, solventnost fonda ovisi samo o početnom depozitu K kojeg ulažu investitori. Naime, fond će biti solventan kada je početno stanje fonda jednako početnom depozitu kojeg ulažu investitori ($C = K$) samo ako K nije prevelik, odnosno, ako je K manji od fiksne točke $K^\star$. S druge strane, ako je $C = K$ i ako je K veći od fiksne točke $K^{\star}$, tada kombinirana povlačenja starijih i novijih ulagača mogu uzrokovati propadanje fonda.

Druga dva grafikona (srednji i desni grafikon) na Slici 3 prikazuju podslučaj $B_{1,2}$ slučaja B_1 u kojem je $K > s_0/r_w$. Ta dva grafikona pokazuju kako fond ostaje solventan ($Z = 0$) ako početno stanje fonda C ostaje iznad $C_2(K)$. Također, vidljivo je da fond ostaje solventan i kada je $C = K$ jer je iscrtkana linija koja prikazuje taj slučaj iznad $C_2(K)$.

Na srednjem grafikonu za koji vrijedi da je nominalna stopa r_i veća od obećane stope r_p, a manja od stope ulaganja r_i vidimo kako fond propada ($Z = 1$) čim početno stanje fonda C padne ispod $C_2(K)$. S druge strane, na desnom grafikonu za koji je $r_n > r_i$ fond će propasti, ali će se nakon toga i oporaviti ($Z = 2$) ako C ne padne previše ispod $C_2(K)$. U suprotnom, ako C bude toliko mali da vrijedi $C < C_1(K)$, onda će fond sigurno propasti ($Z = 1$).

Na sljedećoj slici razmatramo slučaj B_2 Teorema 1 u kojem je stopa novih ulaganja r_i manja od obećane stope povrata r_p.



Slika 4: Skica slučaja B_2 iz Teorema 1

Razmotrimo najprije slučaj $B_{2,2}$ u kojem je $r_n > r_p$ (promatramo desni grafikon na Slici 4). Vidimo kako u toj situaciji fond ostaje solventan ako je početno stanje fonda C veće od $C_1(K)$ (tada je $Z = 0$). Uočimo kako to uključuje i slučaj u kojem je $C = K$ jer je iscrtkana linija iznad $C_1(K)$. U suprotnom, doći će do propadanja fonda ($Z = 1$).

U podslučaju $B_{2,2}$ u kojem je $r_i < r_n < r_p$ i $r_w > r_p - r_n$ (srednji grafikon na slici 4) fond ne raste prebrzo i solventan je ako je $C > C_1(K)$ pri čemu je $C_1(K)$ i sam veći od K. To znači da unatoč tome što su stopa ulaganja r_i i nominalna stopa r_n manje od r_p, svejedno je Ponzijeva shema solventna ako je upravitelj fonda u mogućnosti dodati na početni kapital K koji ulažu investitori i unutarnje ulaganje K_0 koje najmanje iznosi $C_1 - K$. Kasnije ćemo vidjeti da iznos $C_1 - K$ može biti poprilično velik pa samim time shema može biti neisplativa za upravitelja fonda, a u toj situaciji kažemo da se radi o Filantropskoj Ponzijevoj shemi. Bitno je naglasiti da takav scenarij znatno ovisi o stopi ulaganja r_i koja ostaje manja od nominalne kamatne stope r_n. Također, uočimo da u suprotnom, ako upravitelj fonda ne ulaže dovoljno, odnosno ako je $C < C_1(K)$, onda će fond zasigurno propasti ($Z = 1$).

Uočimo sada kako je u podslučaju $B_{2,1}$ u kojem je $r_n < r_i$ broj nultočki funkcije $S(t)$ jednak 1 ($Z = 1$) bez obzira na vrijednosti C i K. Drugim riječima, u ovom podslučaju fond raste prebrzo, no isto tako brzo i propadne. Obratimo sada pažnju na iscrtkani trokutasti dio koji pripada promatranom podslučaju. Naime, vidimo kako se isti scenarij odvija i u situaciji kada je $r_w < r_p - r_n$ pri čemu je r_n između r_i i r_p.

Dakle, ova analiza pokazuje kako je uloga r_w dvosmislena ako se r_n nalazi između r_i i r_p. Iako se situacija u kojoj je r_w mali ($r_w < r_p - r_n$) (slučaj $B_{2,1}$)) može činiti poželjnom jer će fond dugoročno više rasti, ipak će naposlijetku doći do propadanja fonda. S druge strane, veliki r_w ($r_w > r_p - r_n$, slučaj $B_{2,2}$) može izgledati opasno, ali iscrpljuje fond i dugoročno dovodi do manjih povlačenja novca iz fonda. U konačnici, fond je solventan ako je početni iznos novca C dovoljno velik da apsorbira velika ranija povlačenja novca iz fonda (slučaj tzv. filantropske Ponzijeve sheme).

3.4 Odnos stvarnog i obećanog iznosa u fondu

Kako bismo uspjeli opisati dinamiku fonda koja uključuje i iznenadne promjene parametara u nekom trenutku $t^\star$, moramo najprije eksplicitno izraziti parametre označavajući rješenje diferencijalne jednadžbe (3.14) sa $S(t, K, C, s_0, r_i, r_w, r_p, r_n)$. U tu svrhu, uvodimo stvarne i obećane iznose u fondu, u oznaci $S_a(t)$ i $S_p(t)$.

Stvarni iznos u fondu, u oznaci $S_a(t)$, definiran na temelju nominalne stope prinosa r_n i početnog iznosa C u fondu, je onaj koji je dan u jednadžbi (3.14) i eksplicitno prikazan sljedećim izrazom:

$$S_a(t) = S(t, K, C, s_0, r_i, r_w, r_p, r_n) = \frac{r_w[s_0 - (r_i - r_p + r_w)K]}{(r_p - r_n - r_w)(r_i - r_p + r_w)} e^{(r_p - r_w)t}$$
$$+ \frac{s_0(r_i - r_p)}{(r_i - r_n)(r_i - r_p + r_w)} e^{r_i t} + \Big(C - \frac{s_0(r_n - r_p) + K r_w (r_i - r_n)}{(r_i - r_n)(r_n - r_p + r_w)}\Big) e^{r_n t}. \tag{3.43}$$

Iznos $S_p(t)$ je obećani iznos i on pripada investitorima. Taj obećani iznos $S_p(t)$ dobiva se tako da u prethodnoj jednadžbi (3.43) postavimo da je nominalna kamatna stopa r_n jednaka obećanoj kamatnoj stopi povrata r_p te izjednačimo početno stanje fonda C s početnim depozitom K koji ulažu investitori. Pod tim uvjetima, treći izraz u jednadžbi (3.43) postaje jednak nuli pa je u konačnici jednadžba za $S_p(t)$ dana sljedećim izrazom:

$$S_p(t) = S(t, K, K, s_0, r_i, r_w, r_p, r_p) = \frac{s_0}{r_p - r_i - r_w}(e^{(r_p - r_w)t} - e^{r_i t}) + K e^{(r_p - r_w)t}. \tag{3.44}$$

Za razliku od stvarnog iznosa u fondu $S_a(t)$, obećani iznos $S_p(t)$ je uvijek pozitivan, bez obzira na vrijednosti parametara.

3.5 Promjena vrijednosti parametara

Općenito, bilo bi korisno da možemo opisati buduću dinamiku fonda ukoliko u nekom budućem trenutku $t^\star$ dođe do iznenadne diskontinuirane promjene vrijednosti parametara s_0, r_i, r_w, r_p i r_n te oni promjenom vrijednosti postanu s_0', r_i', r_w', r_p' i r_n'. Primjerice, pretpostavka kako će količina novih ulaganja eksponencijalno rasti nije dugoročno realno ostvariva pa želimo ispitati što bi se dogodilo ako bi stopa novih ulaganja r_i naglo pala na nulu. To znači da pretpostavljamo da nema novih ulaganja, odnosno da protok novih ulaganja postaje konstantan. Dakle, u toj situaciji dolazi do promjene vrijednosti parametra r_i.

Sa C' i K' označavat ćemo stvarni i obećani iznos u fondu u trenutku $t^\star$:

$$C' = S_a(t^\star) = S(t^\star, K, C, s_0, r_i, r_w, r_p, r_n) \tag{3.45}$$

i

$$K' = S_p(t^\star) = S(t^\star, K, K, s_0, r_i, r_w, r_p, r_p). \tag{3.46}$$

Tako definirani C' i K' zapravo predstavljaju novo početno stanje i novo početno ulaganje koje započinje u trenutku $t^\star$. Stvarni i obećani iznos u bilo kojem trenutku t sada možemo zapisati na sljedeći način:

$$S_a(t) = \begin{cases} S(t, K, C, s_0, r_i, r_w, r_p, r_n) & , t \leq t^\star \\ S(t - t^\star, K', C', s_0', r_i', r_w', r_p', r_n') & , t > t^\star \end{cases}$$

i

$$S_p(t) = \begin{cases} S(t, K, K, s_0, r_i, r_w, r_p, r_p) & , t \leq t^\star \\ S(t - t^\star, K', K', s_0', r_i', r_w', r_p', r_p') & , t > t^\star \ . \end{cases}$$

Na ovaj način možemo opisati dinamiku fonda i u situacijama u kojima imamo više diskontinuiranih promjena parametara u različitim trenutcima.

4 Primjena matematičkog modela Ponzijeve sheme

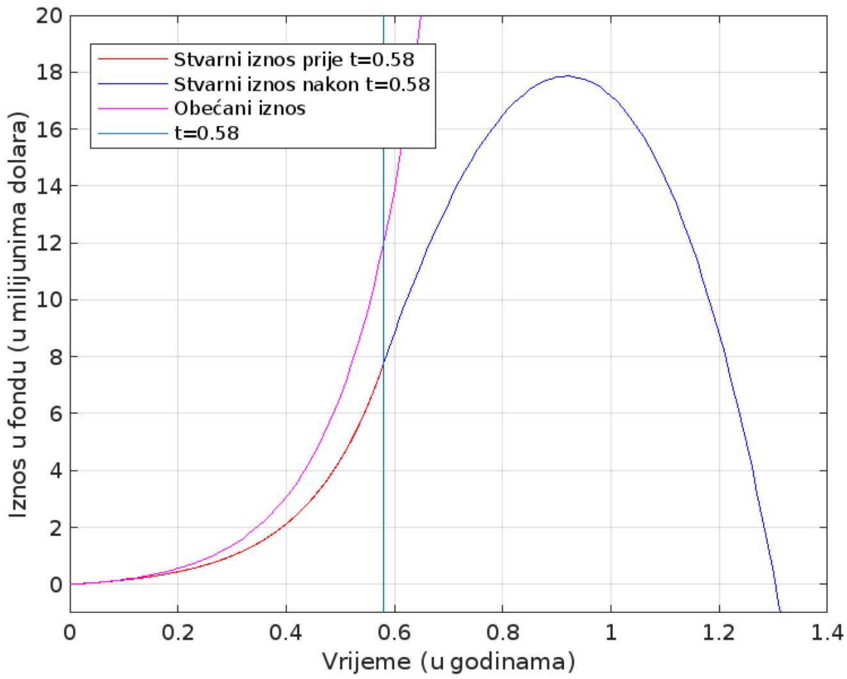
U ovom poglavlju primijenit ćemo konstruirani model na originalnoj i filantropskoj Ponzijevoj shemi. U model ćemo pokušati uklopiti dostupne podatke o provedenim Ponzijevim shemama kroz povijest kako bismo proučili tijek i iznos novih ulaganja.

4.1 Primjena modela na originalnoj Ponzijevoj shemi

Sada ćemo primjenom ranije konstruiranog modela vidjeti što bi se dogodilo s Ponzijevom shemom da Charles Ponzi nije bio uhićen i da je shema nastavila funkcionirati svojim tokom. Zaključci u ovom potpoglavlju temeljeni su na podacima dostupnima o originalnoj Ponzijevoj shemi. Iz ranijih diskusija jasno je da su Ponzijeve sheme nakon određenog trenutka osuđene na propast, a to se dogodi kada protok novih ulaganja postane konstantan ($r_i = 0$) u nekom trenutku $t^\star$.

Prisjetimo se, Charles Ponzi je u svojoj shemi izdavao obveznice koje su nudile dobit od 100% ukoliko se drže 90 dana. Uočimo, 90 dana je približno jednako 25% jedne godine, no model ćemo nadalje razraditi pod pretpostavkom da je 90 dana točno 25% jedne godine. Iz tog razloga, udvostručenje uloženog novca u 90 dana prevodimo u obećanu godišnju kamatnu stopu povrata r_p koja, po ranije konstruiranom modelu, mora zadovoljiti jednadžbu $e^{0.25 r_p} = 2$, odnosno, vrijedi da je $r_p = 2.773$.

Na sljedećoj slici možemo vidjeti grafičku simulaciju originalne Ponzijeve sheme, odnosno prikaze stvarnog i obećanog iznosa $S_a(t)$ i $S_p(t)$ u Ponzijevom fondu bazirane na dostupnim podatcima za vrijeme trajanja fonda od trenutka $t = 0$ (26. prosinac 1919. godine) do $t^\star = 0.58$ (26. srpanj 1920. godine).



Slika 5: Simulacija originalne Ponzijeve sheme

Na Slici 5 vremenski trenutak 0.58 predstavlja trenutak u kojem je protok novih ulaganja u fond postao konstantan i u tom su trenutku nova ulaganja iznosila 200.000 \$ na dan. Dakle, hipotetske trajektorije nakon trenutka $t^\star = 0.58$ prikazuju učinak novih ulaganja pri čemu je stopa novih ulaganja konstantna. Sa slike je vidljivo kako će u toj situaciji fond propasti oko 9 mjeseci kasnije (u trenutku $t = 1.30$) i u tom trenutku će stvarni iznos u fondu biti jednak 0, tj. $S_a(1.30) = 0$. Također, poznato je da je Ponzi bio bez novca kada je započinjao sa shemom i nema nikakvih izvještaja o njegovom početnom ulaganju pa sa sigurnošću možemo postaviti da je $C = K = 0$.

Početnu visinu depozita s_0 i stopu ulaganja r_i koristimo kako bismo izračunali priljev novca u fond u trenutku t, $s(t) = s_0 e^{r_i t}$, koji možemo grubo procijeniti na temelju podataka o uplaćenim depozitima u razdoblju između prvog i posljednjeg dana sheme. Samo posljednjeg dana sheme Ponzi je prikupio 200.000 \$, a ukupno u razdoblju od 7 mjeseci u fond je uloženo 10 milijuna dolara depozita.

Uzmemo li jednu godinu kao vremensku jedinicu, a milijun dolara kao novčanu jedinicu i pretpostavimo li eksponencijalni rast, onda parametri s_0 i r_i moraju zadovoljavati:

$$s_0 e^{0.58 r_i} = 0.2 \times 365 \qquad \text{i} \qquad s_0 \left(\frac{e0.58 r_i - 1}{r_i} \right) = 10, \tag{4.1}$$

iz čega slijedi:

$$s_0 = 1.130 \qquad \text{i} \qquad r_i = 7.187. \tag{4.2}$$

Podijelimo li sada dobivenu vrijednost s_0 s 365 dobit ćemo prosječni protok ulaganja koji iznosi 3.095 \$ dnevno. Eksponencijalni rast od 3.095 \$ na 200.000 \$ dnevno čini se vjerojatnim s obzirom na to kako je i sam Ponzi opisivao: *"Ogroman niz investitora, protezao se od Gradske vijećnice, preko Avenije City Hall i Školske ulice, sve do ulaza u zgradu Niles, uz stepenice, duž hodnika, sve do mog ureda! Nada i pohlepa mogle su se pročitati sa svačijeg lica i iz snopova novca kojim su nervozno mahale tisuće ispruženih šaka. Za gomilu koja se okupila, ja sam bio ostvarenje njihovih snova, 'Čarobnjak' koji je preko noći mogao pretvoriti siromaha u milijunaša!"* (citat iz [5]).

Stvarna dobit koju je Ponzi uspio ostvariti trgovanjem međunarodnim poštanskim kuponima bila je zanemariva. Stoga, proizvoljno odabiremo nominalnu kamatnu stopu $r_n = 0.01$, iako bismo isto tako r_n mogli postaviti i na nulu. Zaista, utjecaj od jedan ili čak pet posto nominalnog povrata zanemariv je u usporedbi s novim investicijama koje pristižu po stopi ulaganja $r_i = 7.187$.

Najneizvjesnija je stopa povlačenja uloženog novca r_w po kojoj su investitori unovčili svoje obveznice. Poznato je samo kako je manji dio ulagača otkupio svoje obveznice nakon isteka roka od 90 dana, a većina ulagača je reinvestirala dobitak uz dodatni ulog kako bi njihova zarada bila još veća. Međutim, grubu procjenu stope povlačenja r_w možemo dobiti na temelju informacije poznate s Ponzijevog suđenja. Naime, Ponzi je otkupio 5 milijuna dolara svojih obveznica u srpnju 1920. godine pri čemu je još 7 milijuna dolara ostalo u fondu. Pretpostavit ćemo da te brojke predstavljaju obećani iznos akumuliran do vremena $t^\star = 0.58$, tj:

$$S_p(0.58) = 12. \tag{4.3}$$

Uz poznate vrijednosti ostalih parametara, numeričkim rješavanjem jednadžbe (3.44) lako dođemo do vrijednosti $r_w = 1.47$. S obzirom na prethodnu diskusiju, u sljedećoj tablici nalaze se vrijednosti parametara za model originalne Ponzijeve sheme.

	K	C	s_0	r_i	r_w	r_p	r_n
Ponzijeva shema ($t \leq 0,58$)	0	0	1.130	7.187	1.47	2.773	0.01
Ponzijeva shema ($t > 0,58$)	12	7.76	73	0	1.47	2.773	0.01

Tablica 1: Vrijednosti parametara modela originalne Ponzijeve sheme

Uzmemo li u obzir vrijednosti parametara iz prethodne tablice, onda za odgovarajući stvarni iznos u fondu u trenutku $t^\star = 0.58$ vrijedi $S_a(0.58) = 7.763$ milijuna dolara. Nakon otkupa ranije spomenutih 5 milijuna dolara za vrijeme suđenja, Ponziju je ostalo 2.763 milijuna dolara, što je dosljedno njegovoj prijavljenoj imovini od 2 milijuna dolara ako pretpostavimo da je do trenutka suđenja potrošio 0.763 milijuna dolara.

Na Slici 3 možemo vidjeti da uz parametre koji zadovoljavaju $r_n < r_p < r_i$ i $K = C = 0$ shema odgovara podslučaju $B_{1,1}$ slučaja B_1 iz Teorema 1. U toj situaciji funkcija $S_a(t)$ nema nultočku i nastavlja eksponencijalno rasti do stope ulaganja r_i sve dok investitori ulažu novac po istoj stopi ulaganja, tj. sve dok stopa ulaganja r_i ostaje nepromijenjena.

Slika 5 prikazuje stvarne i obećane iznose u Ponzijevom fondu do trenutka $t^\star = 0.58$ na temelju procijenjenih vrijednosti parametara prikazanih u Tablici 1. Osnovna pretpostavka je da nakon trenutka $t^\star = 0.58$ protok novih ulaganja prestane rasti i ostane jednak iznosu od 200.000 \$ na dan dostignutih u trenutku $t^\star = 0.58$. To znači da je u tom slučaju godišnji iznos novih ulaganja jednak $s_0' = 200.000 \times 365 = 73$ milijuna dolara, pri čemu se r_i mijenja i postaje $r_i' = 0$. Vrijednosti svih ostalih parametara nakon trenutka $t^\star = 0.58$ ostale su nepromijenjene ($r_n' = 0.01$, $r_p' = 2.773$, $r_w' = 1.47$). Uočimo, sada za vrijednosti parametara vrijedi:

$$r_i' = 0 < r_n' = 0.01 < r_p' = 2.773$$

i

$$r_w' = 1.47 < r_p' - r_n' = 2.763.$$

Dakle, slučaj koji opisujemo ekvivalentan je podslučaju $B_{2,1}$ slučaja B_2 iz Teorema 1. Kao što je i očekivano, u toj situaciji fond bi propao, a stvarni iznos u fondu $S_a(t)$ dosegnuo bi nulu otprilike devet mjeseci nakon trenutka $t^\star = 0.58$, tj. $S_a(1.30) = 0$, dok bi obećani iznos $S_p(t)$ nastavio eksponencijalno rasti po stopi $r_p' - r_w' = 1.303$.

4.2 Primjena modela na filantropskoj Ponzijevoj shemi

Ranije smo već primijetili da ako je $r_w > r_p - r_n$ i $r_i < r_n < r_p$, tada je za $C > C_1(K)$ Ponzijeva shema solventna. Ovom scenariju dali smo naziv 'filantropska' Ponzijeva shema. Naime, uz $C - C_1(K) > 0$, stopa rasta stvarnog iznosa $S_a(t)$ je r_n jer je zadnji član $C - C_1(K)e^{r_n t}$ jednadžbe (3.43) dominantan nad svim ostalim eksponencijalnim članovima te jednadžbe. Nadalje, obećani iznos $S_p(t)$ definiran jednadžbom (3.44) raste pri stopi $r_p - r_w$ koja je manja od nominalne stope r_n. Dobit fonda u trenutku t definirana je s $S_a(t) - S_p(t)$ i za veliki t imamo:

$$S_a(t) \sim S_a(t) - S_p(t) \sim (C - C_1(K))e^{r_n t}, \tag{4.4}$$

pri čemu izraz $x(t) \sim y(t)$ znači da je

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t)}{y(t)} = 1.$$

Ako je početni depozit $K = 0$, tada je početno stanje fonda C jednako 'unutarnjem' ulaganju K_0 pa onda jednadžba (4.4) postaje:

$$S_a(t) \sim S_a(t) - S_p(t) \sim (C - C_1(0))e^{r_n t} = \left(C - \frac{s_0(r_p - r_n)}{(r_n - r_i)(r_n - r_p + r_w)} \right) e^{r_n t}, \tag{4.5}$$

pri čemu C mora biti veći od $C_1(0)$. Stvarni iznos $S_a(t)$ i dobit $S_a(t) - S_p(t)$ rastu asimptotski eksponencijalnom brzinom pri nominalnoj stopi r_n, ali su oboje manji od $Ce^{r_n t}$, donosno od dobiti koju je upravitelj fonda mogao ostvariti ulaganjem iznosa C po nominalnoj kamatnoj stopi r_n. Upravo to nam pokazuje kako u filantropskoj Ponzijevoj shemi solventnost ovisi o upravitelju filantropskog fonda koji je spreman uložiti značajno velik početni iznos i dati dio svoje dobiti kako bi fond ostao solventan. Na sljedećem primjeru koji je preuzet iz [3] vidjet ćemo jedan oblik filantropske Ponzijeve sheme.

Primjer 1. *Na ovom primjeru vidjet ćemo koliko veliko mora biti početno ulaganje C upravitelja fonda ukoliko upravitelj nudi povrat od 15% investitorima koji u fond godišnje doprinesu milijun dolara te kontinuirano povlače 12% svog akumuliranog kapitala ($r_p = 0.15$, $s_0 = 1$, $r_i = 0$, $r_w = 0.12$). Pretpostavljamo da upravitelj realno može zaraditi 4%, odnosno da je $r_n = 0.04$. Također, pretpostavit ćemo da promatrani fond posluje bez ikakvih početnih depozita ulagača, tj. da je $K = 0$. Svi parametri koje smo dosad opisali u ovom primjeru sažeti su u sljedećoj tablici:*

	K	C	s_0	r_i	r_w	r_p	r_n
Filantropska Ponzijeva shema	0	275	1	0	0.12	0.15	0.04

Tablica 2: Vrijednosti parametara modela

Uvrstimo li parametre definirane Tablicom 2 u jednadžbu (3.36) dolazimo do zaključka da minimalno ulaganje C koje upravitelj fonda treba uložiti kako bi fond ostao solventan iznosi $C_1(0) = 275$ milijuna dolara.

Iako početno ulaganje koje u ovom primjeru iznosi 275 milijuna dolara za fond koji raste za samo *milijun dolara godišnje upravitelju fonda nije baš najisplativija opcija, ovaj primjer proanalizirali smo samo kako bismo ilustrirali činjenicu da s dovoljno velikim početnim ulaganjem Ponzijeva shema može biti solventna i bez ili s vrlo malim rastom depozita i s nominalnom kamatnom stopom* r_n *manjom od obećane kamatne stope* r_p.

Ovaj primjer nam govori kako model koji smo konstruirali jasno pokazuje da Ponzijeva shema može biti održiva dugo vremena prije propadanja ili čak neograničeno dugo uz mali ili čak nikakav rast depozita ukoliko je upravitelj fonda spreman uložiti velik iznos početnog kapitala. Naravno, ta opcija je u stvarnom svijetu upravitelju fonda apsolutno neisplativa.

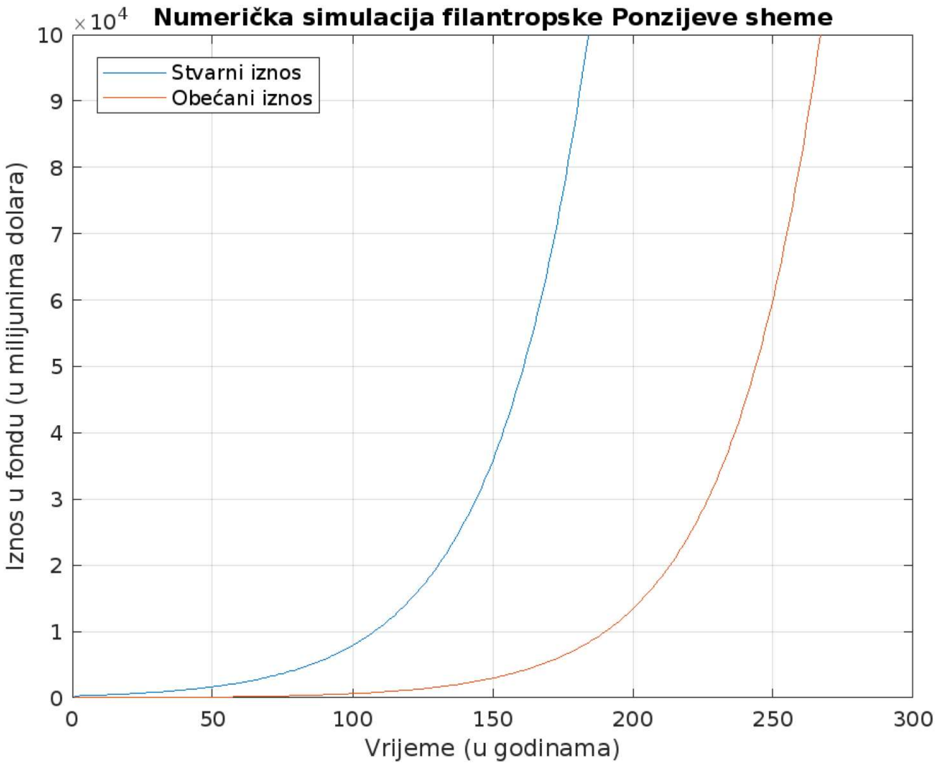
Iz Primjera 1 možemo zaključiti kako Ponzijeva shema pod određenim uvjetima može izgledati kao savršeno legalno i legitimno ulaganje. Konkretno, prethodni primjer filantropske Ponzijeve sheme možemo približno poistovjetiti sa sustavom fondova za mirovinsko osiguranje koji su najprije postojali u Americi (od 1889. godine) i Njemačkoj (od 1935. godine). Uprave mirovinskih osiguranja oštro opovrgavaju postojanje bilo kakve veze s Ponzijevom shemom navodeći kao glavnu razliku kratkotrajnu održivost Ponzijevih shema. Ipak, model koji smo konstruirali i primijenili na prethodni primjer ukazuju da Ponzijeva shema može trajati jako dugo prije samog propadanja ili čak neograničeno dugo bez obzira jesu li depoziti koji pristižu u fond mali ili čak nikakvi.

Naime, filantropska shema iz Primjera 1 oslanja se na veliko početno ulaganje koje možemo poistovjetiti s legalnim i neprofitnim ulaganjem u sustav državnog mirovinskog osiguranja namijenjenog osiguravanju fiksnih primanja rastućoj populaciji umirovljenika. U ovom slučaju solventnost fonda ovisi o stopi ulaganja koja mora ostati manja od nominalne stope povrata. Lako je zaključiti kako populacija umirovljenika ne smije rasti prebrzo da bi fond ostao solventan. Isto tako, u Republici Hrvatskoj se u posljednje vrijeme često spominje neodrživost mirovinskog sustava zbog prevelikog rasta broja umirovljenika. Naime, sredstvima poreznih obveznika isplaćuju se mirovine trenutnim umirovljenicima, no pitanje je hoće li u budućnosti biti dovoljno sredstava u mirovinskom fondu za isplatu tim istim poreznim obveznicima kada oni budu imali status umirovljenika. Ukoliko zaista dođe do takve situacije, to može biti potvrda kako su sustavi mirovinskih osiguranja zaista jedna vrsta Ponzijeve sheme.

5 Simulacija modela i rezultati

U ovom poglavlju prikazat ćemo simulaciju nekoliko Ponzijevih shema i vidjeti što se događa promjenom određenih parametara. Sve simulacije shema napravljene su u Matlabu.

Sljedeća slika prikazuje razvoj stvarne i obećane vrijednosti fonda za filantropsku Ponzijevu shemu opisanu u Primjeru 1. Slika je nastala na temelju parametara u Tablici 2, pri čemu je, radi jednostavnosti, parametar $C = 275$ izmijenjen na $C = 280$ milijuna dolara.



Slika 6: Numerička simulacija filantropske Ponzijeve sheme

Sa slike je vidljivo kako je, čak i dugoročno, u ovim uvjetima fond uvijek solventan. Početni unos kapitala koji izvrši upravitelj sheme (u ovom slučaju je to 280 milijuna dolara) dovoljna je garancija održivosti fonda. Uočimo kako u ovom slučaju stvarna vrijednost fonda raste brže od obećane vrijednosti.

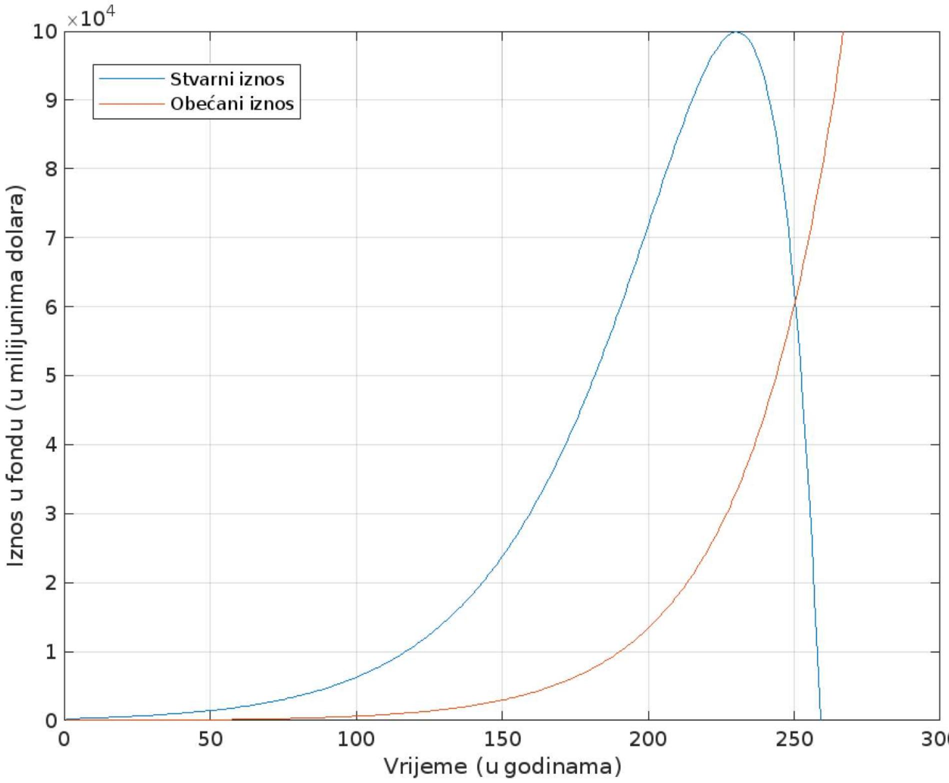
Kako bismo ilustrirali važnost iznosa $S(0)$ koji odgovara početnom ulaganju upravitelja fonda, pogledajmo Tablicu 3 u kojoj je prikazano vrijeme propadanja fonda za nekoliko različitih vrijednosti $S(0)$.

Iz Tablice 3 vidimo kako solventnost filantropskog fonda znatno ovisi o upravitelju fonda i o tome u kojoj je on mjeri voljan investirati početni kapital pritom smanjujući svoju moguću dobit. Uočimo, uz nepromijenjene parametre $K = 0$, $S_0 = 1$, $r_i = 0$, $r_n = 0.04$ i unutarnji kapital u iznosu od 280 ili 275 milijuna dolara koji uloži upravitelj fonda, fond nikada neće propasti. S druge strane, ako upravitelj fonda investira u fond iznos manji od praga održivosti fonda, koji u promatranom slučaju iznosi 275 milijuna dolara, fond će naposljetku ipak propasti. Primjerice, ako upravitelj uloži 265 milijuna dolara, fond će propasti tek nakon 369 godina ili ako uloži 100 milijuna dolara, fond će propasti nakon 80 godina održivosti.

$S(0)$	r_w	r_p	r_n	Vrijeme do propadanja fonda
280	0.12	0.15	0.04	NA
275	0.12	0.15	0.04	NA
265	0.12	0.15	0.04	369
245	0.12	0.15	0.04	259
175	0.12	0.15	0.04	138
100	0.12	0.15	0.04	80
245	0.12	0.155	0.04	146

Tablica 3: Numerička simulacija filantropske Ponzijeve sheme za koju je $S(0) = 280$

Situaciju u kojoj upravitelj fonda u fond uloži kao unutarnji kapital 245 milijuna dolara možemo vidjeti na Slici 7. Primijetimo kako krivulja koja opisuje obećani iznos neprestano raste, dok krivulja koja prikazuje stvarni iznos u fondu počinje padati, te je nakon 259 godina stvarni iznos u fondu jednak 0.



Slika 7: Numerička simulacija filantropske Ponzijeve sheme za koju je $S(0) = 245$

Nadalje, proširujemo analizu razmatrajući dvije nove situacije te promatramo njihov utjecaj na održivost sheme zbog promjena početnog uvjeta. Obratimo pažnju na sljedeća dva slučaja:

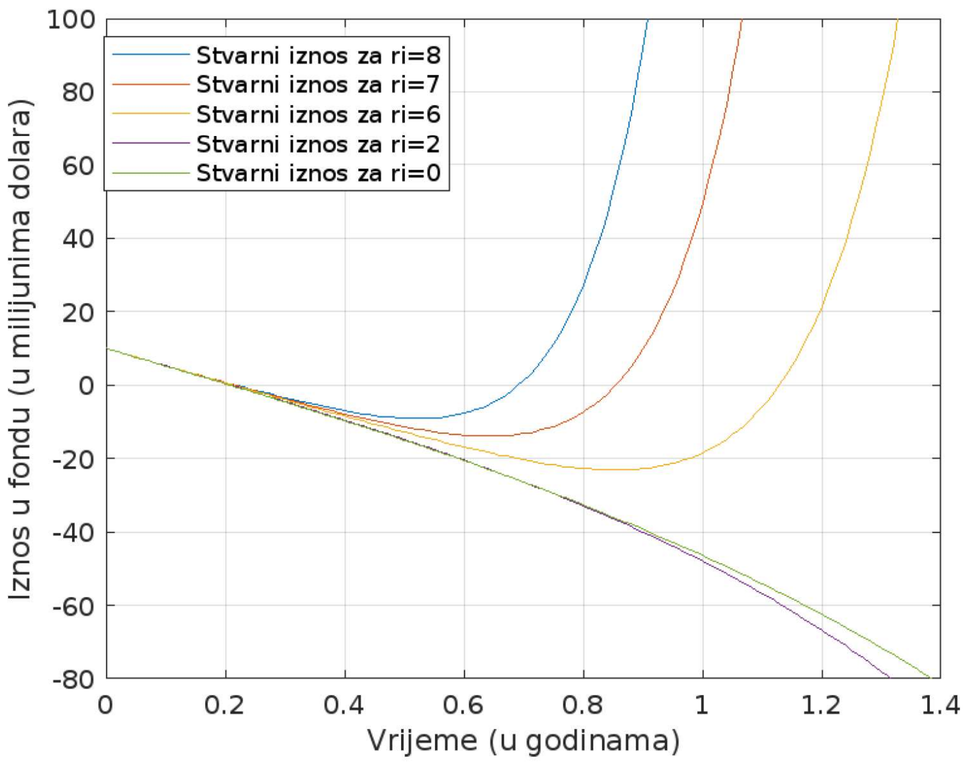
A) Za početak, zanima nas kakav učinak na održivost sheme ima promjena stope ulaganja r_i. Pretpostavimo da svi parametri, osim stope ulaganja r_i, ostaju nepromijenjeni kao što je prikazano u Tablici 4.

Slučaj	K	C	S_0	r_i	r_w	r_p	r_n	Trenutak propadanja	Trenutak oporavka
1	10	10	2	8	6	5	1	0.217	0.692
2	10	10	2	7	6	5	1	0.215	0.854
3	10	10	2	6	6	5	1	0.213	1.129
4	10	10	2	2	6	5	1	0.208	NA
5	10	10	2	0	6	5	1	0.207	NA

Tablica 4: Vrijednosti parametara sheme u slučaju A)

Sheme prikazane u prethodnoj tablici su vrlo zanimljive za analizu jer u početku vrijednost fonda opada, doseže svoj minimum, a nakon toga opet može rasti različitom brzinom, ovisno o visini stope ulaganja. Jasno je da je oporavak mnogo brži što je veća stopa ulaganja.

Na sljedećoj slici prikazana su kretanja stvarnih vrijednosti fondova u shemama čiji su parametri dani u prethodnoj tablici.



Slika 8: Numerička simulacija sheme A)

Iz Tablice 4 i sa Slike 8 također je vidljivo da u situaciji u kojoj je stopa ulaganja r_i manja od stope povrata r_w, fond se ne oporavlja te do propadanja fonda dolazi ubrzo nakon njegovog pokretanja. Iako je nezakonita ($r_p > r_n$), ova shema podržava ideju da se održivost same sheme može održati odgovarajućim odnosom između stope povlačenja novca iz fonda i stope ulaganja novca u fond.

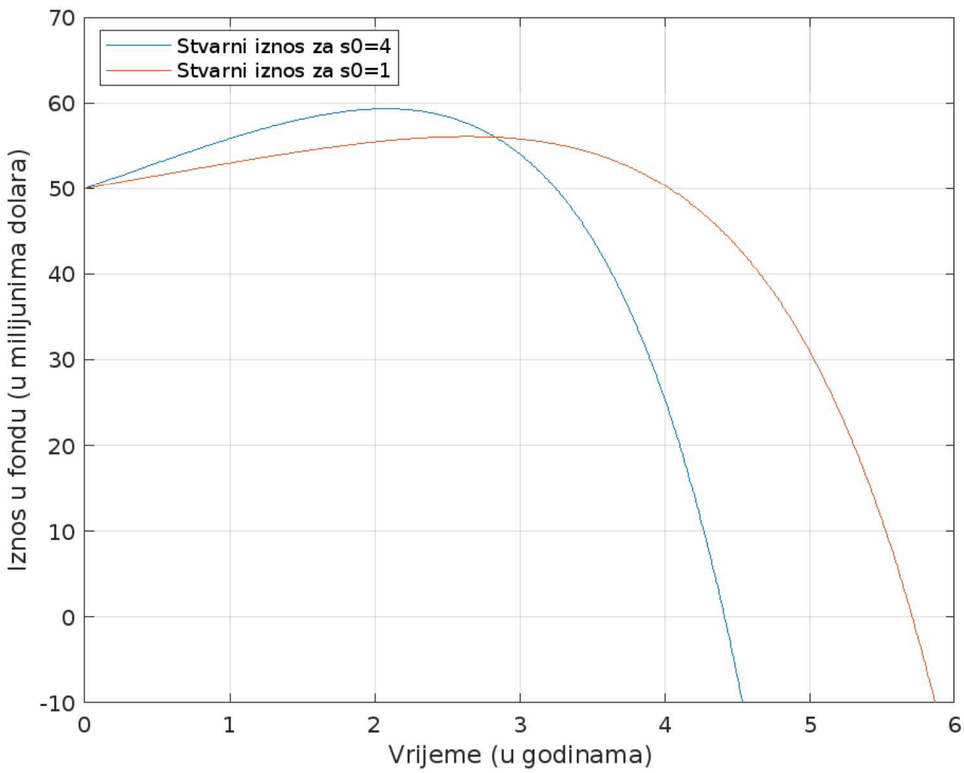
B) Obratimo sada pažnju na sljedeću situaciju. Pretpostavimo da fond nudi 10% povrata mjesečno. Upravitelj fonda trebao bi izvršiti početno ulaganje od 50 milijuna dolara. Očekuje se da se depoziti investitora povećavaju po stopi od 0.5% godišnje, a svaki investitor godišnje povuče polovicu svog dobitka. Zanima nas što će se dogoditi ako je godišnja visina depozita jednaka 4 milijuna dolara, a što ako ona iznosi 1 milijun dolara.

Parametri takvog fonda sažeti su u sljedećoj tablici.

Slučaj	K	C	s_0	r_i	r_w	r_p	r_n	Trenutak propadanja
1	0	50	4	0.5	0.5	1.1437	0.04	4.409
2	0	50	1	0.5	0.5	1.1437	0.04	5.702

Tablica 5: Vrijednosti parametara za slučaj B)

Na sljedećoj slici nalazi se grafički prikaz shema čiji su parametri prikazani u Tablici 5.



Slika 9: Numerička simulacija sheme B)

Uočimo, ako analize koje provodimo pokrivaju samo kratkoročni period, $0-2$ godine, činit će se da je ova shema održiva. Međutim, ova kombinacija parametara dovodi do propadanja fonda nakon $5-6$ godina održivosti.

6 Poznati primjeri Ponzijevih shema

Ponzijeve sheme postale su globalni problem jer investitori često nemaju dovoljno saznanja i informacija o fondovima u koje ulažu. Unatoč tomu što je puno Ponzijevih shema razotkriveno, unatoč poznatim podacima o gubitcima koje je većina investitora doživjela, ipak, i danas postoji mnoštvo takvih shema. U ovom poglavlju opisat ćemo neke od najpoznatijih Ponzijevih shema ikada provedenih.

6.1 Bernie Madoff

Bernard Lawrence Madoff, poznatiji kao Bernie Madoff, poznati investicijski savjetnik s Wall Streeta, postao je svjetski poznat po upravljanju vjerojatno najvećom i najdugovječnijom Ponzijevom shemom u povijesti. Svoju karijeru započeo je ranih 1960-ih kao trgovac dionicama na Wall Streetu. Nedugo zatim, Madoff je osnovao svoju tvrtku pod nazivom 'Bernard L. Madoff Investment Securities LLC', koja je postala jedna od najvećih tvrtki za brokersko posredovanje i upravljanje imovinom tvrtki. Madoff je bio pravi poduzetnik, naime, računalni program za trgovanje koji su razvili njegov investicijski savjetnik i njegov brat, naposljetku je usvojila trgovačka burza NASDAQ i pomoću njega postavila temelje za većinu elektroničkih sustava trgovanja koji se danas koriste.

Madoff je bio jako cijenjen na Wall Streetu pa je jedno vrijeme bio i predsjednik upravnog odbora Nacionalnog udruženja trgovaca vrijednosnim papirima (NASD), a isto tako je bio i predsjednik NASDAQ burze 1990. godine. Madoffova brokerska tvrtka je do 1990.-ih obrađivala 10-15% svih naloga za trgovanje za New York Stock Exchange (NYSE). Legitimni brokerski posao kojim se njegova tvrtka bavila bio je iznimno uspješan pa je vrlo upitan razlog zbog kojeg je on uopće počinio prevaru. Madoff je također bio poznat po tome što je ulagao u nekoliko dobrotvornih organizacija i tvrtki te je svojim ulaganjima doprinosio i kandidatima Demokratske stranke u SAD-u. No, unatoč tomu, neke od njegovih žrtava bile su i neprofitne dobrotvorne organizacije koje su ogromne iznose ulagale u njegovu tvrtku.

Madoffova Ponzijeva shema bila je klasična i zastrašujuće jednostavna. Investitore je privukao obećavajući im izvanredno visoke povrate na njihova ulaganja, no, kada su investitori predali novac, Madoff ga je samo položio na svoj osobni bankovni račun u Chase Manhattan banci. Povrate ranijim ulagačima platio je koristeći novac dobiven od kasnijih ulagača. Nije poznato kako je Madoffova Ponzijeva shema počela, niti kako je uspjela ostati neotkrivena toliko godina. Jedan od razloga zašto je njegova shema ostala održiva desetljećima je ta što je bio dobro upućen i aktivan član financijske industrije. Bio je oprezan i koristio je razne tehnike koje su otežavale razotkrivanje prijevare, naime, investitori nisu imali nikakav uvid u svoja ulaganja, umjesto toga svaki mjesec su na mail primali informacije o stanju svog računa. Madoff je tvrdio kako je s prijevarom počeo 1990.-ih, no većina drugih izvora tvrdi kako je početak njegove sheme bio i puno prije 1990.

Stvari su se raspale 2008. godine kada je veliki broj ulagača želio unovčiti svoja ulaganja u ukupnom iznosu od oko 7 milijardi dolara. Madoff nije imao niti približno dovoljno novca kako bi pokrio tražena povlačenja. Kada su FBI i SEC istražitelji konačno 11. prosinca 2008. godine otkrili prijevaru koja je trajala gotovo 20 godina, gubitci Madoffovih ulagača procijenjeni su na više od 60 milijardi dolara. Samo su neki od prvih ulagača uspjeli povratiti puni iznos ulaganja uz pozamašan profit. Madoff je 2009. godine priznao krivnju za 11 saveznih kaznenih djela te je osuđen na doživotnu kaznu zatvora, čak 150 godina, a njegov brat Peter, koji je također sudjelovao u prijevari, osuđen je na 10 godina zatvora. Madoffu je također naloženo da plati gotovo 200 milijardi dolara odšetete, no taj nalog suda je zapravo bio besmislen jer u to vrijeme Madoffova imovina nije mogla pokriti taj iznos duga. Do 2020. godine Ministarstvo pravosuđa SAD-a vratilo je tek oko 3.2 milijarde dolara jednom dijelu žrtava Madoffove prijevare.

6.2 Allen Stanford

Robert Allen Stanford, poznatiji pod srednjim imenom, odgovoran je, nakon Madoffa, za drugu najveću Ponzijevu shemu u povijesti Amerike. Stanford je osuđen zbog prijevare koju je uspješno provodio čak 20 godina. Allen Stanford bio je predsjednik Stanford International Bank (SIB) i upravo je tu poziciju iskoristio za pokretanje svoje sheme. Naime, glavni posao koji je SIB obavljala bio je izdavanje certifikata o depozitu pri čemu je SIB nudila veće kamate investitorima od bilo koje druge banke u SAD-u. Spomenuti certifikati zapravo predstavljaju vrijednosnice koje izdaje banka u svrhu prikupljanja potrebnih novčanih sredstava, a mogu se brzo i jednostavno unovčiti. Prodaja certifikata vršila se posredovanjem tvrtke Stanford Group Company (SGC) koja je također bila u Stanfordovom vlasništvu.

Stanford je ulagačima tvrdio kako prikupljena sredstva ulaže u obveznice niskog rizika, dok je prava istina da je tek 10% prikupljenih sredstava zaista investirao u takve obveznice. Ostatak prikupljenog novca koristio je za izdavanje kredita vlastitim tvrtkama, dio novca je koristio kako bi isplatio starije investitore, a najveći dio je odlazio na njegov rastrošan stil života. Stanford nije prikrivao svoje bogatstvo, posjedovao je jahte, avione te mnoštvo nekretnina. Financijska kriza 2008. godine utjecala je i na tržište certifikatima te je uslijedio pad novih investitora. Kako bi u takvoj situaciji Stanford zadržao povjerenje investitora te ih potaknuo da nastave ulagati, odlučio je lažirati ulaganje u certifikate o depozitu SIB-a, te je tvrdio kako je tijekom tog kriznog perioda uložen 741 milijun dolara.

Kada su komisije za nadzor financija počele sumnjati u Stanfordovu djelatnost, on je podmićivanjem uspio dobiti potrebne informacije te lažirati izvještaje o poslovanju i prije nego je došlo do same istrage. Ipak, 2008. godine, direktor financija SIB-a, Jim Davis priznao je prijevaru u zamjenu za smanjenu zatvorsku kaznu. U lipnju 2009. godine Stanford je uhićen, a 2012. godine optužen za prijevaru tijekom koje je zaradio više od 7 milijardi američkih dolara. Za provedbu svoje Ponzijeve sheme, Stanford je osuđen na čak 110 godina zatvora.

6.3 Afera Forex

Afera Forex je najpoznatija i najveća Ponzijeva shema provedena u Republici Hrvatskoj koja je trajala od srpnja 2007. do svibnja 2010. godine. Općenito, Forex je financijsko (devizno) tržište na kojem se trguje valutama i vrlo je popularno zbog mogućnosti lake i brze zarade koja se ostvaruje rastom ili padom tečaja. Na Forex tržištu trguje se stranim valutama, primjerice, valuta jedne zemlje razmjenjuje se za valutu neke druge zemlje, tj. istovremeno se prodaje jedna valuta, a kupuje druga i pri tome se ostvaruje određena zarada.

Afera Forex dobila je ime po spomenutom financijskom tržištu jer su prevaranti, odnosno pokretači ove Ponzijeve sheme, tvrdili kako će novac ulagača ulagati na tržištu Forex te su im pri tome obećavali sigurnu zaradu od 10 ili čak 15% mjesečno. Uz ta obećanja, žrtvama je obećavana i mogućnost povoljnog kreditnog zaduženja uz minimalne kamatne stope u fiktivnoj novoosnovanoj austrijsko-britanskoj banci u Hrvatskoj. Upravitelji sheme nisu ulagali novac koji su im ulagači povjerili, već je zarada dolazila od uplata novih ulagača i isplaćivala se starijim ulagačima. No, čak da je novac zaista bio ulagan u obećanu svrhu, nemoguće je na taj način ostvariti zaradu od 15% mjesečno.

U stvaranju spomenute sheme sudjelovalo je čak 12 ljudi, a shema je uspješno poslovala preko tvrtki u kojima su dvojica optuženika bili odgovorne osobe, dok je ostatak optuženika imao ulogu agenata. Agenti su ulagačima na raznim seminarima neistinito prikazivali mogućnost zarade ulaganjem u Forex, a također i u osnivački kapital novoosnovane banke u Republici Hrvatskoj za čije osnivanje nikada nije zatraženo odobrenje od Hrvatske narodne banke. U početku su optuženici jednom dijelu ulagača isplaćivali određene iznose novca kako bi ih uvjerili da su se njihova ulaganja isplatila. Agenti su sav dobiveni novac predavali organizatorima sheme koji su većinu novca zadržali za sebe, dok je manji dio novca pripao agentima.

U ovoj Ponzijevoj shemi su prevaranti od 680 ulagača uspjeli izvući više od 130 milijuna kuna. Suđenje je završeno krajem studenoga 2012. godine. Dio osoba koje su također sudjelovale u shemi uspio se nagoditi sa sudom, a naposljetku je osmero ljudi optuženo na zatvorsku kaznu u trajanju od ukupno 28 godina te je određeno da moraju vratiti 65 milijuna kuna i svu imovinu stečenu pranjem novca.

7 Zaključak

Iz svega ranije navedenoga, jasno je da se u Ponzijevim shemama ne stvara nikakva dodatna vrijednost, već se samo vrši transfer novca od novih ulagača onim ulagačima koji su ranije ušli u shemu. Lako je zaključiti da širenjem sheme nakon nekog vremena dođe do smanjenja broja novih investitora koji su potrebni kako bi shema i dalje funkcionirala. Nakon toga dolazi do raspada sheme i velika većina investitora ostaje bez svih uloženih sredstava. U ovome radu konstruirali smo matematički model Ponzijeve sheme, odnosno nelegalnog fonda koji obećava više nego što može ostvariti. Cilj je bio da saznamo i otkrijemo nešto više o originalnoj Ponzijevoj shemi i da vidimo na koji način bi ta shema bila održiva tijekom dužeg vremenskog razdoblja.

Model smo konstruirali primjenom linearne diferencijalne jednadžbe. Pretpostavka je bila da fond započinje s radom u nekom trenutku $t = 0$, a kasnije smo promatrali što se događa sa stvarnom i obećanom vrijednošću novca u fondu u bilo kojem drugom trenutku $t > 0$. Konstruirani model ovisi o početnom depozitu K kojega na samom početku ulažu investitori, početnom stanju fonda C, nominalnoj kamatnoj stopi r_n, obećanoj stopi povrata uloženog novca r_p, o stopi r_w po kojoj investitori povlače uloženi novac iz fonda i o stopi r_i po kojoj investitori ulažu novac u fond. Također, bitna stavka koja određuje model je i vrijednost s_0 kojom smo opisali početni visinu depozita pomoću koje možemo procijeniti priljev novca $s_0 e^{r_i t}$ u fond u bilo kojem trenutku t ukoliko nam je poznata stopa ulaganja r_i.

Koristeći se poznatim povijesnim podacima o originalnoj Ponzijevoj shemi, došli smo do zaključka kako je stvarna vrijednost u Ponzijevom fondu u trenutku propadanja fonda iznosila 7.763 milijuna dolara te je tada protok novih ulaganja iznosio čak 200.000 dolara na dan. Taj trenutak dogodio se 26.07.1919. godine i to je bio početak propasti Charlesa Ponzija i njegove sheme. Nadalje, zanimalo nas je što bi se dogodilo s njegovom shemom da u tom trenu Ponzi nije uhićen i da je shema dalje nastavila funkcionirati uz pretpostavku da je protok novih ulaganja postao konstantan te da su nova ulaganja iznosila 200.000 \$ svakoga sljedećeg dana. Analizom smo došli do zaključka da bi i u toj situaciji fond propao, ali oko 9 mjeseci kasnije.

Bitna stavka modela je i njegova održivost. Zanimalo nas je postoji li Ponzijeva shema koja nikada neće propasti ili koja će barem biti održiva tijekom dužeg vremenskog razdoblja. Napravili smo nekoliko simulacija modela primjenjujući različite parametre i došli smo do zaključka da s dovoljno velikim početnim ulaganjem shema može biti solventna i bez ili s vrlo malim rastom ulaganja i u situaciji kada je fond nelegalan, odnosno kada je nominalna kamatna stopa manja od obećane stope povrata. Dakle, zaista je moguće da Ponzijeva shema bude održiva čak i neograničeno dugo ako je upravitelj fonda spreman uložiti velik iznos početnog kapitala. Takvu Ponzijevu shemu nazivamo filantropskom i za upravitelja fonda ona bi bila apsolutno neisplativa. U stvarnom svijetu možemo reći kako je filantropska Ponzijeva shema vrlo slična ulaganju u sustav državnog mirovinskog osiguranja za koje će vrijeme pokazati je li zaista riječ o Ponzijevoj shemi.

Važno je naglasiti kako Ponzijeve sheme postoje i danas te su čak jače i mnogobrojnije nego ikada prije. Zbog razvitka tehnologije i interneta, prevarantima je u današnje vrijeme pruženo mnoštvo novih mogućnosti za širenjem prijevara te su razvijene nove strategije za vođenje ovih shema. Iz tih razloga, Ponzijeve sheme u današnjici je vrlo teško razotkriti. Smatram kako je zaista bitno da svi sudionici financijskog tržišta budu konstantno na oprezu kako bi se broj ovakvih i sličnih prijevara smanjio na minimum. Također, mislim da je u današnje doba vrlo bitna financijska pismenost jer na ovakve prijevare uglavnom nasjedaju naivni ljudi koji imaju jako malo saznanja o financijama općenito, a isto tako i o tome u što točno ulažu svoj novac.

Literatura

[1] M. Artzrouni, *The mathematics of Ponzi schemes*, Department of Mathematics University of Pau, 2009 ,

[2] P. Boyle, *Charles Ponzi The Documentary*, Financial Documentary, Boston, 2021. https://www.youtube.com/watch?v=w4waqVKanxA

[3] M. Cunha, H. Valente, P. B. Vasconcelos, *Ponzi schemes: computer simulation*, Observatório de Economia e Gestão de Fraude, 2013.

[4] S. Deason, S. Rajgopal, G. Waymire, R. White, *Who Gets Swindled in Ponzi Schemes?*, Goizueta Business School, Emory University, 2015.

[5] L. DeWitt, *Ponzi Schemes vs. Social Security*, Research Note No. 25. Social Security Administration, 2009.

[6] A. Gabrovec, *Mrežni marketing vs. Piramidni sistem*, Slovenec, 2019., https://www.slovenec.org/2019/01/09/mrezni-marketing-vs-piramidni-sistem-ne-pustite-se-nategniti/

[7] V. Novak, *Mrežni marketnig*, Međimursko Veleučilište u Čakovcu, Stručni studij menađmenta, turizma i sporta, Završni rad, Čakovec, 2019.

[8] A. Kosyan, *Sustainability of Ponzi scheme investment funds*, American Univeristy of Armenia, Manoogian Simone College of Business and Economics, 2017.

[9] N. Kovačević, *Rizici Ponzievih shema*, Veleučilište u Rijeci, specijalistički završni rad, Rijeka, srpanj 2020.

[10] M. Smith, M. Gavirila, *The Madoff affair*, Frontline, 12. svibanj 2009. https://www.pbs.org/wgbh/frontline/film/madoff/

[11] L. Sokanović, *Kazneno djelo lančane igre u Republici Hrvatskoj : Lančane igre - igre bez granica*, Sveučilište u Splitu, pregledni znanstveni rad, 2015.

[12] F. Vežnaver, *Afera Forex na Riječkom sudu*, Burin, Rijeka, 2021. https://burin.hr/afera-rijecki-forex-bolest-drugooptuzenog-iz-matulja-odgodila-pocetak-sudenja-za-slucaj-u-kojem-prevareno-barem-400-ljudi-a-okrivljeni-se-domogli-120-milijuna-kuna/

[13] A. M. Wilkins, W. W. Acuff, D. R. Hermanson,*Understanding a Ponzi Scheme: Victims' Perspectives*, Journal of Forensic & Investigative Accounting, vol.4, br. izdanja 1, 2012. https://core.ac.uk/download/pdf/198179443.pdf

[14] *Biografija Charlesa Ponzija*, 2021., https://1xmatch.com/bs/biografiya-charl-za-ponci/

[15] *Ponzi Schemes vs. Pyramid Schemes: What's the Difference?*, White Collar Crimes, 2009. https://griffindurham.com/ponzi-schemes-vs-pyramid-schemes-whats-the-difference/

[16] *Razlika između višerazinskog marketinga (mlm) i piramidalnih shema (sa usporednim grafikonomom)*, 2022.
https://hr.weblogographic.com/difference-between-multilevel-marketing

[17] *United States v. Robert Allen Stanford et al.*, The United States Department of justice, 2022,
https://www.justice.gov/criminal-vns/case/united-states-v-robert-allen-stanford-et-al

Sažetak

Tema ovog rada je Ponzijeva shema, jedan od najpoznatijih oblika investicijske prijevare. Glavni cilj rada je konstruiranje matematičkog modela Ponzijeve sheme pomoću kojega smo kasnije uspjeli doći do zaključaka o održivosti sheme. Model smo konstruirali koristeći linearnu diferencijalnu jendadžbu i ranije poznate podatke o originalnoj Ponzijevoj shemi. Konstruirani model ovisi o određenim parametrima te smo željeli saznati kako promjena vrijednosti tih parametara utječe na održivost sheme. U tu svrhu u Matlabu smo napravili grafičke simulacije modela za nekoliko različitih kombinacija parametara. Promatrajući grafičke simulacije došli smo do zaključka kako Ponzijeva shema može biti održiva neograničeno dugo samo ako je upravitelj fonda spreman uložiti veliki iznos početnog kapitala, no tada on ne bi ostvario nikakvu dobit. U suprotnom, ako upravitelj sheme želi ostvariti dobit, onda će u određenom trenutku doći do manjka novih investitora te će svaka takva shema biti osuđena na propast.

Ključne riječi

Charles Ponzi, Ponzijeva shema, piramidalne sheme, filantropska Ponzijeva shema, matematički model Ponzijeve sheme

The mathematics of Ponzi scheme

Summary

The topic of this paper is the Ponzi scheme, one of the most well-known forms of investment fraud. The main goal of this paper is to construct a mathematical model of the Ponzi scheme by which we later managed to draw conclusions about the viability of the scheme. We constructed the model by using linear differential equation and previously known data about the original Ponzi scheme. The constructed model depends on certain parameters, and we wanted to find out how changing the values of these parameters affects the viability of the scheme. For this purpose, we made graphical simulations of the model for several different combinations of parameters by using Matlab. By observing those graphical simulations, we concluded that the Ponzi scheme can be viable indefinitely only if the fund manager is willing to invest a large amount of initial capital, but then he would not make any profit. On the contrary, if the scheme manager wants to make a profit, then at some point there will be a shortage of new investors and any such scheme will be doomed to failure.

Keywords

Charles Ponzi, Ponzi scheme, pyramid schemes, philanthropic Ponzi scheme, mathematical model of the Ponzi scheme

Životopis

Rođena sam 2. lipnja 1997. godine u Virovitici u kojoj sam pohađala osnovnu školu Ivane Brlić Mažuranić, a za srednju školu odabrala sam Gimnaziju Petra Preradovića u Virovitici. Srednju školu završavam 2016. godine i iste te godine upisujem preddiplomski studij matematike na Odjelu za matematiku Sveučilišta Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku. Preddiplomski studij završavam 2019. godine sa završnim radom pod nazivom 'Primjene determinanti' pod mentorstvom izv.prof.dr.sc. Darije Marković. U jesen 2019. godine upisujem diplomski studij matematike, smjer Financijska matematika i statistika, na Odjelu za matematiku u Osijeku. Stručnu praksu odradila sam u Osijeku u agenciji za digitalni marketing, Escape Digital Agency, gdje sam radila na poziciji statističkog analitičara. Trenutno sam zaposlena kao student u Generali osiguranju u Zagrebu na poziciji asistenta za akturaske poslove za životna osiguranja.