Polinomijalne matrice

Magić, Maja

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Maja Magić

Polinomijalne matrice

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku
Odjel za matematiku
Sveučilišni diplomski studij matematike
Smjer: Financijska matematika i statistika

Maja Magić

Polinomijalne matrice

Diplomski rad

Mentor: izv.prof.dr.sc. Darija Marković

Osijek, 2022.

Sadržaj

1 Uvod

U ovom diplomskom radu u suštini uvodimo pojam polinomijalnih matrica i promatramo osnovne operacije i teoreme vezanih uz njih. Prvo poglavlje rada zapravo je mali podsjetnik u kojem se najprije prisjećamo definicije matrica te nekih važnijih svojstava i pojmova koji su usko povezani s matricama. Također, u radu je napravljen i kratki osvrt na definiciju polinoma, jednako kao i nekih osnovnih rezultata i teorema koji su važni i koje dalje koristimo i u narednim poglavljima. U drugom poglavlju definiramo pojam polinomijalne matrice, kao i osnovne operacije ovih matrica poput zbrajanja i množenja. Nadalje, iskazani i dokazani su teoremi o dijeljenju polinomijalnih matrica iz kojih ćemo vidjeti kako je bitno s koje strane dijelimo polinomijalnu matricu zato što razlikujemo lijevi i desni kvocijent te lijevi i desni ostatak pri djeljenju polinomijalnih matrica. Posljedica toga je što ne vrijedi komutativnost množenja polinomijalnih matrica, kao što je to slučaj i kod klasičnih matrica. Štoviše, upoznat ćemo se i teoremom u kojem stoji kako postoje jedinstveni lijevi i desni kvocijent te lijevi i desni ostatak kod dijeljenja kvadratnih matrica, ukoliko je djelitelj matrica regularna, izvesti algoritme za pronalazak istih te sve dodatno popratiti primjerima. Rad sadrži i dva bitna teorema vezana uz dijeljenje polinomijalnih matrica, a to su generalizirani Bèzoutov teorem i Hamilton-Cayleyjev teorem.

Upoznat ćemo se i s elementarnim transformacijama, linearnom nezavisnošću te rangom polinomijalnih matricama te primijetiti kako ove pojmove definiramo veoma slično kao i kod klasičnih matrica te da mnoge teoreme i posljedice koje vežemo uz klasične matrice, vrijede i kod matrice čiji elementi su polinomi.

Opće je poznato kako normalne forme matrica imaju fundamentalnu ulogu u linearnoj algebri i njenim primjenama. Stoga je u radu obrađena jedna takva normalna forma polinomijalnih matrica, Smithova kanonska forma. Osim toga, upoznat ćemo se i s definicijom nultočaka polinomijalnih matrica, invarijantih polinoma te elementarnih djelitelja polinomijalnih matrica.

I na kraju, u posljednjem poglavlju opisana je jedna primjena polinomijalnih matrica. Riječ je o širokopojasnim sustavima s više ulaza i više izlaza, odnosno takozvanim *MIMO* sustavima u kojima se kanal signala može modelirati kao polinomijalna matrica. Za potrebe obrade niza senzora te odvajanja signala koristi se dekompozicija na singularne vrijednost čija je definicija, kao i neki važni rezultati vezani uz nju, također obrađena u posljednjem poglavlju.

2 Matrice i polinomi

Prije nego li što krenemo s uvođenjem pojma polinomijalne matrice, prisjetimo se definicija matrice i polinoma, ponekih teorema i rezultata vezanih uz njih koje ćemo dalje koristiti u radu.

2.1 Definicija matrice i osnovna svojstva matrica

Ovaj dio gradiva naveden je po uzoru na knjigu *Linearna algebra*, autora Damira Bakića.

Neka je $\mathbb{F}$ polje kompleksnih ili realnih brojeva.

Definicija 2.1.1. *Neka su $m,\ n \in \mathbb{N}$. Preslikavanje*

$$A : \{1, ..., m\} \times \{1, ..., n\} \to \mathbb{F}$$

*naziva se **matrica** tipa (m, n) (ili $m \times n$) s koeficijentima iz polja $\mathbb{F}$. Skup svih takvih matrica označavamo s $M_{mn}(\mathbb{F})$. Ukoliko je $m = n$ pišemo kraće $M_n(\mathbb{F})$, a elemente tog skupa zovemo kvadratnim matricama reda n.*

Preciznije, matrica A uređenom paru (i, j), gdje $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, pridružuje neki skalar iz polja $\mathbb{F}$. Funkcijske vrijednosti $A(i, j)$ označavamo s a_{ij}, a zapisujemo ih na sljedeći način:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Uočimo kako matrica A ima m redaka i n stupaca te da su elementi matrice indeksirani tako da se element a_{ij} nalazi na presjeku $i-$tog retka i $j-$tog stupca. Sada ćemo uvesti osnovne operacije s matricama, odnosno zbrajanje i množenje matrica.

Definicija 2.1.2. *Neka su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ matrice tipa $m \times n$. **Zbroj matrica** A i B je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa $m \times n$ za čije elemente vrijedi:*

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

za sve $i = 1, ..., m$ i $j = 1, ..., n$. Pišemo $C = A + B$.

Iako stoji u samoj definiciji, napomenimo kako ne možemo zbrajati matrice koje nisu istog tipa.
Prije nego li što definiramo i množenje matrice, prisjetimo se kako matrice koje množimo moraju biti ulančane. Matrice A i B su ulančane ukoliko je broj stupaca matrice A jednak broju redaka matrice B. Ovo svojstvo nije simetrično. Naime, ako je matrica A tipa $m \times n$, a matrica B tipa $n \times l$, onda je par matrica (A, B) ulančan, dok je par (B, A) ulančan samo ukoliko je $m = l$.

Definicija 2.1.3. *Neka su $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ ulančane matrice, gdje je matrica A tipa $m \times n$, a matrica B $n \times l$. **Umnožak matrica** A i B je matrica $C = [c_{ij}]$ tipa $m \times l$, a njezini elementi zadani su sljedećom formulom:*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1i} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

za $i = 1, ..., m$, $j = 1, ..., l$. Pišemo $C = A \cdot B$.

Navedimo sada osnovna svojstva množenja matrica.

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F}), B \in M_{nl}(\mathbb{F})$, i $C \in M_{lk}(\mathbb{F})$ *(svojstvo asocijativnosti)*,

2. $(\lambda \cdot A) \cdot B = A \cdot (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \cdot B)$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F}), B \in M_{nl}(\mathbb{F})$, a λ skalar, *(svojstvo homogenosti)*,

3. $I \cdot A = A, A \cdot I = A$ gdje je A kvadratna matrica reda n, a I jedinična matrica reda n,

4. $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{nk}(\mathbb{F})$ i $C \in M_{nk}(\mathbb{F})$,

   $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ gdje je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ i $C \in M_{nk}(\mathbb{F})$ *(svojstvo distributivnosti)*.

Kod množenja matrica može se dogoditi da umnožak dviju matrica bude nul-matrica, tj. matrica kojoj su svi elementi jednaki 0 iako su obje matrice koje množimo različite od nule, tj. nit jedan faktor nije nul-matrica. To je jedna od bitnih razlika u odnosu na množenje cijelih, racionalnih ili realnih brojeva.
Osim toga, dodajmo još i činjenicu kako množenje matrica općenito nije komutativna operacija. Uzrok tome je činjenica da *biti ulančan* nije simetrična relacija, a kao što je već spomenuto, ulančanost matrica je nužan preduvjet za primjenjivanje operacije množenja kod matrica.

Definicija 2.1.4. *Kvadratna matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ je* ***invertibilna*** *ili* ***regularna*** *ukoliko $\exists$ matrica $B \in M_n(\mathbb{F})$ takva da vrijedi*

$$A \cdot B = B \cdot A = I.$$

Matricu B nazivamo ***inverznom matricom*** *od A i uobičajeno pišemo $B = A^{-1}$. U protivnom kažemo da je matrica A* ***singularna*** *matrica.*

Prisjetimo se i sljedećeg:

1. Ukoliko inverz postoji, onda je on jedinstven. Dakle, sasvim je korektno inverz matrice A označiti s A^{-1}. Štoviše, matrica A^{-1} je isto regularna matrica i vrijedi $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Ako su A i B regularne matrice, onda je i njihov umnožak, $A \cdot B$ također regularna matrica i vrijedi $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$. Ovu tvrdnju je primjenjiva i za konačno mnogo regularnih matrica. Ako su $A_1, ..., A_k$ regularne matrice, tada vrijedi

$$(A_1 \cdot ... \cdot A_k)^{-1} = A_k^{-1} \cdot ... \cdot A_1^{-1}.$$

Definicija 2.1.5. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrica $A^T \in M_{nm}(\mathbb{F})$ naziva se* ***transponirana matrica*** *matrice A ako vrijedi:*

$$a_{ij}^T = a_{ji}, \quad \textit{za sve} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Definicija 2.1.6. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Matrica $A^* \in M_{nm}(\mathbb{F})$ naziva se* ***hermitski adjungirana*** *(kompleksno transponirana) matrica matrice A ako vrijedi:*

$$a_{ij}^* = \overline{a}_{ji}, \quad \textit{za sve} \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Definicija 2.1.7. *Kažemo da je kompleksna kvadratna matrica A* ***unitarna*** *ako vrijedi*

$$AA^* = A^*A = I.$$

Od osnovnih svojstva i pojmova vezanih uz matricu, potrebno je prisjetiti se i definicije determinante matrice. Prije same definicije determinante sjetimo se kako je permutacija nekog konačnog skupa svaka bijekcija koja taj skup preslikava na samog sebe. Stoga, permutacije će nam koristiti kako bismo pregledno i jednostavno zapisali pravilo formiranja umnožaka po n koeficijenata matrice koji pripadaju različitim retcima i različitim stupcima tako da je svaki redak i svaki stupac zastupnjen u umnošku s točno jednim koeficijentom. Osim toga, sve bijekcije nekog konačnog skupa čine grupu s obzirom na kompoziciju preslikavanja kao binarnu operaciju. Tu grupu nazivamo simetrična grupa stupnja n, označavamo je sa S_n.

Definicija 2.1.8. ***Determinanta*** *kvadratne matrice $A = [a_{ij}]$ je skalar iz polja $\mathbb{F}$ koji se definira kao:*

$$\det A = \sum_{p \in S_n} (\text{sign } p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} ... a_{np(n)}, \tag{1}$$

gdje je S_n grupa permutacija skupa $1, ..., n$, a $\text{sign } p \in \{-1, 1\}$ predznak permutacije.

Predznak permutacije p definira se kao

$$p = (-1)^{I(p)},$$

gdje je $I(p)$ broj inverzija permutacija p. Inverzija permutacije p je svaki par (i, j) takav da je $1 \leq i < j \leq n$ i $p(i) > p(j)$. Ukoliko je broj inverzija permutacije p, $I(p)$, paran, kažemo da je p parna permutacija. U suprotnom kažemo da je p neparna permutacija.
Uočimo kako determinantu možemo odrediti samo za kvadratne matrice, odnosno matrice reda n.

Definicija 2.1.9. *Neka je dana kvadratna matrica A reda n.* ***Svojstveni polinom*** *matrice A označavamo s k_A i definiramo kao:*

$$k_A(\lambda) = \det[A - \lambda I],$$

gdje je I jedinična kvadratna matrica reda n. Ponekad se umjesto svojstveni koristi i karakterisični ili vlastiti polinom. Nultočke svojstvenog polinoma matrice A nazivamo ***svojstvenim vrijednostima*** *matrice A.*

Definicija 2.1.10. *Neka je $A = [a_{ij}]$ kvadratna matrica.* ***Minora*** *M_{ij} elementa a_{ij} matrice A je determinanta matrice koja nastaje kad iz matrice A izbacimo i-ti redak i j-ti stupac.* ***Algebarski komplement*** *A_{ij} elementa a_{ij} matrice A definiran je s $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.*

2.2 Definicija polinoma i osnovna svojstva polinoma

Radi potpunosti gradiva, navest ćemo osnovne definicije i teoreme vezane uz polinome. Ovaj dio gradiva preuzet je iz knjige *Elementarna matematika 1*, koju su napisali Boris Pavković i Darko Veljan.

Definicija 2.2.1. *Neka je $\mathbb{F}$ polje realnih ili kompleksnih brojeva. Funkcija $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ zadana formulom:*

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{2}$$

zove se ***polinom*** *n-tog stupnja u varijabli x nad poljem $\mathbb{F}$. Brojevi a_i, $i = 0, 1, ..., n$, gdje $n \in \mathbb{N}_0$ zovu se* ***koeficijenti polinoma****. Koeficijent a_n se zove* ***vodeći koeficijent*** *od p, a koeficijent a_0* ***slobodan član*** *od p. Broj n nazivamo* ***stupanj polinoma*** *p, oznaka $\deg p = n$.*

Ako je $a_n = 1$, (2) nazivamo normiranim polinomom, a ukoliko je $p(x) = 0$ za $\forall x \in \mathbb{F}$, (2) nazivamo nulpolinomom.
Zbroj dvaju polinoma p_1 i p_2 , gdje

$$p_1(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \tag{3}$$
$$p_2(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_m x^m \tag{4}$$

definiramo na sljedeći način:

$$p_1(x) + p_2(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{m}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=m+1}^{n} a_i x^i, \; n > m, \\ \\ \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i, \quad n = m, \\ \\ \sum_{i=0}^{n}(a_i + b_i)x^i + \sum_{i=n+1}^{m} b_i x^i, \; m > n. \end{cases}$$

Uočimo kako vrijedi:

$$\deg[p_1(x) + p_2(x)] \le \max\big[\deg[p_1(x)], \deg[p_2(x)]\big].$$

Analogno definiramo i razliku dvaju polinoma.
Produkt skalara λ i polinoma p definiramo kao:

$$\lambda p(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda a_i x^i$$

Skalar λ možemo razmatrati i kao polinom nultog stupnja.
Polinom oblika

$$p_1(x) \cdot p_2(x) = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i$$

zovemo **produkt polinoma** (3) i (4), gdje je

$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_k b_{i-k}, \quad i = 0, 1, ..., n+m$$
$$(a_k = 0 \text{ za } k > n, \; b_k = 0 \text{ za } k > m).$$

Primijetimo kako vrijedi:

$$\deg[p_1(x) \cdot p_2(x)] = n + m,$$

budući je $a_n \cdot b_m \neq 0$ za $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.
Prisjetimo se ponešto i o djeljivosti polinoma.

Definicija 2.2.2. *Za polinom p kažemo da je djeljiv polinomom $q \neq 0$, ako postoji polinom h, $\deg h > 0$ takav da je*

$$p(x) = g(x) \cdot h(x).$$

U tom slučaju vrijedi:

$$\deg p = \deg q + \deg h.$$

Nadalje, neka je $p_1(x)$ polinom stupnja n i $p_2(x)$ nenul polinom stupnja m tako da vrijedi $n > m$. Tada postoje jedinstvena dva polinoma $q(x)$ i $r(x)$ takvi da

$$p_1(x) = p_2(x) \cdot q(x) + r(x),$$

gdje

$$\deg[r(x)] < \deg[p_2(x)].$$

Polinom $r(x)$ nazivamo **ostatkom**, dok polinom $q(x)$ nazivamo **nepotpunim kvocijentom** kada $r(x) \neq 0$, a **kvocijentom** kada je $r(x) = 0$. Preciznije, kada je $r(x) = 0$, tada imamo $p_1(x) = p_2(x) \cdot q(x)$ i polinom $p_2(x)$ zovemo djeliteljem polinoma $p_1(x)$, a označavamo $p_1(x)|p_2(x)$. Zatim, kažemo da je polinom $d(x)$ zajednički djelitelj polinoma $p_1(x)$ i $p_2(x)$ ako postoje polinomi $p_1'(x)$ i $p_2'(x)$ takvi da vrijedi:

$$p_1(x) = d(x) \cdot p_1'(x), \quad p_2(x) = d(x) \cdot p_2'(x).$$

Skup svih polinoma $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ označavamo s $\mathbb{F}(x)$ i zovemo **prsten polinoma** u jednoj varijabli x nad $\mathbb{F}$. Prisjetimo se kako je **prsten** skup P na kojem su definirane dvije algebarske operacije, tj. $+ : P \times P \to P$ i $\cdot : P \times P \to P$, pri čemu vrijede ova svojstva:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c, \forall\, a,\, b,\, c\, \in P$ *(asocijativnost zbrajanja)*
2. $\exists\, 0 \in P$, tako da je $0 + a = a + 0 = 0, \; \forall a \in P$ *(neutralni element)*
3. $\forall\, a \in P, \exists\, -a$ tako da je $a + (-a) = (-a) + a = 0$ *(suprotni element)*
4. $a + b = b + a, \forall\, a,\, b\, \in\, P$ *(komutativnost zbrajanja)*
5. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \forall\, a,\, b,\, c\, \in P$ *(asocijativnost množenja)*
6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ *(distributivnost slijeva i zdesna).*

Definicija 2.2.3. ***Nultočka polinoma*** *$p \in \mathbb{F}(x)$ je svaki kompleksan broj x_1 za koji je $p(x_1) = 0$. Ako je x_1 realan broj, onda se x_1 naziva* ***realna nultočka****, a ukoliko je $x_1 \in \mathbb{C}$,* ***kompleksna nultočka****. Katkad se za nultočku kaže da je* ***korijen polinoma****.*

Prisjetimo se i sljedećeg:

- Ukoliko je x_1 nultočka polinoma p, tada $p_1(x) = x - x_1$ dijeli polinom p.
- Svaki polinom koji je stupnja većeg od 1 ima kompleksnu nultočku.
- Svaki polinom koji je stupnja većeg od 1, brojeći kratnost nultočaka, ima n kompleksnih nultočaka. Taj polinom možemo faktorizirati na sljedeći način:

$$p(x) = a_n(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \ldots \cdot (x - x_n),$$

gdje si $x_1, ...x_n$ nultočke polinoma p.

3 Polinomijalna matrica

3.1 Definicija i osnovne operacije polinomijalnih matrica

U ovom dijelu rada upoznat ćemo se s definicijom polinomijalne matrice te nekih osnovnim operacijama nad njima. Definicije i rezultati vezani uz polinomijalnu matricu, koji su navedeni u nastavku, preuzeti su iz knjige *Polynomial and rational matrices: applications in dynamical systems theory*, autora Tadeusza Kaczoreka.

Definicija 3.1.1. *Matricu čiji elementi su polinomi nad poljem $\mathbb{F}$ zovemo* ***polinomijalnom matričnom funkcijom*** *ili kraće* ***polinomijalnom matricom*** *nad poljem $\mathbb{F}$. Polinomijalnu matricu A za $x \in \mathbb{F}$ zapisujemo na sljedeći način:*

$$A(x) = [a_{ij}(x)] = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}(x) & \dots & a_{mn}(x) \end{bmatrix}, a_{ij} \in \mathbb{F}[x] \tag{5}$$

gdje $i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$.

Tip polinomijalne matrice prikazujemo kao što smo i do sada prikazivali tip matrice. Dakle, gornja matrica A je tipa $m \times n$, tj. matrica A je matrica koja ima m redaka i n stupaca. Skup polinomijalnih matrica tipa $m \times n$ nad poljem $\mathbb{F}$ ćemo označavati s $M_{mn}(\mathbb{F})[x]$.

Primjer 3.1.1. *Neka je zadana sljedeća polinomijalna matrica A:*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 + 7x & 4x^2 - 11 & 3x + 6 \\ 3x^2 - 8x + 1 & x - 9 & x^2 - 4x + 7 \\ x - 3 & x^2 - 2x + 2 & x - 11 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}[x] \tag{6}$$

Svaku polinomijalnu matricu možemo zapisati u obliku matričnog polinoma. Matrični polinom matrice A je sljedeći:

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 3 \\ -8 & 1 & -4 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -11 & 6 \\ 1 & -9 & 7 \\ -3 & 2 & -11 \end{bmatrix} := A_2x^2 + A_1x + A_0.$$

Uočimo kako deg *A=2.*

Dakle, želimo li matricu (5) zapisati kao matrični polinom, pišemo

$$A(x) = A_qx^q + ... + A_1x + A_0, \quad A_k \in \mathbb{F},\ k = 0, 1, ..., q. \tag{7}$$

Ukoliko je A_q različita od nul-matrice, tada q nazivamo **stupanj matrice** A, oznaka deg A. Matrica (5) je **regularna matrica** ukoliko je $m = n$ i det $A_q \neq 0$.

Definirajmo sada i osnovne operacije nad polinomijalnim matricama. Dane su sljedeće dvije polinomijalne matrice:

$$A(x) = [a_{ij}(x)] = \sum_{k=0}^{q} A_kx^k$$

$$B(x) = [b_{ij}(x)] = \sum_{k=0}^{r} B_kx^k$$

gdje $i = 0, 1, ..., m$ i $j = 0, 1, ..., n$. **Zbroj polinomijalnih matrica** definiramo kao:

$$\begin{aligned} A(x) + B(x) &= (A + B)(x) \\ &= [a_{ij}(x) + b_{ij}(x)] \\ &= \begin{cases} \sum_{k=0}^{r}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=r+1}^{q} A_k x^k, & q > r \\ \\ \sum_{k=0}^{q}(A_k + B_k)x^k, & q = r \\ \\ \sum_{k=0}^{q}(A_k + B_k)x^k + \sum_{k=q+1}^{r} B_k x^k, & q < r. \end{cases} \end{aligned}$$

Ukoliko je $q = r$ i $A_q + B_q \neq 0$, tada je zbroj polinomijalna matrica koja je stupnja q. Međutim, ukoliko je $q = r$ i $A_q + B_q = 0$, tada ćemo kao zbroj dobiti polinomijalnu matricu stupnja manjeg od q. Zapravo vrijedi sljedeće:

$$\deg(A + B) \leq \max\{\deg A, \deg B\}.$$

Dalje, neka je λ skalar. Umnožak polinomijalne matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{F})[x]$ i skalara λ defniramo kao:

$$(\lambda A)(x) = \lambda A(x) = [\lambda a_{ij}(x)]$$

gdje $i = 0, 1, ...m$, $j = 0, 1, ..., n$. Iz ovog slijedi kako za $\lambda \neq 0$ imamo deg λA= deg A. Analogno definiramo i razliku dviju polinomijalnih matrica. **Razlika dviju polinomijalnim matrica** A i B provodi se pomoću operacije zbrajanja i množenja skalarom,

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Kao što je već bilo spomenuto u prvom poglavlju, dvije matrice možemo pomnožiti samo ako su one ulančane, tj. samo ukoliko broj stupaca prve matrice odgovara broju redaka druge matrice. Neka su ponovo zadane polinomijalne matrice A i B:

$$A(x) = [a_{ij}(x)] = \sum_{k=0}^{q} A_k x^k, \quad \text{gdje } i = 1, ..., m, \text{ i } j = 1, ..., n$$

$$B(x) = [b_{ij}(x)] = \sum_{k=0}^{r} B_k x^k \quad \text{gdje } i = 1, ..., n, \text{ i } j = 1, ..., p.$$

Umnožak polinomijalnih matrica A i B definiramo na sljedeći način:

$$A(x) \cdot B(x) = (A \cdot B)(x) = [c_{ij}] = \sum_{k=0}^{q+r} C_k x^k, \quad i = 1, ..., m, \quad j = 1, ..., p$$

gdje je

$$C_k = \sum_{l=0}^{k} A_l B_{k-l}, \quad k = 0, 1, ..., q + r, (A_l = 0,\ l > q,\ B_l = 0,\ l > r).$$

Iz zadnjeg izraza slijedi kako $C_{q+r} = A_q B_r$ i ova matrica je nenul-matrica ukoliko je minimalno jedna polinomijalna matrica od A_q i B_r regularna. Stoga vrijede sljedeće relacije:

- deg$[A(x) \cdot B(x)]$= deg $[A(x)]$+ deg $[B(x)]$ ukoliko je barem jedna od matrica regularna,

- $\deg[A(x)\cdot B(x)] \leq \deg\,[A(x)] + \deg\,[B(x)]$ inače.

Primjer 3.1.2. *Neka su zadane sljedeće polinomijalne matrice:*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2x^2-4 & x-5 \\ 4x+1 & x^2-x+3 \end{bmatrix}, B(x) = \begin{bmatrix} x^2-x+7 & x+3 \\ x^2+3x-4 & x^2+2x \end{bmatrix}.$$

Zapišemo li ih u obliku matričnih polinoma,

$$A(x) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nađimo sada umnožak danih polinomijalnih matrica:

$$A(x)\cdot B(x) = \sum_{k=0}^{2+2} C_k x^k$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -12 & -1 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} -15 & -14 \\ 22 & 7 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ 19 & 3 \end{bmatrix}.$$

Primjetimo kako je stupanj dobivene polinomijalne matrice zapravo zbroj stupnjeva polinomijalnih matrica koje smo množili.

Potrebno je sada definirati i dijeljenje polinomijalnih matrica. U tu svrhu naveden je sljedeći teorem.

Teorem 3.1.1. (vidjeti [3], Teorem 1.3.1.) *Ako je* det $A \neq 0$, *onda za polinomijalne matrice* $A(x)$ *i* $B(x)$, *gdje* $\deg B(x) \geq \deg A(x)$, *postoje matrice* $Q_d(x), R_d(x)$ *takve da je zadovoljeno sljedeće:*

$$B(x) = Q_d(x)\cdot A(x) + R_d(x), \quad \deg A(x) > \deg R_d(x)$$

i postoje matrice $Q_l(x), R_l(x)$ *takve da*

$$B(x) = A(x)\cdot Q_l(x) + R_l(x), \quad \deg A(x) > \deg R_l(x).$$

Dokaz. Podijelimo li elemente matrice $B(x)\,\mathrm{Adj}\,A(x)$ polinomom det A, dolazimo do matrica $Q_d(x)$i $R_{d1}(x)$ za koje vrijedi:

$$B(x)\cdot \mathrm{Adj}A(x) = \det A(x) Q_d(x) + R_{d1}(x), \quad \deg(\det A) > \deg R_{d1}. \tag{8}$$

Prisjetimo se sada teorema o dijeljenju polinoma. Svi elementi polinomijalne matrice $B\,\mathrm{Adj}\,A$ su polinomi. Stoga, na svakom elementu te matrice može se primijeniti teorem o dijeljenju polinoma. Znamo kako:

$$\mathrm{Adj}\,A(x)\cdot A(x) = I_n \det A(x)$$

gdje I_n jedinična matrica reda n. Ukoliko (8) pomnožimo zdesna s $\frac{1}{\det A(x)} \cdot A(x)$, imamo:

$$B(x) = Q_d(x) \cdot A(x) + R_d(x), \tag{9}$$

gdje je $R_d = \frac{1}{\det A(x)} \cdot A(x) \cdot R_{d1}$. Zatim, iz (8) i činjenice da deg (det A)>deg R_{d1} slijedi:

$$\deg(R_d) = \deg(R_{d1} \cdot A) - \deg(\det A) \leq \deg R_{d1} + \deg A - \deg(\det A) < \deg A.$$

Jednakost stupnjeva slijedi iz same definicije dijeljenja polinoma, a u nastavku se pozivamo na nejednakost stupnjeva koja je prisutna kod množenja polinomijalnih matrica. Ovime je dokazan prvi iskaza teorema. Preostaje još dokazati i drugi. Dijeljenjem matrice Adj $A \cdot B$ polinomom det A, opet dobivamo matrice Q_l i R_{l1} takve da:

$$\operatorname{Adj} A(x)\, B(x) = \det A(x) Q_l(x) + R_{l1}(x), \quad \deg(\det A) > \deg R_{l1}.$$

Sukladno tome, pomnožimo prethodni izraz slijeva s $\frac{1}{\det A(x)} \cdot A(x)$, dolazimo do sljedećeg:

$$B(x) = A(x) \cdot Q_l(x) + R_l(x)$$

gdje je $R_l = \frac{1}{\det A(x)} \cdot A(x) \cdot R_{l1}$. Iz ove posljednje jednakosti i činjenice da deg (det A)> deg R_{l1}, dobivamo:

$$\deg(R_l) = \deg(R_{l1} \cdot A) - \deg(\det A) \leq \deg R_{l1} + \deg A - \deg(\det A) < \deg A.$$

□

Primijetimo kako kvocijent i ostatak razlikujemo s obzirom na to s koje strane dijelimo polinomijalnu matricu. Osim toga, matrice Q_d, R_d i Q_l, R_l koje zadovoljavaju jednakosti iz prethodnog teorema nisu jedinstvene. Preciznije, ako je C takva polinomijalna matrica da deg $(C \cdot A)$< deg A, tada postoji rastav:

$$B(x) = Q_d^{(2)}(x) \cdot A(x) + R_d^{(2)}(x),$$

gdje je

$$Q_d^{(2)} = Q_d(x) + C(x), R_d^{(2)}(x) = R_d(x) - C(x) \cdot A(x).$$

Dalje, ako je deg $(A \cdot C)$< deg A, rastav je sljedeći:

$$B(x) = A(x) \cdot Q_l^{(2)}(x) + R_l^{(2)}(x),$$

gdje

$$Q_l^{(2)} = Q_l(x) + C(x), R_l^{(2)}(x) = R_l(x) - A(x) \cdot C(x).$$

Matricu Q_d nazivamo desnim kvocijentom, dok matricu Q_l nazivamo lijevim kvocijentom. Analogno tome, matricu R_d desnim ostatkom dijeljenja polinomijalne matrice B polinomijalnom matricom A, dok R_l nazivanom lijevim ostatkom dijeljenja. Kažemo još i da je matrica B djeljiva zdesna matricom A ukoliko je desni ostatak dijeljenja jednak 0, tj $R_d = 0$. Ukoliko vrijedi $R_l = 0$, tada je matrica B djeljiva slijeva matricom A.

Primjer 3.1.3. (vidjeti [3], Primjer 1.3.1.) *Nađimo Q_d, R_d za danu polinomijalnu matricu A:*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje je

$$B(x) = \begin{bmatrix} x & -x \\ -1 & x^2+1 \end{bmatrix}.$$

Najprije je potrebno izračunati determinantu i adjunktu matrice A.

$$\det A = x+1, \ \operatorname{Adj} A(x) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & x \end{bmatrix}.$$

Zatim je potrebno naći sljedeći umnožak:

$$B(x) \cdot \operatorname{Adj} A(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x^2-x \\ x^2 & x^3+x+1 \end{bmatrix}$$

i kao u teoremu 3.1.1.,

$$\begin{bmatrix} 0 & -x^2-x \\ x^2 & x^3+x+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x-1 & x^2-x+2 \end{bmatrix} \cdot (x+1) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Iz gornje izraza je sada lako iščitati matrice Q_d i $R_{d1}(x)$,

$$Q_d(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x \\ x-1 & x^2-x+2 \end{bmatrix}, \quad R_{d1}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Kada znamo matricu $R_{d1}(x)$, lako je doći do matrice $R_d(x)$,

$$R_d(x) = \frac{1}{\det A(x)} \cdot R_{d1}(x) \cdot A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Napomenimo kako teorem 3.1.1 možemo primjeniti i kada det $(A(x)) = 0$ samo za neke x. Dalje, rekli smo kako par matrice Q_d, R_d i Q_l, R_l nije jedinstven. Međutim, postoji iznimka koja je iskazana u sljedećem teoremu.

Teorem 3.1.2. (vidjeti [3], Teorem 1.3.2.) *Neka su A i B kvadratne polinomijalne matrice jednakih redova,*

$$A(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + ... + A_1 x + A_0,$$
$$B(x) = B_m x^m + B_{m-1} x^{m-1} + ... + B_1 x + B_0.$$

Ukoliko je A regularna matrica, tj. $\det A_n \neq 0$, *tada postoje jedinstvene polinomijalne matrice Q_d, R_d za koje vrijedi:*

$$B(x) = Q_d(x) \cdot A(x) + R_d(x).$$

Analogno, postoje i jedinstvene polinomijalne matrice Q_l, R_l koje zadovoljavaju sljedeće:

$$B(x) = A(x) \cdot Q_l(x) + R_l(x).$$

Štoviše, vrijedi i $\deg A > \deg R_d$, $\deg A > \deg R_l$.

Dokaz teorema se može pronaći u [3], a u nastavku će biti navedena dva algoritma za pronalazak matrica $Q_d(x), R_d(x), Q_l(x)$ i $R_l(x)$, koja su zapravo izvedena iz samog dokaza.

1. algoritam

Korak 1: *Odredi inverz* A_n^{-1} *matrice* A_n.

Korak 2: *Pronađi* $B^{(1)}(x)$ *koristeći sljedeću formulu :*

$$B^{(1)}(x) = B(x) - B_m A_n^{-1} x^{m-n} A(x) = {B_{m_1}}^{(1)} x^{m_1} + {B_{m_1-1}}^{(1)} x^{m_1-1} + ... + {B_1}^{(1)} x + {B_0}^{(1)}.$$

Korak 3: *Ukoliko je* deg $B^{(1)} = m_1 \geq n =$ deg A, *računaj dalje:*

$$B^{(2)}(x) = B^{(1)}(x) - B_{m_1}^{(1)} A_n^{-1} x^{m_1-n} A(x) = B_{m_2}^{(2)} x^{m_2} + {B_{m_2-1}}^{(2)} x^{m_2-1} + ... + {B_1}^{(2)} x + {B_0}^{(2)}.$$

Korak 4: *Ukoliko je deg* $B^{(2)} = m_2 \geq n =$ *deg* A, *tada je potrebno u prethodnom izrazu zamijeniti* m_1 *s* m_2, *te* $B^{(1)}$ *s* $B^{(2)}$, *i izračunati* $B^{(3)}$. *Ovaj korak ponavljamo* r *puta, sve dok ne bude zadovoljeno* $m_r < n$.

Korak 5: *Odredimo matrice* Q_d *i* R_d:

$$\begin{aligned} Q_d(x) &= B_m A_n^{-1} x^{m-n} + {B_{m_1}}^{(1)} A_n^{-1} x^{m_1-n} + ... + {B_{m_{r-1}}}^{(r-1)} A_n^{-1} x^{m_{r_1}-n} \\ R_d(x) &= B^{(r)}(x). \end{aligned}$$

Sljedeći algoritam odnosi se na pronalaženje matrica Q_l i R_l.

2. algoritam

Korak 1: *Odredi inverz* A_n^{-1} *matrice* A_n.

Korak 2: *Zatim pronađi* $C^{(1)}(x)$ *preko sljedeće formule:*

$$C^{(1)}(x) = B(x) - A A_n^{-1} B_m x^{m-n} = {C_{n_1}}^{(1)} x^{(n_1)} + {C_{n_1-1}}^{(1)} x^{(n_1-1)} + ... + {C_1}^{(1)} x + {C_0}^{(1)}.$$

Korak 3: *Ukolko je deg* $C^{(1)} \geq$ *deg* A, *tj.* $n_1 > n$, *onda odredi* $C^{(2)}(x)$:

$$C^{(2)}(x) = C^{(1)}(x) - A(x) A_n^{-1} C_{n_1}^{(1)} x^{n_1-n} = C_{n_2}^{(2)} x^{n_2} + ... + {C_1}^{(2)} x + {C_0}^{(1)}.$$

Korak 4: *Ako vrijedi* deg $C^{(2)} = n_2 \geq n =$ deg A, *tada je u prethodnom izrazu potrebno zamijenimo* n_1 *s* n_2, *a* $C^{(1)}$ *s* $C^{(2)}$. *Dalje računamo* $C^{(3)}$ *te ponavljamo ovaj korak* l *puta dokle god ne zadovoljimo* $n_l < n$.

Korak 5: *Odredimo na kraju matrice* Q_l *i* R_l *koristeći sljedeće izraze*:

$$\begin{aligned} Q_l(x) &= A_n^{-1} B_m x^{m-n} + A_n^{-1} {C_{n_1}}^{(1)} x^{n_1-n} + ... + A_n^{-1} {C_{n_{l-1}}}^{(l-1)} x^{n_{l-1}-n} \\ R_l(x) &= C^{(l)}(x). \end{aligned}$$

Pogledajmo sada kroz sljedeći primjer kako se određuju lijeve vrijednosti kvocijenta te ostaci kod dijeljenja koristeći prethodno objašnjene algoritme.

Primjer 3.1.4. (vidjeti [3], Primjer 1.3.2.) *Koristeći polinomijalne matrice A i B, provedimo prethodno opisane algoritme.*

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2+1 & -x \\ x & x^2+x \end{bmatrix}, \quad B(x) = \begin{bmatrix} x^4+x^2+1 & x^3-x^2+2x \\ 2x^2+x & x^3+x+2 \end{bmatrix}.$$

Korak 1:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists A_2^{-1}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Korak 2:

$$B_4 A_2^{-1} x^2 A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x^2 \cdot \begin{bmatrix} x^2+1 & -x \\ x & x^2+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^4+x & -x^3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B^{(1)}(x) = B(x) - B_4 A_2^{-1} x^2 A(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2x^3-x^2+2x \\ 2x^2+x & x^3+x+2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3: *Primijetimo kako je $m_1 = 3$, ${B_3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pa nastavljamo provoditi korak 2. Dakle,*

$$B_3 A_2^{-1} x A(x) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot x \cdot \begin{bmatrix} x^2+1 & -x \\ x & x^2+x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2 & 2x^3+2x^2 \\ x^2 & x^3+x^2 \end{bmatrix},$$

$$B^{(2)}(x) = B^{(1)}(x) - {B_3}^{(1)} A_2^{-1} x A(x)$$

$$= \begin{bmatrix} -2x^2+1 & -3x^2+2x \\ x^2+x & -x^2+x+2 \end{bmatrix}.$$

Korak 4: *Kako je m_2=2 i ${B_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, potrebno je računati dalje:*

$${B_2}^{(2)} A_2^{-1} A(x) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x^2+1 & -x \\ x & x^2+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x^2-3x-2 & -3x^2-x \\ x^2-x+1 & -x^2-2x \end{bmatrix},$$

$$B^{(3)}(x) = B^{(2)}(x) - {B_2}^{(2)} A_2^{-1} A(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 3x+3 & 3x \\ 2x-1 & 3x+2 \end{bmatrix}.$$

Korak 5: *Primjetimo da* $\deg B^{(3)} < \deg A$, *dakle*

$$Q_d(x) = B_4 A_2^{-1} x^2 + {B_3}^{(1)} A_2^{-1} x + {B_3}^{(1)} A_2^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 - 2 & 2x - 3 \\ 1 & x - 1 \end{bmatrix},$$

$$R_d(x) = B^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} 3x + 3 & 3x \\ 2x - 1 & 3x + 2 \end{bmatrix}$$

Pronađimo sada tako i lijeve vrijednosti kvocijenta i ostatka, koristeći algoritam 2.

Korak 1:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad \exists A_2^{-1}, \quad A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Korak 2:

$$A(x) A_2^{-1} B_4 x^2 = \begin{bmatrix} x^2 + 1 & -x \\ x & x^2 + x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot x^2 = \begin{bmatrix} x^4 + x^2 & 0 \\ x^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C^{(1)}(x) = B(x) - A(x) A_2^{-1} B_4 x^2 = \begin{bmatrix} 1 & x^3 - x^2 + 2x \\ -x^3 + 2x^2 + x & x^3 + x + 2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3: *Kako je* $n_1 = 3$, ${C_3}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, *nastavljamo dalje i računamo sljedeće,*

$$A(x) A_2^{-1} {C_3}^{(1)} x = \begin{bmatrix} x^2 + 1 & -x \\ x & x^2 + x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot x = \begin{bmatrix} x^2 & x^3 - x^2 x \\ -x^3 - x^2 & x^3 + 2x^2 \end{bmatrix},$$

$$C^{(2)}(x) = C^{(1)}(x) - A(x) A_2^{-1} {C_3}^{(1)} x$$

$$= \begin{bmatrix} -x^2 + 1 & x \\ 3x^3 + x & -2x^2 + x + 2 \end{bmatrix}.$$

Korak 4: *Uočimo da* $n_2 = 2$ *i* ${C_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ *pa računamo dalje,*

$$A(x) A_2^{-1} {C_2}^{(2)} = \begin{bmatrix} x^2 + 1 & -x \\ x & x^2 + x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x^2 - 3x - 1 & 2x \\ 3x^2 + 2 & -2x^2 - 2x \end{bmatrix},$$

$$C^{(3)}(x) = C^{(2)}(x) - A(x) A_2^{-1} {C_2}^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} 3x + 2 & -x \\ -x & 3x + 2 \end{bmatrix}.$$

Korak 5: *Kako vrijedi* deg $C^{(3)}$ < deg A *pa dolazimo do traženog,*

$$Q_l(x) = A_2^{-1}B_4x^2 + A_2^{-1}{C_3}^{(1)}x + A_2^{-1}{C_2}^{(2)}$$

$$= \begin{bmatrix} x^2-1 & x \\ -x+3 & x-2 \end{bmatrix},$$

$$R_l(x) = C^{(3)}(x) = \begin{bmatrix} 3x+2 & -x \\ -x & 3x+2 \end{bmatrix}.$$

3.2 Generalizirani Bèzoutov teorem i Hamilton-Cayleyjev teorem

Generalizirani Bèzoutov teorem i Hamilton-Cayleyjev teorem iznimno su važni za polinomijalne matrice. Najprije ćemo iskazati mali Bèzoutov teorem, kako bismo mogli napraviti poveznicu između njega i generaliziranog Bèzoutov teorema, a zatim ćemo se upoznati s Hamilton-Caylejevim teoremom iz kojeg ćemo saznati za jedno važno svojstvo svojstvenog polinoma matrice.
Iskaz malog Bèzoutov teorema preuzet je iz knjige *Elementarna matematika 1*, koju su napisali Boris Pavković i Darko Veljan, dok su generalizirani Bèzoutov teorem te Hamilton-Cayleyjev teorem navedeni po uzoru na knjigu *Polynomial and rational matrices: applications in dynamical systems theory*, autora Tadeusza Kaczoreka.

Teorem 3.2.1. (vidjeti [5], Teorem 5) *(Mali Bèzoutov teorem.)Broj x_1 je nultočka polinoma p onda i samo onda ako je p djeljiv polinomom $q(x) = x - x_1$.*

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [5].

Promatrajmo sada dijeljenje kvadratne polinomijalne matrice

$$F(x) = F_nx^n + F_{n-1}x^{n-1} + ... + F_1 + F_0 \in M_{mn}(\mathbb{C})[x]$$

polinomijalnom matricom prvog stupnja $\hat{A}(x) = [A - xI_m]$, gdje je $F \in M_m(\mathbb{C})[x]$, a I_m jedinična matrica reda m. Desni (lijevi) ostatak kod dijeljenja $F(x)$ s $[A-xI_m]$ je polinomska matrica nultog stupnja, tj. ne ovisi o x.

Teorem 3.2.2. (vidjeti [3], Teorem 1.4.1.)*(Generalizirani Bèzoutov teorem.)Desni, odnosno lijevi ostatak pri dijeljenu matrice F polinomijalnom matricom $\hat{A} \in M_m(\mathbb{C})[x]$ je R_d, odnosno R_l i vrijede sljedeće jednakosti:*

$$R_d = F_d(A) = F_nA^n + F_{n-1}A^{n-1} + ... + F_1A + F_0 \in M_m(\mathbb{C})[x]$$
$$R_l = F_l(A) = A^nF_n + A^{n-1}F_{n-1} + ... + AF_1 + F_0 \in M_m(\mathbb{C})[x].$$

Dokaz. Vodeća matrica $\hat{A}$ je jedinična matrica, a samim time je onda i regularna pa možemo primijeniti teorem 3.1.2. Dakle, prema tom teoremu postoje matrice Q_d i R_d takve da:

$$F(x) = Q_d(x)\hat{A}(x) + R_d(x),$$

i Q_l i R_l takve da:

$$F(x) = \hat{A}(x)Q_l(x) + R_l(x),$$

Kako je deg Q_d= deg Q_l=$m-1$, imamo sljedeće:

$$\begin{aligned}F(x) &= ({Q_d}^{(m-1)}x^{m-1} + {Q_d}^{(m-2)}x^{m-2} + ... + {Q_d}^{(1)}x + {Q_d}^{(0)}) \cdot (A - xI_m) + R_d(x)\\ &= {Q_d}^{(m-1)}x^m + {Q_d}^{(m-2)}x^{m-1} + ... + {Q_d}^{(1)}x^2 + {Q_d}^{(0)}x - ({Q_d}^{(m-1)}Ax^{m-1} +\\ &\quad {Q_d}^{(m-2)}Ax^{m-2} + ... + {Q_d}^{(1)}Ax + {Q_d}^{(0)}A) + R_d(x)\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}F(x) &= (A - xI_m) \cdot (x^{m-1}{Q_d}^{(m-1)} + x^{m-2}{Q_d}^{(m-2)} + ... + x{Q_d}^{(1)} + {Q_d}^{(0)}) + R_l(x)\\ &= x^m{Q_d}^{(m-1)} + x^{m-1}{Q_d}^{(m-2)} + ... + x{Q_d}^{(1)} + {Q_d}^{(0)}x - (x^{m-1}A{Q_d}^{(m-1)} +\\ &\quad x^{m-2}A{Q_d}^{(m-2)} + ... + xA{Q_d}^{(1)} + A{Q_d}^{(0)}) + R_l(x).\end{aligned}$$

Supstituirajmo sada matricu A umjesto konstante x i dobivamo:

$$\begin{aligned}F_d(A) &= {Q_d}^{(m-1)}A^m + {Q_d}^{(m-2)}A^{m-1} + ... + {Q_d}^{(1)}A^2 + {Q_d}^{(0)}A - ({Q_d}^{(m-1)}A^m +\\ &\quad {Q_d}^{(m-2)}A^{m-1} + ... + {Q_d}^{(1)}A^2 + {Q_d}^{(0)}A) + R_d(A)\\ &= R_d(A),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_l(A) &= A^m{Q_d}^{(m-1)} + A^{m-1}{Q_d}^{(m-2)} + ... + A^2{Q_d}^{(1)} + A{Q_d}^{(0)}x - (A^m{Q_d}^{(m-1)} +\\ &\quad A^{m-1}{Q_d}^{(m-2)} + ... + A^2{Q_d}^{(1)} + A{Q_d}^{(0)}) + R_l(A)\\ &= R_l(A)\end{aligned}$$

□

Lako se vidi kako je polinomijalna matrica $F \in M_m(\mathbb{C})[x]$ djeljiva je zdesna polinomijalnom matricom $\hat{A}$ onda i samo onda ako je $F_d(A) = 0$. S druge strane, F je djeljiva slijeva polinomijalnom matricom $\hat{A}$ onda i samo onda ako je $F_l(A) = 0$.

Teorem 3.2.3. (vidjeti [3], Teorem 1.4.2.) *(Hamilton-Cayleyjev teorem.) Svaka kvadratna matrica A reda n zadovoljava vlastitu karakterističnu jednadžbu:*

$$k_A(A) = A^n + a_{n-1}A^{n-1} + ... + a_1A + a_0I_n = 0$$

gdje je $k_A(x) = \det \hat{A}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$.

Dokaz. Za potrebe dokaza, prisjetimo se sljedećeg svojstva koje vrijedi za adjunktu i inverz matrice:

1. $\hat{A}(x) \cdot \mathrm{Adj}\,\hat{A}(x) = k_A(x)I_n$
2. $\mathrm{Adj}\,\hat{A}(x) \cdot \hat{A}(x) = k_A(x)I_n.$

Dakle, primijetimo kako je polinomijalna matrica k_AI_n djeljiva zdesna, tj. djeljiva slijeva matricom $\hat{A}$. Prema Bèzoutovom teoremu mora vrijediti:

$$F_d(A) = F_l(A) = 0$$

pri čemu je $F(x) = k_A(x)I_n$. Stoga, zaključujemo da vrijedi jednadžba iz iskaza teorema. □

Primjer 3.2.1. *Zadana je sljedeća matrica* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$. *Svojstveni polinom matrice* A *je*

$$k_A(x) = \det[A - xI_2] = \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 1 & 5-x \end{vmatrix} = x^2 - 8x + 12.$$

Uvrstimo sada matricu A *umjesto* x *u svojstveni polinom* $k_A(x)$:

$$k_A(A) = A^2 - 8A - 12I_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^2 - 8 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} - 12 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4 Elementarne transformacije, linearna nezavisnost i rang polinomijalnim matricama

U četvrtom poglavlju ovog rada definiramo elementarne transformacije, linearna nezavisnost te rang za polinomijalne matrice. Definicije, kao i priloženi teoremi i neki rezultati rađeni su po uzoru na knjigu *Polynomial and rational matrices: applications in dynamical systems theory*, autora Tadeusza Kaczoreka.

4.1 Elementarne tranfsormacije nad polinomijalnim matricama

Najprije ćemo navesti definiciju elementarnih transformacija.

Definicija 4.1.1. *Operacije nad polinomijalnom matricom $A \in M_{mn}\mathbb{C}[x]$ poput:*

1. *množenja i-tog retka ili stupca skalarom različitim od nule,*
2. *pridruživanja i-tom retku ili stupcu j-ti redak ili stupac koji je prethodno pomnožen bilo kojim polinomom p,*
3. *zamjene mjesta bilo kojih dvaju redaka ili stupaca*

nazivamo ***elementarnim transformacijama*** *nad polinomijalnom matricom $A \in M_{mn}\mathbb{C}[x]$.*

Uvedimo sljedeću notaciju:

- $R[i \times c] \quad \to \quad$ množenje i-tog retka brojem $c \neq 0$
- $R[i + j \times p] \quad \to \quad$ dodavanje i-tom retku j-ti redak koji je prethodno pomnožen polinomom p
- $R[i, j] \quad \to \quad$ zamjena i-tog i j-tog retka
- $S[i \times c] \quad \to \quad$ množenje i-tog stupca brojem $c \neq 0$
- $S[i + j \times p] \quad \to \quad$ dodavanje i-tom stupcu j-ti stupac pomnožen polinomom p
- $S[i, j] \quad \to \quad$ zamjena i-tog i j-tog stupca.

Elementarne transformacije nad polinomijalnim matricama su važne zato što dopuštaju preslikavanje polinomijalnih matrica u jednostavnije oblike, kao što su to trokutasti i dijagonalni oblici.

4.2 Linearna nezavisnost polinomijalnih matrica

U ovom potpoglavlju promatramo $i-$ti stupac polinomijalne matrice $A \in M_{mn}(\mathbb{R})[x]$ u oznaci $a_i = a_i(x), i = 1, ..., n$. Te stupce gledamo kao elemente m-dimenzionalnog vektorskog prostora, $a_i \in \mathbb{R}^m[x]$.

Definicija 4.2.1. *Vektore $a_i \in \mathbb{R}^n[x], i = 1, ..., n$ zovemo* ***linearno nezavisnim*** *vektorima nad poljem racionalnih funkcija $\mathbb{R}(x)$ onda i samo onda ukoliko postoje racionalne funkcije $w_i = w_i(x) \in \mathbb{R}(x)$, pri čemu sve racionalne funkcije nisu jednake nul-funkcijama, takve da:*

$$w_1a_1 + w_2a_2 + ... + w_na_n = 0. \tag{10}$$

Drugim riječima, vektori a_i su linearno nezavisni nad poljem racionalnih funkcija ukoliko (10) implicira da $w_i = 0$ za $i = 1, ..., n$.

Primjer 4.2.1. *Provjerimo jesu li dani polinomijalni vektori $a_1(x)$, $a_2(x)$ linearno zavisni.*

$$a_1(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}, a_2(x) = \begin{bmatrix} x \\ 1 + x^2 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$w_1(x)a_1(x) + w_2(x)a_2(x) = 0, \quad w_1, w_2 \in \mathbb{R}(x)$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} w_1(x) + \begin{bmatrix} x \\ 1 + x^2 \end{bmatrix} w_2(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 + 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Uočimo sljedeće,

$$\begin{vmatrix} 1 & x \\ x & x^2 + 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \qquad \Rightarrow \qquad \exists \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 + 1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Stoga,

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 + 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Primijetimo kako je $w_1 = w_2 = 0$ pa možemo sa sigurnošću tvrditi linearnu nezavisnost danih polinomijalnih vektora.

Definicija 4.2.2. *Polinomijalne vektore $b_i \in \mathbb{R}^n[x], i = 1, ..., n$ koji su linearno nezavisni nad poljem racionalnih funkcija i za koje postoji proizvoljni vektor $a \in \mathbb{R}^n[x]$ kojeg možemo zapisati kao linearnu kombinaciju vektora b_i, tj.:*

$$a = p_1 b_1 + p_2 b_2 + ... + p_n b_n,$$

*gdje su $p_i \in \mathbb{R}[x], i = 1, ..., n$, zovemo **bazom prostora** $\mathbb{R}^n[x]$.*

Vrijedi napomenuti kako za jedan vektorski prostor postoji više različitih baza.

4.3 Rang polinomijalne matrice

Definirajmo i rang polinomijalne matrice te neke rezultate vezane uz njega.

Definicija 4.3.1. *Broj linearno nezavisnih redaka, odnosno stupaca, polinomijalne matrice $A(x) \in M_{mn}(\mathbb{R})[x]$ nazivamo **rangom** polinomijalne matrice.*

Rang polinomijalne matrice $A(x) \in M_{mn}(\mathbb{R})[x]$ također može biti definiran i kao najveći red minore koja je nenul-polinom matrice A. Osim toga, za rang matrice $A(x) \in M_{mn}(\mathbb{R})[x]$ vrijedi:

$$\operatorname{rang} A \leq \min(m, n).$$

tj, rang matrice ne može biti veći od broja redaka n ili broja stupaca m. Ukoliko kvadratna matrica $A(x) \in M_n(\mathbb{R})[x]$ ima puni rang, tj. rang $A = n$, tada je determinanta matrice A nenul polinom $w(x)$,tj.

$$\det A(x) = w(x) \neq 0.$$

Teorem 4.3.1. (vidjeti [3], Teorem 1.6.1.) *Primijenimo li elementarne transformacije nad polinomijalnom matricom A, rang polinomijalne matrice A neće se promijeniti.*

Dokaz ovog teorema se može pronaći u [3].

Primjer 4.3.1. *Promatrajmo sljedeću polinomijalnu matricu:*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2+1 \end{bmatrix}$$

Sjetimo se kako smo već proveli provjeru linearne nezavisnosti za stupce $\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$ *i* $\begin{bmatrix} x \\ x^2+1 \end{bmatrix}$ *i dobili kako su stupci matrice $A(x)$ linearno nezavisni. Stoga, znamo da matrica A ima puni rang, tj.* $\operatorname{rang} A = 2$.
Primijenimo sada operaciju $R[2+1\times(-x)]$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo kako i matrica $R[2+1\times(-x)]=\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *ima puni rang, tj.*

$$\operatorname{rang}(R[2+1\times(-x)]) = 2 = \operatorname{rang}(A).$$

Dakle, rang matrice A nije promijenjen provođenjem elementarnih transformacija.

5 Smithova kanonska forma, elementarni dijelitelji i nultočke polinomijalnih matrica

Ovo poglavlje sadrži neke osnovne definicije i teorema vezane uz Smithovu kanonsku formu, elementarne dijelitelje te nultočke polinomijalnih matrica. Priložene definicije i teoremi preuzeti su također kod autora Tadeusza Kaczoreka iz njegove knjige *Polynomial and rational matrices: applications in dynamical systems theory.*

5.1 Smithova kanonska forma

Smithova kanonska forma je normalna forma matrice čiji elementi su polinomi. U ovom poglavlju promatrat ćemo matricu $A(x) \in M_{mn}(\mathbb{C})[x]$ koja ima rang r.

Definicija 5.1.1. *Sljedeći oblik polinomijalne matrice $A_s \in M_{mn}(\mathbb{C})[x]$*

$$A_s(x) = \begin{bmatrix} i_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_2(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i_r(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $r \leq \min\{m,n\}$, $i_1, i_2, ..., i_r$ nenul polinomi te su vodeći koeficijenti polinoma $i_1, i_2, ..., i_r$ jednaki jedan, a polinom i_{k+1} je djeljiv polinomom i_k, gdje $k = 1, ..., r-1$, nazivamo ***Smithovom kanonskom formom****. Za polinome $i_1, i_2, ..., i_r$ kažemo da su to* ***invarijantni polinomi****.*

Teorem 5.1.1. (vidjeti [3], Teorem 1.8.1.) *Za proizvoljnu matricu $A \in M_{mn}(\mathbb{C})[x]$ postoji njoj ekvivalentna Smithova kanonska forma.*

Dokaz. Pronađimo najprije nenul element matrice A i premještanjem redaka i stupaca postavimo ga na poziciju $(1,1)$ te ga imenujmo $\overline{a}_{11}$. Zatim, pretpostavimo kako sve elemente matrice A možemo podijeliti s $\overline{a}_{11}$, bez ostatka. Podijelimo li sve elemente prvog stupca $(\overline{a}_{i1})$ i sve elemente prvog retka $(\overline{a}_{1j})$ elementom $\overline{a}_{11}$, dolazimo do sljedećeg:

$$\begin{aligned} \overline{a_{i1}}(x) &= \overline{a}_{11}(x) q_{i1}(x), \qquad & i = 2, 3, ..., m, \\ \overline{a_{1j}}(x) &= \overline{a}_{11}(x) q_{1j}(x), \qquad & j = 2, 3, ..., n, \end{aligned}$$

gdje je q_{i1} kvocijent dijeljenja $\overline{a_{i1}}$ s $\overline{a}_{11}$, q_{1j} kvocijent dijeljenja $\overline{a_{1j}}$ s $\overline{a}_{11}$. Oduzmimo sada od i-tog retka prvi redak koji smo prethodno pomnožili s q_{i1}, te od j-tog stupca prvi stupac pomnožen s q_{1j}, kako bi dobili sljedeću matricu:

$$\begin{bmatrix} \overline{a}_{11}(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \overline{a}_{22}(x) & \dots & \overline{a}_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \overline{a}_{m2}(x) & \dots & \overline{a}_{mn}(x) \end{bmatrix}.$$

Svi elementi u gornjoj matrici su djeljivi s $\overline{a}_{11}$. Ukoliko koeficijent najveće potencije polinoma $\overline{a}_{11}$ nije jednak jedan, tada treba pomnožiti prvi redak ili prvi stupac recipročnom vrijednošću

vodećeg koeficijenta kak bismo to postigli da koeficijent najveće potencije polinoma $\overline{a}_{11}$ bude jedan.
Dalje, pretpostavimo sada da nisu svi elementi matrice A djeljivi s $\overline{a}_{11}$ bez ostatka. Štoviše, pretpostavimo da su takvi elementi u prvom retku i/ili prvom stupcu. Podijelimo li te elemente s $\overline{a}_{11}$, imamo:

$$\begin{aligned} \overline{a_{1j}}(x) &= \overline{a}_{11}(x)q_{1j}(x) + r_{1j}, \qquad & i &= 2,3,...,n, \\ \overline{a_{i1}}(x) &= \overline{a}_{11}(x)q_{i1}(x) + r_{i1}, \qquad & j &= 2,3,...,m, \end{aligned}$$

gdje je q_{i1} kvocijent dijeljenja, a r_{i1} ostatak pri dijeljenju $\overline{a_{i1}}$ s $\overline{a}_{11}$, te q_{1j} kvocijent dijeljenja i r_{1j} ostatak pri dijeljenju $\overline{a_{1j}}$ s $\overline{a}_{11}$. Oduzimajući od i-tog retka (j-tog stupca) prvi redak (stupac) pomnožen s q_{i1} (s q_{1j}), element $\overline{a}_{i1}$ ($\overline{a}_{i1}$) zamijenimo s ostatkom $r_{i1}(r_{1j})$. Sada treba među tim ostacima pronaći polinom najmanjeg stupnja i međusobno mijenjajući retke ili stupce, postaviti taj element na poziciju (1,1) i označiti ga s $\overline{r}_{11}$. Ukoliko svi elementi prvog retka i prvog stupca nisu djeljivi s $\overline{r}_{11}$ bez ostatka, potrebno je ponoviti ovaj postupak uzimajući umjesto polinoma $\overline{a}_{11}$ polinom $\overline{r}_{11}$. Vrijedi:

$$\deg \overline{r}_{11} < \deg \overline{a}_{11}.$$

Provedbom konačnog broja koraka, dobivamo element $\hat{a}_{11}$ na poziciji $(1,1)$, dok su preostali elementi u prvom retku i u prvom stupcu djeljivi su s njim.
Međutim, pretpostavimo da u dobivenoj matrici $\exists\ \hat{a}_{ik}$ na poziciji (i,k) gdje $i,k \neq 1$ koji nije djeljiv s $\hat{a}_{11}$. Onda za $\hat{a}_{11}$ vrijedi:

$$\hat{a}_{ik} = \hat{a}_{11}q_{ik} + r_{ik}.$$

Dodajmo sada i-ti redak prvom retku i pomnožimo prvi stupac s odgovarajućim polinomom te ga dodajmo k-tom stupcu na mjestu $(1,k)$. Sada se na mjestu $(1,k)$ nalazi polinom r_{ik} manjeg stupnja od polinoma $\hat{a}_{11}$. Potrebno je sada zamijeniti k-ti stupac s prvim i ponovno provesti opisani postupak nad prvim retkom i prvim stupcem. Ukoliko je postupak potrebno ponoviti još jednom, koristimo neki drugi element koji se ne nalazi u prvom retku ni u prvom stupcu.

Stajemo kada su svi elementi u matrici djeljivi elementom koji se nalazi na mjestu (1,1). Primjetimo da polinomu na poziciji (1,1) ovim postupkom stalno smanjujemo njegov stupanj, što će rezultirati tome da će element na poziciji (1,1) biti konstantan polinom. Stoga, na kraju prvi redak i stupac izvan dijagonale možemo poništiti, a u svi elementi submatrici, koju smo dobili uklanjanjem prvog retka i prvog stupca, bit će djeljivi s elementom na mjestu (1, 1). Poslije toga potrebno je ponoviti postupak na matrici koja ima red za jedan manji od početne itd. te u konačnici dolazimo do matrice u Smithovoj kanonskoj formi. □

Jedinstvenost Smithove formule sljedi direktno iz teorema 5.1.1. Štoviše, iz ovog dokaza proizlazi i algoritam za određivanje Smithove kanonske forme. Algoritam ćemo s ilustrirati sljedećim primjerom.

Primjer 5.1.1. (vidjeti [3], Primjer 1.9.1.)

$$A(x) = \begin{bmatrix} (x+2)^2 & (x+2)\cdot(x+3) & x+2 \\ (x+2)\cdot(x+3) & (x+2)^2 & x+3 \end{bmatrix}$$

Kako bismo transformirali danu matricu A u Smithovu kanonsku formu, potrebno je provest sljedeće transformacije:

Korak 1: *Provedimo $S[1,3]$ kako bismo zamijenili prvi i treći stupac:*

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} x+2 & (x+2)\cdot(x+3) & (x+2)^2 \\ x+3 & (x+2)^2 & (x+2)\cdot(x+3) \end{bmatrix}.$$

Uočimo kako su sada svi elementi matrice $A_1(x)$, osim elementa na poziciji (2,1), djeljivi bez ostatka polinomom $x+2$, koji se nalazi na poziciji (1,1).

Korak 2: *Kako je:*

$$\frac{x+3}{x+2} = 1 + \frac{1}{x+2},$$

provodimo transformaciju $R[2+1\times(-1)]$ i dobivamo sljedeću matricu:

$$A_2(x) = \begin{bmatrix} x+2 & (x+2)\cdot(x+3) & (x+2)^2 \\ 1 & -(x+2) & x+2 \end{bmatrix}.$$

Korak 3: *Sada provedimo $R[1,2]$ kako bismo konstantan polinom iz pozicije $(2,1)$ premjestili na poziciju $(1,1)$:*

$$A_3(x) = \begin{bmatrix} 1 & -(x+2) & x+2 \\ x+2 & (x+2)\cdot(x+3) & (x+2)^2 \end{bmatrix}.$$

Korak 4: *Nakon primjenjenih transformacija $S[2+1\times(x+2)]$ i $S[3+1\times(-x-2)]$, dolazimo do sljedećeg:*

$$A_4(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x+2 & (x+2)\cdot(2x+5) & 0 \end{bmatrix}.$$

Korak 5: *Provedimo sada transformaciju $R[2+1\times(-x-2)]$ i $S[2\times\frac{1}{2}]$:*

$$A_5(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x+2)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}.$$

Uočimo kako je matrica $A_5(x)$ matrica u Smithovoj kanonskoj formi.

Iz činjenice da $i_k | i_{k+1}, k = 1, ..., r-1$ slijedi da postoje polinomi $d_1, d_2, ..., d_r$ tako da je:

$$i_1 = d_1, i_2 = d_1 d_2, \ldots, i_r = d_1 d_2 \cdot \ldots \cdot d_r.$$

Znajući ovo, matricu iz definicije 5.1.1 sada možemo zapisati i na sljedeći način:

$$A_s(x) = \begin{bmatrix} d_1(x) & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_1(x)d_2(x) & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & d_1(x)d_2(x)\cdot ... \cdot d_r(x) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}$$

Teorem 5.1.2. (vidjeti [3], Teorem 1.8.2.) *Invarijantni polinomi* $i_1, i_2, ..., i_r$ *matrice* $A_s(x)$ *su jednoznačno određeni sljedećom formulom:*

$$i_k(x) = \frac{D_k(x)}{D_{k-1}(x)} \quad za \quad k = 1, 2, ..., r,$$

gdje je D_k *najveći zajednički djelitelj svih minora stupnja* k *matrice* A *i vrijedi* $D_0(x) = 1$.

Dokaz teorema se može pronaći u [3].

5.2 Elementarni djelitelji polinomijalnih matrica

Promatrat ćemo matricu $A \in M_{mn}(\mathbb{C})[x]$ za koju vrijedi rang $A = r$ i koja ima Smithovu kanonsku formu iz definicije 5.1.1. Dalje, nekaj je k-ti invarijantni polinom matrice A oblika:

$$i_k(x) = (x - x_1)^{m_{k1}} \cdot (x - x_2)^{m_{k2}} \cdot ... \cdot (x - x_q)^{m_{kq}}$$

gdje su $x_1, x_2, ..., x_q$ sve moguće nultočke invarijantnih polinoma $i_1, ..., i_r$, a iz djeljivosti polinoma i_{k+1} slijedi:

$$m_{r,1},\, m_{r-1,1} ... m_{1,1} \geq 0 \quad \text{i} \quad m_{r,q} \geq m_{r-1,q} \geq ... \geq m_{1,q} \geq 0.$$

Ako je primjerice $i_1(x) = 1$, tada $m_{11} = m_{12} = ... = m_{1q} = 0$.

Definicija 5.2.1. *Svaki od sljedećih polinoma (različiti od 1)*

$$p_{11}(x) = (x - x_1)^{m_{11}},\ p_{12}(x) = (x - x_2)^{m_{12}}, ..., p_{rq}(x) = (x - x_q)^{m_{rq}}$$

koji se pojavljuje u invarijantnim polinomima nazivamo ***elementarnim djeliteljem matrice*** *A.*

Napomenimo kako su elementarni djelitelji polinomijanih matrica jednoznačno određeni. Ova činjenica je zapravo posljedica jedinstvenosti invarijantnih polinom polinomijalnih matrica.
Znamo li tip, rang i elementarne djelitelje matrice, možemo pronaći i jedinstvenu Smithovu kanonsku formu matrice. Ova tvrdnja demonstrirana je sljedećim primjerom.

Primjer 5.2.1. *Neka su dani sljedeći elementarni djelitelji polinomijalne matrice* $A \in \mathbb{R}^4$, rang *A=4:*

$$x + 3,\ (x + 3) \cdot (x - 4),\ (x - 4)^2,\ (x - 7).$$

Smithova kanonska forma polinomijalne matrice A je tada :

$$A_s(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (x+3)\cdot(x-4) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x+3)\cdot(x-4)^2\cdot(x-7) \end{bmatrix}.$$

Neka je dana polinomijalna blok-dijagonalna matrica sljedećeg oblika

$$A(x) = \text{diag}[A_1(x), A_2(x)] = \begin{bmatrix} A_1(x) & 0 \\ 0 & A_2(x) \end{bmatrix}.$$

i neka $(A_k)_s$ Smithova kanonska forma matrice $A_k, k = 1, 2$, a njezini elementarni djelitelji sljedeći:

$$p_{(1,1;k)}(x) = (x - x_{1,k})^{m(1,1;k)}, ..., p_{(r(k),q((k);k)}(x) = (x - x_{q(k),k})^{m(r(k),q(k);k)}.$$

Ukoliko se invarijantni polinomi matrica A_1 i A_2 mogu poredati u niz tako da je k-ti polinom djeljiv $(k-1)$-im polinomom,tada je skup elementarnih djelitelja gornje blok-dijagonalne matrice unija skupova elementarnih djelitelja matrice A_k, $k = 1, 2$.

Primjer 5.2.2. (vidjeti [3], Primjer 1.9.1.) *Polinomijalnoj blok-dijagonalnoj matrici $A = \mathrm{diag}[A_1, A_2]$ pri čemu je:*

$$A_1(x) = \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{bmatrix}, \ A_2(x) = \begin{bmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-2 \end{bmatrix}$$

odredimo elementarne djelitelje.

Prvo je potrebno odrediti Smithovu kanonsku formu matrica A_1 i A_2. Lako se provjeri da su Smithove kanonske forme matrica sljedeće:

$$A_{1s}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^3 \end{bmatrix}, \ A_{2s}(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (x-1)^2 \cdot (x-2) \end{bmatrix}.$$

Dakle, elementarni djelitelji matrica A_1 i A_2 su:

$$(x-1)^3, \ (x-1)^2, \ (x-2).$$

Stoga, Smithova kanonska forma blok-dijagonalne matrice A je

$$A_s(x) = \mathrm{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ (x-1)^2 \ (x-1)^3 \ (x-2)].$$

5.3 Nultočke polinomijalnih matrica

Jednako kao i polinomi, polinomijalne matrice također imaju nultočke. Međutim, definicija nultočke polinomijanih matrice se ipak nešto razlikuje od definicije nultočaka polinoma.

Definicija 5.3.1. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{C})[x]$ polinomijalna matrica takva da* rang *A=r, a pripadna Smithova kanonska forma matrice A:*

$$A_s(x) = \begin{bmatrix} i_1(x) & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & i_2(x) & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & i_r(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Nultočke polinoma:

$$D_r(x) = i_1(x)i_2(x)i_3(x)...i_r(x)$$

zovemo ***nultočkama polinomijalne matrice*** *A.*

Napomenimo kako možemo nultočke polinomijalne matrice A tumačiti i kao vrijednosti varijable x za koje matrica A nema puni rang. Primjerice, osvrnemo li se na primjer 5.1.1. gdje je bila dana sljedeća matrica A:

$$A(x) = \begin{bmatrix} (x+2)^2 & (x+2)\cdot(x+3) & x+2 \\ (x+2)\cdot(x+3) & (x+2)^2 & x+3 \end{bmatrix}$$

kojoj smo pronašli odgovarajući Smithovu kanonsku formu:

$$A_s(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (x+2)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

vidimo da su nultočke matrice A:

$$x_1 = -2,\ x_2 = -\frac{5}{2}$$

zato što su to nultočke polinoma

$$D_r(x) = i_1(x)i_2(x) = (x+2)\left(x+\frac{5}{2}\right).$$

I lako se može provjeriti kako za ove vrijednost varijable x matrica A ima rang jedan, dok je matrica A inače punog ranga.
S druge strane, ukoliko je polinomijalna matrica A kvadratna i punog ranga, rang $A = n$, onda vrijedi sljedeća jednakost:

$$\det A(x) = c \cdot D_r(x)$$

gdje je c konstantni koeficijent neovisan o x i nultočke matrice se podudaraju s korijenima jednadžbe $\det A(x) = 0$. Primjerice, matrica $A_1(x)$ iz primjera 5.2.2. je kvadratna matrica punog ranga stoga njezine nultočke možemo naći rješavajući jednadžbu $\det A_1(x) = 0$. Dakle,

$$\det A_1(x) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ 0 & x-1 & 1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{vmatrix} = (x-1)^3$$

pa matrica A_1 ima nultočku 1 kratnosti 3. Uostalom, vidimo i da je $D_r(x) = (x-1)^3$ za matricu A_1.

Teorem 5.3.1. (vidjeti [3], Teorem 1.9.1.) *Neka je dana polinomijalna matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{C})[x]$ takva da je $\operatorname{rang}(A) = r \leq \min\{m,n\}$. Tada vrijedi:*

$$\operatorname{rang} A(x) = \begin{cases} r, & x \notin \sigma_A \\ r - d_i, & x = x_i \in \sigma_A \end{cases}$$

gdje je σ_A skup nultočaka matrice A, a d_i je broj različitih elementarnih djelitelja koji sadrže faktor $(x - x_i)$.

Dokaz teorema može se pronaći u [3].

Primjer 5.3.1. *Promatrajmo sljedeću polinomijalnu matricu:*

$$A(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (x+1)(x-5)(x+2) \end{bmatrix}.$$

Primjetimo da je dana matrica A zapravo već zapisana u Smithovoj kanonskoj formi, tj. da vrijedi $A_s(x) = A(x)$. Dalje, uočimo kako su elementarni djelitelji:

$$(x-5),\ (x+2),\ (x+1),$$

a nultočke: 5,-2,-1 te da vrijedi sljedeće:

$$\text{rang } A(5) = 2 < 4,\ \text{rang } A(-2) = 3 < 4, \text{rang } A(-1) = 1 < 4.$$

6 Primjena polinomijalnih matrica

U posljednjem poglavlju navedena je jedna od primjene polinomijalnih matrica. Ova primjena obrađena je po uzoru na knjigu *Multirate and wavelet signal processing*, koju je napisao Bruce W. Suter.

6.1 *MIMO* sustavi

Polinomijalne matrice igraju vrlo važnu ulogu u širokopojasnim sustavima s više ulaza i više izlaza, odnosno takozvanim *MIMO* sustavima. *MIMO* je dakle skraćenica za engleski pojam *Multiple-input multiple-output* koji se odnosi na matematički model komunikacijskog sustava s više prijamnih i više odašiljačkih antena. Antene na svakom kraju komunikacijskog kruga kombinirane su kako bi se minimizirale pogreške, optimizirala brzina podataka i poboljšao kapacitet radio prijenosa omogućavajući podacima da putuju kroz više putova signala u isto vrijeme.

Definicija 6.1.1. *Neka je $x(n)$ ulazni vektor duljine r, tj.*

$$x(n) = [x_0(n), \cdots, x_{r-1}(n)]^T$$

i neka je $y(n)$ izlazni vektor duljine p,

$$y(n) = [y_0(n), \cdots, y_{p-1}(n)]^T.$$

*Tada je **MIMO sustav** opisan sljedećim izrazom*

$$Y(z) = C(z)X(z)$$

gdje je

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n},$$
$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n},$$

*a $[C(z)]_{km}$ označava prijenosnu funkciju od m-tog ulaza do k-tog izlaza. Matricu $C(z)$ nazivamo **prijenosnom matricom sustava**.*

Za *MIMO* sustav od p antena za odašiljanje i r prijemnih antena, $p \times r$ kanal se može predstaviti kao polinomijalna matrica, $C(z)$. *MIMO* kanal je složena matrica formirana od prijenosnih funkcija između pojedinih parova antena. Dalje, kako bismo shvatili ulogu polinomijalnim matrica u ovim sustavima, prisjetit ćemo se dekompozicije na singularne vrijednosti matrice (eng.*singular value decomposition*, SVD).

6.2 Dekompozicija na singularne vrijednosti matrice

Definicija dekompozicije na singularne vrijednosti preuzeta je iz knjige *Numerička matematika*, autora Rudolfa Scitovskog. Teorem vezan uz dekompoziciju na singularne vrijednosti preuzet iz matematičkog časopisa *Math.e*, iz članka pod nazivom *Dekompozicija matrice na* *singularne vrijednosti*, autora Andreja Novaka i Danijela Pavlovića, dok je sama primjena dekompozicije na singularne vrijednosti u *MIMO* sustavima rađena po uzoru na članak *Power and area minimization for multidimensional signal processing,* koji su napisali Marković Dejan, Nikolić Borivoje i Robert W. Brodersen.

Definicija 6.2.1. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, $m, n \in \mathbb{N}$. Rastav matrice*

$$A = U\Sigma V^*$$

nazivamo ***dekompozicijom na singularne vrijednosti*** *matrice A, ako su $U \in M_m(\mathbb{F})$ i $V \in M_n(\mathbb{F})$ unitarne matrice, a $\Sigma \in M_{mn}(\mathbb{F})$ dijagonalna*

$$\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\min(m,n)}),$$

pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$, a brojeve $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\min(m,n)}$ nazivamo ***singularnim vrijednostima*** *matrice A. Stupce matrice U nazivamo* ***lijevi****, a stupce matrice V nazivamo* ***desni singularni vektori*** *matrice A.*

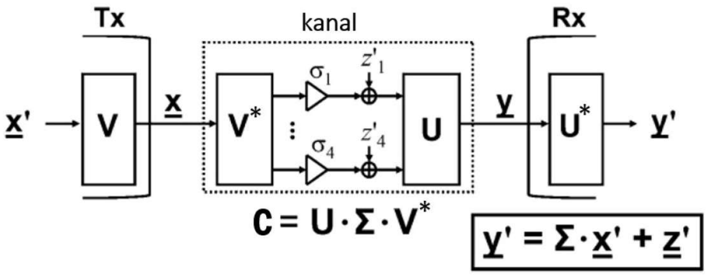
Napomenimo kako SVD postoji za svaku matricu o čemu nam govori i sljedeći teorem, čiji dokaz se može pronaći u [4].

Teorem 6.2.1. (vidjeti [4], Teorem 1) *Ako je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$, tada postoje unitarne matrice $U \in M_m(\mathbb{F})$ i $V \in M_n(\mathbb{F})$ takve da*

$$A = U\Sigma V^*, \ \Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{\min(m,n)}),$$

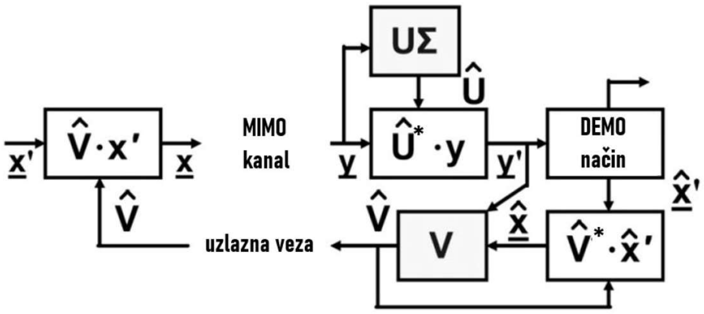
pri čemu vrijedi $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_{\min(m,n)} \geq 0$.

Dekompozicija singularnih vrijednosti je važan je alat za adaptivnu obradu niza senzora. Primjenjuje se kod određivanja smjera razlučivosti, stabilizirano adaptivno oblikovanje snopa te odvajanje signala. Kako je dekompozicija jedinstvena, pridružene singularne vrijednosti predstavljaju stvarnu energiju povezanu sa svakom od dekoreliranih komponenti tako da se potprostori signala mogu identificirati i odvojiti. Koncept odvajanja kanala temeljenog na SVD-u ilustriran je na *Slici 1.*



Slika 1: (preuzeto iz [2]) *Koncept dekompozicije na singularne vrijednosti primijenjen na matricu C.*

Vektori $\underline{x}$ i $\underline{y}$ predstavljaju simbole za prijenos i prijem, respektivno, a cilj je procijeniti dobitke prostornih podkanala iz $\underline{x}$ i $\underline{y}$ informacija. Matricu kanala C možemo zapisati kao umnožak matrica U, Σ i V^*, gdje su U i V unitarne matrice, a Σ je dijagonalna matrica. SVD također možemo promatrati i kao sastav od tri operacije: rotacije(U), operacije skaliranja (Σ) i još jedne rotacije (V). Dakle, potrebno je procijeniti dobitke prostornih *MIMO* kanala, koji su dani matricom Σ.



Slika 2: (preuzeto iz [2]) *Prilagodljivi SVD algoritam za praćenje slijepih tragova.*

Kada je matrica kanala C djelomično poznata odašiljaču, optimalna strategija je prijenos neovisnih tokova u smjerovima svojstvenim vektorima matrice C^*C. Projekcija moduliranih simbola $\underline{x'}$ na matricu V zapravo usmjerava simbole za prijenos duž vlastitog načina rada takozvanog "kanala u fedingu". Ako se primljeni signal $\underline{y}$ naknadno obrađuje rotiranjem $\underline{y}$ duž matrice U^*, kanal između $\underline{x'}$ i $\underline{y'}$ izgleda potpuno ortogonalno. Dalje, nezavisni tokovi podataka mogu se slati kroz prostorne podkanale s dobicima koji odgovaraju ulazima matrice Σ. Na prijemniku, tokovi podataka stižu ortogonalno bez smetnji između tokova. Dakle, SVD matrice se moraju adaptivno procijeniti za praćenje vremenski promjenjivih uvjeta kanala.

Pronalaženje SVD-a matrice kanala je zadatak višedimenzionalne obrade signala koji se bavi vektorskom i matričnom aritmetikom. *MIMO* tehnologija se koristi za Wi-Fi mreže i staničnu tehnologiju dugoročne evolucije (LTE) i pete generacije (5G) na širokom rasponu tržišta, uključujući provedbu zakona, produkciju televizijskog emitiranja i vladu. Osim toga, često se koristi za komunikaciju velike propusnosti gdje je važno da nema smetnji od mikrovalnih ili RF sustava. Na primjer, često ga koriste službenici prve pomoći koji se ne mogu uvijek osloniti na mobilnu mrežu tijekom nestanka struje ili kada je mobilna mreža preopterećena.

Sažetak

Cilj ovog rada je upoznati se s osnovnim pojmovima, teoremima i rezultatima vezanih uz polinomijalne matrice. U prvom poglavlju rada dan je kratki osvrt na matrice i polinome, kao sastavnog dijela polinomijalnih matrica, dok u drugom poglavlju uvodimo definiciju polinomijalne matrice te osnovne operacije nad njima. Također, u radu su opisani i važniji teoremi kao što su to teoremi vezani uz dijeljenje polinomijalnih matrica, mali Bèzoutov teorem i njegova generalizacija te Hamilton-Cayleyjev teorem. Priloženi su i neki primjeri te algoritmi koji proizlaze iz navedenih teorema. Definirani su i pojmovi: elementarna transformacija, linearna nezavisnost i rang polinomijalnih matrica, koji su zapravo analogni onim definicijama u klasičnom vektorskom prostoru. U radu je obrađena i Smithova kanonska forma polinomijalnih matrica i neki rezultati vezani uz nju. Osim toga, naveden je i algoritam za pronalazak Smithove kanonske forme, koji je potkrepljen i primjerom. U posljednjem poglavlju objašnjenja je jedna od primjena polinomijalnih matrica. Sukladno tome, ukratko su obrađeni širokopojasnim sustavima s više ulaza i više izlaza, *MIMO* sustavi, u kojima se kanal signala može prikazati kao polinomijalna matrica te je navedena i definicija dekompozicije na singularne vrijednosti, koja se koristi kod odvajanja signala i procjene dobivenih informacija.

Ključne riječi: polinomijalna matrica, generalizirani Bèzoutov teorem, Hamilton-Cayleyjev teorem, Smithova kanonska forma, *MIMO* sustavi.

Polynomial matrices

Summary

The aim of this paper is to get acquainted with the basic concepts, theorems and results related to polynomial matrices. In the first chapter of the paper, a brief overview of matrices and polynomials is given, as an integral part of polynomial matrices, while in the second chapter we introduce the definition of polynomial matrices and basic operations on them. Moreover, the paper describes some important theorems, such as theorems related to the division of polynomial matrices, the small Bèzoute theorem and its generalization, and the Hamilton-Cayley theorem. Some examples and algorithms derived from the mentioned theorems are also attached. The terms: elementary transformation, linear independence and rank of polynomial matrices are also defined, which are actually analogous to those definitions in the classical vector space. The paper also deals with Smith's canonical form of polynomial matrices and some results related to it. In addition, an algorithm for finding Smith's canonical form is provided, which is supported by an example. One of the applications of polynomial matrices is explained in the last chapter. Accordingly, broadband systems with multiple inputs and multiple outputs, *MIMO* systems, in which the signal channel can be represented as a polynomial matrix, are briefly discussed. Besides, the definition of singular value decomposition is given, which is used when separating signals and evaluating the obtained information.

Keywords: polynomial matrix, generalized Bèzoute theorem, Hamilton-Cayley theorem, Smith canonical form, *MIMO* systems.

Literatura

[1] D. BAKIĆ, *Linearna algebra,* Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] R.W. BRODERSEN, D. MARKOVIĆ, B. NIKOLIĆ, *Power and area minimization for multidimensional signal processing,* IEEE Journal of Solid-State Circuits 42.4 (2007), 922-934.

[3] T. KACZOREK, *Polynomial and rational matrices: applications in dynamical systems theory,* Springer, London, 2007.

[4] A. NOVAK, D. PAVLOVIĆ, *Dekompozicija matrice na singularne vrijednosti*, Math.e 24.1 (2013), 24-34.

[5] B. PAVKOVIĆ, D. VELJAN, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992.

[6] R. SCITOVSKI, *Numerička matematika*, Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, Osijek, 2015.

[7] B.W. SUTER, *Multirate and wavelet signal processing,* Elsevier, London 1997.

7 Životopis

Rođena sam 26. listopada 1996. godine u Varaždinu, a živim u okolnom selu Trnovec. Pohađala sam osnovnu školu „Trnovec“ te nakon toga upisala „Prvu Gimnaziju Varaždin“, opći smjer. 2015. godine završavam srednju školu te upisujem preddiplomski studij Matematika na Odjelu za matematiku na Sveučilištu u Rijeci. S temom Linearna algebra iza rada GPS-a završavam preddiplomski studij 2019. godine te na jesen upisujem diplomski studij Financijska matematika i statistika na Odjelu za matematiku u Osijeku.