

# IKT i nastava matematike

---

**Derner, Ana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **Josip Juraj Strossmayer University of Osijek, Department of Mathematics / Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, Odjel za matematiku**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:126:676240>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-26**



**mathos**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of School of Applied Mathematics and Informatics](#)



Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Diplomski nastavnički studij matematike i informatike

Ana Derner

# **IKT i nastava matematike**

Diplomski rad

Osijek, 2022.

Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku  
Odjel za matematiku  
Diplomski nastavnički studij matematike i informatike

Ana Derner

# IKT i nastava matematike

Diplomski rad

Mentorica: izv. prof. dr. sc. Ljerka Jukić Matić

Osijek, 2022.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Povijesni pregled pomagala</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Kurikularna reforma "Škola za život"</b>	<b>6</b>
3.1	Kurikulum međupredmetne teme Upotreba informacijske i komunikacijske tehnologije . . . . .	6
3.2	Kurikulum nastavnog predmeta Matematika i tehnologija . . . . .	8
<b>4</b>	<b>Tehnologija u nastavi matematike</b>	<b>10</b>
4.1	Računalo . . . . .	10
4.2	Kalkulator . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Programi i njihova primjena u nastavi matematike</b>	<b>16</b>
5.1	GeoGebra . . . . .	16
5.2	Kahoot . . . . .	32
5.3	Wordwall . . . . .	42

# 1 Uvod

U današnje vrijeme tehnologija se sve brže razvija te je pronašla svoju primjenu u svim segmentima života pa tako i u školi. Korištenjem neke od tehnologija kao što su računalo, pametna ploča, projektor i dr. nastavnici matematike imaju mogućnost svoju nastavu učiniti zanimljivijom te tako učenike potaknuti na rad. Osim toga, korištenjem pravog pomagala učenicima se može olakšati savladavanje gradiva.

Važnost korištenja pomagala pri poučavanju matematike uvidjeli su i naši pretci. Stoga, početak ovog rada donosi kratki povijesni pregled pomagala, od kamenčića kojima su se služili stari Egipćani kako bi dočarali zbrajanje i oduzimanje pa sve do analitičkog stroja koji se smatra pretečom računala. Spominju se i dva pomagla koja su posebna po tome što su svoju primjenu pronašli i dan danas. Prvi je abakus koji se koristi još uvijek u nekim zemljama Dalekog istoka. Drugi je logaritamsko pomično ravnalo poznato još kao šubler ili šiber koji se danas koristi za mjerenje vanjskih i unutarnjih promjera raznih predmeta.

Sljedeće poglavlje odnosi se na kurikularnu reformu "Škola za život", točnije na njezina dva kurikuluma: Kurikulum međupredmetne teme Upotreba informacijske i komunikacijske tehnologije i kurikulum nastavnog predmeta Matematika. Oba kurikuluma kritički se sagledavaju s obzirom na njihovu povezanost s tehnologijom. Navode se njihove domene te se opisuju njihovi ciljevi. Na kraju poglavlja "Kurikulum nastavnog predmeta Matematika i tehnologija" daje se kratki zaključak o korištenju tehnologije u nastavi matematike.

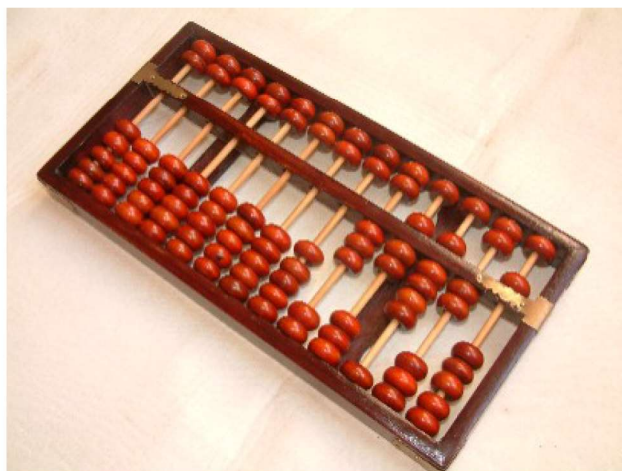
Treće poglavlje odnosi se na dva najčešća pomagala koja se koriste u suvremenoj nastavi matematike: računalo i kalkulator. Za svakoga od njih zasebno se daju smjernice koje bi pomogle nastavnicima odlučiti kada je uredu koristiti računalo ili kalkulator na nastavi. Također to sve je popraćeno primjerima iz različitih područja matematike.

U zadnjem poglavlju između mnoštvo raznih digitalnih alata zbog svoje jednostavnosti i primjene u nastavi matematike obrađena su sljedeća tri: GeoGebra, Kahoot i Wordwall. Za svakog od njih napravljena je kratka recenzija koja između ostalog sadrži i način prijave u dani alat te početak izrade sadržaja. Svaki od njih sadrži i primjer izrađenog sadržaja.

## 2 Povijesni pregled pomagala

Što je zajedničko starim Egipćanima, Pascalu, Leibnizu i Babbageu? Na prvu mogli bi reći da nemaju ništa zajedničko. Nisu živjeli u istom vremenu, različito se zovu, čak dolaze i iz različitih država. Što bi im onda moglo biti zajedničko? Odgovor je jednostavan. Zajednička im je matematika. Svi oni su shvatili da je lakše savladati matematiku ukoliko neki problem vizualiziramo ili ukoliko se fokusiramo na sam problem, a ne na računanje. Zbog toga su nastala mnoga pomagala poput abakusa, Pascaline ili analitičkog stroja.

Oko 5000 g. pr. Kr. stari su Egipćani odlučili koristiti kamenčiće kao pomoć pri zbrajanju i oduzimanju. Nakon toga jedna stvar je vodila k drugoj te je tako nastao abakus, Pascalina, analitički stroj, a sve sa svrhom da se poboljša i olakša računanje. Za abakus možemo biti zahvalni Kinezima koji su ga izumili davne 3000 g. pr. Kr. Osim što se smatra najstarijim pomagalom za računanje, njegova posebnost je i ta što je jednostavan. O tome nam i govori činjenica da se i dan danas koristi u nekim zemljama Dalekog istoka, dok je kod nas svoju primjenu pronašao u vrtićima i nižim razredima osnovne škole .([1])



Slika 1: Abakus (Izvor: <https://bit.ly/39ADBY1>)

Tijekom godina potrebe ljudi su se promijenile te abakus više nije bio dovoljno dobro pomagalo. Bilo je mnogo pokušaja izrade mehaničkih kalkulatora, ali koliko je bilo pokušaja gotovo toliko je bilo i nedostataka u njima. Valja spomenuti Pascalinu, mehanički stroj koji je mogao brzo zbrajati i oduzimati velike brojeve, ali nije bio dovoljno precizan.



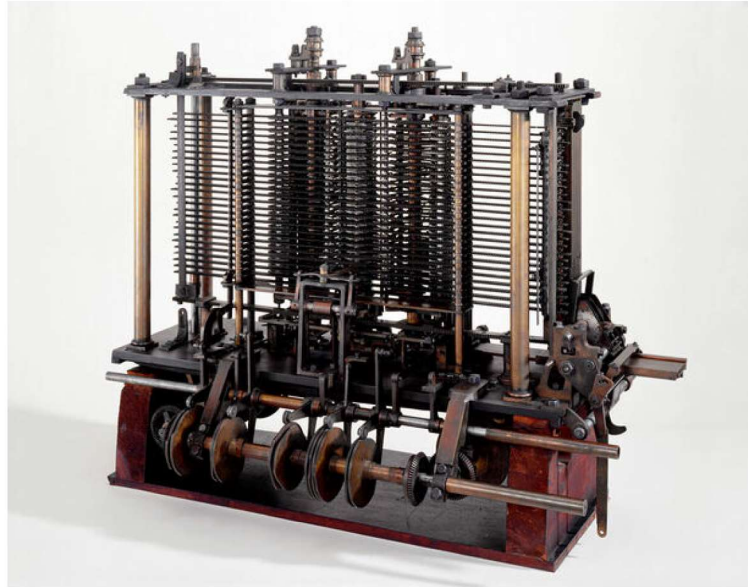
Slika 2: Pascalina (Izvor: <https://bit.ly/3pwCKMs>)

Sljedeći važniji pokušaj bio je onaj njemačkog filozofa i matematičara Gottfrieda Wilhelma Leibniza koji je izradio stroj koji je mogao zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti. Ovaj stroj je bio obećavajući, ali nije bio pouzdan ni upotrebljiv u praksi.



Slika 3: Leibnizov stroj (Izvor: <https://bit.ly/3CiAO1r>)

Svim neuspjelim pokušajima stao je na kraj Charles Babbage koji je dobio ideju kako ukloniti te nedostatke te ih je ukomponirao u jedan stroj koji je nama danas poznat kao analitički stroj.



Slika 4: Analitički stroj (Izvor: <https://bit.ly/3PFREKK>)

No, to nije jedino po čemu je Charles Babbage poznat. Do nedavno koristilo se još jedno pomagalo ljudima poznato kao šubler ili šiber. Šubler je zapravo logaritamsko pomično ravnalo.



Slika 5: Šubler (Izvor: <https://bit.ly/3wie4eq>)

No, kako bi mogli imati logaritamsko ravnalo morale su postojati i logaritamske tablice. Za njih je zaslužan John Napier koji je proveo 20 godina svoga života radeći na izradi tih tablica. Jedina mana im je bila ta što su bile teško čitljive. Zato je Charles Babbage 1822. godine izradio nacrt stroja koji bi računao logaritme u logaritamskim tablicama, a rezultati bi se mogli tiskati na papiru. Sve od navedenog, ali i još mnogo toga omogućilo nam je da se danas možemo koristiti onime što mi nazivamo računalo.

Osim što su na svoj jedinstven način pridonijeli razvoju računala i današnje tehnologije, pridonijeli su i tome da tehnologija postane dio današnje nastave. Tehnologija danas nudi brojne mogućnosti kojima, ukoliko ih iskoristimo na pravi način učenicima možemo razbiti



njihove miskoncepcije i predrasude, teško shvatljive pojmove učiniti lako shvatljivim te ih na kraju probuditi u njima interes ne samo za nastavu matematike već i za samu matematiku. Stoga će se u nastavku propitivati upotreba IKT-a u nastavi matematike kao oblika suvremene tehnologije.

## 3 Kurikularna reforma "Škola za život"

### 3.1 Kurikulum međupredmetne teme Upotreba informacijske i komunikacijske tehnologije

Unazad nekoliko godina, tehnologija bilježi svoj veliki razvoj te je postala dio našeg svakidašnjeg života. Pojavila se u svim sferama života, pa tako i u nastavi. To je uočilo i Ministarstvo znanosti i obrazovanja te je u reformi školstva upotreba tehnologije dobila svoj kurikulum koji se zove Upotreba informacijske i komunikacijske tehnologije ([6]).

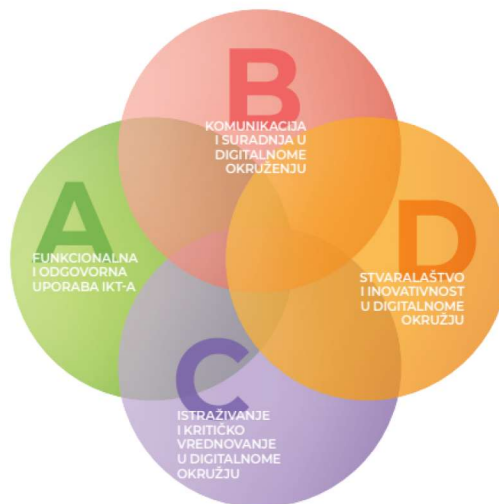
Ovaj kurikulum objavljen je 22. siječnja 2019. godine od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja, a dio je kurikularne reforme "Škola za život". Namijenjen je učenicima osnovne i srednje škole, a obuhvaća djelotvorno, primjereno, pravodobno, odgovorno i stvaralačko služenje informacijskom i komunikacijskom tehnologijom u svim predmetima, područjima i na svim razinama obrazovanja. Ova tema vrlo je bliska današnjim učenicima jer se s tehnologijom i njezinim mogućnostima susreću već u ranoj dobi. Neki od njih prije polaska u školu već posjeduju neki digitalni uređaj s kojim mogu pristupiti internetu. Kako bi se mogao provoditi ovaj kurikulum bilo je potrebno da svi učenici imaju jednake mogućnosti. U ovom slučaju to se odnosilo na to da svaki učenik posjeduje digitalni uređaj koji će mu moći pomoći pri učenju. Stoga su se u sklopu ove reforme osigurali tableti za učenike. Osim što su po tom pitanju svi učenici bili jednaki, time se dodatno potaknulo stvaranje, ali i unaprjeđenje već dosad stečenih digitalnih kompetencija. Ispravno je pitati se kako ova odluka utječe na nastavnike? Ova odluka nastavnicima otvara vrata iza kojih se kriju brojne mogućnosti unaprjeđenja dosadašnje nastave, a na njima je samo da ih otvore i puste da ih vodi njihova kreativnost. Prednost ove međupredmetne teme je ta što ju se može ukomponirati u svaki predmet, a njezini ciljevi su osigurati djeci, mladima i učiteljima prilike u kojima će ([6]):

- primijeniti informacijsku i komunikacijsku tehnologiju za obrazovne, radne i privatne potrebe,
- odgovorno, moralno i sigurno rabiti informacijsku i komunikacijsku tehnologiju,
- učinkovito komunicirati i surađivati u digitalnome okružju,
- informirano i kritički vrednovati i odabrati tehnologiju i služiti se tehnologijom primjerenom svrsi,
- upravljati informacijama u digitalnome okružju,
- stvarati i uređivati nove sadržaje te se kreativno izražavati s pomoću digitalnih medija.

Uz sve navedeno, ova tema brine i o zdravlju učenika. Potrebno je učenike osvijestiti o štetnosti pretjeranog korištenja digitalnih uređaja pogotovo, naglasak treba biti na dugom boravku za računalom i ne pravilnom sjedenju.

Sve što obuhvaća ova međupredmetna tema svrstano je u četiri sljedeće domene:

- A. Funkcionalna i odgovorna uporaba ikt-a
- B. Komunikacija i suradnja u digitalnom okruženju
- C. Istraživanje i kritičko vrednovanje u digitalnom okruženju
- D. Stvaralaštvo i inovativnost u digitalnom okruženju



Slika 6: Domene međupredmetne teme Uporaba informacijske i komunikacijske tehnologije ([6])

U prvoj domeni cilj je da učenici steknu znanje, vještine i stavove o mogućnostima koje nam pruža Informacijska i komunikacijska tehnologija te da razviju pozitivan stav prema tehnologiji kao podršci učenju i stvaranju. Također, razvijaju sposobnost odabira odgovarajućih uređaja i programa koji će ih dovesti do njima željenog rezultata. Između ostalog, ova domena naučiti će ih kako se koristiti digitalnim sadržajima, obrazovnim društvenim mrežama, računalnim oblacima i mrežnim izvorima znanja na siguran i odgovoran način, a sve kako bi unaprijedili svoj osobni, obrazovni i profesionalni razvoj ([6]). Ova domena brine i o njihovom zdravlju te će se kroz nju upoznati s osnovnim načelima očuvanja fizičkog zdravlja tijekom korištenja tehnologijom. Osim zdravlja, moglo bi se reći da ova domena na neki način i odgaja učenike jer ih uči kako se pristojno i odgovorno ponašati u virtualnom svijetu. Kako reagirati na ružne komentare i na neprimjerene sadržaje. Učenici razvijaju vještine i stavove potrebne za razlikovanje stvarnoga i virtualnoga svijeta, stječu umijeće pravilnoga upravljanja vremenom te samostalnoga i svjesnoga ograničavanja uporabe tehnologije. Time doprinose sprečavanju ovisnosti o tehnologiji i osvješćuju njezin utjecaj na fizičko i duševno zdravlje. Potiče ih se na odgovorno ponašanje pri odlaganju elektroničkog otpada te na očuvanje prirode i okoliša ([6]).

Domena Komunikacija i suradnja odnosi se na uporabu digitalnih programa za podršku suradničkim oblicima učenja. Cilj ove domene je da se učenici znaju snalaziti na društvenim

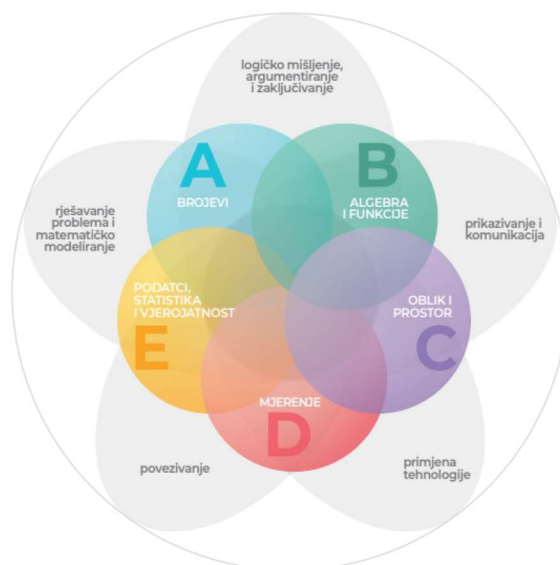
mrežama i u digitalnim obrazovnim zajednicama, da poštuju ljudska prava, da samostalno i sigurno komuniciraju na internetu. Također ova domena potiče razvoj socijalnih vještina, ali i uči da djeca prihvaćaju različitosti i uvažavaju tuđe stavove.

Domena Istraživanje i kritičko vrednovanje kod učenika potiče istraživački duh, ali ih ujedno uči kritičkom vrednovanju. Učenjem i poučavanjem njezinih sadržaja učenici usvajaju znanja, vještine i stavove kojima osnažuju svoj integritet. Domena Stvaralaštvo i inovativnost u digitalnom okruženju potiče učenike na razvoj stvaralačkog duha i na kreativnost pritom koristeći se tehnologijom na način da kombinacijom nekoliko različitih programa, ali i uređaja dođu do željenog rezultata.

### 3.2 Kurikulum nastavnog predmeta Matematika i tehnologija

Kurikulum nastavnog predmeta Matematika objavljen je 14. siječnja 2019. godine od strane Ministarstva znanosti i obrazovanja kao dio kurikularne reforme "Škola za život". Ovaj kurikulum ističe primjenu tehnologije kao jedan od pet matematičkih procesa koji su važni na svim razinama obrazovanja te se prožimaju kroz sve domene kurikuluma koje su sljedeće ([5]):

- Brojevi
- Algebra i funkcije
- Oblik i prostor
- Mjerenje
- Podatci, statistika i vjerojatnost



Slika 7: Domene međupredmetne teme Uporaba informacijske i komunikacijske tehnologije ([5])

Cilj domene brojeva je da učenici usvoje pojmove kao što su broj, brojevni sustav i skup te razvijaju vještinu izvođenja aritmetičkih postupaka. Stoga se u ovoj domeni tehnologija koristi samo u svrhu efikasnosti i točnosti kod rješavanja matematičkih problema. Već sljedeća domena donosi veću primjenu tehnologije. U domeni Algebra i funkcije tehnologija se može koristiti za rješavanje algebarskih problema, izradu izraza, grafova i tablica, a sve u svrhu generaliziranja, tumačenja i rješavanje nekih problema. Domena oblik i prostor dio je geometrije, a bavi se proučavanjem oblika, njihovih položaja i odnosa. Na temelju tog, ali i poznavanja svojstva i odnosa različitih oblika iznosimo neke pretpostavke, tvrdnje, ali i zaključke. Ponekad je učenicima teško nešto uočiti i zaključiti, no s pravim programom i alatom i to se može promijeniti. U domeni mjerenje učenici se između ostalog upoznaju i sa standardnim mjernim jedinicama za volumen, površinu duljinu, . . . Stoga u ovoj domeni tehnologiju se može koristiti za preračunavanje i računanje mjernih jedinica, ali i za provjeru točnosti rezultata. Posljednja domena bavi se prikupljanjem, razvrstavanjem, obradom, analizom i prikazivanjem podataka u odgovarajućemu obliku. Od učenika se očekuje da znaju tumačiti prikazane podatke koji su zadani tablicom ili grafički, ali također da iz teksta zadatka znaju odrediti pripadnu tablicu i grafički prikaz. Osim toga od učenika se očekuje da onda te podatke znaju dalje u zadatku primijeniti. Stoga, ovdje se tehnologija koristi u svrhu lakšeg i boljeg razumijevanja, ali i rješavanja problema. Bitno je za zamijetiti da se dalje u kurikulumu nastavnog predmeta Matematika prolaženjem kroz odgojno-obrazovne ishode, sadržaje i razine usvojenosti riječ tehnologija gotovo i ne spominje. Točnije, pojam tehnologije spominje se u preporukama za ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda u kojima se često ukazuje na primjenu programa dinamičke geometrije. Nešto malo rjeđe se može pronaći pojam kalkulatora i njegovo korištenje.

Iz opisa ciljeva, ali i same strukture nastavnog predmeta Matematika može se zaključiti da tehnologiju napokon očekuje svijetla budućnost u nastavi matematike. No, dolaskom do odgojno obrazovnih ishoda i ciljeva vidimo da budućnost ipak nije tako svijetla. Proučavanjem i čitanjem odgojno obrazovnih ishoda i ciljeva možemo vidjeti da za tehnologiju još uvijek nema mjesta u nastavi matematike. Ukoliko pogledamo dio u kojem se nalaze preporuke za ostvarivanjem odgojno obrazovnih ishoda pronaći ćemo i primjenu tehnologije. No to što se nalazi u preporukama zapravo joj ne daje puno na važnosti. Naime, preporuke su tu da pomognu nastavnicima u organizaciji nastavnog sata, ali nastavnik ih nije obavezan provoditi. Stoga se trebamo sami zapitati da li je tehnologija zaista bitna za nastavu matematike? Koliko god se činilo lakim, ovo pitanje je sve samo ne to.

## 4 Tehnologija u nastavi matematike

Unazad nekoliko godina informacijsko-komunikacijska tehnologija (IKT) bilježi svoj veliki razvoj te se pojavila i u nastavi matematike kako bi pomogla učenicima u boljem savladavanju gradiva. Ona im pomaže da vide ono što je “nevidljivo”, da razumiju ono što im je nerazumljivo te da otkriju dosad njima ne otkriveno. Koristeći se prikladnom tehnologijom, nastavnici dobivaju moć kojom učenicima mogu srušiti neke predrasude i na taj način ih motivirati na rad. No, kao i uvijek posjedovanje određene moći nosi sa sobom i određenu odgovornost. Osim što nastavnici moraju biti motivirani i kreativni, sada se moraju suočiti sa svim izazovima moderne tehnologije. Moraju naučiti služiti se danom tehnologijom, naučiti koje sve ona mogućnosti pruža da bi ju tek onda mogli koristiti. To iziskuje puno želje, truda i vremena, ali krajnji rezultat koji će biti učenikovo znanje je neprocjenjivo.

### 4.1 Računalo

Škole u Hrvatskoj su najčešće opremljene računalom koji dolazi u kombinaciji s projektorom. Računalo dolazi sa pregršt instaliranih programa koje mogu koristiti svi nastavnici. Neki od njih su program za pisanje teksta, program za izradu proračunskih tablica, program za izradu prezentacija, ali mnogi drugi. Postoje i programi dinamičke geometrije koji uvelike koriste nastavnicima matematike, kao što je GeoGebra. Svi ti programi su ovdje kako bi nastavnicima olakšali izvođenje nastave, ali ujedno ju i unaprijedili, a učenike zainteresirali za sat. Osim znanja koje im je potrebno za rad na računalu i rad s posebnim programima, nastavnici moraju steći još jednu vrstu znanja, a to je moći odlučivati koji program je prikladan za rad u kojoj nastavnoj cjelini i u kojoj učeničkoj dobi. To ponekad nije nimalo lak posao, i to znanje najčešće dolazi s iskustvom. Stoga postoje sljedeća pitanja kojima se nastavnici mogu voditi pri odabiru programa ([2]):

- može li konkretna programska podrška pomoći podučavanju matematike, povećanju razine znanja, razvoju određenih vještina i poboljšanju razumijevanja matematičkih ideja,
- može li nam konkretna programska podrška pomoći pri radu s matematičkim sadržajima, tj. može li nama ili učenicima pomoći pri računanju, crtanju grafova, kreiranju tablica, rješavanju problema, transformiranju izraza i sličnim radnjama,
- pomaže li uporaba konkretne programske podrške u izradi nastavnih materijala, čuvanju podataka, pronalaženju već postojećih nastavnih materijala itd.

No, osim pri samom izvođenju nastave, nastavnik računalo može koristiti kod kuće pri planiranju nastavnog procesa. Tu nastavnici s pomoću računala i interneta pretražuju i skupljaju materijale koji su im potrebni za neku nastavnu jedinicu. Nailaze na druge kreativne radove, ali i iskustva drugih nastavnika. Od nastavnika se očekuje da koliko god mogu potiču i učenike na rad za računalom. Ukoliko to nije izvedivo u školi, onda da ih pomoću primjerene zadaće potaknu na rad za računalom. Može to biti grupni ili individualni rad,

izrada prezentacije ili pisanje sastavka ili čak rješavanje kviza čija rješenja uvelike mogu pomoći nastavniku da vidi kakva je usvojenost ishoda. Za što god se nastavnik odlučio, ono čega mora biti svjestan je to da kao i sve i računalo ima svoje mane i prednosti. Zato bi se pri donošenju odluke kada, zašto, gdje i kako koristiti računalom trebalo voditi sljedećim načelima ([2]):

- odluka o tome kada i kako uporabiti ili ne uporabiti računalo ovisi o tome unapređuje li ta uporaba postojeću nastavnu praksu,
- odluka mora biti direktno uvjetovana procjenom omogućava li uporaba računala efikasnije ostvarivanje ciljeva pojedine nastavne jedinice,
- uporaba računala mora omogućiti i učitelju i učenicima da postignu nešto što ne bi mogli postići bez uporabe računala, odnosno učiteljima mora omogućiti poučavanje, a učenicima učenje efikasnije nego bez ove tehnologije.

Primjerice nakon upoznavanja s karakterističnim točkama trokuta učenike se može podijeliti u četiri grupe. Svaka grupa učenika bi dobila papir s koracima konstrukcije te bi se morali uvjeriti u njezinu istinitost koristeći se GeoGebrom. Ovaj zadatak može se dodatno začiniti time što se namjerno naprave konstrukcije koje nisu ispravno. Zatim je potrebno nizom pitanja voditi učenike da dođu do zaključka. Također u ovom zadatku može im se postaviti određena pitanja koja će ih navoditi da zaključče i puno više od toga da li je konstrukcija ispravna ili nije. Potrebno je samo pustiti mašti na volju i zaigrati se s ovim zadatkom. U ovom zadatku naglasak se stavlja na razumijevanje pojmova vezanih uz karakteristične točke trokuta, pa zato umjesto konstruiranja ravnalom i šestarom učenicima se to olakša na način da konstrukciju vrše u za to predviđenom alatu. U slučaju da želimo provjeriti učenikovo poznavanje osnovnih konstrukcija onda ćemo od njih zahtijevati da ovaj zadatak riješe na papiru pomoću šestara i ravnala.

## 4.2 Kalkulator

Kalkulator, poznatiji još kao džepno računalo, jedan je od najkorištenijih pomagala u suvremenoj nastavi matematike. To potvrđuje i činjenica da danas na tržištu postoji nekoliko vrsta kalkulatora koji nude pregršt mogućnosti. Od onih običnih koji služe za rješavanje jednostavnih zadataka do onih koji nude mogućnost rješavanja težih zadataka, ali i crtanja grafova.



Slika 8: Kalkulator CASIO FX-991 EX-HR Classwiz  
(Izvor: <https://bit.ly/3BPwRRJ>)

No, i prije samog odabira kalkulatora, nastavnici moraju donijeti odluku kada i u kojem trenutku će dozvoliti korištenje kalkulatora. Iako se ta odluka čini vrlo lakom, sve je samo ne to. O važnosti ove odluke govori i činjenica da su nastavnici prepušteni sami sebi jer ne postoji obrazac koji će im sugerirati kada je uredu dozvoliti korištenje kalkulatora. Ukoliko se okrenu kurikulumu vidjet će da se pojam kalkulatora odnosno džepnog računala spominje prvi put u osmom razredu. Znači li to da se učenicima treba dozvoliti korištenje kalkulatora tek u osmom razredu? Naravno da ne. Promatrajući svoje učenike nastavnik sam treba odlučiti kada su oni spremni odgovorno koristiti kalkulator. Korištenje kalkulatora nema dobne granice, stoga će postojati razredi koji će od samog početka biti spremni odgovorno se služiti kalkulatorom kao pomoći pri učenju dok će neki tu zrelost steći tek u kasnijim go-



dinama. Kada god se odlučili za uvođenje kalkulatora u nastavu i upoznavanja s učenicima svakako se ne bi trebali voditi svojim stavovima koje imamo, ne samo o kalkulatoru već o bilo kojoj tehnologiji. Trebali bi težiti onom najboljem što možemo dati svojim učenicima, i imati vjere u njih da će oni to znati iskoristiti najbolje što mogu. No, osim korištenja kalkulatora na nastavi, učenike treba poticati i naučiti kako se njime mogu efikasno služiti kod kuće. Na taj način učenici mogu razbiti neke svoje miskoncepcije koje imaju u vezi nekih zadataka. Također, učenici koji imaju problema s tablicom množenja, mogu je puno brže savladati ukoliko se koriste kalkulatorom pri računanju zadataka koji zahtijevaju poznavanje tablice množenja. Korištenjem kalkulatora u takvim zadacima izbjegava se moguće krivo učenje. Primjerice, ukoliko su učenici smatrali da je  $7 \cdot 8 = 54$ , umjesto računanja na pamet, utipkavanjem u kalkulator odmah će vidjeti da nisu bili u pravu. Naravno, kao i sve i kalkulator ima svoje mane. Ukoliko se odlučimo dozvoliti korištenje kalkulatora na nastavi uvijek će biti pojedinac koji će htjeti koristiti kalkulator, ali i bilo koju tehnologiju u pogrešne svrhe. No, ukoliko barem jedan pojedinac nauči koristiti kalkulator odgovorno i snalazljivo već smo puno postigli. Takav pojedinca će onda znati dalje iz svega izvući maksimum. Stoga, nastavnici trebaju biti otvoreni prema korištenju kalkulatora u nastavi. Osim što pri donošenju ove odluke nastavnici trebaju dobro poznavati svoje učenike, nastavnici sami trebaju znati što žele da učenici nauče na određenom satu. Zahtijevaju li od učenika točnost rezultata ili primjenu odgovarajuće formule ili pak oboje? Naravno ovaj odgovor ovisi će o gore spomenutom poznavanju učenika, kurikulumu i temi koja se obrađuje. Dalje u radu navodi se nekoliko primjera u kojima je dozvoljena upotreba kalkulatora na nastavi.

**Primjer 4.1.** Tema: Koordinatni sustav i linearna ovisnost

Podtema: Linearna ovisnost

Razred: 7.

Ishodi učenja: MAT OŠ B.7.4. Primjenjuje linearnu ovisnost

Razrada ishoda:

- Povezuje zavisnu i nezavisnu veličinu u problemskoj situaciji.
- Zapisuje linearnu ovisnost formulom  $y = ax + b$ , gdje su  $a$  i  $b$  racionalni brojevi.
- Analizira promjenu u linearnoj ovisnosti.

U sklopu pripreme za nadolazeći ispit učenicima su bili podijeljeni sljedeći zadaci:

**Zadatak 4.1.** *Učiteljica Iva odlučila je svoje učenike odvesti u kino na film ‘Pčelica Maja 3: Zlatno jaje’. Zanimala ju je cijena ulaznica pa je posjetila Cinestarovu stranicu. Tamo je vidjela da je cijena ulaznica za jednu osobu normalnim radnim danom 37.50 kn, ukoliko dođu kao grupa od najmanje 20 učenika onda je cijena jedne ulaznice 29.90 kn, a svake prve srijede u mjesecu cijena jedne ulaznice je 30.50 kn. Dodatno, učiteljica želi iznajmiti KIDS dvoranu koja se plaća 12 kn. U razredu je ukupno 20 učenika.*

- a) *Za svaku od navedenih opcija napišite linearnu ovisnost po kojoj se računa ukupni trošak kupovine karte.*

b) Kolika je razlika najskuplje i najjeftinije opcije za 20 učenika?

**Zadatak 4.2.** Ivan je povodom godišnjice izveo Ivu na večeru u Gondolu. On je naručio pizzu, a Iva je naručila lignje na žaru. Za piće su popili coca colu, a za desert su pojeli palačinke s nutellom. Ivan jako pazi na svoj izgled te jede samo zdravo. S obzirom da je sinoć jeo nezdravu hranu i unio previše kalorija odlučio je danas potrošiti sve te kalorije vježbanjem.

- a) Napiši formulu linearne ovisnosti potrošnje kalorija o proteklom vremenu ako se za jedan sat trčanja potroši 980 kal.
- b) Napiši formulu linearne ovisnosti potrošnje kalorija o proteklom vremenu ako se za jedan sat hodanja potroši 263 kal.
- c) Napiši formulu linearne ovisnosti potrošnje kalorija o proteklom vremenu ako se za jedan sat igranja tenisa potroši 525 kal.
- d) Ukoliko znamo da je pizza mase 300 g, da je Ivan popio jednu coca-colu te pojeo jednu palačinku izračunajte koliko kalorija mora potrošiti?
- e) Koliko je vremena potrebno kako bi potrošio kalorije koje je pojeo na večeri ukoliko ih želi skinuti trčanjem?

Hrana	Kalorije
Pizza	260 kal/100 g
Coca-cola	46 <u>kal</u> /0.33 l
Palačinka s nutellom	430 kal

Slika 9: Tablica kalorija

**Zadatak 4.3.** U prodavaonici operatera A1 cijena mobitela Xiaomi Redmi Note 10 na pretplatu je sljedeća:

U tarifi Mala+: cijena je sljedeća : uređaj se odmah plati 699 kn + 30 kn/24 mj., a cijena tarife je 99 kn/ 24 mj.

U tarifi Savršena cijena je sljedeća: uređaj se odmah plati 9 kn + 20 kn/ 24 mj., a cijena tarife je 189 kn/24 mj.

- a) Napišite formulu linearne ovisnosti cijene mobitela o mjesecima za obje tarife.
- b) Koliko bi se platio navedeni mobilni telefon u prvoj tarifi nakon 8 mjeseci, a koliko u drugoj?
- c) Koja je tarifa povoljnija?

Kako bi se ovo gradivo učenicima bolje približilo i kako bi uvidjeli njegovu primjenu uzeti su iz stvarnog života, a naglasak je stavljen na uočavanju veze između zavisne i nezavisne veličine.

**Primjer 4.2.** Tema: Kvadratne jednadžbe

Podtema: Jednadžbe koje se svode na kvadratne (Sustavi jednadžbi)

Razred: 2. srednje

Ishodi učenja: MAT SŠ B.2.2. Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu

- Rješava jednadžbe koje se svode na kvadratnu jednadžbu.
- Rješava kvadratne jednadžbe s općim koeficijentima.
- Modelira problemsku situaciju te određuje rješenja.

Na satu obrade novog gradiva, nakon što su učenicima pokazane neke metode i tehnike rješavanja sustava jednadžbi podijeljeni su im sljedeći zadaci u kojima je dozvoljena upotreba kalkulatora jer je naglasak na vježbanju tehnike rješavanja sustava jednadžbi.

**Zadatak 4.4.** Riješite sustav jednadžbi:

$$\frac{x}{y} - \frac{y}{x} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{xy} = \frac{1}{6}.$$

**Zadatak 4.5.** Riješite sustav jednadžbi:

$$x^2 + y^2 = 3 - xy$$

$$x + 2y = 0.$$

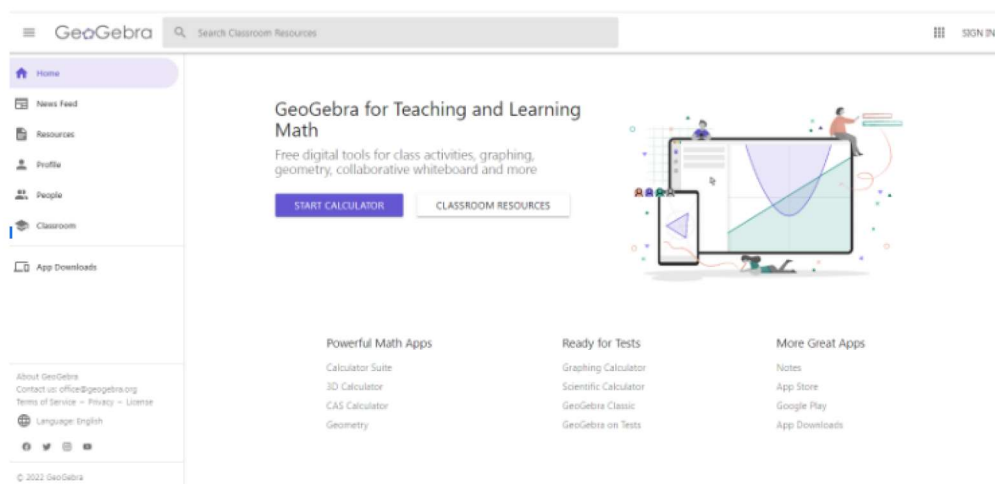
**Zadatak 4.6.** Ako je opseg pravokutnika 40 jedinica, a površina 99 kvadratnih jedinica, koliko iznose duljine njegovih stranica?

**Zadatak 4.7.** Bicikli koji košta 2 400 kn poskupi za  $p$  posto, a nakon tri mjeseca ponovno poskupi za isti postotak i tada mu cijena iznosi 2 595.84 kn. Koliko iznosi taj postotak?

## 5 Programi i njihova primjena u nastavi matematike

### 5.1 GeoGebra

GeoGebra je program dinamičke geometrije koji ujedinjuje geometriju, algebru i analizu. Prvenstveno je namijenjen nastavnicima matematike kako bi poboljšali svoju nastavu, ali i pomogli učenicima u savladavanju onih teže savladivih pojmova. Koristeći se ovim alatom, zbog njegove interaktivnosti, svoju nastavu ćete učiniti zanimljivijom, a učenike ćete poticati na logičko razmišljanje. Ovaj alat pokazao se zgodnim pri izvođenju online nastave jer omogućava izradu interaktivnih lekcija. Za sam rad s ovim programom potrebno je pristupiti sljedećoj stranici: <https://www.geogebra.org/?lang=hr>.



Slika 10: Početna stranica GeoGebre


Za daljni rad nije potrebna prijava niti registracija, a dostupno Vam je sljedeće:


- Komplet kalkulatora,
- Grafički kalkulator,
- Geometrija,
- 3D kalkulator,
- CAS kalkulator,
- Znanstveni kalkulator,
- Bilješke,
- Klasična GeoGebra.

Također, uz gore navedeno dostupni su vam materijali ostalih korisnika koje možete pregledavati, ali i koristiti u nastavi. No, ukoliko želite spremiti neki svoj uradak ili izraditi interaktivni listić morat ćete se prijaviti ili registrirati. Prijavu, ali i registraciju možete izvršiti u svega nekoliko koraka, a za oboje je potrebno kliknuti na "Prijavi se". Time se otvara sljedeće:

---

Sign in with

 GOOGLE

 FACEBOOK

MORE

OR

Sign in with GeoGebra account

Username

Password

[Forgot Password?](#)  
[New to GeoGebra? Create Account](#)


CANCEL **SIGN IN**


---

Slika 11: Prijava/Registracija u GeoGebru

Ukoliko ste postojeći korisnik izabrat ćete način prijave među jednim od gore ponuđenih načina. No, ukoliko ste novi korisnik potrebno je kliknuti na "Novi korisnik? Izradi račun".

Prijavi se koristeći

 GOOGLE

 FACEBOOK

VIŠE

ILI

Prijavite se s GeoGebra računom

Korisničko ime

Lozinka

Zaboravljena lozinka?  
**Novi korisnik GeoGebra? Izradi račun**

PONIŠTI **PRIJAVI SE**

Slika 12: Izrada korisničkog računa

Zatim se otvara sljedeća stranica

Registracija

...

Google Office 365 Microsoft Facebook Twitter

Prijavi se koristeći GeoGebra login.

E-pošta

Korisničko ime

Lozinka

Potvrda lozinke

Suglasnost Odaberite jednu od sljedećih opcija

Potvrđujem da imam više od 14 godina, pročitao sam [Uvjeti korištenja](#) i [Politika privatnosti](#) i suglasan sam s njima

U ime mog djeteta, potvrđujem da sam pročitao [Uvjeti korištenja](#) i [Politika privatnosti](#) i da sam suglasan s njima

Slika 13: Registracija

Nakon registracije odnosno prijave otvara se profilna stranica koja je ista kao početna GeoGebra stranica samo gore u desnom kutu umjesto "Prijavi se" stoji oblačić s početnim slovom vašeg prezimena.

GeoGebra Pretraži uradke za učionicu

Naslovnica Novosti Uradci Profil Ljudi Razred Preuzimanje aplikacija

GeoGebra Kontaktirajte nas: office@geogebra.org Uvjeti korištenja - Privatnost - Licenca Jezik: Hrvatska

GeoGebra za učenje i poučavanje matematike

Besplatni digitalni alati za razredne aktivnosti, crtanje grafova, geometriju, dijeljenu bijelu ploču, i još mnogo više

Moćne aplikacije: Komplet kalkulatora, 3D kalkulator, CAS kalkulator, Geometrija

Spremno za testiranje: Grafički kalkulator, Znanstveni kalkulator, Klasična GeoGebra, Testiranje

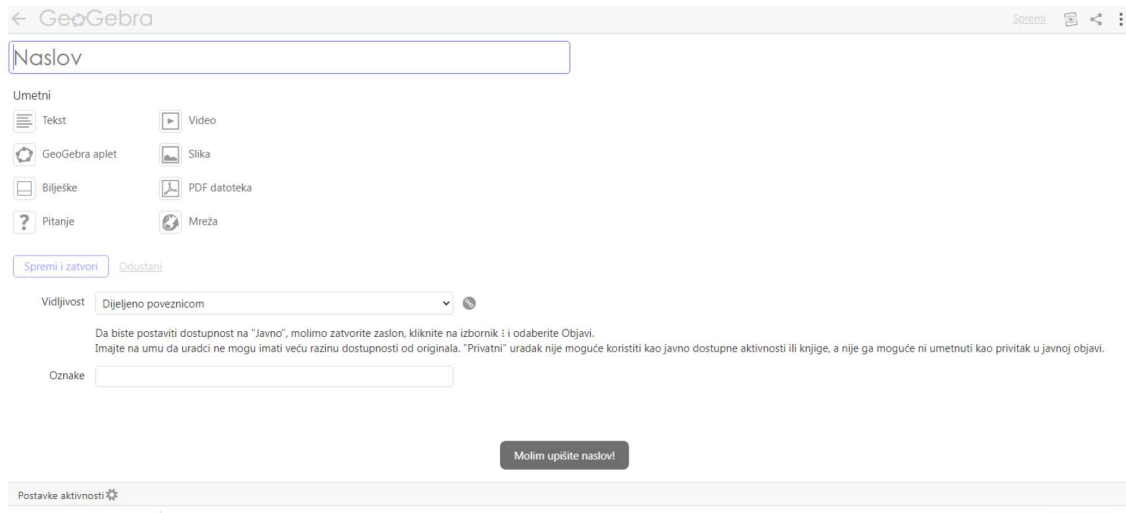
Druge aplikacije: Bilješke, App Store, Google Play, Preuzimanje aplikacija

Slika 14: Prikaz stranice nakon prijave/registracije

Za izradu interaktivne lekcije potrebno je kliknuti na "profil" zatim izradi te odabirete opciju "aktivnost". Potrebno je svojoj lekciji nadjenuti ime, a zatim možete umetnuti nešto od sljedećega:

- Tekst,
- GeoGebra aplet,
- Bilješke,
- Pitanje,

- Video,
- Slika,
- PDF datoteka,
- Mreža.



Slika 15: Početak izrade interaktivnog listića

Primjer jedne tako izrađene lekcije možete vidjeti u nastavku ovog rada ili na sljedećem linku: <https://www.geogebra.org/m/wakd4dsm>.

**Primjer 5.1.** Tema: Krug i kružnica

Podtema: Kružnica

Razred: 3. srednje

Ishodi učenja: MAT SŠ B.3.12., MAT SŠ C.3.9. Primjenjuje jednadžbu tangente kružnice

Razrada ishoda:

- Nabraja i opisuje odnose pravca i kružnice.
- Određuje grafički i računski presjek pravca i kružnice.
- Razlikuje pojmove sekanta, tangenta i normala.
- Određuje položaj pravca i kružnice pomoću diskriminante.
- Izvodi uvjet dodira pravca i kružnice.
- Određuje jednadžbu tangente i normale kružnice.

GeoGebrin listić na temu Krug i kružnica namijenjen je učenicima srednje škole, a pokriva sljedeće:

- Presjek pravca i kružnice,

- Tangenta i sekanta,
- Veza između diskriminanti i položaja pravca i kružnice,
- Uvjet dodira,
- Uvjet dodira pravca i kružnice,
- Zadaci.

U samu lekciju učenike se uvodi jednom nesvakidašnjom situacijom iz života, kojoj je cilj nasmijati ih i pripremiti za daljnji rad. Cijeli listić osmišljen je na način da se učenike potakne na rad i razmišljanje, a za rješavanje ovog listića nije potrebno preveliko predznanje iz matematike. Ideja je da učenici vođeni pitanjima i uz pomoć GeoGebrinih interaktivnih prikaza sami dođu do bitnih zaključaka. Nastavnik bi ovdje trebao imati sporednu ulogu, odnosno biti potpora učenicima na putu k znanju jer najdugotrajnije znanje je ono koji učenici sami usvoje. Na samome kraju učenike čekaju zadaci, poredani od lakših prema težima čiji je cilj provjeriti razumijevanje naučenog.

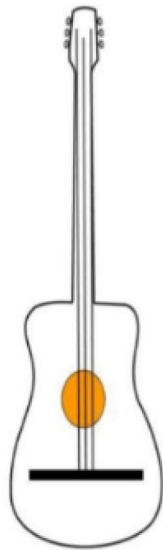
#### Pravac i kružnica

Marko jako voli svirati te je ove godine za Božić od Djed Božićnjaka tražio na poklon gitaru. Marko je cijele godine bio dobar i vrijedan i tako zaslužio traženi poklon. Na božićno jutro Marko se ustao prije svih i ugledao pod borom gitaru. Njegova sreća bila je neopisiva, ali nažalost nije dugo potrajala. Sigurno se pitate što se dogodilo. Naime, Marko vam je pomalo nestašan te je tog jutra brže bolje potrčao pokazati poklon mami i tati, te ne gledavši kuda ide pao je zajedno s gitarom. Marku na svu sreću nije ništa bilo, što se ne može reći za njegovu gitaru. Nažalost gitara je ostala bez dvije žice.

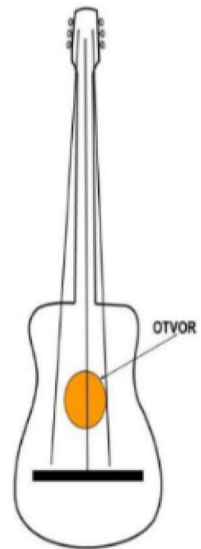




Shematski prikaz Markove gitare prije i poslije pada

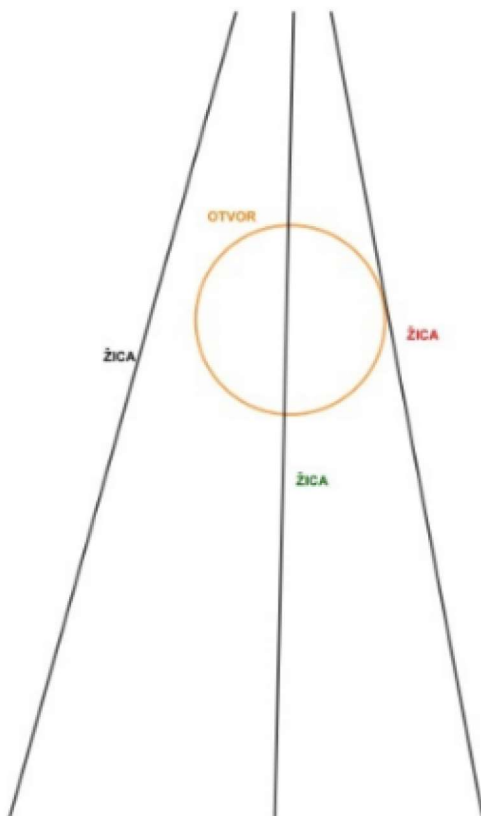


For more step by step drawing tutorials visit us at [www.drawingtutorials101.com](http://www.drawingtutorials101.com)



For more step by step drawing tutorials visit us at [www.drawingtutorials101.com](http://www.drawingtutorials101.com)

Ukoliko žice shvatimo kao pravce, a otvor kao kružnicu možete li reći nešto o položaju pravca i kružnice?

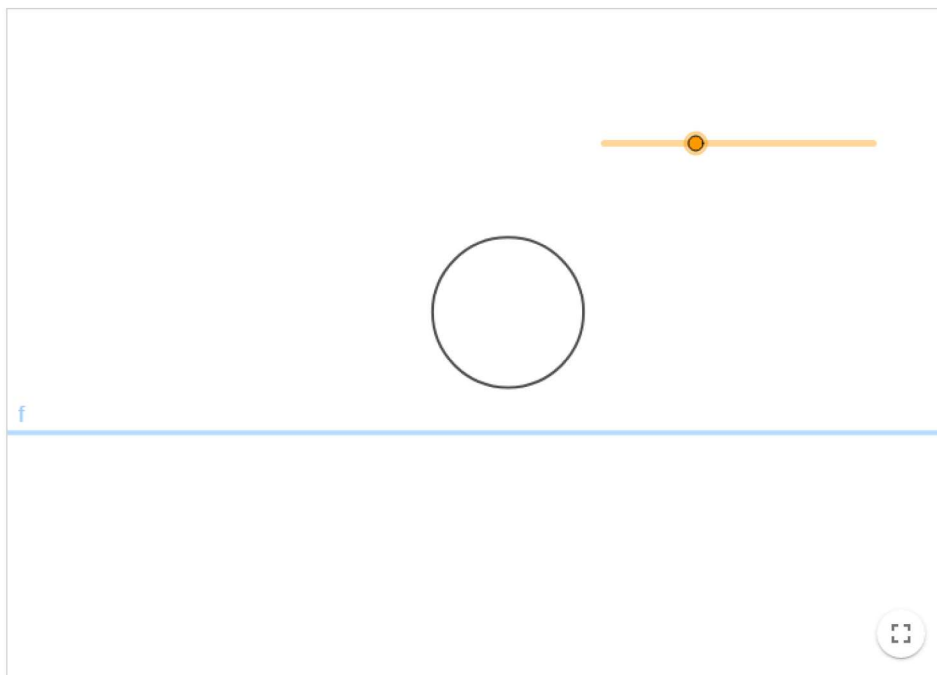


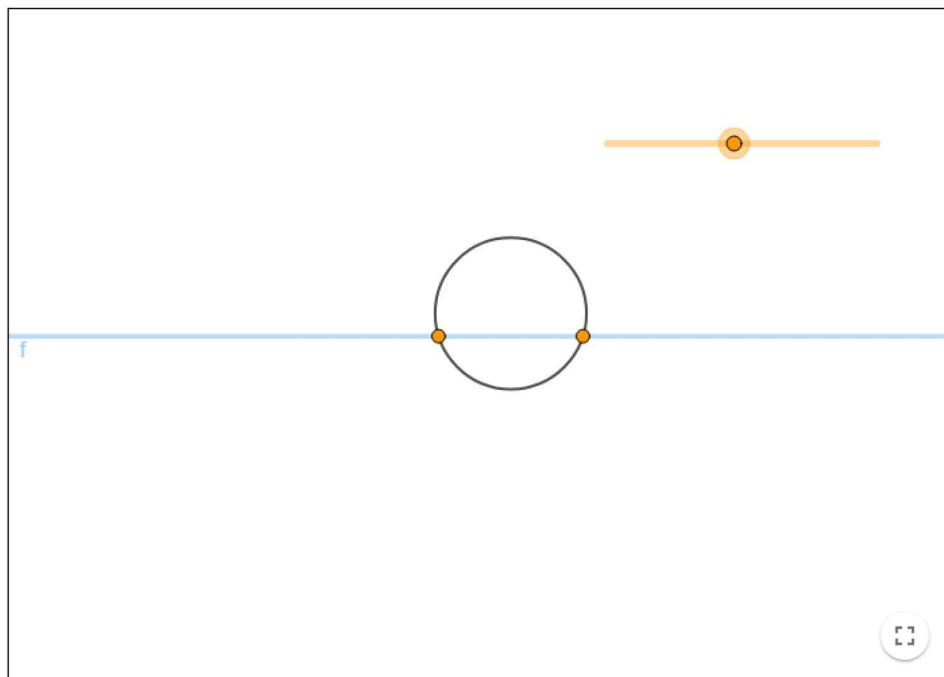
## Presjek pravca i kružnice

Pravac i kružnica mogu biti u trima međusobnim položajima:

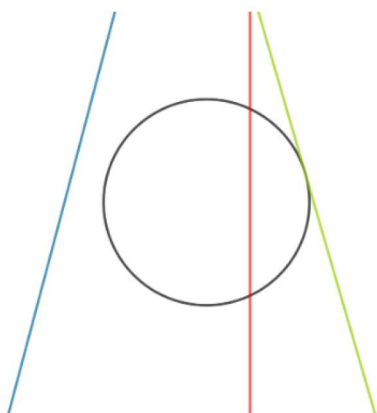
1. pravac siječe kružnicu u dvjema točkama.
2. pravac s kružnicom ima točno jednu zajedničku točku.
3. pravac i kružnica se ne sijeku, nemaju zajedničkih točaka.

Kako bi se još jednom uvjerali u postojanje ova tri položaja promotrimo sljedeći prikaz.





Gore smo spomenuli tri položaja pravca i kružnice. Dva od ta tri pravca imaju posebno ime. Pokušajte sami zaključiti o kojim pravcima se radi na temelju njihovih naziva te pripadne slike.



Nazivi :

1. **tangenta** što dolazi od latinskog tangens, genitiv tangentis: koji dodiruje
2. **sekanta** što dolazi od latinskog secans, genitiv secantis: koji siječe

Označite boju pravca za kojeg smatrate da mu pripada naziv tangeta.

Uključite sve točne odgovore

- A  zelena
- B  plava
- C  crvena

PROVJERI MOJE ODGOVORE (3)

Označite boju pravca za kojeg smatrate da mu pripada naziv sekanta.

Uključite sve točne odgovore

- A  plava
- B  crvena
- C  zelena

PROVJERI MOJE ODGOVORE (3)

Označite boju pravca za kojeg smatrate da mu pripada naziv tangeta.

Uključite sve točne odgovore

- A  zelena ✓ TOČNO
- B  plava
- C  crvena

✓ Bravo! Vaš je odgovor točan.

Označite boju pravca za kojeg smatrate da mu pripada naziv sekanta.

Uključite sve točne odgovore

- A  plava
- B  crvena ✓ TOČNO
- C  zelena

✓ Bravo! Vaš je odgovor točan.

Sada kada smo saznali u kojem međusobnom položaju mogu biti pravac i kružnica, sljedeće što će nas zanimati je kako ustanoviti u kojem su međusobnom odnosu ukoliko je zadan pravac  $y=kx+l$  te kružnica sa središtem u točki  $S(p,q)$  i polumjera  $r$ . Ako pravac i kružnica imaju zajedničku točku onda njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu pravca i jednadžbu kružnice. Zato ćemo presječne točke potražiti tako da riješimo sustav kvadratne i linearne jednadžbe:

$$\begin{aligned}(x-p)^2 + (y-q)^2 &= r^2 \\ y &= kx+l\end{aligned}$$

Uvrstimo jednadžbu pravca  $y=kx+l$  u jednadžbu kružnice  $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$

$$(x-p)^2 + (kx+l-q)^2 = r^2 .$$

Sređivanjem izraza dobivamo

$$x^2 (1+k^2) -x(2p+2kq-2kl) +q^2+l^2+p^2+2lq-r^2=0$$

kvadratnu jednadžbu koju znamo riješiti. Kako bi mogli reći nešto o rješenju ove jednadžbe ne moramo ju nužno riješiti. Prisjetimo se jednog pojma koji nam je govorio nešto o rješenjima kvadratne jednadžbe.

Ukoliko znate ili pretpostavljate o kojem je pojmu riječ upišite svoj odgovor ovdje

Upišite svoj odgovor ovdje ...

PROVJERITE SVOJ ODGOVOR

Riječ je o pojmu diskriminanta. Prisjetimo se njezine definicije.

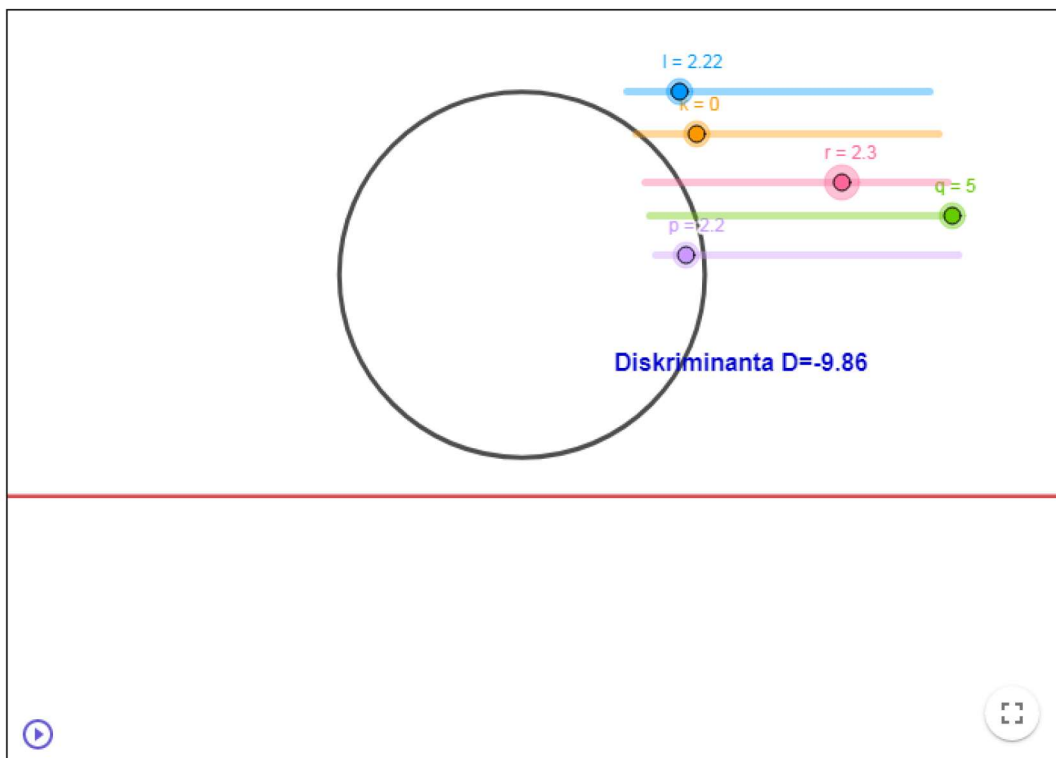
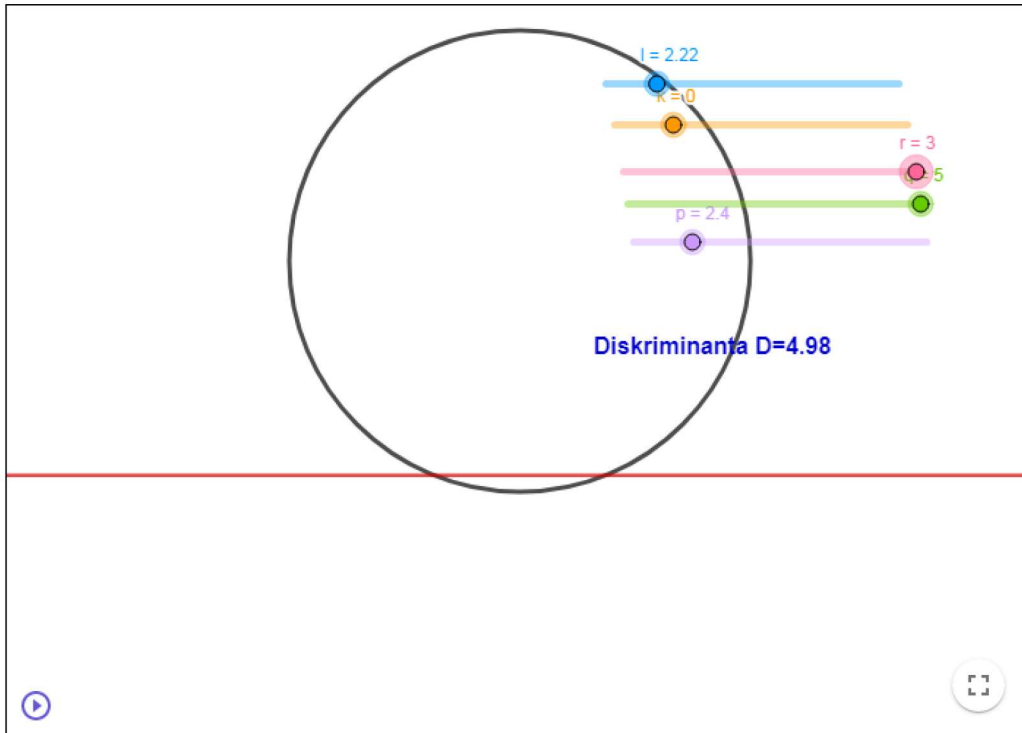
Diskriminanta kvadratne jednadžbe  $ax^2 +bx +c=0$ ,  $a \neq 0$ , je broj  $D=b^2 -4ac$ . Ukoliko je

1.  $D>0$  kvadratna jednadžba ima realna i različita rješenja
2.  $D=0$  kvadratna jednadžba ima realno dvostruko rješenje.
3.  $D<0$  kvadratna jednadžba ima konjugirano kompleksna rješenja.

Možete li zaključiti koji položaj pravca i kružnice će odgovarati kojoj od navedenih diskriminanti?

Pogledajte sljedeći prikaz te pomičući  $p$ ,  $q$ ,  $r$ ,  $l$  i  $k$  pokušajte doći do zaključka.

Napomena: da bi dobili  $D=0$  potrebno je postaviti sljedeće :  $p=1$ ,  $q=3.7$ ,  $l=2.1$ ,  $r=1.6$ ,  $k=0$



Iz navedenog se može zaključiti sljedeće:

1. Ukoliko kvadratna jednadžba ima dva različita realna rješenja, tada pravac siječe kružnicu u dvije točke.
2. Ukoliko kvadratna jednadžba ima dvostruko rješenje, tada pravac dira kružnicu.
3. Ukoliko kvadratna jednadžba ima kompleksno konjugirano rješenje, tada se pravac i kružnica ne sijeku.

### Uvjet dodira

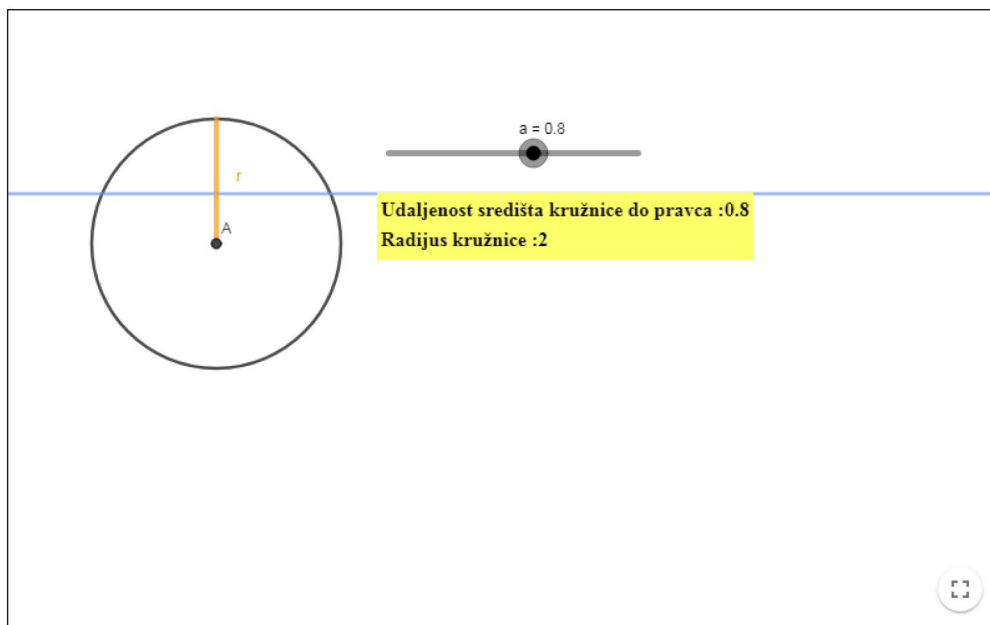
Siječe li pravac kružnicu u dvjema točkama, dira li je, ili možda s njom nema presječnih točaka, možemo ustanoviti na još jedan način. Sada ćemo promatrati udaljenost točke do pravca. Podsjetimo se:

udaljenost točke  $T(x,y)$  do pravca  $y_1=kx+l$  računa se po formuli

$$d(T,y_1)=\frac{|y - kx - l|}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

### Primjer- Pomozite Leonu

Leon je za zadaću dobio da prouči vezu između udaljenosti točke do pravca i položaja pravca i kružnice. Leon jedno vrijeme nije bio u školi iz zdravstvenih razloga te mu određeni pojmovi koje su obradili nisu sjeli. On zaista treba vašu pomoć te Vas moli da mu pomognete odgovoriti na sljedeća pitanja jer jedino uz Vašu pomoć postoji nada da preda zadaću na vrijeme. Uz ovu molbu šalje Vam i geogebra aplet koji mu je učiteljica poslala radi lakšeg rješavanja zadaće.



Pomičući slovo a što možete uočiti? Da li je udaljenost pravca do središta kružnice uvijek ista za sve pravce?

Uključite sve točne odgovore

A  DA

B  NE

PROVJERI MOJE ODGOVORE (3)

Pogledajte sada tangentu te isčitajte u kakvom su odnosu udaljenost  $d$  i polumjer kružnice  $r$ .

Uključite sve točne odgovore

A  polumjer kružnice je veći od udaljenosti

B  polumjer kružnice je manji od udaljenosti

C  polumjer kružnice je jednak udaljenosti

PROVJERI MOJE ODGOVORE (3)

Pogledajte sada sekantu te iščitajte u kakvom su odnosu udaljenost  $d$  i polumjer kružnice  $r$ .

Uključite sve točne odgovore

A  polumjer kružnice je veći od udaljenosti

B  polumjer kružnice je manji od udaljenosti

C  polumjer kružnice je jednak udaljenosti

PROVJERI MOJE ODGOVORE (3)

Napišite u kakvom su odnosu udaljenost  $d$  pravca koji sa kružnicom nema zajedničkih točaka i polumjer kružnice  $r$ .

Napomena: odgovorite s  $d$  je veći od  $r$  ili  $d$  je manji od  $r$  ili  $d$  je jednak  $r$

Aa  $\pi$  Upišite svoj odgovor ovdje ...

PROVJERITE SVOJ ODGOVOR



Možemo zaključiti da ukoliko s d označimo udaljenost središta kružnice do pravca tada postoje tri mogućnosti:

1.  $d < r$  - presjek pravca i kružnice su dvije točke
2.  $d = r$  - pravac dira točku
3.  $d > r$  - pravac i kružnica nemaju presječnih točaka.

Kako udaljenost središta kružnice do pravca znamo odrediti dolazimo do sljedećeg kriterija.

#### Uvjet dodira pravca i kružnice

Pravac s jednadžbom  $y=kx+l$  dira kružnicu  $(x-p)^2 + (y-q)^2=r^2$  onda i samo onda ako vrijedi  $r^2(1+k^2)=(q-kp-l)^2$ .

#### Tangenta i normala u točki na kružnici

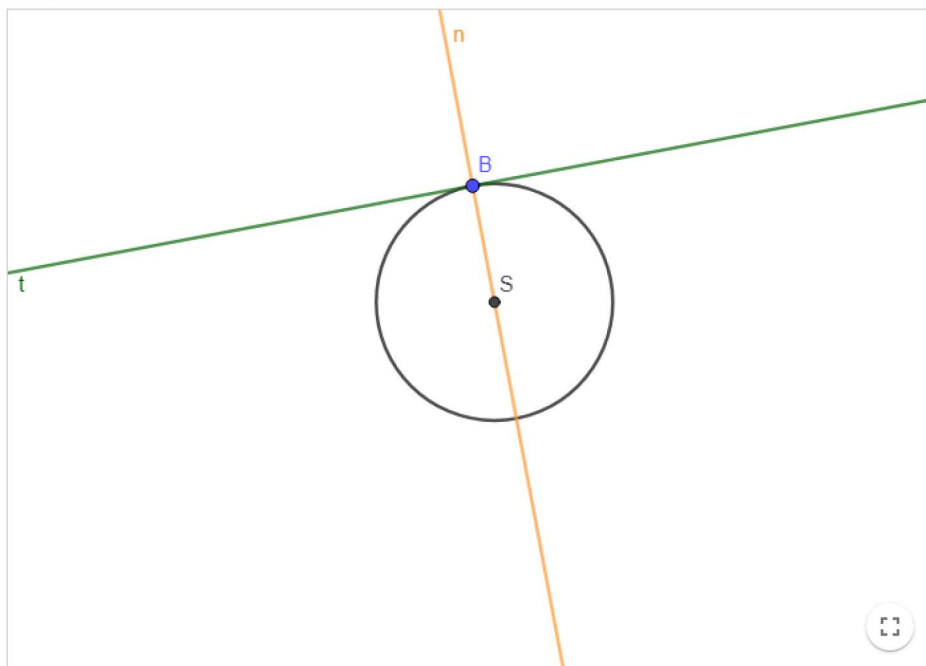
Normala na kružnicu je pravac koji prolazi diralištem tangente i okomit je na nju. Za jednadžbu normale dovoljno je da znamo jednadžbu kružnice i koordinate točke  $T(x_1, y_1)$  na kružnici. Tada jednadžba glasi

$$y - q = \frac{y_1 - q}{x_1 - p} (x - p).$$

Ukoliko znamo jednadžbu normale onda znamo koeficijent smjera tangente, jer je po definiciji normala pravac koji je okomit na tangentu, pa za koeficijent smjera tangente vrijedi da je on jednak recipročnoj i negativnoj vrijednosti koeficijenta smjera normale. Tada jednadžba tangente koja prolazi točkom  $T(x_1, y_1)$  na kružnici glasi:

$$y - y_1 = -\frac{x_1 - p}{y_1 - q} (x - p).$$

#### Tangenta i normala



Na gornjoj slici je prikazana normala i tangenta. Uočavate li još jedno svojstvo normale koje nismo spomenuli?

Ukoliko uočavate napišite svoj odgovor ovdje

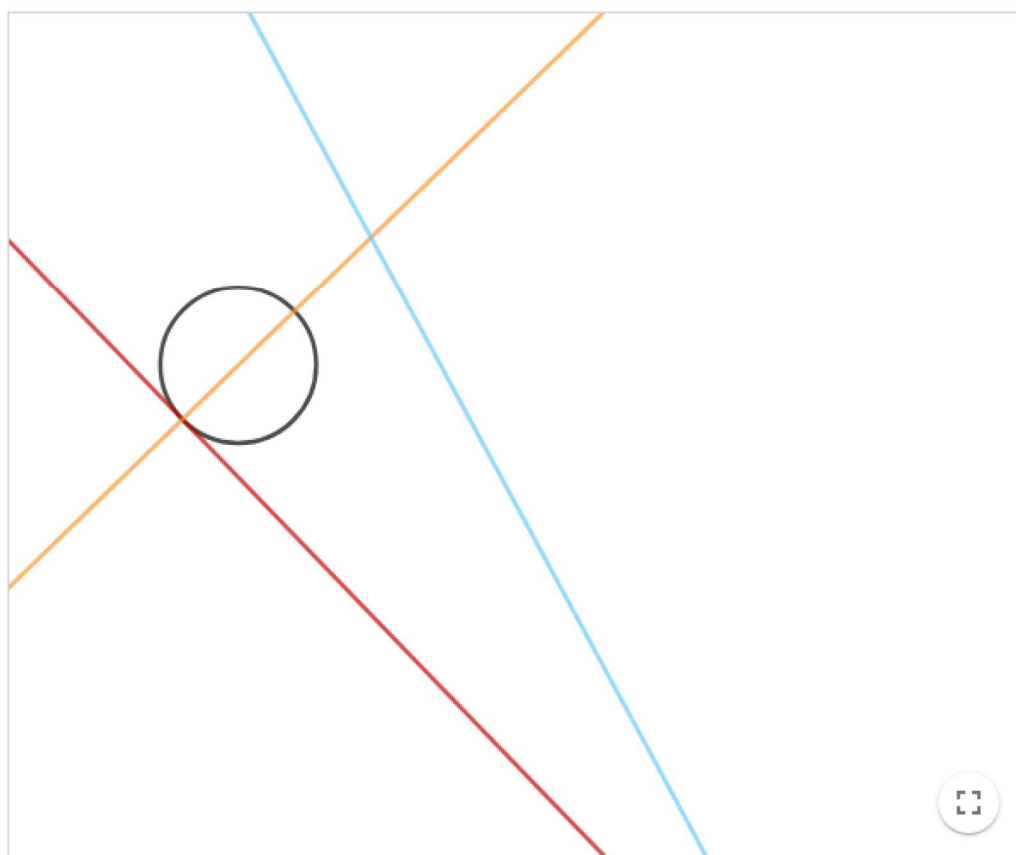
Aa  $\pi$

Upišite svoj odgovor ovdje ...

PROVJERITE SVOJ ODGOVOR

## Zadaci

Sada možete provjeriti koliko ste savladali ovu cjelinu.



### Zadatak 1. a)

Pažljivo promotrite sliku te napišite nazive pravaca. Odgovor dajte u obliku boja-ime pravca, te krenite od crvene boje, a završite s plavom. Ukoliko neki pravac nema ime napisite boja-nema ime.

Aa  $\pi$  Upišite svoj odgovor ovdje ...

PROVJERITE SVOJ ODGOVOR

### b)

Koji od navedenih pravaca nije nacrtan na slici?

Uključite sve točne odgovore

A  tangenta

B  normala

C  sekanta

PROVJERI MOJE ODGOVORE (3)

### Zadatak 2.

U kojem su međusobnom odnosu dani pravac i dana kružnica:  $x + 3y + 10 = 0$ ,  $x^2 + y^2 = 1$ .

Aa  $\pi$  Upišite svoj odgovor ovdje ...

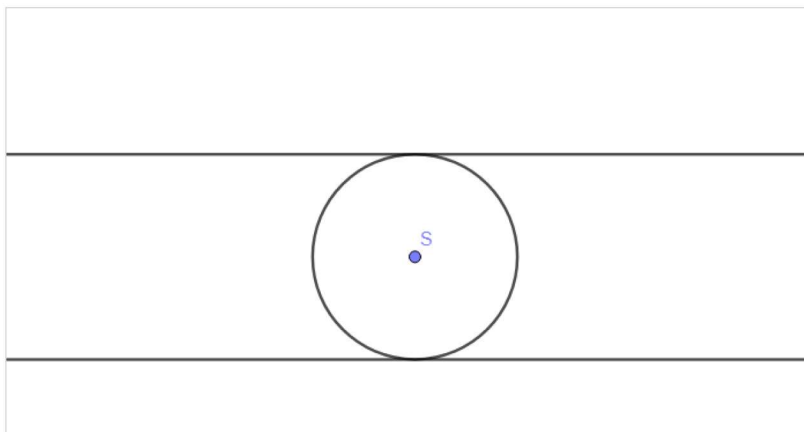
PROVJERITE SVOJ ODGOVOR

### Zadatak 3.

Neka je dana kružnica sa središtem u točki  $S(3,4)$  i radijusa  $r$ . Na kružnicu su povučene dvije tangente kao na slici. Koliki je radijus kružnice ako je udaljenost tih dviju tangenta jednaka 9?

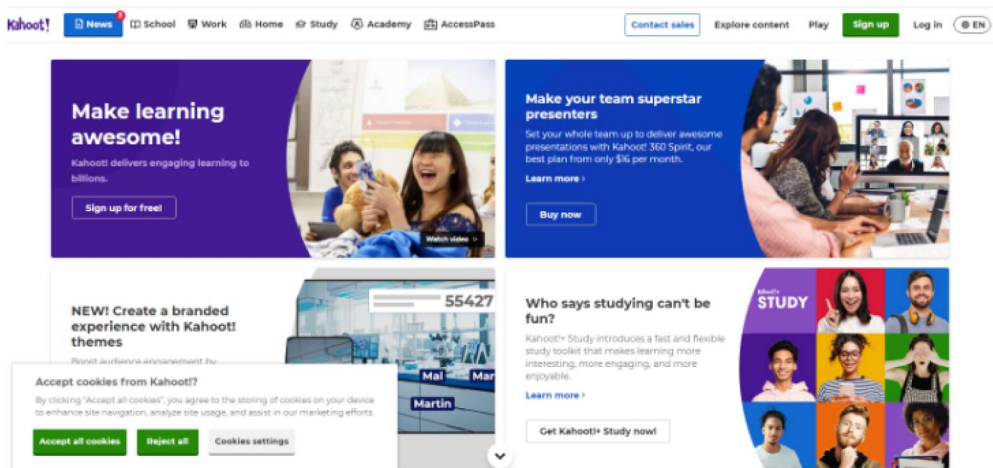
Aa  $\pi$  Upišite svoj odgovor ovdje ...

PROVJERITE SVOJ ODGOVOR



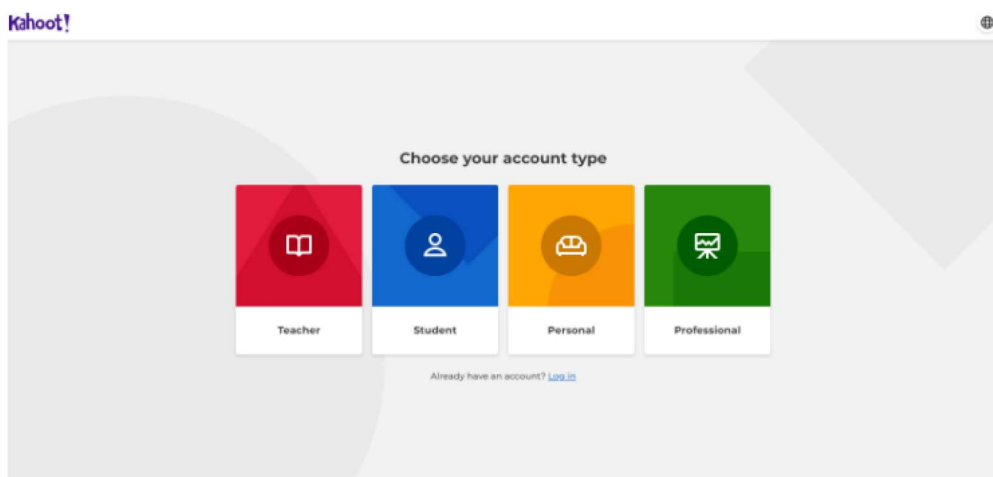
## 5.2 Kahoot

Kahoot je online digitalni alat namijenjen izradi interaktivnih kvizova. Ukoliko koristite ovaj alat u svojoj nastavi, osim što potičete upotrebu tehnologije ovim alatom potičete i natjecateljski duh kod učenika. Prednost mu je i ta što je vrlo jednostavan za korištenje, a mogu se pisati i matematičke formule. Za sam početak kreiranja kvizova potrebno je pristupiti sljedećoj stranici <https://kahoot.com/>.



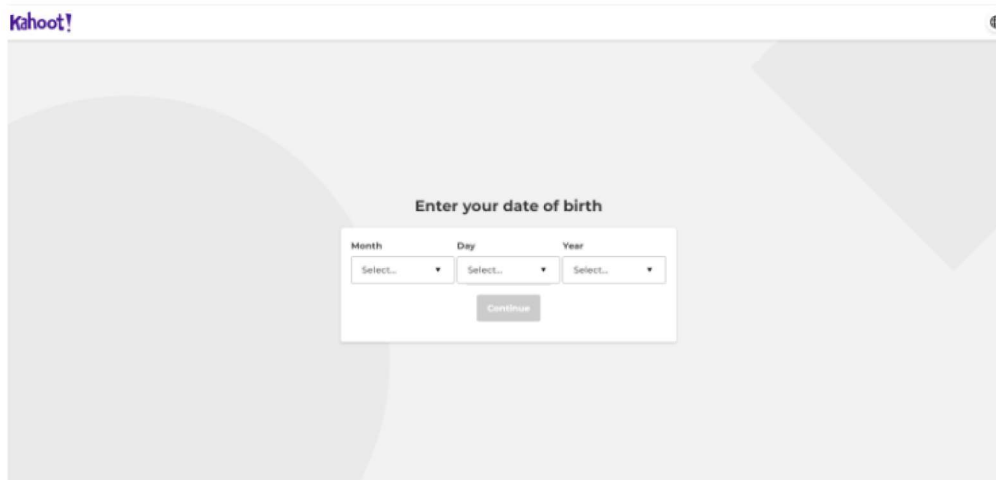
Slika 16: Naslovna stranica Kahoot-a  
(Izvor:<https://kahoot.com/>)

Nakon toga potrebno se prijaviti (Log in) ili registrirati (Sign up). Ukoliko ste novi korisnik klikom na "Sign up" otvorit će Vam se sljedeće



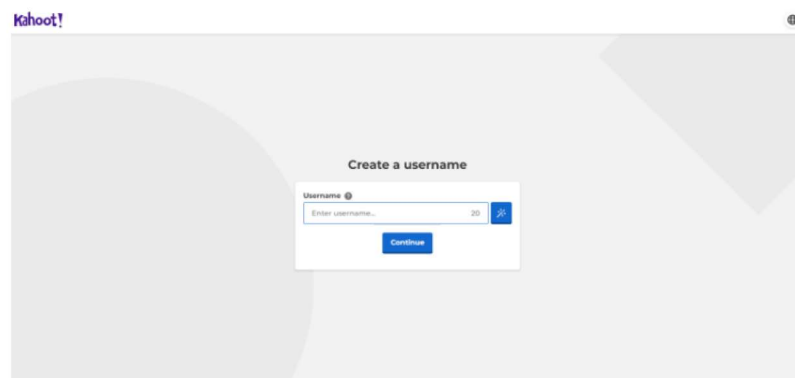
Slika 17: Vrste korisničkog računa

Ovisno o tome tko ste ili za što ćete koristiti Kahoot birate jedno od gore ponuđenog na slici. Zatim morate unijeti svoj datum i godinu rođenja. Nakon toga slijedi odabir nadimka koji može sadržavati najviše 20 znakova. No, ukoliko ne možete sami osmisliti svoj nadimak možete kliknuti desno na magični štapić te ćete odmah

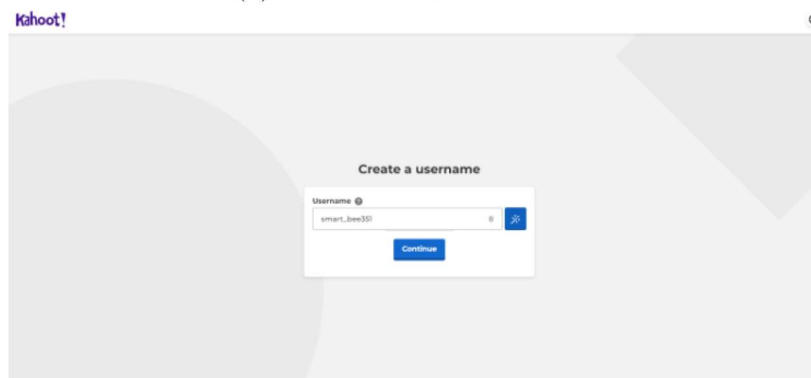


Slika 18: Odabir datuma i godine rođenja

dobiti ponuđeni nadimak. Ukoliko Vam se ponuđeni nadimak ne sviđa dovoljno je opet kliknuti na štapić te će se izbaciti drugi.



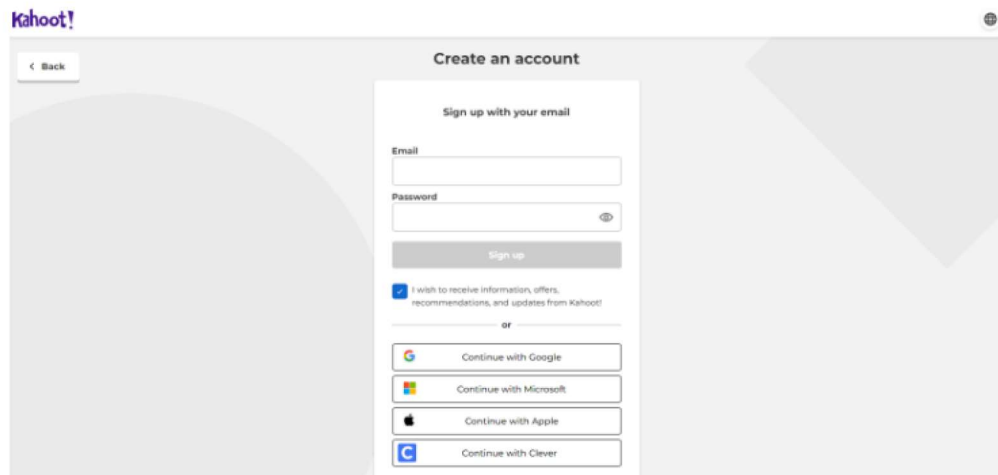
(a) Prozor za izradu nadimka



(b) Odabir nadimka pomoću magičnog štapića

Slika 19: Odabir nadimka

Kada ste zadovoljni s ponuđenim nadimkom kliknite na "Continue". Sada je još preostalo da izradite račun. Možete birati između nekoliko opcija među kojima je prijava pomoću google računa ili klasično unošenjem e-mail adrese i lozinke.



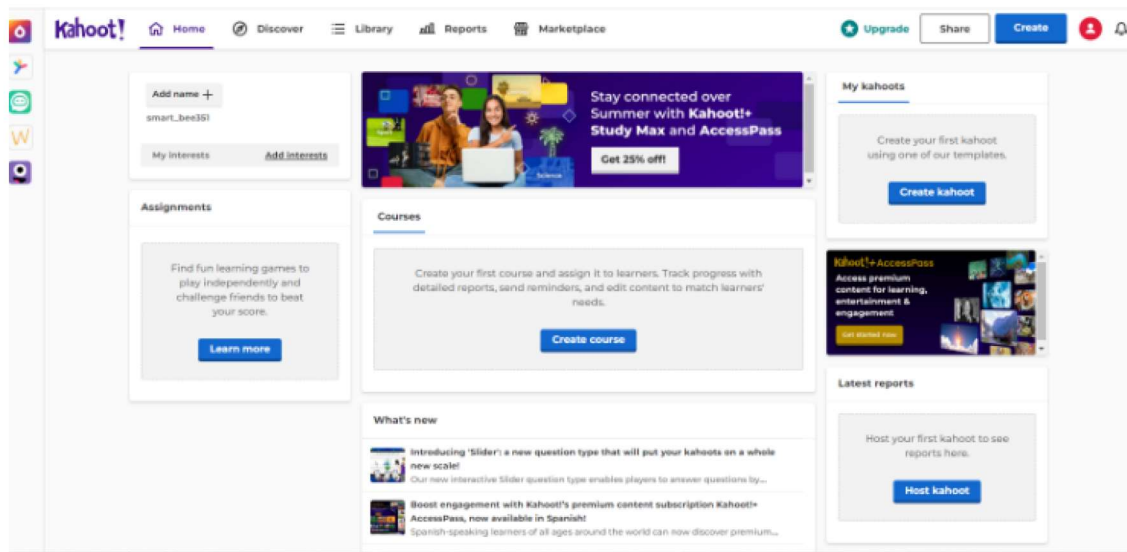
Slika 20: Izrada računa

Nakon registracije potrebno je odabrati verziju Kahoot-a. Možete birati između besplatne verzije koja se zove Basic i onih koje se plaćaju. Jedina mana besplatne verzije je broj sudionika kviza koji je ograničen na 20 ljudi što bi moglo stvarati problem u nastavi ukoliko neko razredno odjeljenje ima više od 20 učenika.

Compare plans		Basic	Kahoot!+ Study	Kahoot!+ Study Premium	Kahoot!+ Study Max
		Free	\$3	\$6	\$9 <del>\$6.75</del>
			per user per month (\$36 billed annually)	per user per month (\$72 billed annually)	per user per month (\$108 billed annually)
<b>Features</b>					
<b>Game experience</b>					
Live kahoots	ⓘ	✓	✓	✓	✓
Assign kahoots	ⓘ	✓	✓	✓	✓
Study groups	ⓘ	1 trial group	3	5	10
Study modes for kahoots	ⓘ	✓	✓	✓	✓
Study modes for courses	ⓘ	✗	✓	✓	✓
Team mode	ⓘ	Shared devices only	5 teams	10 teams	10 teams
<b>New!</b> Customize teams	ⓘ	✗	✗	✗	✓
Players up to	ⓘ	20	50	100	200
		Continue for free	Buy now	Buy now	Buy now

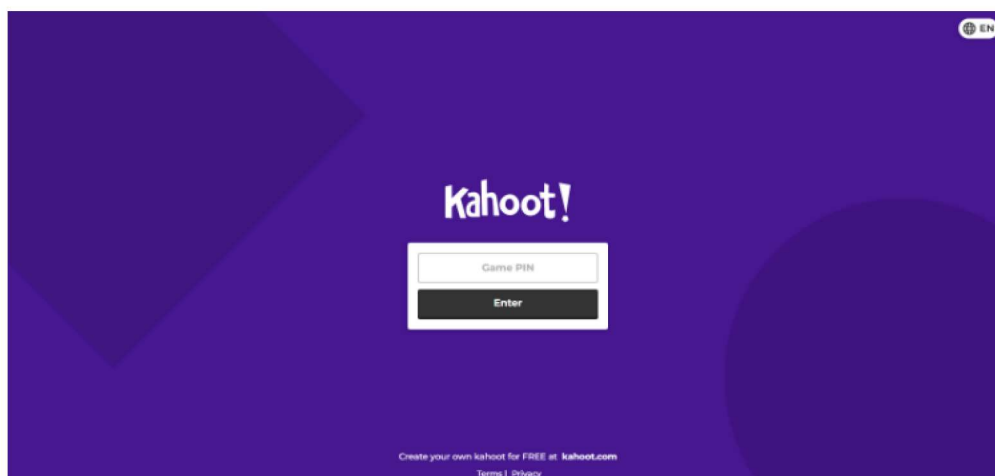
Slika 21: Sve verzije Kahoot-a

Nakon što odaberete verziju otvorit će Vam se sljedeći prozor



Slika 22: Profilna stranica

Klikom na "Create" otvaraju se dvije mogućnosti: Kahoot i Course. Klikom na Kahoot krećete u izradu kviza. U besplatnoj verziji postoje dvije vrste pitanja "Točno Netočno" i više ponuđenih odgovora, a unutar samog kviza mogu se dodati slajdovi sa slikom, tekstom ili videom. U svakome trenutku možete pogledati što ste napravili klikom na "preview". Za svako pitanje sami određujete vrijeme koje će učenici imati za njegovo rješavanje, a birate u intervalu od 5 sekundi pa sve do 4 minute. Također, pitanje ne mora biti ono klasično već može sadržavati sliku te se mogu dodavati i matematičke formule. Kada ste gotovi dovoljno je kliknuti na "save". Kako bi učenici mogli sudjelovati u kvizu moraju posjedovati mobilni uređaj ili tablet te pristup internetu. Zatim pristupaju stranici <https://kahoot.it/> za koju im nije potreban korisnički račun već samo pin koji se prikaže nastavniku pri pokretanju kviza. Na kraju kviza budu prikazana najbolja tri učenika.



Slika 23: Pristupna stranica za sudjelovanje u Kahoot kvizu

## Primjer 5.2. Kahoot kviz na temu Skupovi

Razred: 5.

Tema: Prirodni brojevi

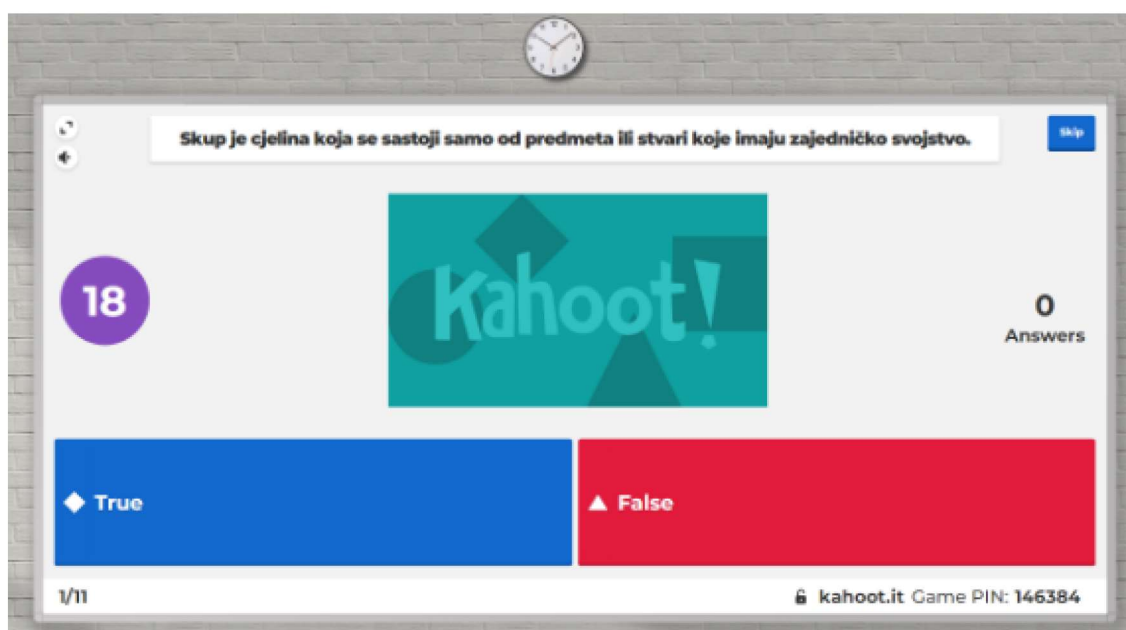
Podtema: Skupovi

Ishodi učenja: B.5.2. Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema.

- Oblikuje i prikazuje skupove (brojeva, podataka) i njihove odnose (presjek, unija).
- Određuje broj elemenata skupa. Prepoznaje prazan skup.
- Koristi se matematičkim simbolima u zapisu skupova i njihovih odnosa.
- Primjenjuje stečeno znanje o skupovima.

Ovaj kviz namjenjen je završnom djelu sata kao metoda provjere ostvarenosti ishoda. No, može se koristiti i na početku sata kao ponavljanje. Kako bi učenici mogli uspješno riješiti ovaj kviz potrebno je poznavati sljedeće:

- Definiciju skupa,
- Načini zadavanja skupa,
- Označavanje skupova,
- Pojam praznog skupa,
- Poznavanje simbola za presjek i uniju,
- Određivanje presjeka skupova.





Skupove zadajemo na

18

Kahoot!

0 Answers

▲ više načina

◆ samo jedan način

● na točno dva načina

2/11

kahoot.it Game PIN: 146384

Izbaci uljeza.

18

Kahoot!

0 Answers

▲ A

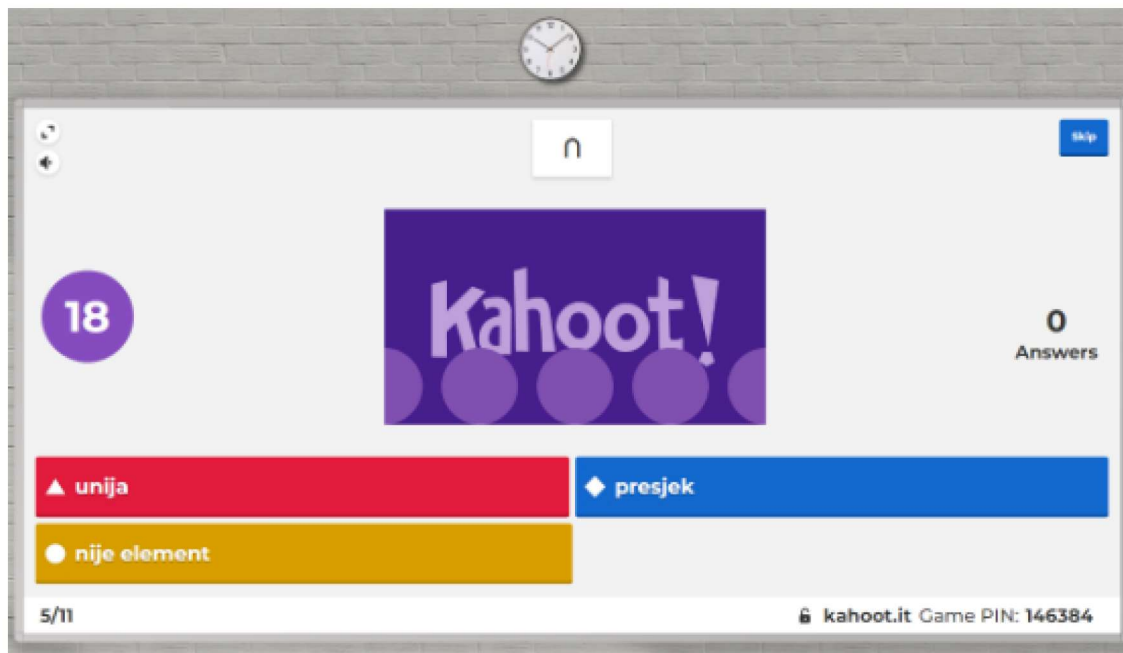
◆ B

● 2

■ L

3/11

kahoot.it Game PIN: 146384



18

Koje zagrade nam trebaju kako bi napisali skup?

Kahoot!

0 Answers

▲ {}

◆ {}

● {}

7/11 kahoot.it Game PIN: 146384

18

Elementi skupova su samo brojevi.

Kahoot!

0 Answers

◆ True

▲ False

8/11 kahoot.it Game PIN: 146384

🕒

Koje točke ne pripadaju dužini AB?

skip

17

0  
Answers

▲ G i C	◆ G i D
● E i F	■ A i B

9/11 kahoot.it Game PIN: 146384

🕒

Simbol za uniju dvaju skupova je sličan kojem slovu

skip

18

0  
Answers

▲ U	◆ B
● N	■ E

10/11 kahoot.it Game PIN: 146384

A screenshot of a Kahoot! quiz question. At the top center, a clock icon shows the time. The question text is  $A = \{ a, 2 \}, B = \{ a, b \} . A \cap B = \{ \}$ . A blue 'skip' button is in the top right. On the left, a purple circle contains the number '26'. In the center, there is a purple graphic with the Kahoot! logo and two triangles. On the right, it says '0 Answers'. At the bottom, there are two large buttons: a blue one labeled 'True' with a diamond icon and a red one labeled 'False' with a triangle icon. The bottom left shows '11/11' and the bottom right shows 'kahoot.it Game PIN: 146384'.

⌂  
⬆

$A = \{ a, 2 \}, B = \{ a, b \} . A \cap B = \{ \}$  skip

26

0  
Answers

◆ True ▲ False

11/11 kahoot.it Game PIN: 146384

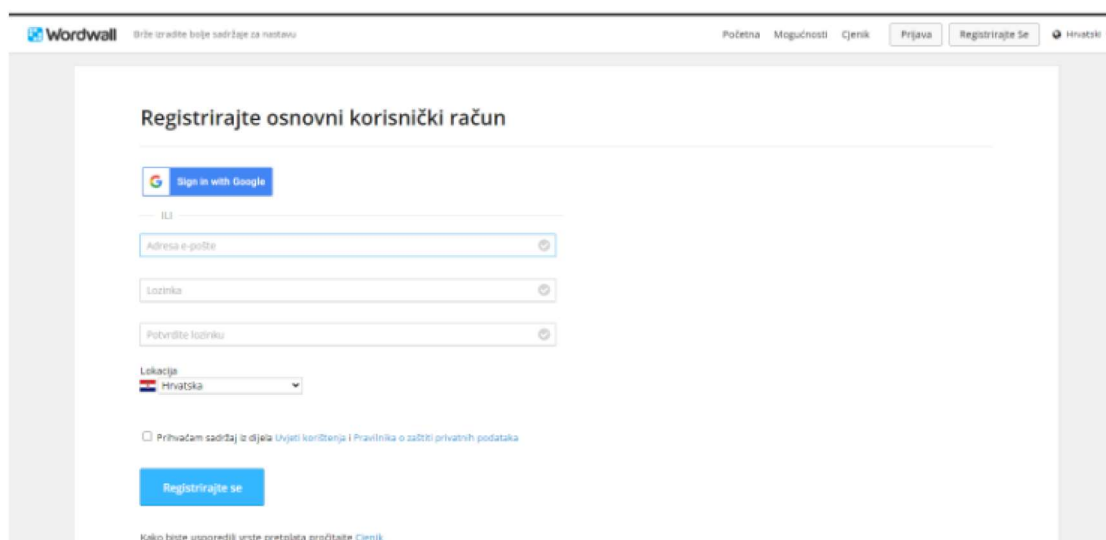
## 5.3 Wordwall

Wordwall je online alat koji nastavnicima omogućuje izradu različitih digitalnih sadržaja kojima mogu unaprijediti svoju nastavu. Za sam početak rada potrebno je pristupiti sljedećoj stranici <https://wordwall.net/hr>.



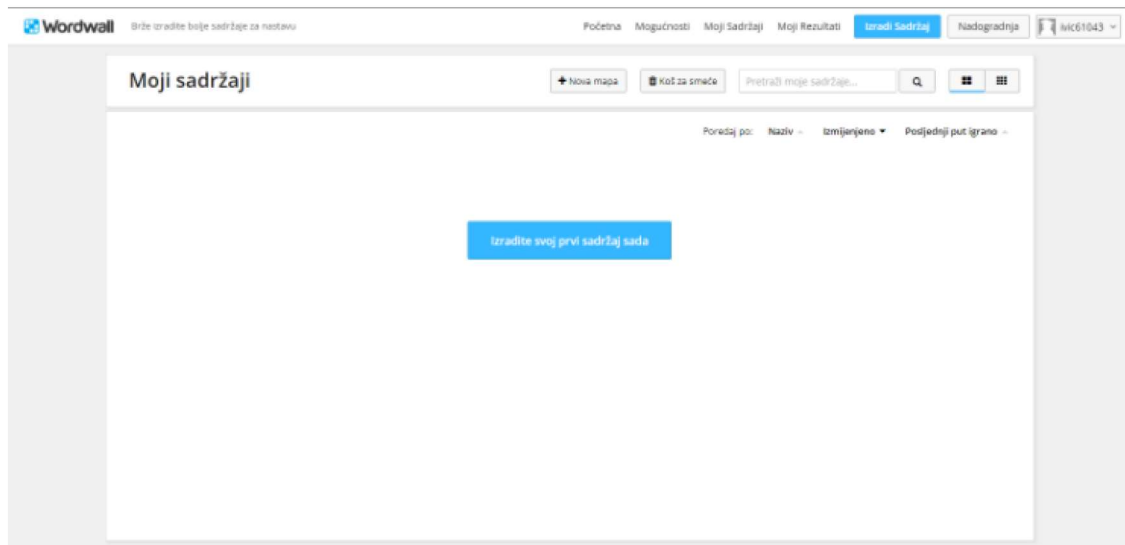
Slika 24: Početna stranica  
(Izvor: <https://wordwall.net/hr>.)

Kako bi mogli izrađivati svoje digitalne sadržaje potrebno se prijaviti, ukoliko ste postojeći korisnik ili registrirati ukoliko ste novi. Registracija se može izvršiti na dva načina putem google računa ili klasično unošenjem e-mail adrese i kreiranjem lozinke.



Slika 25: Registracija

Nakon toga spremni ste kreirati svoje vlastite digitalne sadržaje.



Slika 26: Profilna stranica

Važno je napomenuti da postoje tri različite verzije, osnovna koja je besplatna te standardna i profesionalna koje se plaćaju. Samom registracijom dobivate osnovnu, odnosno besplatnu verziju, a do ostalih možete doći nadogradnjom svog računa. Ovisno o cijeni svaka od verzija nudi različite mogućnosti koje možete vidjeti na sljedećoj slici

	<b>Osnovni</b> Besplatni	<b>Standardni</b> kn 26 / mjesečno HRK	<b>Profesionalni</b> kn 39 / mjesečno HRK
Interaktivni sadržaji	18 ▲	18 ▲	33 ▲
	Kviz, Spoji parove, Razvrstaj u grupe, Riječi koja nedostaje, Čudnovati kotač, Slika s oznakama, Igra pamćenja (Memory), Otvaranje okvira, Točno ili netočno, Pronađi par, Anagram, Izmiješane kartice, Razmjesti, Uхвати krticu, Televizijski kviz, Baloni, Labirint, Zrakoplov		Svi osnovni, plus Križaljka, Vješala, Osmosmjerka, Flash kartice, Poredak, Razvrstaj, Raspletaj, Tajanstvena slika, Kartice za okretanje, Kviz pobjede i poraza, Pokretna traka, Magneti, Raspored sjedenja, Više ili niže, Matematički generator
Nastavni listići	0 ▼	16 ▼	16 ▼
Broj sadržaja koje možete izraditi	5	Neograničeno	Neograničeno
		<b>Nadogradnja</b>	<b>Nadogradnja</b>

Slika 27: Verzije Wordwall računa

No, bez obzira koju verziju odabrali imat ćete pristup sljedećem:

- izradi sadržaja pomoću predložaka,
- temi i postavkama,
- učeničkim zadacima,
- izmjeni predložaka,
- dijeljenju s učiteljima,
- uređivanje bilo koje aktivnosti,
- postavljanju na internetsku stranicu.

Kada u besplatnoj verziji dostignete maksimum izrađenih digitalnih sadržaja uvijek možete napraviti još na način da izradite kopiju nekog od svojih sadržaja te ju prilagodite. Tako možete izbjeći prelazak na verziju koja se plaća. Kao prednost valja spomenuti i to da stranica nudi mogućnost izbora nekoliko jezika među kojima je i Hrvatski jezik što dodatno olakšava rad.

### **Primjer 5.3.** Kviz "Točno ili netočno"

Razred: 8.

Tema: Pravac u pravokutnome koordinatnom sustavu

Podtema: Jednadžba pravca u pravokutnome koordinatnom sustavu

Ishodi učenja: MAT OŠ D.8.3. Prikazuje pravce i analizira međusobne položaje u pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini.

- Čita i tumači koeficijente jednadžbe pravca.
- Određuje jednadžbu pravca određenog dvjema točkama ili grafičkim prikazom.

Ovaj kviz namijenjen je završnom djelu sata u kojem se treba kod učenika provjeriti ostvarenost gore navedenih ishoda. Također, ovaj kviz može se koristiti na početku sljedećeg sata kao ponavljanje gradiva i prilika da se još jednom pojasni sve što nije jasno. Kako bi učenici mogli uspješno riješiti ovaj kviz potrebno je poznavati sljedeće:

- Pojmove koeficijent smjera pravca i odsječak pravca na  $y$  osi,
- Pravilo koje povezuje odnos pravaca i njihove koeficijente,
- Standardni zapis jednadžbe pravca i nazive pojedinih elemenata,
- Definiciju pravca,
- Što znači da pravac prolazi točkom, odnosno da neka točka pripada pravcu?,
- Uređeni par točaka u ravnini,



- Interpretacija rješenja jednadžbi.

Za samo pokretanje kviza dovoljno je otići na "Moji sadržaji" te kliknuti na željeni digitalni sadržaj. Klikom na "Započni" pokreće se kviz sa sljedećim pitanjima:



0:33 ✓ 0

Pravac zadan  
jednadžbom  $y = 2x + 3$   
prolazi točkom  $A(-1, 1)$ .

Točno Netočno

☰ 🔊 🗨️

Jednadžba pravca Podijeli

0:23 ✓ 0

Točka  $B(4, 0)$  pripada  
grafu funkcije  $y = 2x - 5$ .

Točno Netočno

☰ 🔊 🗨️

Jednadžba pravca Podijeli

0:52

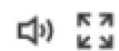
KRENI!

✓ 0

Koeficijent **a**  
u jednadžbi  $y = ax + b$   
nazivamo koeficijent  
smjera pravca.

Točno

Netočno



Jednadžba pravca

Podijeli

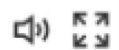
0:42

✓ 0

Koeficijent **b** u  
jednadžbi  $y =$   
 $ax + b$  određuje  
smjer pravca.

Točno

Netočno



Jednadžba pravca

Podijeli

## Zaključak

S razvojem tehnologije mijenja se i način izvođenja nastave u školama. Škole se sve brže opremaju novom i modernom tehnologijom kako bi učenicima sve bilo dostupno i kako bi lakše savladavali gradivo. Takva promjena pred nastavnike stavlja izazov. Naime, kako bi oni mogli koristiti neko pomagalo oni se najprije moraju naučiti njime služiti. To je ponekad proces koji traje s obzirom da neki nastavnici nisu skloni prihvaćanju promjena. No, radi same dobrobiti učenika ponekad naše stavove trebamo staviti postrani. Kao i sve korištenje bilo kojeg pomagala ima svoje prednosti i nedostatke. Nastavnik je taj koji mora sam odlučiti kada će mu korištenje nekog pomagala unaprijediti izvođenje nastave. Kako bi mogao donijeti tu odluku osim što nastavnik mora poznavati kurikulum svog predmeta on mora poznavati i svoje učenike. Ukoliko u pravom trenutku iskoristi pravo pomagalo to može rezultirati razbijanju brojnih miskoncepcija kod učenika. Odabir takvog načina nastave, umjesto klasičnog nikako nije lagano. Korištenje nekog alata zahtjeva i dodatnu pripremu, a nastavnici trebaju biti spremni na moguće tehničke pogreške poput problema s internetom. No, sav trud se isplati ako će na taj način učenici steći trajno znanje što je i krajnji cilj nastave.

## Literatura

- [1] I. Novak, *Informacijsko komunikacijske tehnologije u nastavi matematike*, Sveučilište u Zagrebu, Učiteljski fakultet, Diplomski rad, 2019.
- [2] A. Peko, *Matematika i dijete*, Zbornik radova međunarodnog znanstvenog kolokvija Matematika i dijete, (urednik: M. Pavleković), Učiteljski fakultet u Osijeku, 2007, 355–361.
- [3] P. Šimeta, *Primjena tehnologije u nastavi matematike*, PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, Diplomski rad, 2021.
- [4] I. Vuić, *Kalkulator u nastavi matematike*, Sveučilište J. J.J. Strossmayera u Osijeku , Odjel za matematiku, Diplomski rad, 2014.
- [5] Kurikulum nastavnog predmeta Matematika,  
[https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html)
- [6] Kurikulum međupredmetne teme Upotreba informacijske i kuminkacijske tehnologije,  
[https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_150.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_150.html)
- [7] *Povijest*,  
<http://web.studenti.math.pmf.unizg.hr/~bozana/povijest.html>

## Sažetak

Sam početak ovog rada donosi kratki povijesni pregled pomagala koja su pridonijela lakšem razumijevanju matematike. Među njima navode se i ona koja se i dan danas koriste. Nakon toga, osvrćemo se na kurikulum međupredmetne teme Upotreba informacijske i komunikacijske tehnologije. Navode se njegove sastavnice i ciljevi. Zatim se kreće u veliku potragu za riječi "tehnologija" u kurikulumu nastavnog predmeta Matematike. U sklopu podnaslova Tehnologija u nastavi matematike daju se smjernice kada je ispravno koristiti računalo i kalkulator u nastavi matematike. Također se daju i odgovori na pitanja zašto, kako i gdje je potrebno koristiti računalo, ali i kalkulator u nastavi te se to potkrepljuje primjerom. Na samome kraju dane su recenzije tri često korištena online alata u nastavi matematike popraćene njihovim primjenama u nastavi.

**Ključne riječi:** matematičko pomagalo, tehnologija, računalo, kalkulator, GeoGebra, Kahoot, Wordwall

# Title: ICT and mathematics teaching

## Summary

The very beginning of this paper provides a brief historical overview of aids that contributed to an easier understanding of mathematics. Among them are those that are still used today. After that, we look at the curriculum of the cross-curricular topic Use of information and communication technology. Its components and goals are listed. Then he embarks on a great search for the words "technology" in the curriculum of the Mathematics subject. As part of the subtitle Technology in mathematics teaching, guidelines are given when it is correct to use computers and calculators in mathematics teaching. Answers are also given to the questions why, how and where it is necessary to use a computer, as well as a calculator in class, and this is supported by an example. At the very end are given reviews of three frequently used online tools in mathematics teaching, accompanied by their applications in teaching.

**Keywords:** mathematical aid, technology, computer, calculator, GeoGebra, Kahoot, Wordwall

## Životopis

Rođena sam 10. rujna 1996. godine u Osijeku. Pohadala sam osnovnu školu Ivana Kukuljevića u Belišću, nakon čijeg završetka upisujem Srednju školu u Valpovu, smjer Opća gimnazija. 2016. godine upisujem Sveučilišni integrirani studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Dvije godine nakon upisa prebacujem se na Sveučilišni preddiplomski studij matematike isto na Odjelu za matematiku kojeg završavam 2020. godine. Iste godine, nakon završenog preddiplomskog smjera upisujem Diplomski sveučilišni nastavnički studij matematike i informatike na Odjelu za matematiku u Osijeku. Od 2020. volontiram u udruzi Prijateljstvo u Feričancima. U sklopu udruge ove godine održala sam dvodnevnu informatičku radionicu za polaznike predškolskog programa dječjeg vrtića Mali princ Feričanci.